

o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

Transformations de Lorentz

Olivier Castéra

Le 17 janvier 2026

Table des matières

1 Les relativités	1
1.1 Principe de relativité	1
1.1.1 Les lois physiques	2
1.1.2 Les référentiels équivalents	2
1.1.3 Le groupe des transformations inertielles	3
1.2 Les théories de la relativité	4
1.2.1 Théorie de la relativité galiléenne	4
1.2.2 Théorie de la relativité restreinte	8
2 La transformation de Lorentz-Poincaré	11
2.1 Démonstration en supposant une vitesse limite	11
2.1.1 Principe de relativité	11
2.1.2 Vitesse de la lumière et vitesse limite	11
2.1.3 Invariants relativistes	12
2.1.4 Distance spatiale	13
2.1.5 Distance spatio-temporelle	14
2.1.6 Équation de la sphère de lumière	16
2.1.7 Espace homogène et isotrope, temps homogène	17
2.1.8 Loi de composition interne	17
2.1.9 Signature de la métrique de l'espace-temps	18
2.1.10 Relativité du mouvement	18
2.1.11 La transformation spéciale de Lorentz	24
2.2 Démonstration sans l'hypothèse d'une vitesse limite	25
2.2.1 Principe de relativité	25
2.2.2 Homogénéité de l'espace et du temps	26
2.2.3 Relativité du mouvement	27
2.2.4 Causalité	28
2.2.5 Invariance par réflexion	28
2.2.6 Mouvement inertiel	29
2.2.7 Isotropie de l'espace	29
2.2.8 Loi de composition interne	31
2.2.9 Transformation de Lorentz-Poincaré	34
2.2.10 Référentiels galiléens	35

Chapitre 1

LES RELATIVITÉS

Sommaire

1.1 Principe de relativité	1
1.2 Les théories de la relativité	4

1.1 Principe de relativité

Avant d'énoncer le principe de relativité, nous devons définir les référentiels.

Définition 1.1.1 : Référentiel

Un *référentiel* est un *espace* muni d'un système de coordonnées, et un *temps* mesuré par une horloge fixe dans cet espace.

À tout observateur on associe un référentiel, donc un espace, et un temps identique en tout point de cet espace. L'observateur choisit un système de coordonnées pour se repérer dans son espace propre, c'est-à-dire une référence spatiale, et un instrument de mesure du temps pour se repérer dans son temps propre, c'est-à-dire une référence temporelle. Il se place habituellement, mais pas nécessairement, au centre de son système de coordonnées. Les observateurs peuvent avoir un mouvement quelconque, ils peuvent par exemple accélérer, changer de direction, tourner sur eux-mêmes, etc. Dans la définition d'un référentiel, nous disons « un espace » et « un temps », car *a priori* rien ne permet de dire que tous les observateurs ont le même espace et le même temps quel que soit leur mouvement relatif. En revanche, deux observateurs fixes l'un par rapport à l'autre auront le même espace et le même temps, et pourront choisir deux systèmes de coordonnées différents pour se repérer dans l'espace qui leur sera commun. Parmi tous les observateurs, il existe un ensemble d'observateurs que la physique ne peut distinguer ni par des expériences, ni par des observations.

Principe 1.1.1 : Principe de relativité

Parmi tous les référentiels possibles, il existe un ensemble infini continu de référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme mathématique.

Ces observateurs particuliers, indistinguables pour la physique, sont dit équivalents.

Définition 1.1.2 : Référentiels équivalents

Les référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme mathématique sont dits *équivalents*.

1.1.1 Les lois physiques

Une loi physique est une relation fonctionnelle F entre les valeurs $a, b, c, \dots$ prises par diverses grandeurs physiques. Pour le dire simplement, c'est une fonction de grandeurs physiques. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels équivalents, le principe de relativité énonce que

$$\text{si dans } \mathcal{R} \text{ on a } F(a, b, c, \dots) = 0, \text{ alors dans } \mathcal{R}' \text{ on a } F(a', b', c', \dots) = 0$$

où la fonction F est *la même* dans les deux référentiels, et plus généralement dans tous les référentiels équivalents. En revanche, les valeurs a et a' d'une même grandeur physique peuvent être différentes selon le référentiel, de même pour les valeurs b et b' , etc.

Définition 1.1.3 : Loi physique covariante

Une loi physique est dite *covariante* ssi elle est invariante de forme dans tous les référentiels équivalents, c'est-à-dire, si elle s'écrit sous la même forme pour tous les observateurs équivalents.

Remarque 1.1.1

La covariance des lois physique n'a pas de rapport avec la covariance et la contravariance des composantes des tenseurs.

1.1.2 Les référentiels équivalents

Le principe de relativité étant posé, cherchons quels sont les référentiels équivalents pour la formulation des lois de la physique. L'équivalence physique entre deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est une *relation d'équivalence* au sens mathématique du terme, ayant les trois propriétés suivantes :

a) réflexivité

$\mathcal{R}$ est physiquement équivalent à $\mathcal{R}$. Les lois physiques sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}$. En notant $\sim$ la relation d'équivalence :

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}$$

b) symétrie

Si $\mathcal{R}$ est physiquement équivalent à $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{R}'$ est physiquement équivalent à $\mathcal{R}$. Si les lois physiques sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$, alors elles sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}' \text{ ssi } \mathcal{R}' \sim \mathcal{R}$$

c) transitivité

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont physiquement équivalents et s'il en est de même pour $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$, alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}''$ sont physiquement équivalents. Si les lois physiques sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}''$, alors elles sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}''$:

$$\text{Si } \mathcal{R} \sim \mathcal{R}' \text{ et } \mathcal{R}' \sim \mathcal{R}'' \text{ alors } \mathcal{R} \sim \mathcal{R}''$$

Remarque 1.1.2

La relation d'équivalence généralise la notion d'égalité, ainsi, si du point de vue de la formulation des lois de la physique nous ne pouvons pas dire que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égaux, nous pouvons dire qu'ils sont équivalents.

Remarque 1.1.3

Pour une relation d'équivalence, nous parlerons de *classe* et non d'ensemble. Ainsi les référentiels équivalents forment une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence « même écriture des lois physiques ».

1.1.3 Le groupe des transformations inertielles

Les théories construites à partir du principe de relativité appliqué aux référentiels équivalents (les lois de la physique s'écrivent de la même façon pour les observateurs équivalents), devront donner la loi de « transformation » des coordonnées spatiales et temporelles lorsqu'un observateur « change » de référentiel équivalent.

Remarque 1.1.4

Un observateur ne peut pas changer de référentiel, il reste toujours dans son propre référentiel. S'il se met en mouvement, pour un autre observateur il change de référentiel, mais pas pour lui. En revanche il peut se demander comment un événement (quelque chose qui a lieu quelque part à un instant donné) est vu par un autre observateur équivalent, c'est-à-dire quelles sont les coordonnées spatio-temporelles de cet événement pour cet autre observateur. Nous ferons donc un abus de langage lorsque nous parlerons de « changement » de référentiel. De même, les coordonnées spatiales et temporelles ne se « transforment » pas, mais on obtient les unes à partir des autres.

Cette loi de transformation des coordonnées par changement de référentiel équivalent doit permettre de trouver les relations entre les valeurs a et a' d'une même grandeur physique exprimée dans différents référentiels équivalents. Cette loi de transformation est une loi physique, donc sur laquelle s'applique le principe de relativité. Elle devra s'écrire sous la même forme quels que soient les référentiels équivalents de départ et d'arrivée.

Ces transformations de coordonnées particulières qui permettent de passer d'un référentiel équivalent à un autre sont appelées *transformations inertielles*, nous verrons l'origine de ce terme au § 1.2.2.3 page 9. Chaque couple de référentiels équivalents définit une transformation inertielle T , et réciproquement, toute transformation inertielle appliquée à un référentiel équivalent fait passer à un autre référentiel équivalent. On représente ce passage sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T} \mathcal{R}'$$

Montrons que la relation d'équivalence se traduit par la structure de groupe de l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations inertielles :

a) la transitivité de la relation d'équivalence se représente sous la forme :

$$(\mathcal{R} \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}' \text{ et } \mathcal{R}' \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}'') \Rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{T_3} \mathcal{R}''$$

En notant o la loi de composition des transformations inertielles, cela implique que $T_2 o T_1$ soit une transformation inertielle. Par conséquent o est une loi interne pour l'ensemble $\mathcal{T}$.

b) supposons que l'on ait :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}' \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}'' \xrightarrow{T_3} \mathcal{R}'''$$

$T_3 o (T_2 o T_1)$ fait passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'''$ aussi bien que $(T_3 o T_2) o T_1$. Par conséquent o est une loi associative.

c) la réflexivité de la relation d'équivalence se représente sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T} \mathcal{R}$$

Il existe donc une transformation inertielle identité, notée Id , qui permet de définir une transformation inertielle inverse.

d) la symétrie de la relation d'équivalence se représente sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}' \iff \mathcal{R}' \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}$$

À toute transformation inertielle on peut faire correspondre une transformation inertielle inverse pour l'opération o , notée T^{-1} , telle que $T o T^{-1} = T^{-1} o T = Id$.

Le principe de relativité qui énonce l'existence de référentiels équivalents pour la formulation des lois physiques implique la structure de groupe de l'ensemble des transformations inertielles qui permettent de passer d'un référentiel équivalent à un autre.

1.2 Les théories de la relativité

1.2.1 Théorie de la relativité galiléenne

1.2.1.1 Référentiels galiléens

Nous supposons qu'il existe quatre types de liens entre les référentiels équivalents :

a) les référentiels « translatsés dans l'espace »

Ils diffèrent seulement par leur origine spatiale. L'équivalence de tels référentiels est liée au fait que les lois de la physique ne font intervenir que des distances, jamais des positions. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quel que soit l'endroit où elle est faite, ce qui implique l'homogénéité de l'espace.

b) les référentiels « translatés dans le temps »

Ils diffèrent seulement par leur origine temporelle. L'équivalence de tels référentiels est liée au fait que les lois de la physique ne font intervenir que des durées, jamais des instants. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quelle que soit l'époque à laquelle elle est faite, ce qui implique l'homogénéité du temps.

c) les référentiels « tournés »

Ils diffèrent seulement par une orientation différente. L'équivalence de tels référentiels est liée au fait que les lois de la physique ne font jamais intervenir d'angles par rapport à une direction privilégiée. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quelle que soit l'orientation spatiale qu'on lui donne, ce qui implique l'isotropie de l'espace.

d) les référentiels « bougés »

Ils sont en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Définition 1.2.1 : Référentiels galiléens

Les référentiels équivalents qui se distinguent les uns des autres par leur position relative, leur origine temporelle, leur orientation relative et par un mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme, sont appelés *référentiels galiléens*.

Un mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme signifie qu'ils ne tournent pas sur eux-même et que le vecteur vitesse de leur point origine est constant (vecteur accélération nul en tout point du référentiel). Leur mouvement relatif est à l'origine du nom donné au principe de relativité.

Définition 1.2.2 : Coordonnées galiléennes

Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires (rectilignes orthogonales, aussi appelées cartésiennes normales) dans le référentiel $\mathcal{R}$, et soit t le temps dans $\mathcal{R}$. Les coordonnées spatio-temporelles (t, x, y, z) , où l'axe de la coordonnée temporelle est représenté normal aux axes des coordonnées spatiales, sont appelées *coordonnées galiléennes*.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens, donc en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, de coordonnées galiléennes respectives (t, x, y, z) et (t', x', y', z') . Reprenons les équivalences entre référentiels :

a) les référentiels « translatés » dans l'espace

En notant $\vec{d}(a, b, c)$ le vecteur distance entre les points origine des référentiels :

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c \end{cases} \Leftrightarrow \vec{r}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{d} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$t' = t$$

b) les référentiels « translatés » dans le temps

En notant t le décalage fixe entre les horloges :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et} \quad t' = t - t$$

c) les référentiels « tournés »

Prenons pour axe de rotation l'axe z et supposons-le confondu avec l'axe z' . Notons R la matrice rotation d'un angle θ fixe, autour des axes z et z' :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{r}' = R \vec{r}$$

$$t' = t$$

d) les référentiels « bougés »

Supposons que les origines O et O' des référentiels se croisent à l'instant $t = t' = 0$, autrement dit, les référentiels ne sont ni translatés dans l'espace ni dans le temps. Soit $\vec{V}'$ la vitesse constante de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et soit $\vec{V}$ celle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} \vec{V}' &= d(\overrightarrow{OO'})/dt \\ &= -d(\overrightarrow{O'O})/dt \\ &= -\vec{V} \end{aligned}$$

Soit M un point quelconque de l'espace :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\ \vec{r} &= \vec{V}'t + \vec{r}' \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d(\vec{V}'t)}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \\ \vec{v} &= \vec{V}' + \vec{v}' \end{aligned} \tag{1.2}$$

C'est la loi d'addition des vitesses en mécanique non relativiste. Elles ont pour nom respectif, vitesse *absolue*, vitesse *d'entraînement* et vitesse *relative*.

Notation 1.2.1

La vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ est notée $\vec{v}_e$:

$$\vec{V}' = \vec{v}_e$$

(1.1) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x - v_{ex}t \\ y' = y - v_{ey}t \\ z' = z - v_{ez}t \end{cases} \\ t' = t \end{aligned}$$

1.2.1.2 Groupe des transformations de Galilée

En prenant en compte les quatre types de liens entre référentiels galiléens, nous obtenons la *transformation de Galilée* :

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= R\vec{r} - \vec{v}_e t - \vec{d} \\ t' &= t - t\end{aligned}$$

L'application successive de deux transformations de Galilée avec des vitesses d'entraînement arbitraires est équivalente à une unique transformation de Galilée. Elles forment le groupe à dix paramètres appelé *groupe de Galilée inhomogène* :

- translation dans l'espace avec trois composantes pour le déplacement $\vec{d}$
- translation temporelle t
- rotation statique dans l'espace avec trois angles d'Euler dans R
- trois composantes pour la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$

En l'absence des translations dans l'espace et dans le temps, le groupe à six paramètres s'appelle *groupe de Galilée homogène*. L'invariance des lois physiques sous une transformation de Galilée est appelée *invariance galiléenne*, ou *principe de relativité galiléenne*.

Définition 1.2.3 : Configuration standard

Deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en *configuration standard* ssi :

- les centres des référentiels se croisent et se superposent à l'instant $t_0 = t'_0 = 0$
- on utilise des coordonnées rectangulaires dans l'espace-temps commun à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, les coordonnées galiléennes (t, x, y, z) .
- le mouvement rectiligne n'a lieu que selon les axes Ox et $O'x'$ parallèles et de même sens (confondus car les centres se superposent), $v_{ey} = v'_{ey'} = v_{ez} = v'_{ez'} = 0$
- le mouvement de translation est tel que les axes Oy et $O'y'$ sont parallèles, donc aussi les axes Oz et $O'z'$ (pas de rotation statique)
- le mouvement uniforme de $\mathcal{R}'$ est dans le sens des x croissants. La vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ selon l'axe Ox est positive ou nulle, $v_{ex} = \|\vec{v}_e\| = v_e > 0$

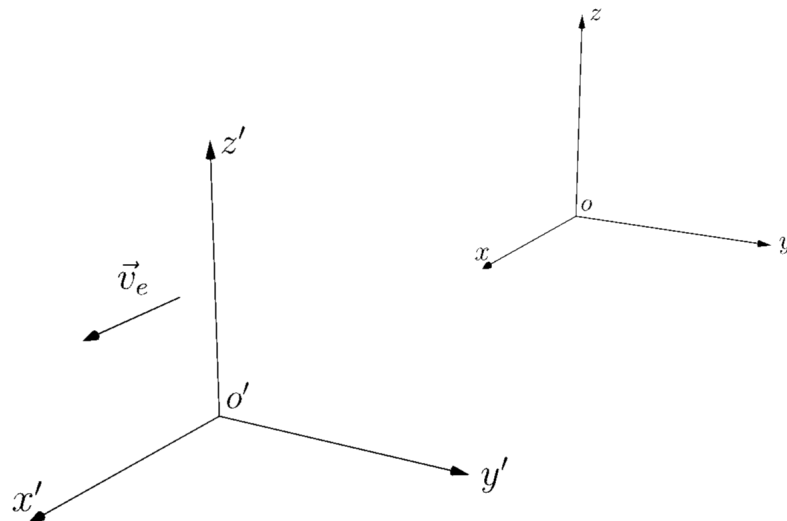


FIG. 1.1 – Référentiels en configuration standard

En configuration standard, la transformation de Galilée s'écrit :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.3)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La transformation de Galilée maintient invariante les équations de la dynamique de Newton (relation fondamentale de la dynamique) par changement de référentiel galiléen, mais pas les équations de l'électromagnétisme de Maxwell.

1.2.2 Théorie de la relativité restreinte

1.2.2.1 Référentiels galiléens

Comme précédemment, cette théorie est construite à partir du principe de relativité appliqué à une classe de référentiels équivalents. Les axiomes de cette théorie reprennent et généralisent les trois premières hypothèses du § 1.2.1 page 4 sur les différents liens entre les référentiels équivalents (translatés dans l'espace et/ou dans le temps, et tournés). Nous les remplaçons par des propriétés de l'espace et du temps, auxquels on ajoute la causalité et la loi de composition interne :

- a) homogénéité de l'espace
- b) homogénéité du temps
- c) isotropie de l'espace
- d) causalité : si un événement est la cause d'un autre événement, il doit en être ainsi dans tout référentiel. Cet axiome remplace celui d'un temps universel (car alors la causalité est vérifiée dans tout référentiel)
- e) loi de composition interne : la composée de deux transformations est une transformation

À la fin du chapitre 2 page 11 on démontre que le mouvement de translation rectiligne uniforme des référentiels équivalents est une conséquence de ces nouveaux axiomes. Nous pouvons alors définir les référentiels équivalents comme étant des référentiels dans lesquels l'espace est homogène et isotrope, et le temps homogène (causalité et loi de composition interne ne peuvent définir un référentiel). Nous retrouvons donc le status particulier des référentiels galiléens. Une autre conséquence est l'existence d'une vitesse limite pour les masses, l'énergie, les interactions et l'information, qui de fait invalide la transformation de Galilée puisque l'additivité des vitesses ((1.2) page 6) interdit l'existence d'une vitesse limite.

Les référentiels galiléens ne constituant qu'une partie de l'ensemble de tous les référentiels possibles, cette nouvelle théorie est appelée *théorie de la relativité restreinte*. La théorie de la

relativité galiléenne est aussi une théorie de la relativité restreinte mais cette appellation est réservée à la nouvelle théorie.

La relativité restreinte ne s'applique pas qu'aux référentiels galiléens, elle s'applique également aux référentiels accélérés, que l'accélération soit en translation, en rotation ou par changement de direction. Les référentiels galiléens sont seulement des référentiels équivalents pour la formulation des lois physiques. Cette équivalence vis-à-vis des lois de la physique ne leur confère aucun privilège. Nous pouvons faire un parallèle avec la mécanique non relativiste dans laquelle les référentiels galiléens ont aussi un rôle particulier, pour autant la relation fondamentale de la dynamique s'écrit aussi dans les référentiels accélérés.

1.2.2.2 Groupe des transformations de Lorentz-Poincaré

Le groupe à dix paramètres des transformations inhomogènes de Galilée est remplacé par le groupe également à dix paramètres des transformations de Lorentz-Poincaré dans lequel il existe une vitesse limite, appelé *groupe de Poincaré* :

- une translation temporelle t
- trois translations dans l'espace (trois composantes pour le déplacement $\vec{d}$)
- trois rotations statiques dans l'espace (trois angles d'Euler dans R)
- trois rotations statiques possibles entre une coordonnée spatiale et le temps

En l'absence de translation dans l'espace et dans le temps, le groupe à six paramètres s'appelle *groupe de Lorentz*. Ces transformations maintiennent invariantes par changement de référentiel galiléen les équations de Maxwell mais pas les équations de la dynamique de Newton qui sont modifiées pour être rendues invariantes. En ce sens, le principe de relativité n'a pas pour origine la relativité restreinte, mais la relativité restreinte l'a restauré pour inclure les équations de Maxwell, moyennant une réécriture de celles de Newton. Dans cette nouvelle théorie, les référentiels galiléens conservent la particularité de maintenir la forme des équations de la physique. L'invariance des lois physiques sous une transformation de Lorentz-Poincaré est appelée *invariance lorentzienne*. Lorsque nous parlerons de changement de référentiel galiléen, nous préciserons par quelle transformation, de Galilée ou de Lorentz. Nous établissons la transformation de Lorentz au chapitre 2 page 11.

1.2.2.3 Référentiels inertiels

La relativité restreinte ne peut inclure la gravitation sous sa forme classique, car elle est modélisée par une force se propageant à vitesse infinie, en contradiction avec l'existence d'une vitesse limite comme conséquence des axiomes relativistes. Pour trouver un nouveau modèle pour la gravitation, nous partons du constat qu'il n'est pas possible de distinguer localement un référentiel en chute libre dans un champ de gravitation, d'un référentiel galiléen : c'est le *principe d'équivalence* entre gravitation et inertie. On définit alors une classe plus grande (incluant les référentiels galiléens) de référentiels équivalents pour les lois de la physique, appelés *référentiels inertiels* ou *référentiels d'inertie*. Ils suivent les géodésiques de l'espace-temps (ils sont en chute libre), et en l'absence de champ de gravitation ils se confondent avec les référentiels galiléens. Les lois de la physique s'écrivent sous la même forme dans tous les référentiels inertiels, elles ne permettent pas de les distinguer. C'est le *principe de covariance générale* des équations de la physique par changement de référentiel inertiel. Lorsque le principe de relativité s'applique aux référentiels inertiels, on parle de *théorie de la relativité générale*. Cette théorie montre que la matière et toutes les formes d'énergie courbent l'espace-temps. Loin de toute matière et de toute énergie, l'espace-temps plat

dit *pseudo-euclidien* est celui de la relativité restreinte.

Chapitre 2

LA TRANSFORMATION DE LORENTZ-POINCARÉ

Sommaire

2.1 Démonstration en supposant une vitesse limite	11
2.2 Démonstration sans l'hypothèse d'une vitesse limite	25

2.1 Démonstration en supposant une vitesse limite

2.1.1 Principe de relativité

Nous supposons valide le principe de relativité qui affirme l'existence de référentiels équivalents pour la formulation des lois physiques : aucune expérience de physique ne permet de les distinguer, principe de relativité 1.1.1 page 2 et déf. 1.1.2 page 2. Nous supposons de plus que ces référentiels sont les référentiels galiléens, déf. 1.2.1 p 5.

2.1.2 Vitesse de la lumière et vitesse limite

On suppose l'existence d'une vitesse limite. Il est impossible de prouver expérimentalement que la lumière se propage à la vitesse limite. La seule chose que pourrait montrer une expérience serait que la lumière ne va pas à la vitesse limite. Lorsqu'une balance indique zéro on ne peut pas conclure, car soit la balance n'est pas assez précise soit l'objet pesé a effectivement un poids nul. Par analogie, une expérience qui n'indique pas de différence entre la vitesse de la lumière et la vitesse limite ne permet pas de conclure. Quant à la théorie, elle ne peut pas se prononcer sur ce qui se mesure, sauf à utiliser d'autres valeurs mesurées.

Les quatre équations de Maxwell permettent d'établir l'équation d'une onde dont la vitesse de

propagation est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide. Cette vitesse est celle du champ électromagnétique sur tout son spectre de fréquence possible, et donc aussi celle de la lumière. Les équations de Maxwell ne sont pas covariantes par la transformation de Galilée mais le sont par celle de Lorentz. C'est cela qui indique que la vitesse de la lumière est très proche, sinon confondue, avec la vitesse limite.

La transformation de Lorentz-Poincaré fait intervenir la vitesse limite, alors que les équations de Maxwell font intervenir la vitesse de la lumière. Si l'on trouvait une masse (pour les anglophones une masse au repos) aux photons, la lumière n'irait pas à la vitesse limite et les équations de Maxwell ne seraient plus covariantes. Il faudrait les réécrire ¹.

2.1.3 Invariants relativistes

Pour cette démonstration de la transformation de Lorentz-Poincaré on postule l'existence d'une vitesse limite. Cette vitesse étant une vitesse maximale, elle est invariante par changement de référentiel galiléen (elle a même valeur pour tous les observateurs galiléens) car sinon nous pourrions la dépasser par changement de référentiel. À un changement de référentiel correspond une transformation des coordonnées spatio-temporelles, chaque référentiel ayant a priori son propre système de coordonnées spatio-temporelles. La transformation de coordonnées que l'on cherche doit laisser invariante la vitesse limite, que l'on note c .

À partir de la vitesse limite on déduit un deuxième *invariant relativiste*, ou *invariant de Lorentz*, qui fait intervenir les coordonnées spatio-temporelles :

Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (1.2.3 page 7). Imaginons qu'à l'origine spatiale $O(0, 0, 0)$ de $\mathcal{R}$ se produise un flash à l'instant initial $t_0 = t'_0 = 0$. Pour simplifier, on suppose que la lumière se propage à la vitesse limite c . Un observateur dans $\mathcal{R}$ voit une sphère de lumière de centre O s'étendre dans l'espace, d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (2.1)$$

En relativité restreinte comme en mécanique non relativiste, un observateur dans $\mathcal{R}'$ voit aussi une sphère de lumière s'étendre dans l'espace. Cependant, par invariance isotrope de c , en relativité la sphère de lumière vue par un observateur dans $\mathcal{R}'$ n'a pas pour centre O mais O' , et a pour équation dans $\mathcal{R}'$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

L'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz, c'est donc un invariant relativiste. Si le flash a lieu en un point quelconque de coordonnées galiléennes (t_0, x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= c^2(t - t_0)^2 \\ (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 &= c^2(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

1. Voir les travaux d'Alexandru Proca

Nous utiliserons l'abus d'écriture suivant :

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2$$

2.1.4 Distance spatiale

L'espace physique de la physique non relativiste est *absolu*, il existe en lui-même indépendamment de l'existence d'autre chose. Nul besoin de matière ou d'énergie pour qu'existe cet espace. Le temps est également absolu, il existe même si rien ne se passe. L'espace physique et le temps n'ayant pas les mêmes unités, il n'y a pas à proprement parler d'espace-temps car on ne pourrait y définir une distance. On peut faire une analogie avec la thermodynamique, le diagramme (P, V) de Clapeyron est un exemple d'espace au sens mathématique du terme, dans lequel on ne peut définir de distance car les axes n'ont pas les mêmes unités. L'espace et le temps de la physique non relativiste sont modélisés par deux espaces mathématiques distincts dont le produit cartésien est noté $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Soient deux points de coordonnées spatiales rectangulaires (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) . Le carré de leur distance spatiale est donnée par la double application du théorème de Pythagore, d'abord dans le plan (x, y) puis dans l'espace (x, y, z) :

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \right)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Utilisons la transformation de Galilée (1.3) page 8 pour le changement de référentiel galiléen :

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 - v_e t \\ y'_0 = y_0 \\ z'_0 = z_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 - v_e t \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases}$$

La distance spatiale entre les deux points se transforme en :

$$\begin{aligned} d'^2 &= (x'_1 - x'_0)^2 + (y'_1 - y'_0)^2 + (z'_1 - z'_0)^2 \\ &= [(x_1 - v_e t) - (x_0 - v_e t)]^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= d^2 \end{aligned}$$

Elle est donc invariante par la partie spatiale de la transformation de Galilée.

De même, la distance temporelle ou durée, est invariante par la partie temporelle de la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'_1 - t'_0 \\ &= t_1 - t_0 \\ &= \Delta t \end{aligned}$$

2.1.5 Distance spatio-temporelle

En relativité restreinte, l'espace et le temps sont liés par la constante c homogène à une vitesse (un espace divisé par un temps). Ils forment l'*espace-temps* ou *univers*, dans lequel c est une vitesse limite pour la matière, l'énergie, les interactions et l'information. c est aussi appelée *constante de structure de l'espace-temps* ou *constante chronométrique*.

En multipliant la coordonnée temporelle par cette constante nous obtenons la coordonnée ct homogène à une longueur, n'ayant pas le même status que les coordonnées x, y, z mais permettant de définir une distance dans l'espace-temps. Cette « quadridistance » est appelée *intervalle*, sous-entendu entre deux points ayant chacun quatre coordonnées. Un espace dans lequel on peut définir une distance est dit *métrique*², sinon il est dit *affine*. Ainsi, l'espace et le temps de la physique non relativiste sont deux espaces métriques distincts, et leur « réunion » n'est pas un espace métrique, alors que l'espace-temps de la relativité est un espace métrique.



FIG. 2.1 – Exemple d'espace affine et d'espace métrique

Figure 2.1 les coordonnées y et z ne sont pas représentées :

- en coordonnées galiléennes (t, x, y, z) , la longueur d'un segment n'a pas de sens précis, les coordonnées n'ont pas la même dimension, l'espace n'est pas métrique
- en *coordonnées galiléennes réduites* (ct, x, y, z) , la longueur d'un segment existe et on peut la mesurer. Les coordonnées ont même dimension, une longueur, et définissent un espace métrique. Sur l'axe des ordonnées les durées sont transformées en distances lumière, avec $1\text{ s} = 299\,792\,458\text{ m}$. Le temps est mesuré en mètres, les vitesses ont pour unité le m/m, en particulier $c = 299\,792\,458\text{ m/m}$.

Remarque 2.1.1

En principe on ne devrait pas simplifier les unités. Par exemple, si l'on dit qu'un projet prend un mois de retard tous les vingt-quatre mois, on ne peut simplifier par « mois ». Second exemple : la vitesse d'un cours d'eau augmente à mesure que l'on s'éloigne de la berge et que l'on se rapproche du centre, cette variation de vitesse se mesure en $(\text{m/s})/\text{m}$. Si l'on simplifie les unités on obtient des Hertz pour cette variation de vitesse.

Toujours figure 2.1, les échelles de distance ne sont pas les mêmes, des mètres en abscisse et des « trois centaines de milliers de kilomètres » en ordonnée.

Remarque 2.1.2

Un cas similaire existe en mécanique non relativiste. Dans l'aviation on mesure les altitudes en centaines de pieds ou flight level (FL) et les distances sol en milles marins ou nautical miles (NM). Difficile dans ces conditions d'évaluer une distance autre qu'une différence d'altitude ou qu'une distance sol.



FIG. 2.2 – Unités d'un espace métrique

Pour cette raison nous redéfinissons le mètre pour avoir la même unité en abscisse et en ordonnée, c'est-à-dire nous posons

$$c = 1 \quad (2.3)$$

Remarque 2.1.3

Nous redéfinissons le mètre et non la seconde car dans le système international d'unités (SI), le mètre est défini à partir de la seconde et de la vitesse de la lumière dont la valeur est posée par convention exactement égale à 299 792 458 m/s.

Le système d'unité dans lequel on pose $c = 1$ est appelé *système d'unités géométriques*. Dans ce système il n'y a plus lieu de distinguer l'unité de temps de l'unité de distance, et 299 792 458 mètres SI valent un mètre de ce système.

L'espace et le temps ne sont plus absolus puisqu'ils se combinent l'un dans l'autre, mais l'espace-temps prend un caractère *absolu*. Il est modélisé par un espace métrique mathématique de dimension quatre noté $\mathbb{R}^4$, appelé *espace de Poincaré-Minkowski*, de système de coordonnées (t, x, y, z) où $c = 1$. Tout comme l'espace est constitué de l'ensemble des points de cet espace, l'espace-temps est constitué de l'ensemble des *événements* ou *points d'univers*.

Remarque 2.1.4

Le terme « événement » existe aussi en mécanique non relativiste où il a pour coordonnées (t, x, y, z) , mais où le temps est universel.

Les événements ont pour coordonnées (ct, x, y, z) si l'on donne la composante temporelle avant les composantes spatiales, ou (x, y, z, ct) dans le cas contraire. Nous choisissons la première convention et prenons la notation suivante :

Notation 2.1.2 : Notation indicielle

Les coordonnées galiléennes réduites sont notées x^α avec $\alpha = 0, \dots, 3$:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Elles ont la dimension d'une longueur. Lorsque $c = 1$ elles ont même unité.

L'espace-temps est absolu signifie que les événements sont absolus, ils existent en eux-mêmes indépendamment de tout référentiel ou de tout observateur. Le choix d'un référentiel (avec son espace, son temps, son système de coordonnées et son horloge) pour localiser un événement est arbitraire, par conséquent les coordonnées spatio-temporelles des événements ont le même arbitraire.

Nous cherchons à généraliser la distance spatiale entre deux points de l'espace physique tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Galilée, à une distance spatio-temporelle entre deux événements de l'espace-temps quadridimensionnel

$\mathbb{R}^4$, invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré (qui laisse également invariante c).

De même qu'en mathématique la distance entre deux points d'un espace est invariante par changement de coordonnées, en relativité la distance spatio-temporelle entre deux événements de l'espace-temps est invariante par changement de coordonnées spatio-temporelle, c'est-à-dire par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Équivalence de vocabulaire selon que l'on met en avant l'aspect mathématique ou physique :

Mathématique	Physique
point	évènement
vecteur	4-vecteur
distance, métrique	4-distance, métrique de Minkowski, intervalle
pseudo-norme	4-norme
système de coordonnées - repère	référentiel
chgt de coordonnées, chgt de base	chgt de référentiel, transformation de Lorentz
espace euclidien	espace newtonien
espace pré-euclidien	espace plat (newtonien ou de la relativité restreinte)
espace non euclidien	espace courbe
espace pseudo-euclidien	espace-temps, 4-espace, espace de Minkowski, univers

2.1.6 Équation de la sphère de lumière

L'équation de la sphère de lumière 2.1 page 12 étant la même dans tous les référentiels galiléens, cela suggère de poser l'une des deux définitions suivantes,

$$\Delta s^2 \triangleq c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

en convention dite « de genre temps » (Δs^2 est positif ssi la distance lumière est supérieure à la distance spatiale), ou

$$\Delta s^2 \triangleq \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

en convention dite « de genre espace ».

Ces expressions rappellent celle (2.2) page 13 du carré de la distance euclidienne en trois dimensions d'espace. Au § 2.1.3 page 12, nous avons vu que si s^2 est nul dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors il est nul dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$

$$\Delta s^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s'^2 = 0$$

autrement dit s^2 et s'^2 sont proportionnels :

$$\Delta s^2 = a \Delta s'^2$$

2.1.7 Espace homogène et isotrope, temps homogène

L'espace étant supposé homogène, toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'endroit où elle est faite, le facteur de proportionnalité a ne peut être fonction des coordonnées. Le temps étant également supposé homogène, toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'époque à laquelle elle est faite, a ne peut être fonction du temps. L'espace étant supposé isotrope, toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'orientation choisie, a ne peut être fonction de la direction de la vitesse d'entraînement des référentiels. a n'est donc fonction que de la norme euclidienne de la vitesse d'entraînement des référentiels :

$$\Delta s^2 = a(v_e) \Delta s'^2$$

2.1.8 Loi de composition interne

Si l'on considère trois référentiels galiléens, alors :

$$\begin{cases} \Delta s_1^2 = a(v_{12}) \Delta s_2^2 \\ \Delta s_2^2 = a(v_{23}) \Delta s_3^2 \\ \Delta s_1^2 = a(v_{13}) \Delta s_3^2 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{aligned} \Delta s_1^2 &= a(v_{12}) a(v_{23}) \Delta s_3^2 \\ a(v_{13}) &= a(v_{12}) a(v_{23}) \end{aligned}$$

v_{13} dépend non seulement des valeurs v_{12} et v_{23} , mais aussi de l'angle entre les vecteurs $\vec{v}_{12}$ et $\vec{v}_{23}$. Par conséquent a est une constante et nous avons :

$$a = a^2$$

Cela laisse deux possibilités, $a = 0$ donne $\Delta s = 0$, et $a = 1$ donne :

$$\boxed{\Delta s^2 = \Delta s'^2} \quad (2.4)$$

qui inclue le cas $a = 0$. Δs est la distance spatio-temporelle quadridimensionnelle que l'on cherchait, invariante par changement de référentiel galiléen par une transformation qui laisse invariante c , donc absolue dans l'espace-temps.

Définition 2.1.1 : Intervalle d'espace-temps

La distance dans l'espace-temps entre deux évènements, notée s , telle qu'en convention de genre temps son carré s'écrive

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &\triangleq c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &\triangleq (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 \end{aligned}$$

est appelée distance d'univers, *intervalle d'espace-temps* ou métrique de Minkowski.

Le scalaire s invariant de Lorentz, est appelé *scalaire de Lorentz* ou *quadri-scalaire* (bien qu'il n'ait pas quatre composantes).

En convention de genre temps, le carré d'un intervalle élémentaire d'univers s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

2.1.9 Signature de la métrique de l'espace-temps

En convention de genre temps, la métrique a pour signature $(1, 3)$, ou le premier entier indique le nombre de signes positifs, et le second indique le nombre de signes négatifs. On donne souvent la signature sous forme explicite $(+, -, -, -)$. En convention de genre espace, la métrique a pour signature $(3, 1)$, sous forme explicite $(-, +, +, +)$. La loi d'inertie de Sylvester stipule que la signature d'une métrique est indépendante du système de coordonnées choisi.

Définition 2.1.2 : Espace de Lorentz

Un *espace de Lorentz* de dimension n est un espace qui a pour signature $(1, n - 1)$ ou $(n - 1, 1)$, noté respectivement $\mathbb{R}^{1, n-1}$ ou $\mathbb{R}^{n-1, 1}$.

L'espace de Poincaré-Minkowski est un espace de Lorentz de dimension 4, noté au choix $\mathbb{R}^{1,3}$ ou $\mathbb{R}^{3,1}$.

2.1.10 Relativité du mouvement

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (1.2.3 page 7). Imaginons deux règles identiques placées à l'origine des référentiels, parallèles entre elles et perpendiculaires au mouvement relatif. À l'instant où elles se croisent, par symétrie elles doivent avoir même hauteur, ce qui implique $y = y'$ et $z = z'$. Imaginons deux règles identiques, chacune dans un référentiel, parallèles entre elles et perpendiculaires au mouvement. Par conséquent, nous cherchons une transformation de système de coordonnées spatio-temporelle sous la forme de deux fonctions inversibles f et g , telles que

$$\begin{cases} t' = f(t, x) \\ x' = g(t, x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$(2.5b)$$

qui respectent l'invariance de l'intervalle d'univers :

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \end{aligned}$$

Prenons un intervalle élémentaire :

$$\begin{aligned}
c^2 dt^2 - dx^2 &= c^2 dt'^2 - dx'^2 \\
&= c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dx \right)^2 \\
&= c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dt^2 + c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx^2 + 2c^2 \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} dt dx \\
&\quad - \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 dt^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 dx^2 - 2 \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial x} dt dx \\
&= \left[c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 \right] dt^2 - \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2 \\
&\quad + 2 \left(c^2 \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dt dx
\end{aligned}$$

qui donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 = 1 \end{array} \right. \quad (2.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 - \left(c \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 1 \end{array} \right. \quad (2.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (2.6c)$$

Avec la relation de trigonométrie hyperbolique

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$$

(2.6a) a pour solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 = \cosh^2[\varphi(t, x)] \\ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 = \sinh^2[\varphi(t, x)] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = \pm \cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial t} = \pm c \sinh[\varphi(t, x)] \end{array} \right.$$

Remarque 2.1.5

La dérivée partielle d'une fonction de t et x est une fonction de t et x .

$$f(t, x) \Rightarrow \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

Quatre combinaisons de signes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = \cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial t} = c \sinh[\varphi(t, x)] \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = \cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial t} = -c \sinh[\varphi(t, x)] \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = -\cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial t} = c \sinh[\varphi(t, x)] \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = -\cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial t} = -c \sinh[\varphi(t, x)] \end{array} \right\}$$

Prenons le premier ensemble de solutions et posons $t = -\phi$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial f}{\partial \phi} = \cosh[\varphi(-\phi, x)] \\ -\frac{\partial g}{\partial \phi} = c \sinh[\varphi(-\phi, x)] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \phi} = -\cosh[\varphi(\phi, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} = c \sinh[\varphi(\phi, x)] \end{array} \right.$$

On retrouve le troisième ensemble de solutions. Prenons le deuxième ensemble de solutions et posons $t = -\phi$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial f}{\partial \phi} = \cosh[\varphi(-\phi, x)] \\ -\frac{\partial g}{\partial \phi} = -c \sinh[\varphi(-\phi, x)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \phi} = -\cosh[\varphi(\phi, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} = -c \sinh[\varphi(\phi, x)] \end{cases}$$

On retrouve le quatrième ensemble de solutions. Il n'y a donc que deux combinaisons de signes :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial g}{\partial t} = \varepsilon_1 c \sinh[\varphi(t, x)] \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1^2 = 1 \quad (2.7)$$

Par analogie (2.6b) a pour solutions :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \cosh[\varphi(t, x)] \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\varepsilon_2}{c} \sinh[\varphi(t, x)] \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_2^2 = 1$$

où la fonction $\varphi(t, x)$ est la même qu'en (2.7). Remplaçons dans (2.6c) :

$$\begin{aligned} c^2 \cosh[\varphi(t, x)] \frac{\varepsilon_2}{c} \sinh[\varphi(t, x)] - c \varepsilon_1 \sinh[\varphi(t, x)] \cosh[\varphi(t, x)] &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cosh[\varphi(t, x)] \sinh[\varphi(t, x)] &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{e^{[\varphi(t, x)]} + e^{-[\varphi(t, x)]}}{2} \right) \left(\frac{e^{[\varphi(t, x)]} - e^{-[\varphi(t, x)]}}{2} \right) &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (e^{[\varphi(t, x)]} e^{[\varphi(t, x)]} - e^{[\varphi(t, x)]} e^{-[\varphi(t, x)]} + e^{-[\varphi(t, x)]} e^{[\varphi(t, x)]} - e^{-[\varphi(t, x)]} e^{-[\varphi(t, x)]}) &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (e^{2\varphi(t, x)} - e^{-2\varphi(t, x)}) &= 0 \end{aligned}$$

Deux possibilités :

- a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$
- b) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

$$\begin{aligned} e^{2\varphi(t, x)} &= e^{-2\varphi(t, x)} \\ e^{2\varphi(t, x)} &= 1 \\ \varphi(t, x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = t + c^{ste} \\ g = x + c^{ste} \end{cases}$$

Par conséquent $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et le système devient :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 = 1 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial t} = c^2 \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 1 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial t} = c^2 \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

Les dérivées partielles des deux dernières relations donnent les équations de propagation d'une onde à la vitesse c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right.$$

Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 1 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 = 1 \end{array} \right. \quad (2.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (2.8b)$$

a) La solution générale de (2.8a) est de la forme :

$$\begin{aligned} f(t, x) &= A\left(t - \frac{x}{c}\right) + B\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ &= A(u) + B(v) \end{aligned}$$

où A et B sont des fonctions arbitraires.

$$\begin{aligned} df(t, x) &= df(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial A}{\partial u} \left(dt - \frac{dx}{c} \right) + \frac{\partial B}{\partial v} \left(dt + \frac{dx}{c} \right) \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \right) dt + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u} \right) dx \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u} \right) \end{array} \right.$$

En reportant dans l'équation de propagation de f , (2.8a) de la présente page :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u} \right)^2 &= 1 \\ 2 \frac{\partial B}{\partial v} \frac{\partial A}{\partial u} + 2 \frac{\partial B}{\partial v} \frac{\partial A}{\partial u} &= 1 \\ \frac{\partial A(u)}{\partial u} \frac{\partial B(v)}{\partial v} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A(u)}{\partial u} = C_1^{ste} \\ \frac{\partial B(v)}{\partial v} = \frac{1}{4C_1^{ste}} \end{array} \right.$$

Or,

$$\begin{aligned} dA(u) &= \frac{\partial A}{\partial u} du \\ dA\left(t - \frac{x}{c}\right) &= \frac{\partial A}{\partial u} \left(dt - \frac{dx}{c} \right) \\ \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x} dx &= \frac{\partial A}{\partial u} dt - \frac{\partial A}{\partial u} \frac{dx}{c} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = C_1^{ste} \\ \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{C_1^{ste}}{c} \end{cases}$$

De même,

$$\begin{aligned} dB(v) &= \frac{\partial B}{\partial v} dv \\ dB\left(t + \frac{x}{c}\right) &= \frac{\partial B}{\partial v} \left(dt + \frac{dx}{c}\right) \\ \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial x} dx &= \frac{\partial B}{\partial v} dt + \frac{\partial B}{\partial v} \frac{dx}{c} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial v} \\ \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{4C_1^{ste}} \\ \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{4cC_1^{ste}} \end{cases}$$

On pose $C_1^{ste} = 1/(2a)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{1}{2a} \\ \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(u) = \frac{1}{2a} u + C_2^{ste} \\ B(v) = \frac{a}{2} v + C_3^{ste} \end{cases}$$

Nous avons maintenant :

$$\begin{aligned} f(u, v) &= A(u) + B(v) \\ &= \frac{1}{2a} u + C_2^{ste} + \frac{a}{2} v + C_3^{ste} \\ &= \frac{1}{2a} u + \frac{a}{2} v + C_4^{ste} \end{aligned}$$

On pose $f(0, 0) = f_0 = C_4^{ste}$:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \frac{1}{2a} \left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{a}{2} \left(t + \frac{x}{c}\right) + f_0 \\ &= \left(\frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) t + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right) \frac{x}{c} + f_0 \\ &= \left(\frac{1+a^2}{2a}\right) t + \left(\frac{a^2-1}{2a}\right) \frac{x}{c} + f_0 \end{aligned}$$

On choisit $a > 0$ pour avoir les axes temporels dans le même sens.

$$f(t, x) = \frac{1+a^2}{2a} \left[t - \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right) \frac{x}{c} \right] + f_0 \quad (2.9)$$

On pose :

$$\beta = \frac{1-a^2}{1+a^2} \quad \text{donc} \quad |\beta| \leq 1$$

Si $\beta = 1$ alors $a = 0$ et le facteur $(1 + a^2)/(2a)$ dans (2.9) diverge, donc on ne conserve que

$$|\beta| < 1$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \frac{1 - 2a^2 + a^4}{1 + 2a^2 + a^4} \\ 1 - \beta^2 &= \frac{1 + 2a^2 + a^4 - 1 + 2a^2 - a^4}{1 + 2a^2 + a^4} \\ &= \frac{4a^2}{1 + 2a^2 + a^4} \\ \sqrt{1 - \beta^2} &= \frac{2a}{1 + a^2}\end{aligned}$$

(2.9) page ci-contre devient :

$$f(t, x) = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} + f_0$$

$t' = t + t_0$ à vitesse d'entraînement nulle, d'où $f_0 = t_0$:

$$t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} + t_0 \quad \text{avec} \quad |\beta| < 1 \quad (2.10)$$

b) La solution générale de (2.8b) page 21 est de la forme :

$$\begin{aligned}g(t, x) &= C\left(t - \frac{x}{c}\right) + D\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ &= C(u) + D(v)\end{aligned}$$

où C et D sont des fonctions arbitraires.

$$\begin{aligned}dg(t, x) &= dg(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dx &= \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial C}{\partial u} \left(dt - \frac{dx}{c}\right) + \frac{\partial D}{\partial v} \left(dt + \frac{dx}{c}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right) \end{cases} \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial v}\right) dt + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right) dx \\ \Rightarrow \begin{cases} c^2 \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u}\right) = \frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial v} \\ \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} = c \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right) \\ \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u} = c \left(\frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} = \frac{ca}{2} \\ \frac{\partial C}{\partial u} = -\frac{c}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{ca}{2} v + C_5^{ste} \\ C = -\frac{c}{2a} u + C_6^{ste} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(u, v) &= C(u) + D(v) \\ &= -\frac{c}{2a} u + \frac{ca}{2} v + C_7^{ste}\end{aligned}$$

On pose $g(0, 0) = g_0$:

$$\begin{aligned}
 g(t, x) &= -\frac{c}{2a} \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{ca}{2} \left(t + \frac{x}{c} \right) + g_0 \\
 &= \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a} \right) ct + \left(\frac{1}{2a} + \frac{a}{2} \right) x + g_0 \\
 &= \left(\frac{a^2 - 1}{2a} ct + \frac{1 + a^2}{2a} x \right) + g_0 \\
 &= \frac{1 + a^2}{2a} \left(x - \frac{1 - a^2}{1 + a^2} ct \right) + g_0 \\
 &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} + g_0
 \end{aligned}$$

$x' = x + x_0$ à vitesse d'entraînement nulle d'où $g_0 = x_0$:

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} + x_0 \quad \text{avec} \quad |\beta| < 1 \quad (2.11)$$

Lorsque v_e devient petite devant c nous devons retrouver la transformation de Galilée (1.3) page 8 qui est validée par toute la physique non relativiste. On en déduit

$$\boxed{\beta = v/c} \quad (2.12)$$

car alors (2.10) et (2.11) deviennent

$$\begin{cases} t' = \frac{t - v_e x/c^2}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} + t_0 & \text{avec} \quad v_e < c \\ x' = \frac{x - v_e t}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} + x_0 & \text{avec} \quad v_e < c \end{cases}$$

et pour $v_e \ll c$ on retrouve bien la transformation de Galilée (1.3) page 8 :

$$\begin{cases} t' \approx t + t_0 \\ x' \approx x - v_e t + x_0 \end{cases}$$

On rappelle que $v_e = \|\vec{v}_e\|$, autrement dit v_e n'est pas algébrique mais toujours positive ou nulle. v_e positive implique que le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace dans le sens des x croissants, et réciproquement, le référentiel $\mathcal{R}$ se déplace dans le sens des x' décroissants.

2.1.11 La transformation spéciale de Lorentz

Les référentiels galiléens sont supposés en configuration standard, ils se croisent à l'instant $t = t' = 0$, par conséquent $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$, et (2.5a) et (2.5b) page 18, (2.10) et (2.11) page précédente donnent finalement la *transformation spéciale de Lorentz* :

$$\begin{cases} t' = \frac{t - v_e x / c^2}{\sqrt{1 - v_e^2 / c^2}} \\ x' = \frac{x - v_e t}{\sqrt{1 - v_e^2 / c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

La transformation est dite « spéciale » parce qu'elle n'inclue pas les trois rotations statiques ordinaires de l'espace (les référentiels galiléens sont supposés en configuration standard).

Définition 2.1.3 : Facteur de Lorentz

On définit le *facteur relativiste* par :

$$\gamma_e \triangleq \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2 / c^2}}$$

Ce facteur sans dimension est aussi appelé *facteur de Lorentz* ou *coefficient de parallaxe spatio-temporelle*. Pour toute vitesse relative ou vitesse d'entraînement, il existe un facteur relativiste. Lorsque il y a plusieurs vitesses il faut préciser de quel facteur relativiste l'on parle. De plus sa valeur est toujours supérieure ou égale à un :

$$0 \leq v_e < c \quad \Rightarrow \quad \gamma_e \geq 1 \quad (2.13)$$

Changer de référentiel, c'est changer son point de vue sur l'espace-temps.

2.2 Démonstration sans l'hypothèse d'une vitesse limite

2.2.1 Principe de relativité

Ici aussi nous supposons valide le principe de relativité qui affirme l'existence de référentiels équivalents pour la formulation des lois physique. Nous ne faisons pas plus d'hypothèses concernant ces référentiels, en particulier nous ne supposons pas qu'ils se déplacent à vitesse constante les uns par rapport aux autres. Cette propriété sera l'une des conséquences des hypothèses que nous allons poser par la suite.

Cherchons les formules générales de transformation des coordonnées d'espace et de temps lors d'un changement de référentiel équivalent, que nous avons appelée transformation inertielle. Soient (t, x, y, z) les coordonnées galiléennes d'un évènement dans le référentiel équivalent $\mathcal{R}$, et (t', x', y', z') les coordonnées du même évènement dans un autre référentiel équivalent $\mathcal{R}'$. La transformation des coordonnées galiléennes pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ dépend d'un nombre à

déterminer N de paramètres $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, identiques pour chaque coordonnées :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z; a_1, \dots, a_N) \\ y' = g(t, x, y, z; a_1, \dots, a_N) \\ z' = h(t, x, y, z; a_1, \dots, a_N) \\ t' = j(t, x, y, z; a_1, \dots, a_N) \end{cases}$$

Les translations dans l'espace et/ou dans le temps sont supposées laisser invariantes les lois de la physique, ce qui fixe quatre de ces N paramètres, ξ_1, ξ_2, ξ_3 et τ . En effet, par hypothèse nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x' = x + \xi_1 \\ y' = y + \xi_2 \\ z' = z + \xi_3 \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

Il reste $N - 4$ paramètres à déterminer, de a_5 à a_N . Les paramètres connus sont ξ_1, ξ_2, ξ_3 et τ :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, \dots, a_N) \\ y' = g(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, \dots, a_N) \\ z' = h(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, \dots, a_N) \\ t' = j(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, \dots, a_N) \end{cases}$$

x' ne dépend pas des paramètres ξ_2, ξ_3 et τ , c'est-à-dire des translations des autres coordonnées. De même pour les coordonnées y', z' et t' . En posant $n = N - 4$:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z; \xi_1, a_1, \dots, a_n), \\ y' = g(t, x, y, z; \xi_2, a_1, \dots, a_n), \\ z' = h(t, x, y, z; \xi_3, a_1, \dots, a_n), \\ t' = j(t, x, y, z; \tau, a_1, \dots, a_n). \end{cases}$$

On utilise les paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 et τ pour que l'origine spatio-temporelle des deux référentiels équivalents soit la même : si $x = y = z = t = 0$, alors $x' = y' = z' = t' = 0$. La transformation devient :

$$\begin{cases} x' = F(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n) \\ y' = G(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n) \\ z' = H(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n) \\ t' = J(t, x, y, z; a_1, \dots, a_n) \end{cases} \quad \text{avec les conditions} \quad \begin{cases} F(0, 0, 0, 0; a_1, \dots, a_n) = 0 \\ G(0, 0, 0, 0; a_1, \dots, a_n) = 0 \\ H(0, 0, 0, 0; a_1, \dots, a_n) = 0 \\ J(0, 0, 0, 0; a_1, \dots, a_n) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

2.2.2 Homogénéité de l'espace et du temps

Dans ce qui suit, nous noterons $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ les coordonnées de l'intervalle spatio-temporel entre le point événement (x, y, z, t) et l'origine spatio-temporelle commune aux deux référentiels équivalents. La transformation inertielle d'un intervalle infinitésimal de coordonnées

(dx, dy, dz, dt) s'écrit :

$$\begin{cases} dx' = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial t}dt \\ dy' = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz + \frac{\partial G}{\partial t}dt \\ dz' = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz + \frac{\partial H}{\partial t}dt \\ dt' = \frac{\partial J}{\partial x}dx + \frac{\partial J}{\partial y}dy + \frac{\partial J}{\partial z}dz + \frac{\partial J}{\partial t}dt \end{cases}$$

Si l'espace est supposé homogène, la transformation inertielle ne dépend pas de l'endroit où se trouve l'intervalle transformé, et les coefficients devant dx , dy , dz et dt ne sont pas fonction de x , y et z . De même, si le temps est supposé homogène, la transformation inertielle ne dépend pas de l'époque à laquelle l'intervalle est transformé, et les coefficients devant dx , dy , dz et dt ne sont pas fonction de t . Par exemple :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = K_1(a_i)$$

Nous avons alors,

$$\begin{cases} x' = (x + \xi_1)K_1(a_i) + (y + \xi_2)K_2(a_i) + (z + \xi_3)K_3(a_i) + (t + \tau)K_4(a_i) \\ y' = (x + \xi_1)L_1(a_i) + (y + \xi_2)L_2(a_i) + (z + \xi_3)L_3(a_i) + (t + \tau)L_4(a_i) \\ z' = (x + \xi_1)M_1(a_i) + (y + \xi_2)M_2(a_i) + (z + \xi_3)M_3(a_i) + (t + \tau)M_4(a_i) \\ t' = (x + \xi_1)N_1(a_i) + (y + \xi_2)N_2(a_i) + (z + \xi_3)N_3(a_i) + (t + \tau)N_4(a_i) \end{cases}$$

qui avec les conditions (2.14) page ci-contre devient :

$$\begin{cases} x' = K_1x + K_2y + K_3z + K_4t \\ y' = L_1x + L_2y + L_3z + L_4t \\ z' = M_1x + M_2y + M_3z + M_4t \\ t' = N_1x + N_2y + N_3z + N_4t \end{cases}$$

Les hypothèses les plus simples sur l'espace et le temps, espace homogène et temps homogène, impliquent une transformation affine, autrement dit la plus simple. Les conditions (2.14) page précédente sur l'évènement origine la rendent linéaire.

2.2.3 Relativité du mouvement

On suppose que les axes x et x' sont confondus, que les axes y et y' sont parallèles ainsi que les axes z et z' et que le déplacement du référentiel $\mathcal{R}'$ a lieu selon les x croissants. Imaginons deux règles identiques placées à l'origine des référentiels, parallèles entre elles et perpendiculaires au mouvement relatif. À l'instant où elles se croisent, par symétrie elles doivent avoir même hauteur, ce qui implique $y = y'$ et $z = z'$. On ne s'intéresse plus qu'aux coordonnées x et x' et au temps :

$$\begin{cases} x' = K_1(a_i)x + K_2(a_i)y + K_3(a_i)z + K_4(a_i)t \\ t' = N_1(a_i)x + N_2(a_i)y + N_3(a_i)z + N_4(a_i)t \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2.4 Causalité

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels équivalents d'origine spatio-temporelle commune $O(x = 0, t = 0 ; x' = 0, t' = 0)$. Soit E un évènement de $\mathcal{R}$ précédant O , et soit E' un évènement de $\mathcal{R}'$ succédant O .

- a) si l'on suppose $n \geq 2$, il serait toujours possible de relier les deux évènements E et E' par le système d'équations (2.15), E et E' seraient alors le même évènement vu de $\mathcal{R}$ et vu de $\mathcal{R}'$. La causalité serait inversée car cet évènement précéderait l'évènement origine dans $\mathcal{R}$ et lui succéderait dans $\mathcal{R}'$. Or si E est la cause de O , cette cause doit précéder l'effet dans tous les référentiels. Par conséquent, $n < 2$.
- b) pour $n = 0$ nous avons :

$$\begin{cases} x' = x \\ t' = t \end{cases}$$

et le principe de relativité se réduit aux translations d'espace et de temps.

- c) on en conclue que $n = 1$ et la transformation inertielle s'écrit :

$$\begin{cases} x' = K_1(a)x + K_2(a)y + K_3(a)z + K_4(a)t \\ t' = N_1(a)x + N_2(a)y + N_3(a)z + N_4(a)t \end{cases} \quad (2.16)$$

2.2.5 Invariance par réflexion

L'espace étant supposé isotrope, l'orientation des axes des référentiels est arbitraire. La transformation de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ doit avoir la même forme que celle de $-\mathcal{R}$ d'axe $-x$ à $-\mathcal{R}'$ d'axe $-x'$, elle doit être invariante par réflexion dans un miroir plan (yOz). Les coordonnées (x, y, z, t) et (x', y', z', t') d'un évènement peuvent être remplacées respectivement par $(-x, y, z, t)$ et $(-x', y', z', t')$ avec b comme nouveau paramètre de transformation :

$$\begin{cases} -x' = -K_1(b)x + K_2(b)y + K_3(b)z + K_4(b)t \\ t' = -N_1(b)x + N_2(b)y + N_3(b)z + N_4(b)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = K_1(b)x - K_2(b)y - K_3(b)z - K_4(b)t \\ t' = -N_1(b)x + N_2(b)y + N_3(b)z + N_4(b)t \end{cases} \quad (2.17)$$

En comparant avec (2.16) :

$$\begin{cases} K_1(a) = K_1(b) \\ K_2(a) = -K_2(b) \\ K_3(a) = -K_3(b) \\ K_4(a) = -K_4(b) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_1(a) = -N_1(b) \\ N_2(a) = N_2(b) \\ N_3(a) = N_3(b) \\ N_4(a) = N_4(b) \end{cases} \quad (2.18)$$

2.2.6 Mouvement inertiel

Nous avons vu que par isotropie de l'espace ou du temps nous pouvions utiliser indifféremment la transformation (2.16) ou (2.17). Pour des raisons pratiques nous utiliserons la seconde. Appelons *mouvement inertiel* le mouvement d'un objet au repos dans l'un des référentiels équivalents, par exemple dans $\mathcal{R}'$, tel que $x' = C_1^{ste}$, $y' = C_2^{ste}$, $z' = C_3^{ste}$. Dans $\mathcal{R}$ l'équation de son mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} K_1(a)x + K_2(a)y + K_3(a)z - K_4(a)t &= C_1^{ste} \\ x &= \frac{C_1^{ste} - K_2(a)y - K_3(a)z + K_4(a)t}{K_1(a)} \end{aligned}$$

Sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est aussi la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{dx}{dt} \\ &= -\frac{K_4(a)}{K_1(a)} \end{aligned}$$

V ne peut être que le rapport de deux fonctions de V, donc $a = V$ et :

$$K_4(V) = -VK_1(V)$$

Le paramètre a (devenu V) n'étant pas fonction du temps, les mouvements inertiels sont des mouvements à vitesse uniforme. Soit U la vitesse relative des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ exprimée en coordonnées galiléennes $(-x, y, z, t)$ et $(-x', y', z', t')$, (2.18) donne :

$$\begin{cases} K_1(a) = K_1(b) \\ K_4(a) = -K_4(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1(V) = K_1(U) \\ -VK_1(V) = -[-UK_1(U)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1(V) = K_1(U) \\ -VK_1(V) = UK_1(U) \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$U = -V$$

La vitesse relative des référentiels « inversés » est l'opposée de la vitesse relative des référentiels initiaux. (2.18) devient :

$$\begin{cases} K_1(V) = K_1(-V) \\ K_2(V) = -K_2(-V) \\ K_3(V) = -K_3(-V) \\ K_4(V) = -K_4(-V) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_1(V) = -N_1(-V) \\ N_2(V) = N_2(-V) \\ N_3(V) = N_3(-V) \\ N_4(V) = N_4(-V) \end{cases} \quad (2.19)$$

Ces relations expriment les propriétés de parité des fonctions recherchées.

2.2.7 Isotropie de l'espace

Nous utilisons de nouveau l'isotropie de l'espace. Effectuons une rotation de $\pi/2$ du référentiel $\mathcal{R}$ autour de son axe (Ox) confondu avec $(O'x')$:

$$\begin{cases} x'_{\pi/2} = K_1x_{\pi/2} + K_2y_{\pi/2} + K_3z_{\pi/2} + K_4t_{\pi/2} \\ t'_{\pi/2} = N_1x_{\pi/2} + N_2y_{\pi/2} + N_3z_{\pi/2} + N_4t_{\pi/2} \end{cases}$$

Dans $\mathcal{R}$ nous avons

$$x_{\pi/2} = x, \quad y_{\pi/2} = z, \quad z_{\pi/2} = -y, \quad t_{\pi/2} = t$$

et dans $\mathcal{R}'$ nous avons

$$x'_{\pi/2} = x', \quad y'_{\pi/2} = y', \quad z'_{\pi/2} = z', \quad t'_{\pi/2} = t'$$

si bien que :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} K_1 x + K_2 y + K_3 z + K_4 t = K_1 x + K_2 z - K_3 y + K_4 t \\ N_1 x + N_2 y + N_3 z + N_4 t = N_1 x + N_2 z - N_3 y + N_4 t \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} K_2 y + K_3 z = K_2 z - K_3 y \\ N_2 y + N_3 z = N_2 z - N_3 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_3(z + y) = K_2(z - y) \\ N_3(z + y) = N_2(z - y) \end{cases} \end{aligned}$$

Ces relations étant valables pour tout évènement, donc quels que soient y et z, on a :

$$K_2 = K_3 = 0 \quad \text{et} \quad N_2 = N_3 = 0$$

La transformation inertielle devient :

$$\begin{cases} x' = K_1 (x - Vt) \\ t' = N_1 x + N_4 t \end{cases}$$

Remplaçons trois fonctions inconnues par trois autres fonctions inconnues :

$$\begin{cases} K_1(V) = \gamma(V) \\ N_1(V) = -\gamma(V)\mu(V) \\ N_4(V) = \gamma(V)\lambda(V) \end{cases}$$

(2.19) page précédente devient :

$$\begin{cases} \gamma(V) = \gamma(-V) \end{cases} \quad (2.20a)$$

$$\begin{cases} \mu(V) = -\mu(-V) \end{cases} \quad (2.20b)$$

$$\begin{cases} \lambda(V) = \lambda(-V) \end{cases} \quad (2.20c)$$

$\mu(0) = -\mu(0)$ donc :

$$\mu(0) = 0$$

La transformation (2.16) s'écrit,

$$\begin{cases} x' = \gamma(V)x - V\gamma(V)t \\ t' = \gamma(V)\lambda(V)t - \gamma(V)\mu(V)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma(V)[x - Vt] \\ t' = \gamma(V)[\lambda(V)t - \mu(V)x] \end{cases}$$

2.2.8 Loi de composition interne

Effectuons deux transformations successives, de paramètres U et V :

$$\begin{cases} x' = \gamma(V)[x - Vt] \\ t' = \gamma(V)[\lambda(V)t - \mu(V)x] \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.21a) \\ (2.21b) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x'' = \gamma(U)[x' - Ut'] \\ t'' = \gamma(U)[\lambda(U)t' - \mu(U)x'] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'' = \gamma(U)\{\gamma(V)[x - Vt] - U\gamma(V)[\lambda(V)t - \mu(V)x]\} \\ t'' = \gamma(U)\{\lambda(U)\gamma(V)[\lambda(V)t - \mu(V)x] - \mu(U)\gamma(V)[x - Vt]\} \end{cases} \\ \begin{cases} x'' = \gamma(U)\gamma(V)[x - Vt - U\lambda(V)t + U\mu(V)x] \\ t'' = \gamma(U)\gamma(V)[\lambda(U)\lambda(V)t - \lambda(U)\mu(V)x - \mu(U)x + \mu(U)Vt] \end{cases} \\ \begin{cases} x'' = \gamma(U)\gamma(V)\{[1 + U\mu(V)]x - [V + U\lambda(V)]t\} \\ t'' = \gamma(U)\gamma(V)\{[\lambda(U)\lambda(V) + V\mu(U)]t - [\lambda(U)\mu(V) + \mu(U)]x\} \end{cases} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(U)\gamma(V)[1 + U\mu(V)] \left[x - \frac{V + U\lambda(V)}{1 + U\mu(V)} t \right] \end{cases} \quad (2.22a)$$

$$\begin{cases} t'' = \gamma(U)\gamma(V)[\lambda(U)\lambda(V) + V\mu(U)] \left[t - \frac{\lambda(U)\mu(V) + \mu(U)}{\lambda(U)\lambda(V) + V\mu(U)} x \right] \end{cases} \quad (2.22b)$$

On postule que la composée de deux transformations doit être une transformation de paramètre W à définir. Cela traduit la transitivité de la relation d'équivalence entre référentiels [c\)](#) page [3](#) :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(W)(x - Wt) \\ t'' = \gamma(W)[\lambda(W)t - \mu(W)x] \end{cases}$$

Nous avons alors les conditions suivantes :

$$\begin{cases} w = \frac{V + U\lambda(V)}{1 + U\mu(V)} \end{cases} \quad (2.23a)$$

$$\begin{cases} \gamma(w) = \gamma(U)\gamma(V)[1 + U\mu(V)] \end{cases} \quad (2.23b)$$

$$\begin{cases} \gamma(w)\lambda(w) = \gamma(U)\gamma(V)[\lambda(V)\lambda(U) + V\mu(U)] \end{cases} \quad (2.23c)$$

$$\begin{cases} \frac{\mu(W)}{\lambda(W)} = \frac{\lambda(U)\mu(V) + \mu(U)}{\lambda(V)\lambda(U) + V\mu(U)} \end{cases} \quad (2.23d)$$

On réécrit (2.23c) en remplaçant $\gamma(W)$ par son expression en (2.23b) :

$$\lambda(W) = \frac{\gamma(V)\gamma(U)[\lambda(V)\lambda(U) + V\mu(U)]}{\gamma(V)\gamma(U)[1 + U\mu(V)]}$$

En remplaçant W par sa valeur donnée par (2.23a) :

$$\lambda \left[\frac{V + U\lambda(V)}{1 + U\mu(V)} \right] = \frac{\lambda(V)\lambda(U) + V\mu(U)}{1 + U\mu(V)} \quad (2.24)$$

Cette relation est valable $\forall U$ donc pour $U = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda(V) &= \lambda(V)\lambda(0) \\ \lambda(V)[1 - \lambda(0)] &= 0\end{aligned}$$

Cette relation est valable $\forall V$ donc pour $V = 0$. Nous avons alors :

$$\lambda(0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(0) = 1$$

Le premier cas donne $\lambda(V) = 0$. Mais alors (2.21b) donne t' fonction uniquement de x , ce qui est exclu puisque l'on cherche une transformation à deux paramètres. Il reste donc :

$$\lambda(0) = 1$$

Posons maintenant $U = -V$ dans (2.24) :

$$\lambda \left[\frac{V - V\lambda(V)}{1 - V\mu(V)} \right] = \frac{\lambda(V)\lambda(-V) + V\mu(-V)}{1 - V\mu(V)}$$

En se servant des propriétés de parité (2.20c) et (2.20b) :

$$\lambda \left\{ \frac{V[1 - \lambda(V)]}{1 - V\mu(V)} \right\} = \frac{\lambda^2(V) - V\mu(V)}{1 - V\mu(V)}$$

Introduisons une nouvelle fonction $F(V) = 1 - \lambda(V)$. Cette fonction est paire car $F(-V) = 1 - \lambda(-V) = 1 - \lambda(V) = F(V)$, et est telle que $F(0) = 1 - \lambda(0) = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda \left[\frac{VF(V)}{1 - V\mu(V)} \right] &= \frac{[1 - F(V)]^2 - V\mu(V)}{1 - V\mu(V)} \\ 1 - F \left[\frac{VF(V)}{1 - V\mu(V)} \right] &= \frac{1 + F^2(V) - 2F(V) - V\mu(V)}{1 - V\mu(V)} \\ F \left[\frac{VF(V)}{1 - V\mu(V)} \right] &= 1 - \frac{1 + F^2(V) - 2F(V) - V\mu(V)}{1 - V\mu(V)} \\ &= \frac{F^2(V) - 2F(V)}{1 - V\mu(V)} \\ &= 2F(V) \frac{F(V)/2 - 1}{1 - V\mu(V)}\end{aligned}$$

Par continuité de μ en zéro et avec $\mu(0) = 0$, quand V tend vers zéro, μ tend également vers zéro, et $1 - V\mu(V)$ tend vers 1. De même, par continuité de F en zéro et avec $F(0) = 0$, quand v tend vers zéro, F tend vers zéro, et $F(V)/2 - 1$ tend vers -1 . Donc, lorsque V tend vers zéro, le problème revient à résoudre :

$$F[V F(V)] = -2F(V) \tag{2.25}$$

L'équation de continuité de F en zéro s'écrit :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta / |V| < \eta \Rightarrow |F(V)| < \varepsilon$$

On part avec $V_0 < \eta$ et $|F(V_0)| < \varepsilon \ll 1$. On pose $F_0 = F(V_0)$. Avec (2.25) :

$$\begin{aligned}F[V_0 F(V_0)] &= -2F(V_0) \\ F(V_0 F_0) &= -2F_0\end{aligned}$$

On pose $V_1 = V_0 F_0$, donc $V_1 < V_0$ et l'on se rapproche de zéro. On a donc :

$$F(V_1) = -2F_0$$

Avec (2.25) :

$$F[V_1 F(V_1)] = -2F(V_1) = 2^2 F_0$$

On pose $V_2 = V_1 F(V_1)$, donc $V_2 < V_1$ et :

$$F(V_2) = 2^2 F_0$$

Après p itérations on a :

$$F(V_p) = (-2)^p F_0$$

$|F(V_p)|$ diverge et devient supérieur à ε . La fonction F ne peut donc pas tendre de façon continue vers 0. Elle est par conséquent constante autour de zéro, donc $\forall V$, et comme $F(0) = 0$ on a $F(V) = 0$. Par conséquent :

$$\lambda(V) = 1$$

(2.24) devient,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 + V\mu(U)}{1 + U\mu(V)} \\ 1 + U\mu(V) &= 1 + V\mu(U) \\ \frac{\mu(V)}{V} &= \frac{\mu(U)}{U} \\ &= C^{ste} \end{aligned}$$

soit,

$$\mu(V) = \kappa V$$

où κ est une constante. À partir de (2.23a),

$$W = \frac{V + U}{1 + \kappa VU}$$

qui est la loi de composition des vitesses. À partir de (2.23b) :

$$\begin{aligned} \gamma(W) &= \gamma(V)\gamma(U)[1 + \kappa VU] \\ \gamma\left(\frac{V + U}{1 + \kappa VU}\right) &= \gamma(V)\gamma(U)[1 + \kappa VU] \end{aligned}$$

Pour $U = -V$, et avec la relation de parité (2.20a),

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma(V)\gamma(-V)[1 - \kappa V^2] \\ &= \gamma^2(V)[1 - \kappa V^2] \end{aligned}$$

et si $V = 0$:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma^2(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(si $\gamma(0) = 0$ alors (2.21a) et (2.21b) sont nulles).

$$1 = \gamma^2(V)[1 - \kappa V^2]$$

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa V^2}} \quad (2.26)$$

On conserve le signe positif seul car $\gamma(0) = +1$. La transformation (2.21) page 31 s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \kappa V^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \kappa Vx}{\sqrt{1 - \kappa V^2}} \end{cases}$$

Remarque 2.2.1

L'existence de l'élément neutre est démontrée (et non postulée), puisque pour $V = 0$ on a la transformation identité :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Remarque 2.2.2

L'existence d'une transformation inverse peut être démontrée (et non postulée). En effet, pour $U = -V$, (2.22a) et (2.22b) deviennent :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(-V)\gamma(V)[1 - V\mu(V)] \left[x - \frac{V - V\lambda(V)}{1 - V\mu(V)} t \right] \\ t'' = \gamma(-V)\gamma(V)[\lambda(-V)\lambda(V) + V\mu(-V)] \left[t - \frac{\lambda(-V)\mu(V) + \mu(-V)}{\lambda(-V)\lambda(V) + V\mu(-V)} x \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1 - \kappa V^2}{1 - \kappa V^2} \left(x - \frac{V - V}{1 - \kappa V^2} t \right) \\ t'' = \frac{1 - \kappa V^2}{1 - \kappa V^2} \left(t - \frac{\kappa V - \kappa V}{1 - \kappa V^2} x \right) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x'' = x \\ t'' = t \end{cases}$$

Remarque 2.2.3

On peut vérifier l'associativité des transformations, qui par conséquent forment un groupe.

2.2.9 Transformation de Lorentz-Poincaré

a) Pour $\kappa < 0$ on pose $\kappa = -c^{-2}$ avec c homogène à une vitesse. La loi de composition des vitesses devient :

$$W = \frac{V + U}{1 - \frac{VU}{c^2}}$$

Si $V = U = c$ alors $W = +\infty$, et la composition de deux vitesses finies donne une vitesse infinie.

b) Pour $\kappa = 0$ on retrouve la transformation de Galilée (1.3) page 8 :

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

c) Pour $\kappa > 0$ on pose $\kappa = c^{-2}$ avec c homogène à une vitesse. La loi de composition des vitesses devient :

$$w = \frac{V + U}{1 + \frac{VU}{c^2}}$$

Si $V = U = c$ alors $W = c$, et c est donc une vitesse limite. $\gamma(V)$ défini par (2.26) page ci-contre, devient tel que :

$$\gamma \geq 1$$

La transformation (2.21) page 31 s'écrit,

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma (t - Vx/c^2) \end{cases}$$

appelée *transformation spéciale de Lorentz*. On retrouve la transformation de Galilée lorsque $c = \infty$, ou, ce qui est équivalent, lorsque $V \ll c$.

Remarque 2.2.4

Les transformations de Lorentz forment un groupe, mais comme nous l'avons vu l'exigence d'une loi de groupe n'est pas nécessaire pour les établir. Nous avons utilisé la linéarité des transformations, l'invariance par réflexion spatiale et l'hypothèse de l'existence d'une loi de composition interne. La linéarité n'est en fait pas une contrainte pour la recherche des transformations car elle correspond au choix le plus simple, celui que l'on fait a priori, avant que de chercher des transformations non linéaires. Les deux autres hypothèses sont la traduction directe du principe de relativité appliqué à la loi de transformation des coordonnées elle-même. La composée de deux transformations de coordonnées ainsi que la transformation des coordonnées d'un référentiel inversé doivent avoir la même forme qu'une transformation de coordonnée seule.

2.2.10 Référentiels galiléens

Retour sur les propriétés des référentiels équivalents évoqués au § 2.2.1 p 25. Le passage d'un référentiel équivalent à un autre se fait par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cherchons le mouvement de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$, autrement dit le mouvement du centre $O(x = 0)$ en fonction de x' et t' ,

$$\begin{cases} x' = -\gamma Vt \\ t' = \gamma t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x' = -Vt'$$

C'est un mouvement de translation rectiligne ($y' = y$ et $z' = z$) uniforme (V est constante). Les référentiels équivalents sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, ce sont des référentiels galiléens.