

# TRIGONOMÉTRIE

Olivier Castéra  
o.castera@free.fr  
sciences-physiques.neocities.org

27 décembre 2025

## Résumé

Démonstration des principales formules de trigonométrie

## TABLE DES MATIÈRES

---

|                                                                      |          |
|----------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Identité de Pythagore</b>                                       | <b>1</b> |
| 1.1 Expression de sinus et cosinus en fonction de tangente . . . . . | 3        |
| <b>2 Cercle trigonométrique</b>                                      | <b>3</b> |
| 2.1 Parité des fonctions trigonométriques . . . . .                  | 3        |
| 2.2 Relations entre sinus et cosinus . . . . .                       | 4        |
| <b>3 Addition de deux angles</b>                                     | <b>4</b> |
| 3.1 Angle double . . . . .                                           | 6        |
| 3.2 Transformation de produits en sommes . . . . .                   | 6        |
| 3.3 Réduction du carré . . . . .                                     | 7        |
| 3.4 Transformation de sommes en produits . . . . .                   | 7        |
| <b>4 Formule de De Moivre</b>                                        | <b>7</b> |
| <b>5 Loi des cosinus</b>                                             | <b>8</b> |

## 1 IDENTITÉ DE PYTHAGORE

---

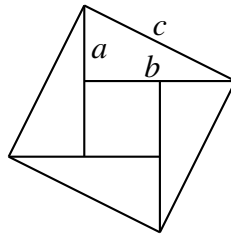
### **Théorème 1.1.** *Théorème de Pythagore*

*Le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des autres côtés.*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

## 1 IDENTITÉ DE PYTHAGORE

*Démonstration.* Exprimons la surface totale de la figure ci-dessous :



$$S = c^2$$

Or  $S$  est aussi la surface des quatre triangles et du carré central :

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ &= b^2 + a^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

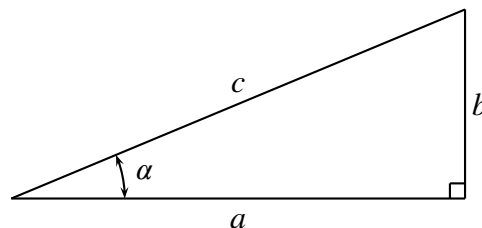
### Définition 1.1. Fonctions trigonométriques

Dans le triangle rectangle ci-dessous, on définit les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &\triangleq \frac{b}{c} \\ \cos(\alpha) &\triangleq \frac{a}{c} \\ \tan(\alpha) &\triangleq \frac{b}{a} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



### Théorème 1.2. Identité de Pythagore

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

*Démonstration.* À partir du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1 \\ \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

□

## 2 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

### 1.1 Expression de sinus et cosinus en fonction de tangente

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}} \\ \cos(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \\ \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}/\cos(\alpha)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \end{aligned}$$

## 2 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

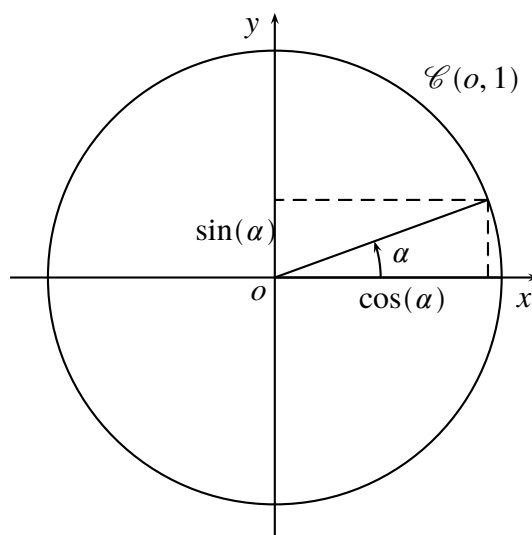
---

On pose  $c \neq 0$  pour s'assurer de l'existence du triangle. Par changement d'unité de longueur, nous posons  $c = 1$  sans perte de généralité :

— si  $\alpha = 0$  alors  $b = 0$  et  $a = c$ .

— si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  alors  $a = 0$ ,  $b = c$ , et  $\tan(\alpha)$  n'est plus définie.

Pour  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  ou pour  $\alpha < 0$ , le triangle n'est plus défini. Nous redéfinissons les fonctions trigonométriques comme la projection perpendiculaire d'un segment de longueur unité sur les axes de coordonnées. On obtient alors le cercle trigonométrique :



### 2.1 Parité des fonctions trigonométriques

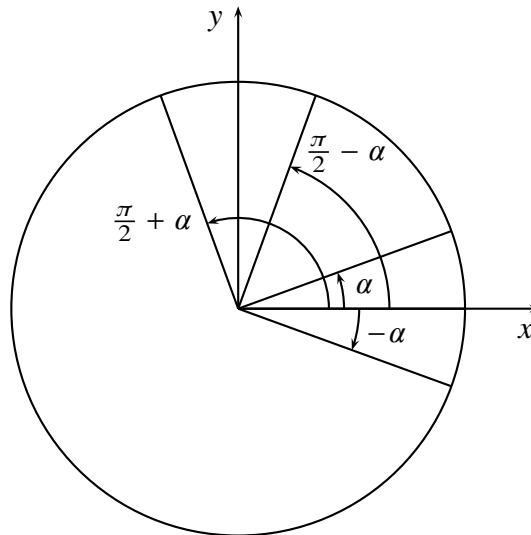
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad (1)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad (2)$$

### 3 ADDITION DE DEUX ANGLES

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



#### 2.2 Relations entre sinus et cosinus

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

### 3 ADDITION DE DEUX ANGLES

---

#### Théorème 3.1.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

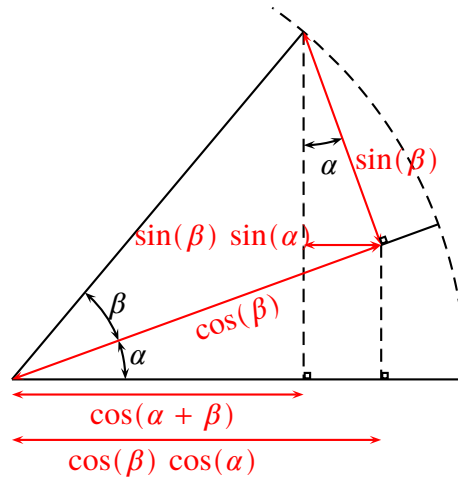
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

### 3 ADDITION DE DEUX ANGLES



*Démonstration.* Sur la figure ci-dessus, on retrouve l'angle  $\alpha$  car les droites sont perpendiculaires deux à deux. Par conséquent :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (3)$$

En remplaçant  $\beta$  par  $-\beta$  :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned}$$

En remplaçant  $\alpha$  par  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  dans la relation (3) :

$$\begin{aligned} \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned}$$

En remplaçant  $\beta$  par  $-\beta$  :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(-\beta) - \cos(\alpha) \sin(-\beta) \\ &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \end{aligned}$$

Pour la fonction tangente :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) / [\cos(\alpha) \cos(\beta)] + \cos(\alpha) \sin(\beta) / [\cos(\alpha) \cos(\beta)]}{1 - \sin(\alpha) \sin(\beta) / [\cos(\alpha) \cos(\beta)]} \\ &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

En remplaçant  $\beta$  par  $-\beta$  :

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

□

L'identité (3) est la plus antisymétrique, c'est la seule à retenir.

### 3 ADDITION DE DEUX ANGLES

#### 3.1 Angle double

En posant  $\beta = \alpha$  dans le théorème 3.1 :

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha) \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times \frac{2\cos(\alpha)}{2\cos(\alpha)} \\ &= \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$$

et :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times \frac{2\sin(\alpha)}{2\sin(\alpha)} \\ &= \frac{2\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

En se servant des identités (1) :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(2\alpha) = \frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)} - \frac{\tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \\ \sin(2\alpha) = 2 \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \\ \sin(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

#### 3.2 Transformation de produits en sommes

À partir du théorème 3.1, on déduit :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]\end{aligned} \tag{4}$$

### 3.3 Réduction du carré

En posant  $\alpha = \beta$  dans les identités précédentes :

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2}[\cos(2\alpha) + 1] \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)]\end{aligned}$$

d'où :

$$\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha) + 1}$$

### 3.4 Transformation de sommes en produits

Dans les relations (4), en posant  $\gamma = \alpha + \beta$  et  $\delta = \alpha - \beta$ , c'est à dire,  $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$  et  $\beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$ , on a :

$$\begin{aligned}\cos \gamma + \cos \delta &= 2 \cos \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right) \\ \cos \delta - \cos \gamma &= 2 \sin \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right) \\ \sin \gamma + \sin \delta &= 2 \sin \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right) \\ \sin \gamma - \sin \delta &= 2 \sin \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right) \cos \left( \frac{\gamma + \delta}{2} \right)\end{aligned}$$

## 4 FORMULE DE DE MOIVRE

---

Le développement en série de la fonction cosinus s'écrit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

et celui de la fonction sinus s'écrit :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Le développement en série de la fonction exponentielle s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

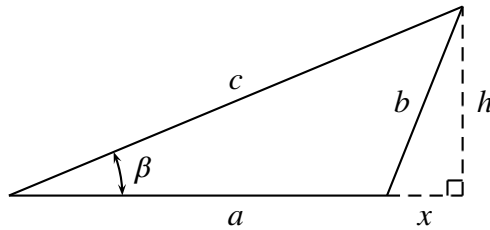
si bien que :

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\end{aligned}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

**Théorème 5.1.** Dans le triangle quelconque :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$



*Démonstration.* Nous avons :

$$\begin{cases} \sin(\beta) = \frac{h}{c} \\ \cos(\beta) = \frac{a+x}{c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + x^2 \\ &= [c \sin(\beta)]^2 + [c \cos(\beta) - a]^2 \\ &= c^2 \sin^2(\beta) + c^2 \cos^2(\beta) - 2ac \cos(\beta) + a^2 \\ &= c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta) \end{aligned}$$

□

**Remarque.** Angle

Pour tout cercle, on remarque que la circonférence  $\mathcal{C}$  est proportionnelle au diamètre  $D$ . Le coefficient de proportionnalité est noté  $\pi$  et l'on a :

$$\mathcal{C} = \pi D$$

$$\mathcal{C} = 2\pi r$$

où  $r$  est le rayon du cercle. Une longueur quelconque  $l$  d'un arc de cercle est par conséquent elle aussi proportionnelle au rayon du cercle :

$$l = \alpha r$$

On appelle  $\alpha$  l'angle sous lequel on voit l'arc de longueur  $l$  depuis le centre du cercle.  $\alpha$  est le rapport de deux longueurs, il n'a donc pas de dimension, mais il a une unité, le radian. Quand  $l = \mathcal{C}$ ,  $\alpha = 2\pi$ .