

Une nouvelle dérivation des transformations de Lorentz.

Comme l'a remarqué Lévy-Leblond,¹ la liberté est très faible dans le choix d'un groupe de relativité, de sorte que le groupe de Poincaré constitue une solution presque unique au problème². Dans son article original, Einstein a dérivé la transformation de Lorentz à partir des hypothèses successives (parfois implicites) suivantes : (i) linéarité, (ii) invariance de c , la vitesse de la lumière dans le vide, (iii) existence d'une loi de composition, (iv) existence d'un élément neutre, et (v) invariance par réflexion.

On peut cependant montrer que le postulat de l'invariance d'une certaine vitesse absolue n'est pas nécessaire à la construction de la théorie de la relativité restreinte. En effet, Lévy-Leblond¹ a démontré que la transformation de Lorentz peut être obtenue à partir de six contraintes *successives* : {1} homogénéité de l'espace-temps (traduite par la linéarité de la transformation des coordonnées), {2} isotropie de l'espace-temps (traduite par l'invariance par réflexion), {3} structure de groupe (c'est-à-dire {3.1} existence d'un élément neutre, {3.2} d'une transformation inverse, et {3.3} d'une loi de composition produisant une nouvelle transformation appartenant au groupe, autrement dit interne), et {4} la condition de causalité. Le dernier axiome du groupe — l'associativité — est en fait automatique dans ce contexte et n'impose aucune contrainte supplémentaire.

En réalité, cet ensemble d'hypothèses reste surdéterminé pour dériver la transformation de Lorentz. Nous allons en effet montrer ci-après que la transformation de Lorentz peut être obtenue à partir *des seules hypothèses* {a} *linéarité*, {b} *loi de composition interne*, et {c} *invariance par réflexion*. Toutes les autres hypothèses — en particulier le postulat de l'existence d'une transformation inverse appartenant au groupe — peuvent être *dérivées comme conséquences* de ces contraintes purement mathématiques. L'importance de ce résultat, notamment en ce qui concerne la relativité d'échelle, est que nous n'avons pas besoin de postuler une loi de groupe complète pour obtenir le comportement lorentzien : l'hypothèse d'une structure de semi-groupe suffit. Partons d'une transformation linéaire des coordonnées : (Voir la démonstration de ces équations par Jean-Marc Lévy-Leblond, équations (8a) et (8b), qui se sert de l'homogénéité de l'espace-temps pour les obtenir. Pour Laurent Nottale, ces équations apparaissent sans hypothèse puisqu'elles correspondent au choix le plus simple : la linéarité.)

$$x' = a(v)x - b(v)t, \quad (1a)$$

$$t' = \alpha(v)t - \beta(v)x. \quad (1b)$$

Dans ces équations, et tout au long de cette section, les coordonnées x et t ne désignent pas *a priori* des longueurs et des durées, mais peuvent représenter n'importe quelles variables possédant les propriétés mathématiques considérées. L'équation (1) peut s'écrire sous la forme $x' = a(v)[x - (b/a)t]$. Nous sommes libres de *définir* le paramètre « vitesse » v par $v = b/a$ (voir la démonstration de Jean-Marc Lévy-Leblond, équation (9), pour l'identification de v avec b/a). Lorsque la transformation décrit des lois de mouvement, ce v correspond bien à la vitesse physique usuelle ; lorsque elle décrit des lois d'échelle, v représente l'état d'échelle ou la « vitesse d'échelle ». Ainsi, sans perte de généralité, la seule hypothèse de linéarité conduit à la forme générale

$$x' = \gamma(v)[x - vt], \quad (2a)$$

$$t' = \gamma(v)[A(v)t - B(v)x], \quad (2b)$$

où $\gamma(v)$ désigne désormais $a(v)$, et où A et B sont de nouvelles fonctions de v .
 Appliquons maintenant deux transformations successives de la forme (2) :

$$x' = \gamma(u)[x - ut], \quad (3a)$$

$$t' = \gamma(u)[A(u)t - B(u)x], \quad (3b)$$

$$x'' = \gamma(v)[x' - vt'], \quad (3c)$$

$$t'' = \gamma(v)[A(v)t' - B(v)x']. \quad (3d)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(u)\gamma(v)(x - ut) - v[A(u)t - B(u)x] \\ t'' &= \gamma(v)A(v)\gamma(u)[A(u)t - B(u)x] - B(v)\gamma(u)[x - ut] \\ &= \gamma(u)\gamma(v)[1 + B(u)v] \left[x - \frac{u + A(u)v}{1 + B(u)v}t \right] \end{aligned}$$

On obtient ainsi la transformation

$$x'' = \gamma(u)\gamma(v)[1 + B(u)v] \left[x - \frac{u + A(u)v}{1 + B(u)v}t \right], \quad (4a)$$

$$t'' = \gamma(u)\gamma(v)[A(u)A(v) + B(v)u] \left[t - \frac{A(v)B(u) + B(v)}{A(u)A(v) + B(v)u}x \right]. \quad (4b)$$

Le principe de relativité nous dit alors que la transformation composée (4) conserve la même forme que la transformation initiale (2), en fonction d'une vitesse composée w donnée par le coefficient de t dans l'équation (4a). C'est à dire, on doit aussi avoir :

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(w)[x - wt], \\ t'' &= \gamma(w)[A(w)t - B(w)x]. \end{aligned}$$

Nous avons quatre conditions :

$$w = \frac{u + A(u)v}{1 + B(u)v}, \quad (5a)$$

$$\gamma(w) = \gamma(u)\gamma(v)[1 + B(u)v], \quad (5b)$$

$$\gamma(w)A(w) = \gamma(u)\gamma(v)[A(u)A(v) + B(v)u], \quad (5c)$$

$$\frac{B(w)}{A(w)} = \frac{A(v)B(u) + B(v)}{A(u)A(v) + B(v)u}. \quad (5d)$$

Notre troisième postulat est l'invariance par réflexion. Il traduit le fait que le choix de l'orientation de l'axe x (et x') est totalement arbitraire et doit être indistinguable du choix alternatif $(-x, -x')$. Avec ce nouveau choix, la transformation (3) devient

$$\begin{aligned} -x' &= \gamma(u')(-x - u't), \\ t' &= \gamma(u')[A(u')t + B(u')x] \end{aligned}$$

en fonction de la valeur u' prise par la vitesse relative dans la nouvelle orientation. L'exigence que les deux orientations soient indistinguables impose $u' = -u$. (Voir la démonstration de Jean-Marc Lévy-Leblond, équation (14), qui utilise l'isotropie de l'espace (invariance par réflexion)). Cela conduit à des relations de parité¹ pour les trois fonctions inconnues γ , A et B :

$$\gamma(-v) = \gamma(v), \quad A(-v) = A(v), \quad B(-v) = -B(v). \quad (6)$$

(et $B(0) = -B(0)$ donc $B(0) = 0$).

En combinant les équations (5a), (5b) et (5c), on obtient la relation : Je détaille un peu. On réécrit l'équation (5c) :

$$A(w) = \frac{\gamma(u)\gamma(v)[A(u)A(v) + B(v)u]}{\gamma(w)}$$

En remplaçant $\gamma(w)$ donné par l'équation (5b) :

$$A(w) = \frac{\gamma(u)\gamma(v)[A(u)A(v) + B(v)u]}{\gamma(u)\gamma(v)[1 + B(u)v]}$$

En simplifiant par $\gamma(u)\gamma(v)$ et en remplaçant w par sa valeur donnée par l'équation (5a) :

$$A\left[\frac{u + A(u)v}{1 + B(u)v}\right] = \frac{A(u)A(v) + B(v)u}{1 + B(u)v}. \quad (7)$$

En prenant $v = 0$ dans cette équation, on obtient (pour $v = 0$, $A(u) = A(u)A(0) + B(0)u$)

$$A(u)[1 - A(0)] = uB(0). \quad (8)$$

En prenant $u = 0$, on obtient seulement deux solutions possibles : $A(0) = 0$ ou $A(0) = 1$. Le premier cas donne $A(u) = uB(0)$. La condition $B(0) \neq 0$ est exclue par l'invariance par réflexion (6) ; il reste alors $A(u) = 0$. Mais l'équation (5d) devient $A(w) = B(w)u$, ce qui impose $B(w) = 0$: il s'agit d'un cas de dégénérescence complète ne laissant qu'une seule variable efficace puisque $t' = 0$ quel que soit u . Ce cas peut donc être écarté, puisque nous recherchons des transformations à deux variables. Nous sommes ainsi ramenés au cas $A(0) = 1$, qui implique $B(0) = 0$ et démontre par là même l'existence d'un élément neutre.

Prenons maintenant $v = -u$ dans l'équation (7), après avoir tenu compte de (6), et introduisons une nouvelle fonction paire $F(u) = A(u) - 1$, qui vérifie $F(0) = 0$. On obtient

$$2F(u) \frac{1 + F(u)/2}{1 - uB(u)} = F\left[\frac{uF(u)}{1 - uB(u)}\right] \quad (9)$$

Nous allons maintenant utiliser le fait que B et F sont des fonctions continues et que $B(0) = 0$. Cela implique qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que, dans l'intervalle $-\eta_0 < u < \eta_0$, les expressions $1 - uB$ et $1 + F/2$ restent bornées par $k_1 < 1 - uB(u) < k_2$ et $k_3 < 1 + F(u)/2 < k_4$, où k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des constantes strictement positives.

Donc, pour η_0 petit, l'équation (9) devient :

$$2F(u) = F[uF(u)]$$

C'est immédiat, il suffisait d'imaginer que l'on s'approche de $u = 0$ dans l'équation (7).

Soit alors $u_0/|F(u_0)| < \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$

On a $2F(u_0) = F[u_0F(u_0)]$

On pose $u_1 = u_0F(u_0)$, donc $u_1 \ll u_0$ puisque $F(u_0) \ll 1$

Donc $F(u_1) = 2F(u_0)$

Comme u_1 est plus petit que u_0 , on peut recommencer avec u_1 :

$2F(u_1) = F[u_1F(u_1)]$

On pose $u_2 = u_1F(u_1) = u_0F(u_0) \times 2F(u_0) = u_0F^2(u_0) \times 2$,

Donc $F(u_2) = 2F(u_1) = 2^2F(u_0)$

$2F(u_2) = F[u_2F(u_2)]$

On pose $u_3 = u_2 F(u_2) = u_0 F^2(u_0) \times 2 \times 2^2 F(u_0) = u_0 F^3(u_0) \times 2^3$,

$$\begin{aligned} F(u_3) &= 2F(u_2) = 2^3 F(u_0) \\ &\vdots \\ u_p &= u_0 F^P(u_0) \times 2^{(1+2+\dots+p-2+p-1)} \\ &= u_0 F^P(u_0) 2^{p(p-1)/2} \\ F(u_p) &= 2^P F(u_0) \end{aligned}$$

En prenant la valeur absolue des deux dernières égalité :

$$\begin{aligned} |u_p| &= |u_0| |F^P(u_0)| 2^{p(p-1)/2} \\ |F(u_p)| &= |F(u_0)| 2^P \end{aligned}$$

Pour u_0 donné, on pose que la fonction F prend la valeur $F(u_0) = F_0$.

On peut toujours écrire F_0 sous la forme $F_0 = 2^{-n}$ avec $n > 0$

car $F(u_0) < \varepsilon \ll 1$.

Ceci fixe la valeur de n à :

$$n = -\log_2 F_0$$

Avec cette notation, on a :

$$\begin{aligned} |u_p| &= |u_0| 2^{-np} |2^{p(p-1)/2}| \\ &= |u_0| 2^{-np} 2^{p(p-1)/2} \text{ car } 2^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ &= |u_0| 2^{p[(p-1)/2-n]} \\ |F(u_p)| &= 2^p 2^{-n} \\ &= 2^{p-n} \end{aligned}$$

Lorsque le rang p devient supérieur à n , on a :

$$|F(u_p)| = 2^{p-n} > 1 \gg \varepsilon$$

À noter que lorsque le rang p est égale à $\text{Int}[n]$, on a :

$$|F(u_p)| = 2^{\text{Int}[n]-n} > \frac{1}{2} \gg \varepsilon$$

Et, lorsque le rang p est inférieur à $2n + 1$, on a $\frac{p-1}{2} < n$ et :

$$|u_p| < |u_0|$$

Donc $\forall u_0 / |F(u_0)| < \varepsilon$, on peut toujours trouver une valeur u_p de u telle que l'on ait $|F(u_p)| > \varepsilon$ et en même temps $|u_p| < |u_0|$. Il suffit en fait que $n < p < 2n + 1$.

La fonction F ne peut donc pas tendre de façon continue vers 0. F doit par conséquent être constante, et comme $F(0) = 0$ on a $F(u) = 0 \forall u$.

Donc

$$A(u) = 1. \tag{10}$$

Par conséquent, l'équation (7) devient $B(u)v = B(v)u$, relation qui contraint finalement la fonction B à être de la forme

$$B(v) = \kappa v, \quad (11)$$

où κ est une constante. En effet, $B(u)/u = B(v)/v$ et comme $u \neq v$ on a $B(v) = C^{st}v$. À ce stade de notre démonstration, la loi de transformation des vitesses est déjà fixée sous la forme einsteinienne-lorentzienne (équation (5a)) :

$$w = \frac{u + v}{1 + \kappa uv}, \quad (12)$$

et il est facile de vérifier qu'une loi de groupe complète est obtenue, c'est-à-dire que l'existence d'une transformation identité et d'une transformation inverse est démontrée plutôt que postulée. Considérons maintenant le facteur γ . Il satisfait la condition (équation (5b)) :

$$\gamma\left(\frac{u + v}{1 + \kappa uv}\right) = \gamma(u)\gamma(v)(1 + \kappa uv). \quad (13)$$

Considérons maintenant le cas $u = -v$. L'équation (13) s'écrit alors $\gamma(0) = \gamma(v)\gamma(-v)(1 - \kappa v^2)$. Pour $v = 0$, elle devient $\gamma(0) = [\gamma(0)]^2$, ce qui implique $\gamma(0) = 1$, (ou $\gamma(0) = 0$ mais alors $x' = t' = 0$. On note que $\gamma(0) = 1$ et l'élément neutre est démontré) and we get (toujour pour $u = -v$) :

$$\gamma(v)\gamma(-v) = \frac{1}{1 - \kappa v^2}, \quad (14)$$

L'étape finale vers la transformation de Lorentz découle directement de l'invariance par réflexion, qui implique $\gamma(v) = \gamma(-v)$ (voir l'équation (6)) et fixe le facteur γ sous sa forme lorentzienne-einsteinienne :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa v^2}}. \quad (15)$$

Le cas $\kappa < 0$ conduit à un groupe non ordonné (l'application de deux vitesses positives successives peut donner une vitesse négative) et il ne reste que deux solutions physiques : les groupes de Galilée ($\kappa = 0$) et de Lorentz ($\kappa = c^{-2} > 0$). Trois de leurs propriétés (existence d'un élément neutre et d'un élément inverse, commutativité dans le cas d'une dimension d'espace) n'ont pas été postulées, mais déduites de nos axiomes initiaux.

Terminons cette section par un bref mais important commentaire. Nous avons montré que, une fois la linéarité supposée, la transformation de Lorentz peut être obtenue à partir des seuls postulats de loi de composition interne et d'invariance par réflexion. La linéarité n'est pas en soi une contrainte : elle correspond en effet au choix le plus simple possible (c'est-à-dire que, lorsqu'on recherche une transformation satisfaisant une loi donnée, on peut d'abord chercher une solution linéaire, puis envisager la non-linéarité seulement en cas d'échec, ou plus tard comme généralisation). Quant aux deux autres postulats, ils peuvent être vus comme une *traduction directe du principe de relativité galiléen*. En effet, l'hypothèse selon laquelle la transformation composée des coordonnées ($K \rightarrow K''$) et la transformation dans le repère inversé ($-K \rightarrow -K'$) doivent conserver la même forme que la transformation initiale ($K \rightarrow K'$) n'est rien d'autre qu'une application du principe de relativité galiléen (« les lois de la nature doivent conserver

la même forme dans différents repères inertiels ») *aux lois de transformation des coordonnées elles-mêmes*, lesquelles font manifestement partie des lois auxquelles le principe doit s'appliquer. Ainsi, la solution générale au problème du mouvement inertiel, sans ajouter aucun postulat par rapport à la manière dont il aurait pu être énoncé à l'époque de Galilée et de Descartes, est en réalité la relativité restreinte d'Einstein, dont la relativité galiléenne n'est qu'un cas particulier ($c = \infty$).

-
1. Lévy-Leblond, J.M., 1976, *Am. J. Phys.* **44**, 271
 2. Bacry, H., & Lévy-Leblond, 1968, *J. Math. Phys.* **9**, 1605