

LA LOI NORMALE

Olivier Castéra
o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

27 décembre 2025

Résumé

La loi normale est la loi asymptotique de la loi binomiale lorsque le nombre de tirages tend vers l'infini.

TABLE DES MATIÈRES

1 La loi binomiale	2
2 La loi normale	8
2.1 Théorème de De Moivre ou de Laplace	8
2.2 La loi normale est normalisée	13
2.3 Représentation graphique	13
3 La loi de Poisson	15
3.1 Établissement de la loi de Poisson	15
3.2 La loi de Poisson est normalisée	16
4 Applications	16
4.1 Exemple 1	16
4.2 Exemple 2	19

1 LA LOI BINOMIALE

C'est la loi de probabilité discrète des tirages avec remise, dans une urne à deux catégories. Soit une urne contenant N boules, N_1 blanches et N_2 noires :

$$N_1 + N_2 = N$$

Les boules blanches sont dans la proportion p , et les noires dans la proportion q :

$$p \triangleq \frac{N_1}{N}$$

$$q \triangleq \frac{N_2}{N}$$

Pour une urne contenant au moins une boule de chaque couleur :

$$0 < p < 1$$

$$0 < q < 1$$

De plus

$$N_1 + N_2 = N$$

$$\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = 1$$

$$p + q = 1$$

A chaque tirage avec remise, la probabilité de sortir une boule blanche est p , celle de sortir une boule noire est q .

Tirer au hasard une seule boule parmi des boules de deux couleurs différentes constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre p . Dans les exemples suivants nous considérons une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Exemples. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

$$p$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis une noire ?

$$pq$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et une noire, peu importe l'ordre ?

$$pq + qp = 2pq$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis deux noires ?

$$pq^2 = pq^2$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et deux noires, peu importe l'ordre ?

$$pq^2 + qpq + qq p = 3pq^2$$

Quelle est la probabilité de tirer trois boules noires ?

$$q^3$$

Quelle est la probabilité de sortir dans un ordre donné x_i boules blanches et y_i boules noires lors de n tirages avec remise ?

$$\mathbb{P}_i(x_i) = p^{x_i} q^{y_i}$$

Le nombre n de boules tirées est égale au nombre de boules blanches tirées plus le nombre de boules noires tirées :

$$n = x_i + y_i$$

si bien que :

$$\mathbb{P}_i(x_i) = p^{x_i} q^{n-x_i}$$

Si l'on ne spécifie pas l'ordre, nous devons permuter les n tirages (ce sont les lettres p et q que l'on permute et non les boules), soit $n!$ permutations, et supprimer les permutations inutiles des lettres p entre elles, $x_i!$ permutations, et des lettres q entre elles, $(n - x_i)!$ permutations.

La probabilité de sortir dans n'importe quel ordre x_i boules blanches et $n - x_i$ boules noires lors de n tirages avec remise s'écrit alors :

$$\mathbb{P}_i(x_i) = \frac{n!}{x_i!(n - x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i} \quad (1)$$

$$\mathbb{P}_i(x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$$

où $C_n^{x_i}$ est le nombre de combinaisons de x_i lettres p prises parmi n lettres p et q . Le nombre x_i de boules blanches tirées est compris entre 0 et n :

$$0 \leq x_i \leq n$$

Nous poserons $i = 0, \dots, n$ de sorte que $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n$.

Exemple 1. Appliquons la formule aux exemples précédents. Quelle est la probabilité de tirer trois boules noires ?

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0) &= \frac{3!}{0!(3-0)!} p^0 q^3 \\ &= q^3 \end{aligned}$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et deux noires, peu importe l'ordre ?

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1) &= \frac{3!}{1!(3-1)!} p^1 q^2 \\ &= 3pq^2 \end{aligned}$$

La relation (1) est le terme de rang x_i dans le développement du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (q + p)^n &= q^n + nq^{n-1}p + \dots + \frac{n! p^{x_i} q^{n-x_i}}{x_i!(n - x_i)!} + \dots + npq^{n-1} + p^n \\ 1^n &= \sum_{x_i=0}^n \frac{n!}{x_i!(n - x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i} \\ 1 &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_i(x_i) \end{aligned}$$

Cette loi de probabilité $\mathbb{P}_i(x_i)$ faisant intervenir le binôme de Newton s'appelle loi binomiale. Elle se note $\mathcal{B}(n; p)$, où le nombre de tirages n et la probabilité p sont les paramètres de la loi.

Définition 1.1. On appelle *variable aléatoire* discrète X , une *fonction* qui associe à chaque résultat d'une expérience, une valeur x inconnue d'avance, parmi un ensemble de valeurs possibles $x_1, x_2, \dots$.

Exemple 2. La variable aléatoire X de la loi binomiale est la fonction qui associe à n tirages le nombre x de boules blanches obtenues. La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x s'écrit en toute rigueur $\mathbb{P}(X = x)$.

La variable aléatoire X de la loi de Bernoulli est la fonction qui associe à un unique tirage la couleur de la boule obtenue parmi seulement deux couleurs possibles. X prend la valeur 1 en cas de succès (tirage d'une boule blanche) et 0 en cas d'échec (tirage d'une boule noire). La loi de Bernoulli de paramètre p s'écrit :

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$$

Une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes permet la construction d'une variable aléatoire qui a pour loi de probabilité la loi binomiale.

Définition 1.2. On appelle *espérance mathématique* ou valeur moyenne de la variable aléatoire discrète X , la somme des produits de toutes les valeurs x_i possibles de cette variable aléatoire par les probabilités $\mathbb{P}_i(X = x_i)$ de ces valeurs. On la note $\bar{x}$, $E[X]$, $M[X]$, μ , ou m_i :

$$\bar{x} \triangleq \sum_{i=0}^n x_i \mathbb{P}_i(X = x_i)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X , on a :

$$\bar{x} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Exemple 3. Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. Si l'on effectue 3 tirages avec remise, combien sortira-t-on de boules blanches en moyenne ?

$$\bar{x} = 1\mathbb{P}(X = 1) + 2\mathbb{P}(X = 2) + 3\mathbb{P}(X = 3)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{4}{10} \times \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times \frac{3!}{3!(3-1)!} \\ &= 0.432 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \left(\frac{4}{10}\right)^2 \times \frac{6}{10} \times \frac{3!}{2!(3-2)!} \\ &= 0.288 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \left(\frac{4}{10}\right)^3 \times \frac{3!}{3!(3-3)!} \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 0.432 + 2 \times 0.288 + 3 \times 0.64 \\ &= 1.2\end{aligned}$$

Nous pouvons espérer sortir 1,2 boule blanche en moyenne sur trois tirages.

Définition 1.3. On appelle *moment initial d'ordre s* d'une variable aléatoire discrète X , la fonction $\alpha_s[X]$ définie par :

$$\alpha_s[X] \triangleq \sum_{i=0}^n x_i^s \mathbb{P}_i(X = x_i)$$

Initial signifie que le moment est calculé par rapport à l'origine des coordonnées. Dans le cas d'une variable aléatoire continue X , on a :

$$\alpha_s[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx$$

Par définition, le moment d'ordre un, $\alpha_1[X]$, se confond avec l'espérance mathématique $\bar{x}$ de la variable aléatoire X :

$$\alpha_1[X] \triangleq \bar{x}$$

Les moments permettent de caractériser la loi de probabilité en donnant sa position, son degré de dispersion, et sa forme. Ils peuvent être calculés grâce à la fonction génératrice des moments.

Définition 1.4. On appelle *fonction génératrice des moments $\phi(u)$* , la fonction définie par :

$$\begin{aligned}\phi(u) &\triangleq \sum_{i=0}^n u^{x_i} \mathbb{P}_i(X = x_i) & (2) \\ &= \sum_{i=0}^n u^{x_i} \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} (pu)^{x_i} q^{n-x_i} \\ &= (q + pu)^n & (3)\end{aligned}$$

Calculons le moment initial d'ordre zéro grâce à sa définition et à la fonction génératrice des moments :

$$\begin{aligned}\alpha_0[X] &\triangleq \sum_{i=0}^n x_i^0 \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \phi(1) \\ &= (q + p)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Les dérivations successives de $\phi(u)$ par rapport à u vont nous permettre de trouver l'expression des moments d'ordres suivants. En dérivant les deux expressions (2) et (3) de $\phi(u)$ données à la

définition 1.4, nous avons :

$$\phi'(u) = \sum_{i=0}^n x_i u^{x_i-1} \mathbb{P}_i(X = x_i) \quad (4)$$

$$= n(q + pu)^{n-1}p \quad (5)$$

Le moment d'ordre un (l'espérance mathématique), est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha_1[X] &\triangleq \sum_{i=0}^n x_i \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \phi'(1) \\ &= n(q + p)^{n-1}p \\ &= np \end{aligned}$$

C'est le nombre moyen de boules blanches que je peux espérer tirer lors de n tirages.

Exemple 4. Reprenons l'exemple (3). Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. Si l'on effectue 3 tirages avec remise, combien sortira-t-on de boules blanches en moyenne ?

$$\begin{aligned} \bar{x} &= np \\ &= 3 \times \frac{4}{10} \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

Calculons la dérivée seconde de $\phi(u)$ en dérivant les deux expressions (4) et (5) :

$$\begin{aligned} \phi''(u) &= \sum_{i=0}^n x_i(x_i - 1)u^{x_i-2} \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 u^{x_i-2} \mathbb{P}_i(X = x_i) - \sum_{i=0}^n x_i u^{x_i-2} \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= n(n - 1)(q + pu)^{n-2}p^2 \end{aligned} \quad (6)$$

En utilisant (6), le moment d'ordre deux est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha_2[X] &\triangleq \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \phi''(1) + \alpha_1[X] \\ &= n(n - 1)p^2 + np \\ &= n^2p^2 - np^2 + np \\ &= n^2p^2 + np(1 - p) \\ &= \bar{x}^2 + npq \end{aligned} \quad (7)$$

Définition 1.5. On appelle *variable aléatoire centrée* associée à X , et l'on note $\hat{X}$, la différence :

$$\hat{X} = X - \bar{X}$$

où $\bar{X}$ est la variable aléatoire qui associe à n tirages le nombre moyen de boules blanches tirées.

Définition 1.6. On appelle *moment centré d'ordre s* d'une variable aléatoire discrète X , la fonction $\mu_s[X]$ définie par :

$$\mu_s[X] \triangleq \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^s \mathbb{P}_i(X = x_i)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X , on a :

$$\mu_s[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^s f(x) dx$$

Le moment centré d'ordre un est nul :

$$\begin{aligned} \mu_1[X] &\triangleq \sum_{i=0}^n \hat{x}_i \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x}) \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i \mathbb{P}_i(X = x_i) - \bar{x} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \bar{x} - \bar{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Calculons le moment centré d'ordre deux :

$$\begin{aligned} \mu_2[X] &\triangleq \sum_{i=0}^n \hat{x}_i^2 \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2 \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbb{P}_i(X = x_i) - 2\bar{x} \sum_{i=0}^n x_i \mathbb{P}_i(X = x_i) + \bar{x}^2 \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_i(X = x_i) \\ &= a_2[X] - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 \\ &= a_2[X] - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Avec (7),

$$\begin{aligned} \mu_2[X] &= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 \\ &= np(1 - p) \\ &= npq \end{aligned}$$

Définition 1.7. On appelle *variance* de la variable aléatoire discrète X , son moment centré d'ordre deux. C'est l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée associée. On la note $V[X]$ ou V_i ou $D[X]$ ou encore D_i :

$$V[X] \triangleq \sum_{i=0}^n \hat{x}_i^2 \mathbb{P}_i(X = x_i)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X , on a :

$$V[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}^2 f(x) dx$$

Définition 1.8. On appelle *écart quadratique moyen* de la variable aléatoire X , la racine carrée de la variance. On le note $\sigma[X]$:

$$\sigma[X] \triangleq \sqrt{V[X]}$$

2 LA LOI NORMALE

2.1 Théorème de De Moivre ou de Laplace

Théorème. De De Moivre ou de Laplace

La probabilité asymptotique $\mathbb{P}(X = x)$ de tirer x boules blanches lorsque le nombre de tirage n tend vers l'infini, tend vers une loi gaussienne :

$$\mathbb{P}(X = x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$$

Démonstration. Lorsque n tend vers l'infini, nous pouvons utiliser la formule de Stirling¹ pour approximer factorielle n :

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Les deux quantités sont asymptotiques, leur rapport tend vers 1 quand n tend vers l'infini. En réalité la formule de Stirling donne de « bonnes » valeurs dès les premiers entiers. Prenons le logarithme :

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)$$

La relation (1) donne :

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &= \ln \left[\frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i} \right] \\ &= \ln(n!) - \ln(x_i!) - \ln[(n-x_i)!] + x_i \ln p + (n-x_i) \ln q \end{aligned}$$

Appliquons trois fois la formule de Stirling² en supposant le nombre de tirages et les nombres de boules blanches et noires tirées grands :

$$\begin{cases} n \gg 1 \\ x_i \gg 1 \\ n - x_i \gg 1 \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas où x_i ou $n - x_i$ est petit devant n nous ferons une autre approximation (voir le paragraphe 3 sur la loi de Poisson).

1. Voir Stirling.pdf

2. Georges Bresson, *probabilités et statistiques*, édition Meral 1985

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
 &\quad - x_i \ln x_i + x_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi x_i) \\
 &\quad - (n - x_i) \ln(n - x_i) + (n - x_i) - \frac{1}{2} \ln[2\pi(n - x_i)] \\
 &\quad + x_i \ln p + (n - x_i) \ln q \\
 &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
 &\quad - x_i \ln x_i - \frac{1}{2} \ln(2\pi x_i) \\
 &\quad - (n - x_i) \ln(n - x_i) - \frac{1}{2} \ln[2\pi(n - x_i)] \\
 &\quad + x_i \ln p + (n - x_i) \ln q
 \end{aligned}$$

On effectue un changement de variable pour utiliser la variable aléatoire centrée $\hat{X}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_i &= x_i - \bar{x} \\
 x_i &= \bar{x} + \hat{x}_i \\
 &= np + \hat{x}_i
 \end{aligned}$$

$n - x_i$ devient :

$$\begin{aligned}
 n - x_i &= n - np - \hat{x}_i \\
 &= nq - \hat{x}_i
 \end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
 &\quad - (np + \hat{x}_i) \ln(np + \hat{x}_i) - \frac{1}{2} \ln[2\pi(np + \hat{x}_i)] \\
 &\quad - (nq - \hat{x}_i) \ln(nq - \hat{x}_i) - \frac{1}{2} \ln[2\pi(nq - \hat{x}_i)] \\
 &\quad + (np + \hat{x}_i) \ln p + (nq - \hat{x}_i) \ln q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
 &\quad - (np + \hat{x}_i) \ln \left[np \left(\frac{np + \hat{x}_i}{np} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left[np \left(\frac{np + \hat{x}_i}{np} \right) \right] \\
 &\quad - (nq - \hat{x}_i) \ln \left[nq \left(\frac{nq - \hat{x}_i}{nq} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left[nq \left(\frac{nq - \hat{x}_i}{nq} \right) \right] \\
 &\quad + (np + \hat{x}_i) \ln p + (nq - \hat{x}_i) \ln q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
 &\quad - (np + \hat{x}_i) \left[\ln \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{np} \right) + \ln(np) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{np} \right) - \frac{1}{2} \ln(np) \\
 &\quad - (nq - \hat{x}_i) \left[\ln \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{nq} \right) + \ln(nq) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{nq} \right) - \frac{1}{2} \ln(nq) \\
 &\quad + (np + \hat{x}_i) \ln p + (nq - \hat{x}_i) \ln q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
 &\quad - \left(np + \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{np} \right) - (np + \hat{x}_i) \ln(np) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(np) \\
 &\quad - \left(nq - \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{nq} \right) - (nq - \hat{x}_i) \ln(nq) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(nq) \\
 &\quad + (np + \hat{x}_i) \ln p + (nq - \hat{x}_i) \ln q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln n - \left(np + \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{np} \right) \\
 &\quad - np \ln n - np \ln p - \hat{x}_i \ln n - \hat{x}_i \ln p \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln p \\
 &\quad - \left(nq - \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{nq} \right) \\
 &\quad - nq \ln n - nq \ln q + \hat{x}_i \ln n + \hat{x}_i \ln q \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln q \\
 &\quad + np \ln p + \hat{x}_i \ln p + nq \ln q - \hat{x}_i \ln q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx n \ln n - n(p + q) \ln n - \frac{1}{2} \ln p - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \ln q \\
 &\quad - \left(np + \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{np} \right) \\
 &\quad - \left(nq - \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{nq} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \left(np + \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{np} \right) \\
 &\quad - \left(nq - \hat{x}_i + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{nq} \right)
 \end{aligned}$$

Le théorème de Jacques Bernoulli³ stipule que lors d'un grand nombre d'expériences, la fréquence d'un évènement converge en probabilité vers la probabilité de cet évènement.

3. Voir Théorème central limite.pdf

Par exemple lors de n tirages on sort x boules blanches. Alors, lorsque n devient grand, la fréquence x/n de l'évènement sortir une boule blanche tend vers p .

Nous nous plaçons donc dans le cas le plus probable :

$$\begin{aligned}\frac{x}{n} &\approx p \\ x &\approx np\end{aligned}$$

la variable x étant maintenant un rationnel. Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\hat{x}}{np} &= \frac{x - np}{np} \\ &\approx 0\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\hat{x}}{nq} &= \frac{\hat{x}}{n(1-p)} \\ &= \frac{\hat{x}}{np} \times \frac{p}{1-p} \\ &\approx 0\end{aligned}$$

par conséquent on peut utiliser le développement limité à l'ordre deux du logarithme népérien. Pour ε petit :

$$\begin{aligned}\ln(1 + \varepsilon) &\approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \\ \ln\left(1 + \frac{\hat{x}}{np}\right) &\approx \frac{\hat{x}}{np} - \frac{\hat{x}^2}{2n^2p^2} \\ \ln\left(1 - \frac{\hat{x}}{nq}\right) &\approx -\frac{\hat{x}}{nq} - \frac{\hat{x}^2}{2n^2q^2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}(X = x) &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \left(np + \hat{x} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\hat{x}}{np} - \frac{\hat{x}^2}{2n^2p^2}\right) \\ &\quad - \left(nq - \hat{x} + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{\hat{x}}{nq} - \frac{\hat{x}^2}{2n^2q^2}\right) \\ \ln \mathbb{P}(X = x) &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \cancel{\hat{x}} - \frac{\hat{x}^2}{np} - \frac{\hat{x}}{2np} + \frac{\hat{x}^2}{2np} + \frac{\hat{x}^3}{2n^2p^2} + \frac{\hat{x}^2}{4n^2p^2} \\ &\quad + \cancel{\hat{x}} - \frac{\hat{x}^2}{nq} + \frac{\hat{x}}{2nq} + \frac{\hat{x}^2}{2nq} - \frac{\hat{x}^3}{2n^2q^2} + \frac{\hat{x}^2}{4n^2q^2} \\ \ln \mathbb{P}(X = x) &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \frac{\hat{x}}{2np} - \frac{\hat{x}^2}{2np} + \frac{\hat{x}^3}{2n^2p^2} + \frac{\hat{x}^2}{4n^2p^2} \\ &\quad + \frac{\hat{x}}{2nq} - \frac{\hat{x}^2}{2nq} - \frac{\hat{x}^3}{2n^2q^2} + \frac{\hat{x}^2}{4n^2q^2}\end{aligned}$$

$$\ln \mathbb{P}(X = x) \approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \frac{\hat{x}}{2n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) - \frac{\hat{x}^2}{2n} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{\hat{x}^3}{2n^2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right) + \frac{\hat{x}^2}{4n^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)$$

Nous avons également :

$$\frac{\hat{x}}{n} = \frac{x - np}{n} \approx 0$$

autrement dit :

$$\frac{\hat{x}}{n} \ll 1$$

En multipliant par $\hat{x}^2/(2n)$ qui est positif :

$$\frac{\hat{x}^3}{2n^2} \ll \frac{\hat{x}^2}{2n}$$

n étant grand, nous avons aussi :

$$\frac{\hat{x}^2}{4n^2} \ll \frac{\hat{x}^2}{2n}$$

Les deux derniers termes sont donc négligeables par rapport au troisième :

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}(X = x) &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \frac{\hat{x}}{2n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) - \frac{\hat{x}^2}{2n} \left(\frac{p+q}{pq} \right) \\ &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \frac{\hat{x}(q-p)}{2npq} - \frac{\hat{x}^2}{2npq} \end{aligned}$$

On admettra que la différence entre le nombre de boules blanches tirées et l'espérance mathématique $\hat{x} = x - \bar{x}$ tend vers l'infini avec n . Comme $-1 \leq q - p \leq 1$ cela implique que $\hat{x} \gg q - p$, et par conséquent le deuxième terme est négligeable devant le troisième :

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}(X = x) &\approx -\frac{1}{2} \ln(2\pi npq) - \frac{\hat{x}^2}{2npq} \\ \mathbb{P}(X = x) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{\hat{x}^2}{2npq}} \end{aligned}$$

En utilisant les variables $\bar{x} = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$:

$$\mathbb{P}(X = x) \approx \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

qui est l'expression de la densité de probabilité de la loi normale, d'espérance mathématique $\bar{x}$ et de variance σ^2 . Cette loi est aussi appelée loi de Gauss, loi de Laplace-Gauss, Gaussienne, ou courbe en cloche. On la note $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$.

Elle permet d'approximer la loi binomiale lorsque :

$$\begin{cases} n \gg 1 \\ x \gg 1 \\ n - x \gg 1 \\ x \approx \bar{x} \end{cases}$$

donc pour p pas trop petit et x pas trop loin de la moyenne. □

2.2 La loi normale est normalisée

On pose

$$a = (2\sigma^2)^{-1}$$

et l'on effectue le changement de variable :

$$t = x - \bar{x}$$

donc $dt = dx$, et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt$$

On utilise l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\sigma^2\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.3 Représentation graphique

La fonction $\mathbb{P}(X)$ est positive, elle tend vers zéro en $-\infty$ et en $+\infty$. Elle est paire, $\mathbb{P}(\hat{X}) = \mathbb{P}(-\hat{X})$, pour la variable aléatoire $\hat{X}$ donc symétrique par rapport à la droite verticale passant par $\bar{x}$.

Posons

$$\begin{cases} A = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \\ B = (2\sigma^2)^{-1} \\ Y = X - \bar{X} \end{cases}$$

$y = x - \bar{x}$, donc $dy = dx$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= Ae^{-By^2} \\ \frac{d\mathbb{P}(Y = y)}{dy} &= -2ABye^{-By^2} \\ \frac{d\mathbb{P}(X = x)}{dx} &= -2AB(x - \bar{x})e^{-B(x-\bar{x})^2} \end{aligned}$$

Etudions le signe de la dérivée (A et B sont positifs) :

$$\begin{aligned} -2AB(x - \bar{x})e^{-B(x-\bar{x})^2} &\geq 0 \\ x - \bar{x} &\leq 0 \\ x &\leq \bar{x} \end{aligned}$$

Or :

$$\mathbb{P}(X = \bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

La dérivée s'annule et change de signe au point de coordonnées $\left(\bar{x}, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$. La loi normale est maximale en ce point.

Calculons la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{P}(Y=y)}{dy} &= -2ABye^{-By^2} \\ \frac{d^2\mathbb{P}(Y=y)}{dy^2} &= -2ABe^{-By^2} + 4AB^2y^2e^{-By^2}\end{aligned}$$

Etudions son signe :

$$\begin{aligned}4AB^2(x-\bar{x})^2e^{-B(x-\bar{x})^2} - 2ABe^{-B(x-\bar{x})^2} &\geq 0 \\ 2B(x-\bar{x})^2 - 1 &\geq 0 \\ (x-\bar{x})^2 &\geq \frac{1}{2B}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - \bar{x} \geq \frac{1}{\sqrt{2B}} \\ x - \bar{x} \leq -\frac{1}{\sqrt{2B}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \bar{x} + \sigma \\ x \leq \bar{x} - \sigma \end{cases}$$

La dérivée seconde s'annule et change de signe aux points d'abscisses $\bar{x} + \sigma$ et $\bar{x} - \sigma$. Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = \bar{x} \pm \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 0.607 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Les points de coordonnées $\left(\bar{x} \pm \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ sont les points d'inflexion de la fonction $\mathbb{P}(X=x)$.
La largeur de la gaussienne est de 2σ à 60.7% de la hauteur.

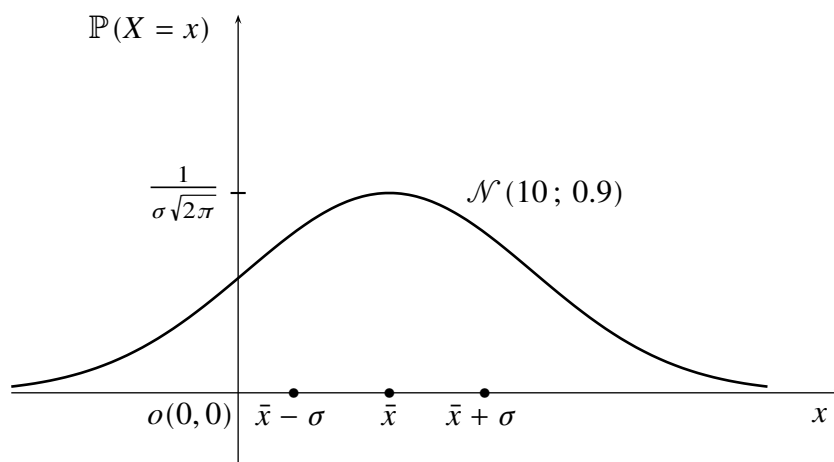


FIG 1 – La loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$

Le rapport hauteur sur largeur est fonction uniquement de σ :

$$\frac{\text{hauteur}}{\text{largeur}} = \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi}}$$

Cherchons la largeur à mi-hauteur :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \\ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} &= -\ln 2 \\ x - \bar{x} &= \sigma\sqrt{2\ln 2}\end{aligned}$$

La largeur à mi-hauteur vaut $2\sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 2.355 \sigma$.

3 LA LOI DE POISSON

3.1 Établissement de la loi de Poisson

Considérons le cas d'un évènement rare en supposant que le nombre de boules blanches tirées soit petit devant n :

$$x_i \ll n$$

Nous pouvons alors simplifier l'expression de la loi binomiale :

$$\begin{aligned}C_n^{x_i} &\triangleq \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-x_i+1)}{x_i!} \\ &\approx \frac{n^{x_i}}{x_i!}\end{aligned}$$

Le logarithme de la probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &= \ln \left[\frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} p^{x_i} q^{n-x_i} \right] \\ &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!} p^{x_i} q^{n-x_i} \right) \\ &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!} \right) + x_i \ln p + (n-x_i) \ln(1-p)\end{aligned}$$

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que la proportion p de boules blanches est très petite (p est un paramètre fixé avant l'expérience) :

$$p \ll 1$$

On effectue le développement limité à l'ordre un du logarithme népérien :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!} \right) + x_i \ln p + (n-x_i)(-p) \\ &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!} \right) + x_i \ln p - np\end{aligned}$$

4 APPLICATIONS

d'où :

$$\mathbb{P}_i(X = x_i) \approx \frac{n^{x_i}}{x_i!} p^{x_i} e^{-np}$$

$$\mathbb{P}_i(X = x_i) \approx \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

où l'on a posé $\lambda = np$.

3.2 La loi de Poisson est normalisée

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_i(x_i) &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \end{aligned}$$

or le développement en série entière d'exponentielle s'écrit :

$$e^{\lambda} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

d'où, lorsque n devient grand :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \mathbb{P}_i(x_i) &= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4 APPLICATIONS

4.1 Exemple 1

Soit une urne contenant 8% de boules blanches ($p = 0.08$) et 92% de boules noires ($q = 0.92$). On tire au hasard $n = 500$ boules avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées parmi ces 500. Quelle est la probabilité de tirer 39 boules blanches ?

1. En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(500; 0.08)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ \mathbb{P}(X = 39) &= \frac{500!}{39!461!} \times 0.08^{39} \times 0.92^{461} \\ &= \frac{500}{39} \times \frac{499}{38} \times \dots \times \frac{462}{1} \times 0.08^{39} \times 0.92^{461} \\ &= 0.0655 \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{cases} 500 \gg 1 \\ 39 \gg 1 \\ 461 \gg 1 \end{cases}$$

Nous pouvons approximer la loi binomiale par une loi normale de paramètres :

$$\begin{cases} \bar{x} = np = 40 \\ \sigma^2 = np(1-p) = 36,8 \end{cases}$$

Soit donc la loi normale $\mathcal{N}(40; 36.8)$. La variable aléatoire X suit approximativement cette loi. Posons Y la variable aléatoire qui suit précisément cette loi, et soit T la variable aléatoire telle que :

$$T = \frac{Y - 40}{\sqrt{36.8}}$$

T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 39) &\approx p(Y = 39) \\ &\approx p(38,5 \leq Y \leq 39,5) \\ &\approx p\left(\frac{38,5 - 40}{\sqrt{36.8}} \leq T \leq \frac{39,5 - 40}{\sqrt{36.8}}\right) \\ &\approx p(-0,247 \leq T \leq -0,083) \end{aligned}$$

Soit $\pi(t)$ la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} \pi(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= p(T \leq t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X = 39) \approx \pi(-0,083) - \pi(-0,247)$$

On trouve facilement sur internet la table des valeurs de $\pi(t)$ mais elle n'est tabulée que pour $t \geq 0$. La loi normale étant normalisée :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{\tau}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= 1 \\ p(T \leq \tau) + p(T \geq \tau) &= 1 \\ p(T \leq \tau) &= 1 - p(T \geq \tau) \end{aligned}$$

En posant $\tau = -t$:

$$p(T \leq -t) = 1 - p(T \geq -t)$$

par symétrie par rapport à $t = 0$ de la loi normale centrée :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ p(T \leq t) &= p(T \geq -t) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} p(T \leq -t) &= 1 - p(T \leq t) \\ \pi(-t) &= 1 - \pi(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 39) &\approx 1 - \pi(0.083) - [1 - \pi(0.247)] \\ &\approx \pi(0.247) - \pi(0.083) \end{aligned}$$

On utilise la table des valeurs de $\pi(t)$ pour trouver $\pi(0,247)$:

$$\begin{cases} \pi(0.24) \approx 0.5948 \\ \pi(0.25) \approx 0.5987 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \frac{0.5987 - 0.5948}{0.25 - 0.24} \\ b = 0.5987 - a \times 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0.3900 \\ b = 0.5012 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(0.247) &\approx 0.39 \times 0.247 + 0.5012 \\ &\approx 0.5975 \end{aligned}$$

On utilise de nouveau la table pour trouver $\pi(0.083)$:

$$\begin{cases} \pi(0.08) \approx 0.5319 \\ \pi(0.09) \approx 0.5359 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \frac{0.5359 - 0.5319}{0.09 - 0.08} \\ b = 0.5359 - a \times 0.09 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0.0400 \\ b = 0.4999 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(0.083) &\approx 0.4 \times 0.083 + 0.4999 \\ &\approx 0.5331 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 39) &\approx 0.5975 - 0.5331 \\ &\approx 0.0644 \end{aligned}$$

3. En approximant la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 40$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x) &\approx \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\ \mathbb{P}(X = 39) &\approx \frac{40^{39}}{39!} e^{-40} \\ &\approx 2.674 \times 10^{-19} \end{aligned}$$

L'approximation par la loi de Poisson n'est pas valide car nous n'avons pas $x \ll n$.

4.2 Exemple 2

Soit une urne contenant 3% de boules blanches ($p = 0.03$) et 97% de boules noires ($q = 0.97$). On tire au hasard $n = 100$ boules avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées parmi ces 100.

1. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule blanche de tirée ?

(a) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,03)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{100!}{0!100!} \left(\frac{3}{100}\right)^0 \left(\frac{97}{100}\right)^{100} \\ &= 0.97^{100} \\ &= 0.0476\end{aligned}$$

(b) $0 \ll 100$, nous pouvons approximer la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &\approx \frac{3^0}{0!} e^{-3} \\ &\approx 0.0498\end{aligned}$$

(c) Approximons la loi binomiale par la loi normale de paramètres :

$$\begin{cases} \bar{x} = 3 \\ \sigma^2 = 2.91 \end{cases}$$

Soit donc la loi normale $\mathcal{N}(3; 2.91)$. La variable aléatoire X suit approximativement cette loi. Posons Y la variable aléatoire qui suit précisément cette loi, et soit T la variable aléatoire telle que :

$$T = \frac{Y - 3}{\sqrt{2.91}}$$

T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &\approx p(Y = 0) \\ &\approx p(-0.5 \leq Y \leq 0.5) \\ &\approx p\left(\frac{-0.5 - 3}{\sqrt{2.91}} \leq T \leq \frac{0.5 - 3}{\sqrt{2.91}}\right) \\ &\approx p(-2.052 \leq T \leq -1.466) \\ &\approx \pi(-1.466) - \pi(-2.052) \\ &\approx 1 - \pi(1.466) - [1 - \pi(2.052)] \\ &\approx \pi(2.052) - \pi(1.466)\end{aligned}$$

On utilise la table pour trouver $\pi(2.052)$:

$$\begin{cases} \pi(2.05) \approx 0.9798 \\ \pi(2.06) \approx 0.9803 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \frac{0.9803 - 0.9798}{2.06 - 2.05} \\ b = 0.9803 - a \times 2.06 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0.0500 \\ b = 0.8773 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(2.052) &\approx 0.05 \times 2.052 + 0.8773 \\ &\approx 0.9799 \end{aligned}$$

On utilise de nouveau la table pour trouver $\pi(1.466)$:

$$\begin{cases} \pi(1.46) \approx 0.9279 \\ \pi(1.47) \approx 0.9292 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \frac{0.9292 - 0.9279}{1.47 - 1.46} \\ b = 0.9292 - a \times 1.47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0.1300 \\ b = 0.7381 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(1.466) &\approx 0.13 \times 1.466 + 0.7381 \\ &\approx 0.9287 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &\approx 0.9799 - 0.9287 \\ &\approx 0.0512 \end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une seule boule blanche de tirée ?

(a) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.03)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{100!}{1!99!} \left(\frac{3}{100}\right)^1 \left(\frac{97}{100}\right)^{99} \\ &= 3 \times 0.97^{99} \\ &= 0.1471 \end{aligned}$$

(b) $1 \ll 100$, nous pouvons approximer la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{3^1}{1!} e^{-3} \\ &= 0.1494 \end{aligned}$$

(c) Approximons la loi binomiale par la loi normale $\mathcal{N}(3; 2.91)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &\approx p(Y = 1) \\ &\approx p(0.5 \leq Y \leq 1.5) \\ &\approx p\left(\frac{0.5 - 3}{\sqrt{2.91}} \leq T \leq \frac{1.5 - 3}{\sqrt{2.91}}\right) \\ &\approx p(-1.466 \leq T \leq -0.879) \\ &\approx \pi(-0.879) - \pi(-1.466) \\ &\approx 1 - \pi(0.879) - [1 - \pi(1.466)] \\ &\approx \pi(1.466) - \pi(0.879) \end{aligned}$$

Nous avons déjà calculer $\pi(1.466)$:

$$\pi(1.466) \approx 0.9287$$

On utilise la table pour trouver $\pi(0.879)$:

$$\begin{cases} \pi(0.87) \approx 0.8078 \\ \pi(0.88) \approx 0.8106 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \frac{0.8106 - 0.8078}{0.88 - 0.87} \\ b = 0.8106 - a \times 0.88 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0.2800 \\ b = 0.5642 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(0.879) &\approx 0.28 \times 0.879 + 0.5642 \\ &\approx 0.8103 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &\approx 0.9287 - 0.8103 \\ &\approx 0.1184 \end{aligned}$$

L'approximation par une loi normale n'est pas bonne car nous n'avons pas $x \gg 1$.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de deux boules blanches de tirées ?

(a) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.03)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{100!}{2!98!} \left(\frac{3}{100}\right)^2 \left(\frac{97}{100}\right)^{98} \\ &= \frac{100 \times 99}{2} \times \frac{9}{100^2} \times 0.97^{98} \\ &= 0.2252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 2) &= 1 - \mathbb{P}(0) - \mathbb{P}(1) - \mathbb{P}(2) \\ &= 1 - 0.0476 - 0.1471 - 0.2252 \\ &= 0.5801 \end{aligned}$$

(b) $2 \ll 100$, nous pouvons approximer la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{3^2}{2!} e^{-3} \\ &= 0.2240 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 2) &= 1 - \mathbb{P}(0) - \mathbb{P}(1) - \mathbb{P}(2) \\ &= 1 - 0.0498 - 0.1494 - 0.2240 \\ &= 0.5768 \end{aligned}$$