

Logarithme Népérien

Olivier Castéra

o.castera@free.fr

sciences-physiques.neocities.org

27 décembre 2025

Résumé

Présentation du nombre d'Euler e .

TABLE DES MATIÈRES

1 Puissances	1
2 Logarithmes	3
3 Démonstration du théorème de Newton sur le Logarithme népérien	4
4 La démonstration de Leonhard Euler	5

1 PUISSANCES

Définition 1.1. Nous dirons que a est élevé à la puissance n si a est multiplié par lui-même n fois :

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_n$$

Cette expression est notée a^n .

Propriété 1.1.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \quad a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Démonstration. En se servant de la définition 1.1,

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_n \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_m \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n+m} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

□

Propriété 1.2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}^*, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Démonstration. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}^*,$

$$\begin{aligned} a^m \times \frac{1}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^m}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n} \\ &= \overbrace{a \times a \times \dots \times a}^{m-n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

En se servant de la propriété 1.1,

$$\begin{aligned} a^m \times \frac{1}{a^n} &= a^m \times a^{-n} \\ \frac{1}{a^n} &= a^{-n} \end{aligned}$$

Et nous avons maintenant $n \in \mathbb{Z}^*$. □

Propriété 1.3.

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad a^0 = 1$$

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{Z}^*, \forall a \in \mathbb{R}^*,$

$$\frac{\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^n}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n} = 1$$

Avec la propriété 1.2,

$$\begin{aligned} a^{n-n} &= 1 \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

Et $n \in \mathbb{Z}$. □

Propriété 1.4.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall (n, m) \in \mathbb{Z}, \quad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= (\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^n)^m \\ &= \underbrace{(\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^n) \times (\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^n) \times \dots \times (\overbrace{a \times a \times \dots \times a}^n)}_{m \text{ termes de } n \text{ termes}} \\ &= a^{n \times m} \end{aligned}$$

□

Propriété 1.5.

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^* \text{ ou bien } \forall a \in \mathbb{R}^-, \forall n \text{ impaire} \in \mathbb{Z}^*, \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

appelé racine n -ième de a .

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 &\text{Soit} && A^n = a \\
 &\text{Par définition de la racine } n\text{-ième} && A = \sqrt[n]{a} \\
 &\text{Or, d'après la définition 1.1} && A = A^1 = A^{n/n} \\
 &\text{et d'après la propriété 1.4} && = (A^n)^{1/n} = a^{1/n} \\
 &\text{Donc} && a^{1/n} = \sqrt[n]{a}
 \end{aligned}$$

Et $n \in \mathbb{Q}$. □

2 LOGARITHMES

Définition 2.1. On définit la fonction logarithme comme étant la fonction réciproque de la fonction puissance :

$$\log_a(a^x) \triangleq x$$

Propriété 2.1.

$$\log_a(X \times Y) = \log_a X + \log_a Y$$

Démonstration. Avec la propriété 1.1 des puissances,

$$\log_a(a^x \times a^y) = \log_a(a^{x+y})$$

En appliquant la définition 2.1 du logarithme sur le second membre,

$$\log_a(a^x \times a^y) = x + y$$

En appliquant de nouveau la définition 2.1 du logarithme sur le second membre,

$$\log_a(a^x \times a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y$$

En posant $X = a^x$ et $Y = a^y$ nous avons,

$$\log_a(X \times Y) = \log_a X + \log_a Y$$

□

Propriété 2.2.

$$\log_a X^n = n \log_a X$$

Démonstration.

$$\log_a X^n = \log_a \underbrace{(X \times X \cdots \times X)}_n$$

En utilisant la propriété 2.1 des logarithmes,

$$\log_a X^n = \log_a X + \log_a X + \cdots + \log_a X = n \log_a X$$

□

Propriété 2.3.

$$a^{\log_a X} = X$$

3 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NEWTON SUR LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

Démonstration. En partant de la définition 2.1 du logarithme,

$$\begin{aligned}\log_a a^x &= x \\ a^{\log_a a^x} &= a^x\end{aligned}$$

En posant $X = a^x$,

$$a^{\log_a X} = X$$

□

Propriété 2.4.

$$\log_b X = \log_a X \times \log_b a$$

Démonstration. En utilisant la propriété 2.3,

$$\begin{aligned}X &= a^{\log_a X} \\ \log_b X &= \log_b (a^{\log_a X})\end{aligned}$$

Nous pouvons descendre l'exposant en utilisant la propriété 2.2,

$$\log_b X = \log_a X \times \log_b a$$

□

3 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE NEWTON SUR LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

Théorème 3.1.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Démonstration. On dérive un logarithme de base « a » inconnue :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right]\end{aligned}$$

Or,

$$\forall x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \approx 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662$$

4 LA DÉMONSTRATION DE LEONHARD EULER

nombre appelé constante d'Euler et noté e . Donc,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

Pour $a = e$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_e x &= \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x} \\ [\log_e t]_1^x &= \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ \log_e x - \log_e 1 &= \int_1^x \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

Le logarithme de base e se notant $\ln$, nous avons :

$$\ln x - \ln 1 = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Il reste à démontrer que $\ln 1 = 0$. Avec la définition 2.1, et avec la propriété 1.3 :

$$\begin{aligned} \forall b, \quad \log_b b^0 &= 0 \\ \forall b, \quad \log_b 1 &= 0 \end{aligned}$$

Vrai $\forall b$, donc pour $b = e$. □

4 LA DÉMONSTRATION DE LEONHARD EULER

Théorème 4.1.

$$e = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Démonstration. Euler cherche à exprimer la fonction puissance sous la forme d'un polynôme¹. Soient $a, A, B, C, D, \dots$ des constantes, alors :

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

D'après la propriété 1.3,

$$a^0 = 1 \Rightarrow A = 1$$

De plus, d'après la propriété 1.4 :

$$\begin{aligned} a^{2x} &= (a^x)^2 \\ 1 + B(2x) + C(2x)^2 + D(2x)^3 + \dots &= (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots)^2 \end{aligned}$$

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned} 1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + \dots &= (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots) \times (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots) \\ &= 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Bx + B^2x^2 + BCx^3 + \dots \\ &\quad \dots + Cx^2 + BCx^3 + \dots + Dx^3 + \dots \\ &= 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + 2(BC + D)x^3 + \dots \end{aligned}$$

1. Tangente Hors Série numéro 29

4 LA DÉMONSTRATION DE LEONHARD EULER

En égalant les coefficients,

$$4C = B^2 + 2C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{B^2}{2}$$

$$8D = 2(BC + D) \quad \Rightarrow \quad 3D = BC \quad \Rightarrow \quad D = \frac{B^3}{2 \times 3}$$

Nous obtenons :

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Sous cette forme, la fonction puissance la plus simple est celle pour laquelle $B = 1$:

$$a^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

et l'on peut calculer le a auquel elle correspond en posant $x = 1$:

$$a = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots = 2,718\,281\,828 \dots$$

que l'on note e . On définit alors la fonction exponentielle par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

□