

# LA FORMULE DE STIRLING

Olivier Castéra  
o.castera@free.fr  
sciences-physiques.neocities.org

27 décembre 2025

## Résumé

Démonstration de la formule de James Stirling,  $\ln(n!) \approx n \ln n - n$ .

## TABLE DES MATIÈRES

---

|                                                  |          |
|--------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Résultats préliminaires</b>                 | <b>1</b> |
| 1.1 Fonction Pi de Gauss . . . . .               | 1        |
| 1.2 Intégrale de Gauss . . . . .                 | 2        |
| <b>2 Démonstration de la formule de Stirling</b> | <b>3</b> |

## 1 RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

---

### 1.1 Fonction Pi de Gauss

**Théorème 1.1.**

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

*Démonstration.* On intègre par parties en posant :  $u = x^n$ ,  $u' = nx^{n-1}$ ,  $v' = e^{-x}$ ,  $v = -e^{-x}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nx^{n-1} (-e^{-x}) dx \\ &= -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

On réitère l'intégration par parties sur le dernier terme :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} - n[x^{n-1} e^{-x}]_0^{+\infty} + n(n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx \\
 &= -[(x^n + nx^{n-1}) e^{-x}]_0^{+\infty} + n(n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx \\
 &= -\left\{ [x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + n(n-1) \times \dots \times [n - (n-1)]x] e^{-x} \right\}_0^{+\infty} + n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\
 &= n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\
 &= n! [-e^{-x}]_0^{+\infty} \\
 &= n!
 \end{aligned}$$

□

## 1.2 Intégrale de Gauss

**Théorème 1.2.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

*Démonstration.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^{1/2}$$

Les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  étant indépendantes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]^{1/2}$$

Passons en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \theta \\
 y &= \rho \sin \theta
 \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \\
 &= \rho^2
 \end{aligned}$$

Cherchons l'expression de l'élément de surface  $d^2s(\rho, \theta)$  qui remplacera celui en coordonnées cartésiennes  $dx dy$ . Le vecteur position s'écrit :

$$\begin{aligned}
 OM &= xi + yj \\
 &= \rho \cos \theta i + \rho \sin \theta j
 \end{aligned}$$

et les vecteurs de base,

$$\begin{aligned}
 e_\rho &= \frac{\partial OM}{\partial \rho} \\
 &= \cos \theta i + \sin \theta j \\
 e_\theta &= \frac{\partial OM}{\partial \theta} \\
 &= -\rho \sin \theta i + \rho \cos \theta j
 \end{aligned}$$

## 2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

Nous en déduisons leurs normes,

$$\begin{aligned}\|e_\rho\| &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 1 \\ \|e_\theta\| &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta} \\ &= \rho\end{aligned}$$

Pour construire l'élément de surface  $d^2s$ , prenons une variation le long de la coordonnée  $\rho$ ,

$$\begin{aligned}\delta OM &= \frac{\partial OM}{\partial \rho} d\rho \\ &= e_\rho d\rho\end{aligned}$$

et une variation le long de la coordonnée  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}\delta OM &= \frac{\partial OM}{\partial \theta} d\theta \\ &= e_\theta d\theta\end{aligned}$$

puis prenons la norme de leur produit vectoriel :

$$\begin{aligned}d^2s &= \|e_\rho d\rho \times e_\theta d\theta\| \\ &= \rho d\rho d\theta\end{aligned}$$

L'espace est parcouru dans son ensemble pour  $\rho$  variant de 0 à  $+\infty$  et pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$ , si bien que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \left( \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho \right)^{1/2} \\ &= \left( 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \right)^{1/2} \\ &= \left\{ 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

□

## 2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

**Théorème 2.1.**

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

*Démonstration.* D'après le théorème (1.1) :

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

## 2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

On commence par sortir  $n^{n+1}$  de l'intégrale grâce au changement de variable  $x = ns$ ,  $dx = nds$ . Les bornes d'intégration restent inchangées.

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^{+\infty} (ns)^n e^{-ns} nds \\ &= n^{n+1} \int_0^{+\infty} s^n e^{-ns} ds \end{aligned}$$

On regroupe les termes sous l'exponentielle,

$$n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n(\ln s - s)} ds$$

dans le but futur de sortir  $e^{-n}$  de l'intégrale. Pour pouvoir utiliser le développement en séries entières de la fonction logarithme népérien on effectue le changement de variable  $s = 1 + w$ .

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\begin{aligned} n! &= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n[\ln(1+w) - (1+w)]} dw \\ &= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n\left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} + \frac{w^7}{7} - \frac{w^8}{8} + \frac{w^9}{9} - \frac{w^{10}}{10} + \frac{w^{11}}{11} - \frac{w^{12}}{12} + \dots - 1 - w\right)} dw \\ &= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n\left(-1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} + \frac{w^7}{7} - \frac{w^8}{8} + \frac{w^9}{9} - \frac{w^{10}}{10} + \frac{w^{11}}{11} - \frac{w^{12}}{12} + \dots\right)} dw \\ &= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{-n} \times e^{\frac{-nw^2}{2}} \times e^{\frac{nw^3}{3}} \times e^{\frac{-nw^4}{4}} \times e^{\frac{nw^5}{5}} \times e^{\frac{-nw^6}{6}} \\ &\quad \times e^{\frac{nw^7}{7}} \times e^{\frac{-nw^8}{8}} \times e^{\frac{nw^9}{9}} \times e^{\frac{-nw^{10}}{10}} \times e^{\frac{nw^{11}}{11}} \times e^{\frac{-nw^{12}}{12}} \times \dots \times dw \\ &= n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times e^{\frac{nw^3}{3}} \times e^{\frac{-nw^4}{4}} \times e^{\frac{nw^5}{5}} \times e^{\frac{-nw^6}{6}} \\ &\quad \times e^{\frac{nw^7}{7}} \times e^{\frac{-nw^8}{8}} \times e^{\frac{nw^9}{9}} \times e^{\frac{-nw^{10}}{10}} \times e^{\frac{nw^{11}}{11}} \times e^{\frac{-nw^{12}}{12}} \times \dots \times dw \end{aligned}$$

et nous avons sorti  $e^{-n}$  de l'intégrale. Dans l'intégrale, on développe en série entière les fonctions exponentielles, excepté la première.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 n! &= n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times \left( 1 + \frac{nw^3}{3} + \frac{n^2 w^6}{18} + \frac{n^3 w^9}{162} + \frac{n^4 w^{12}}{1944} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - \frac{nw^4}{4} + \frac{n^2 w^8}{32} - \frac{n^3 w^{12}}{384} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{nw^5}{5} + \frac{n^2 w^{10}}{50} + \frac{n^3 w^{15}}{750} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - \frac{nw^6}{6} + \frac{n^2 w^{12}}{72} - \frac{n^3 w^{18}}{1296} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{nw^7}{7} + \frac{n^2 w^{14}}{98} + \frac{n^3 w^{21}}{2058} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - \frac{nw^8}{8} + \frac{n^2 w^{16}}{128} - \frac{n^3 w^{24}}{3072} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{nw^9}{9} + \frac{n^2 w^{18}}{162} + \frac{n^3 w^{27}}{4374} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - \frac{nw^{10}}{10} + \frac{n^2 w^{20}}{200} - \frac{n^3 w^{30}}{6000} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{nw^{11}}{11} + \frac{n^2 w^{22}}{242} + \frac{n^3 w^{33}}{7986} + \dots \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - \frac{nw^{12}}{12} + \frac{n^2 w^{24}}{288} - \frac{n^3 w^{36}}{10368} + \dots \right) \\
 &\quad \times \dots \times dw
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n! &= n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times \left( 1 + \frac{nw^3}{3} - \frac{nw^4}{4} + \frac{nw^5}{5} - \frac{nw^6}{6} + \frac{nw^7}{7} - \frac{nw^8}{8} + \frac{nw^9}{9} \right. \\
 &\quad - \frac{nw^{10}}{10} + \frac{nw^{11}}{11} - \frac{nw^{12}}{12} + \dots + \frac{n^2 w^6}{18} - \frac{n^2 w^7}{12} + \frac{n^2 w^8}{32} \\
 &\quad + \frac{n^2 w^8}{15} - \frac{n^2 w^9}{20} - \frac{n^2 w^9}{18} + \frac{n^2 w^{10}}{24} + \frac{n^2 w^{10}}{21} + \frac{n^2 w^{10}}{50} \\
 &\quad - \frac{n^2 w^{11}}{30} - \frac{n^2 w^{11}}{28} - \frac{n^2 w^{11}}{24} + \frac{n^2 w^{12}}{35} + \frac{n^2 w^{12}}{32} + \frac{n^2 w^{12}}{72} \\
 &\quad + \dots + \frac{n^3 w^9}{162} - \frac{n^3 w^{10}}{72} + \frac{n^3 w^{11}}{96} + \frac{n^3 w^{11}}{90} - \frac{n^3 w^{12}}{108} \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{n^4 w^{12}}{1944} + \dots \right) dw
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n! &= n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \left[ 1 + \frac{nw^3}{3} - \frac{nw^4}{4} + \frac{nw^5}{5} + \left( -\frac{n}{6} + \frac{n^2}{18} \right) w^6 \right. \\
 &\quad + \left( \frac{n}{7} - \frac{n^2}{12} \right) w^7 + \left( -\frac{n}{8} + \frac{47n^2}{480} \right) w^8 + \left( \frac{n}{9} - \frac{19n^2}{180} + \frac{n^3}{162} \right) w^9 \\
 &\quad + \left( -\frac{n}{10} + \frac{459n^2}{4200} - \frac{n^3}{72} \right) w^{10} + \left( \frac{n}{11} - \frac{93n^2}{840} + \frac{31n^3}{1440} \right) w^{11} \\
 &\quad \left. + \left( -\frac{n}{12} + \frac{743n^2}{10080} - \frac{n^3}{108} + \frac{n^4}{1944} \right) w^{12} + \dots \right] dw
 \end{aligned}$$

## 2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

Pour intégrer l'exponentielle dans l'intégrale, on effectue le changement de variable  $v = \sqrt{\frac{n}{2}} w$ , d'où  $w = \sqrt{\frac{2}{n}} v$  et  $dw = \sqrt{\frac{2}{n}} dv$ . La borne d'intégration inférieure,  $w = -1$ , devient  $v = -\sqrt{\frac{n}{2}}$ .

$$\begin{aligned}\frac{nw^3}{3} &= \frac{n}{3} \left(\frac{2}{n}\right)^{3/2} v^3 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} v^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{nw^4}{4} &= \frac{n}{4} \left(\frac{2}{n}\right)^2 v^4 \\ &= \frac{v^4}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{nw^5}{5} &= \frac{n}{5} \left(\frac{2}{n}\right)^{5/2} v^5 \\ &= \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{6} + \frac{n^2}{18}\right) w^6 &= \left(-\frac{n}{6} + \frac{n^2}{18}\right) \frac{8}{n^3} v^6 \\ &= \left(-\frac{4}{3n^2} + \frac{4}{9n}\right) v^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{7} - \frac{n^2}{12}\right) w^7 &= \left(\frac{n}{7} - \frac{n^2}{12}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{7/2} v^7 \\ &= \left(\frac{8}{7} \sqrt{\frac{2}{n^5}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}}\right) v^7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{8} + \frac{47n^2}{480}\right) w^8 &= \left(-\frac{n}{8} + \frac{47n^2}{480}\right) \frac{16}{n^4} v^8 \\ &= \left(-\frac{2}{n^3} + \frac{47}{30n^2}\right) v^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{9} - \frac{19n^2}{180} + \frac{n^3}{162}\right) w^9 &= \left(\frac{n}{9} - \frac{19n^2}{180} + \frac{n^3}{162}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{9/2} v^9 \\ &= \left(\frac{16}{9} \sqrt{\frac{2}{n^7}} - \frac{76}{45} \sqrt{\frac{2}{n^5}} + \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}}\right) v^9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{10} + \frac{459n^2}{4200} - \frac{n^3}{72}\right) w^{10} &= \left(-\frac{n}{10} + \frac{459n^2}{4200} - \frac{n^3}{72}\right) \frac{32}{n^5} v^{10} \\ &= \left(-\frac{16}{5n^4} + \frac{612}{175n^3} - \frac{4}{9n^2}\right) v^{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{n}{11} - \frac{93n^2}{840} + \frac{31n^3}{1440} \right) w^{11} &= \left( \frac{n}{9} - \frac{93n^2}{840} + \frac{31n^3}{1440} \right) \left( \frac{2}{n} \right)^{11/2} v^{11} \\ &= \left( \frac{16}{9} \sqrt{\frac{2}{n^9}} - \frac{744}{210} \sqrt{\frac{2}{n^7}} + \frac{31}{45} \sqrt{\frac{2}{n^5}} \right) v^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{n}{12} + \frac{743n^2}{10080} - \frac{n^3}{108} + \frac{n^4}{1944} \right) w^{12} &= \left( -\frac{n}{12} + \frac{743n^2}{10080} - \frac{n^3}{108} + \frac{n^4}{1944} \right) \times \frac{64}{n^6} v^{12} \\ &= \left( -\frac{16}{3n^5} + \frac{1486}{315n^4} - \frac{16}{27n^3} + \frac{8}{243n^2} \right) v^{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n! = n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} &\left( 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} v^3 - \frac{v^4}{n} + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^5 \right. \\ &+ \frac{4v^6}{9n} - \frac{4v^6}{3n^2} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^7 + \frac{47v^8}{30n^2} \\ &\left. + \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^9 - \frac{4v^{10}}{9n^2} + \frac{8v^{12}}{243n^2} + \dots \right) dv \end{aligned}$$

où les termes suivants sont en  $n^{-k}$  avec  $k > 2$ .

$$\begin{aligned} n! = \sqrt{2n} \left( \frac{n}{e} \right)^n &\left( \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} dv + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^3 e^{-v^2} dv \right. \\ &- \frac{1}{n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^5 e^{-v^2} dv \\ &+ \frac{4}{9n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv - \frac{4}{3n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\ &- \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^7 e^{-v^2} dv + \frac{47}{30n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \\ &+ \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^9 e^{-v^2} dv - \frac{4}{9n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \\ &\left. + \frac{8}{243n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^{12} e^{-v^2} dv + \dots \right) \end{aligned}$$

de la forme,

$$\begin{aligned} n! = \sqrt{2n} \left( \frac{n}{e} \right)^n &(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_4 I_4 + \alpha_5 I_5 + \alpha_6 I_6 \\ &+ \alpha_7 I_7 + \alpha_8 I_8 + \alpha_9 I_9 + \alpha_{10} I_{10} + \alpha_{11} I_{11} + \dots) \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{n}, \quad \alpha_4 = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}}, \\ \alpha_5 &= \frac{4}{9n}, \quad \alpha_6 = -\frac{4}{3n^2}, \quad \alpha_7 = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}}, \quad \alpha_8 = \frac{47}{30n^2}, \\ \alpha_9 &= \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}}, \quad \alpha_{10} = -\frac{4}{9n^2}, \quad \alpha_{11} = \frac{8}{243n^2} \end{aligned}$$

## 2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

On calcule chaque intégrale en faisant tendre  $n$  vers l'infini. Pour la première on utilise le théorème (1.2) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^3 e^{-v^2} dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

car la fonction dans  $I_2$  est impaire. De même  $I_4 = I_7 = I_9 = 0$ .

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties :  $y = v^3$ ,  $y' = 3v^2$ ,  $z' = ve^{-v^2}$ ,  $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$ ,

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\{ \left[ -\frac{1}{2}v^3 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-v^2} dv \end{aligned}$$

On intègre de nouveau par parties :

$$y = v, y' = 1, z' = ve^{-v^2}, z = -\frac{1}{2}e^{-v^2},$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{2} \left\{ \left[ -\frac{1}{2}v e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties :  $y = v^5$ ,  $y' = 5v^4$ ,  $z' = ve^{-v^2}$ ,  $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$ ,

$$\begin{aligned} I_5 &= \left\{ \left[ -\frac{1}{2}v^5 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{5}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\ &= \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties :  $y = v^7, y' = 7v^6, z' = ve^{-v^2}, z = -\frac{1}{2}e^{-v^2},$

$$\begin{aligned} I_8 &= \left\{ \left[ -\frac{1}{2}v^7 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\ &= \frac{7}{2} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{105}{16} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties :  $y = v^9, y' = 9v^8, z' = ve^{-v^2}, z = -\frac{1}{2}e^{-v^2},$

$$\begin{aligned} I_{10} &= \left\{ \left[ -\frac{1}{2}v^9 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \\ &= \frac{9}{2} \times \frac{105}{16} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{945}{32} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{12} e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties :  $y = v^{11}, y' = 11v^{10}, z' = ve^{-v^2}, z = -\frac{1}{2}e^{-v^2},$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left\{ \left[ -\frac{1}{2}v^{11} e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{11}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{11}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \\ &= \frac{11}{2} \times \frac{945}{32} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{10395}{64} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{2n} \left( \frac{n}{e} \right)^n (\alpha_1 I_1 + \alpha_3 I_3 + \alpha_5 I_5 + \alpha_6 I_6 + \alpha_8 I_8 + \alpha_{10} I_{10} + \alpha_{11} I_{11} + \dots) \\ &= \sqrt{2n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( \sqrt{\pi} - \frac{1}{n} \times \frac{3}{4} \sqrt{\pi} + \frac{4}{9n} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} - \frac{4}{3n^2} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{47}{30n^2} \times \frac{105}{16} \sqrt{\pi} - \frac{4}{9n^2} \times \frac{945}{32} \sqrt{\pi} + \frac{8}{243n^2} \times \frac{10395}{64} \sqrt{\pi} + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( 1 - \frac{3}{4n} + \frac{5}{6n} - \frac{5}{2n^2} + \frac{329}{32n^2} - \frac{105}{8n^2} + \frac{385}{72n^2} + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left[ 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

## 2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

À partir du théorème 2.1 p.3 nous obtenons directement la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}\ln(n!) &\approx \ln\left(\sqrt{2\pi n}\right) + n \ln\left(\frac{n}{e}\right) \\ &\approx \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \ln n - n \ln e\end{aligned}$$

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n$$