

LES CONIQUES

Olivier Castéra
o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

27 décembre 2025

Résumé

Ellipses, paraboles et hyperboles sont des coniques. Ce sont des courbes planes résultant de l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution.

TABLE DES MATIÈRES

1 Définitions d'une ellipse	2
1.1 Définition bifocale d'une ellipse	2
1.2 Définition cartésienne	3
1.3 Définition monofocale d'une ellipse	5
2 Définitions d'une hyperbole	7
2.1 Définition bifocale d'une hyperbole	7
2.2 Définition monofocale d'une hyperbole	10
3 Définition d'une parabole	12
4 Equation commune aux trois coniques	14
5 Représentations paramétriques	17
5.1 Représentation paramétrique d'une ellipse	17
5.2 Anomalie excentrique	18
5.3 Représentation paramétrique d'une hyperbole	19
6 Coordonnées polaires	20
6.1 Coordonnées polaires centrées sur o	20
6.2 Coordonnées polaires entrées sur le foyer F	22
7 Surface totale d'une ellipse	25

1 DÉFINITIONS D'UNE ELLIPSE

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une ellipse. Nous partons d'une définition et montrons l'équivalence avec les autres.

1.1 Définition bifocale d'une ellipse

Définition 1.1. Définition bifocale

Soient F et F' deux points du plan. L'ellipse de foyers F et F' est l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = C^{ste}$$

où $C^{ste} > 0$.

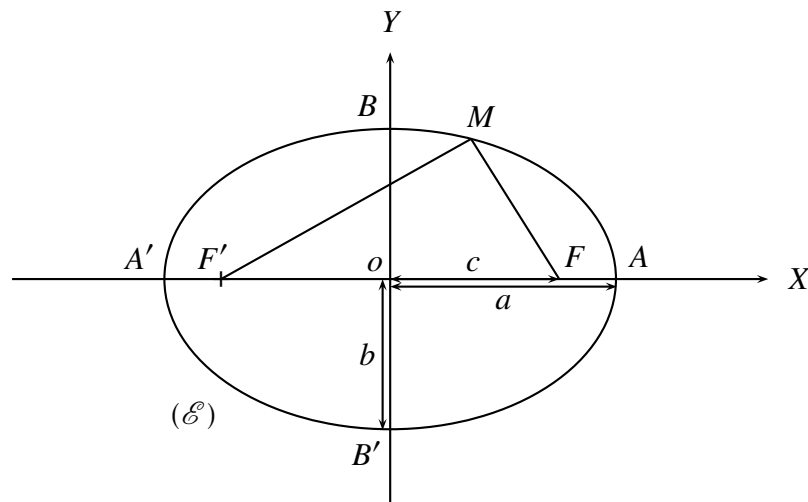


FIG 1 – Une ellipse

A, A', B, B' sont les sommets de l'ellipse. MF et MF' sont les rayons focaux du point M . Le grand axe $A'A$ est appelé axe focal car il passe par les foyers. Soient $2a$ sa longueur et $2b$ celle du petit axe. On pose les coordonnées des foyers, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, si bien que la distance focale s'écrit :

$$FF' = 2c$$

Nous posons la définition suivante :

Définition 1.2. Excentricité

$$e = \frac{c}{a}$$

est appelée excentricité de l'ellipse.

- Si $c > a$ alors $e > 1$, l'ensemble $(\mathcal{E})$ est vide
- Si $c = a$ alors $e = 1$, l'ensemble $(\mathcal{E})$ se réduit au segment $[FF']$

1 DÉFINITIONS D'UNE ELLIPSE

— Si $c = 0$ alors $e = 0$, l'ensemble $(\mathcal{E})$ est un cercle, les foyers sont confondus et $MF = a$ est le rayon du cercle

Nous posons que le cercle est un cas particuliers d'ellipse :

$$a > c \geq 0 \quad (1)$$

1. Lorsque M est en A :

$$\begin{aligned} MF + MF' &= (a - c) + (a + c) \\ &= 2a \end{aligned} \quad (2)$$

ce qui fixe la constante égale à la longueur $2a$ du grand axe.

2. Lorsque M est en B , avec (2) :

$$\begin{aligned} MF &= MF' \\ &= a \end{aligned}$$

$MF = BF$ étant l'hypothénus du triangle MFo rectangle en o , d'après le théorème de Pythagore :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3)$$

1.2 Définition cartésienne

Théorème 1.1. L'équation cartésienne d'une ellipse centrée en $o(0,0)$, de demi-petit axe b et de demi-grand axe a situé sur l'axe des abscisses, s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

avec $a \geq b > 0$.

Démonstration. Soient $M(x, y)$ un point de l'ellipse $(\mathcal{E})$:

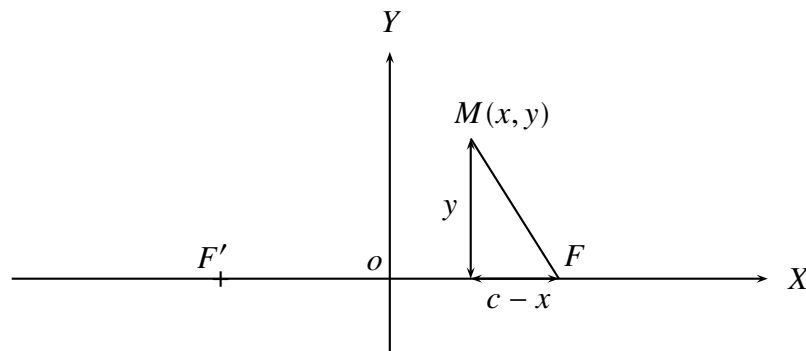


FIG 2

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de la figure 2 :

$$\begin{cases} MF^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{cases}$$

1 DÉFINITIONS D'UNE ELLIPSE

$$\begin{aligned}
 MF^2 - MF'^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - (x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\
 (MF + MF') (MF - MF') &= -4xc \\
 MF - MF' &= -\frac{2xc}{a}
 \end{aligned}$$

Par hypothèse :

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -\frac{2xc}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MF = a - \frac{xc}{a} \\ MF' = a + \frac{xc}{a} \end{cases} \quad (6a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MF^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \quad (6b)$$

$$\begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2} \\
 x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2 &= a^4 + x^2c^2 \\
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

On pose $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\begin{aligned}
 x^2b^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

□

Remarque. Si $c = 0$ alors $a = b$, nous obtenons l'équation cartésienne d'un cercle de rayon a :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Si $a = c$ alors $b = 0$ et l'équation cartésienne ne permet pas de retrouver le segment $[FF']$.

Nous avons montré que (1.1) p. 2 implique (4) p. 3. Montrons que (4) implique (1.1).

Théorème 1.2. L'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x, y)$, d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

où a et b sont des constantes, forme une ellipse.

1 DÉFINITIONS D'UNE ELLIPSE

Démonstration. Par hypothèse :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ x^2 b^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2\end{aligned}$$

Posons c tel que $b^2 = a^2 - c^2$:

$$\begin{aligned}x^2 (a^2 - c^2) + a^2 y^2 &= a^2 (a^2 - c^2) \\ x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{x^2 c^2}{a^2}\end{aligned}$$

En soustrayant et en additionnant $2xc$,

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF = \pm \left(a - \frac{xc}{a}\right) \\ MF' = \pm \left(a + \frac{xc}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MF + MF' = \pm 2a \\ MF - MF' = \pm \frac{2xc}{a} \end{cases} \Rightarrow MF + MF' = 2a \quad \square$$

Il en résulte que les théorèmes 1.1 p. 3 et 1.2 p. 4 sont équivalents à la définition bifocale et peuvent servir de définition pour l'ellipse.

1.3 Définition monofocale d'une ellipse

Théorème 1.3. L'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M d'une ellipse de foyer $F(c, 0)$ suit la relation

$$\frac{MF}{MH} = e \quad (8)$$

où l'excentricité est telle que $1 \geq e > 0$, et où H est la projection orthogonale de M sur la droite (D) d'équation $x = a^2/c$.

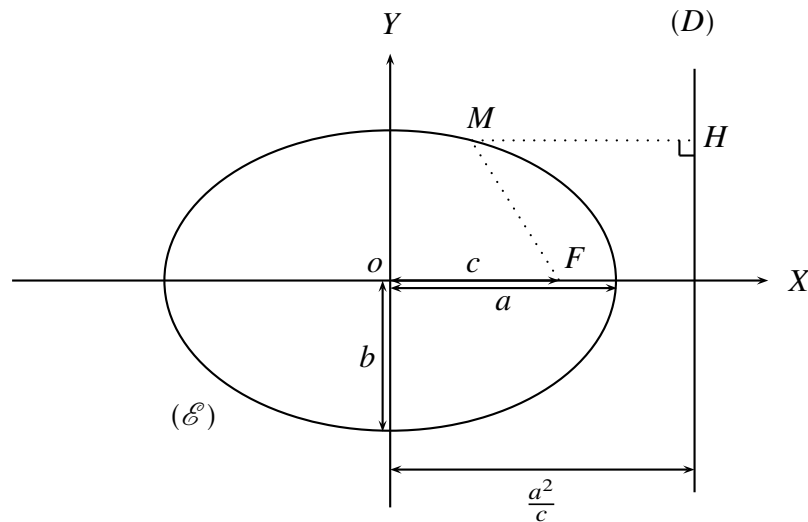


FIG 3 – Une ellipse et l'une de ses deux directrices

Démonstration. Soit (D) la droite verticale d'équation $x = a^2/c$, appelée directrice de l'ellipse associée au foyer F . Soit $M(x_M, y_M)$ un point de l'ellipse de foyer $F(c, 0)$. Par hypothèse, d'après (6a) p. 4,

$$\begin{aligned} MF &= a - \frac{x_M c}{a} \\ &= \frac{c}{a} \left(\frac{a^2}{c} - x_M \right) \\ &= \frac{c}{a} MH \\ \frac{MF}{MH} &= e \end{aligned}$$

□

Remarque. Si $c = 0$, alors $e = 0$ et la définition monofocale ne permet pas de retrouver un cercle. Si $a = c$, alors $e = 1$ et nous verrons que la définition monofocale donne l'équation d'une parabole et non du segment $[FF']$.

Nous avons montré que (2) p. 3 implique (8) p. 5, montrons que (8) implique (7) p. 4.

Théorème 1.4. Soit $F(c, 0)$ un point du plan, et soit $(D) : x = a^2/c$ une droite du plan. L'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où $e = c/a$ est telle que $1 > e > 0$, et où H est la projection orthogonale de M sur la droite (D) , forme une ellipse.

2 DÉFINITIONS D'UNE HYPERBOLE

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{MF}{MH} &= \frac{c}{a} \\ MF^2 &= \frac{c^2}{a^2} MH^2 \\ (x-c)^2 + y^2 &= \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} - x \right)^2 \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 - 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2} \\ x^2 a^2 + c^2 a^2 + y^2 a^2 &= a^4 + x^2 c^2 \\ x^2 (a^2 - c^2) + y^2 a^2 &= a^2 (a^2 - c^2)\end{aligned}$$

$1 > e$ donc $a > c$, on pose $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\begin{aligned}x^2 b^2 + y^2 a^2 &= a^2 b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned} \quad \square$$

Il en résulte que pour $1 > e > 0$, les théorèmes 1.3 p. 5 et 1.4 p. 6 sont équivalents aux définitions bifocale et cartésienne, et peuvent servir de définition de l'ellipse.

2 DÉFINITIONS D'UNE HYPERBOLE

2.1 Définition bifocale d'une hyperbole

Définition 2.1. Soient F et F' deux points du plan. L'hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = C^{ste}$$

où $C^{ste} > 0$.

2 DÉFINITIONS D'UNE HYPERBOLE

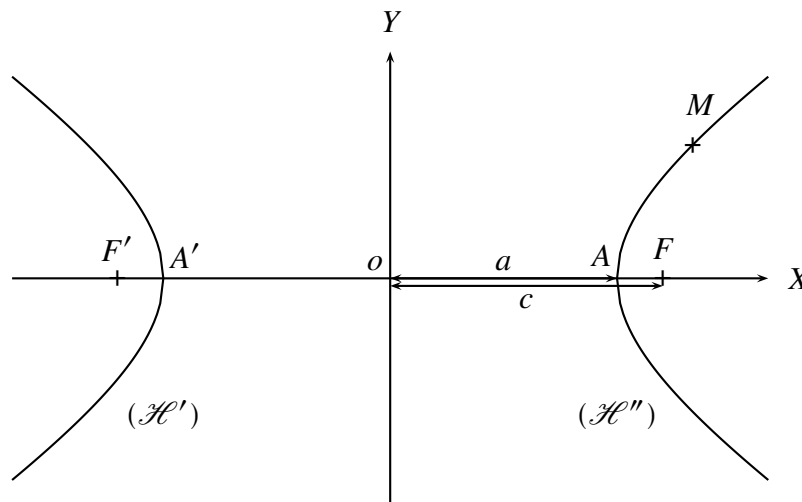


FIG 4 – Une hyperbole

A et A' sont les sommets de l'hyperbole. MF et MF' sont appelés rayons focaux du point M . On pose les coordonnées des foyers, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, si bien que la distance focale s'écrit :

$$F'F = 2c$$

Supposons M au sommet A , nous avons,

$$\begin{aligned} MF' - MF &= AF' - AF \\ &= AA' + A'F' - AF \end{aligned}$$

Par symétrie, $A'F' = AF$,

$$\begin{aligned} MF' - MF &= AA' \\ &= \pm 2a \\ |MF - MF'| &= 2a \end{aligned} \tag{9}$$

ce qui fixe la constante égale à la distance $2a$ entre les sommets $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$.

- Le signe positif, $MF - MF' = 2a$ correspond à la branche $(\mathcal{H}')$ de l'hyperbole pour laquelle $x \in]-\infty, -a]$
- le signe négatif, $MF - MF' = -2a$ correspond à la branche $(\mathcal{H}'')$ pour laquelle $x \in [a, +\infty[$
- Si $a > c$, $|MF' - MF| > F'F$ ce qui est impossible, $(\mathcal{H}) = \emptyset$
- Si $a = c$, $|MF' - MF| = F'F$, l'ensemble $(\mathcal{H})$ est la droite (FF') privée du segment ouvert $]FF'[,$
- Si $a = 0$, $MF' = MF$, l'ensemble $(\mathcal{H})$ est la droite des ordonnées

Théorème 2.1. L'équation cartésienne d'une hyperbole centrée en $o(0, 0)$, d'axe focal sur l'axe des abscisses, s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

où a et b sont des constantes.

2 DÉFINITIONS D'UNE HYPERBOLE

Démonstration. Par hypothèse

$$|MF - MF'| = 2a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} MF - MF' = 2a \\ MF - MF' = -2a \end{cases}$$

La figure 2 p. 3 est valable ici encore. Les relations

$$\begin{cases} MF^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{cases}$$

donnent

$$\begin{aligned} MF^2 - MF'^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - (x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\ (MF + MF')(MF - MF') &= -4xc \end{aligned}$$

— D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} \begin{cases} (MF + MF')(MF - MF') = -4xc \\ MF - MF' = 2a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} MF + MF' = -\frac{2xc}{a} \\ MF - MF' = 2a \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} MF = a - \frac{xc}{a} \\ MF' = -a - \frac{xc}{a} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

— d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \begin{cases} (MF + MF')(MF - MF') = -4xc \\ MF - MF' = -2a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} MF + MF' = \frac{2xc}{a} \\ MF - MF' = -2a \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} MF = -a + \frac{xc}{a} \\ MF' = a + \frac{xc}{a} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Les équations (11) et (12) donnent,

$$\begin{aligned} \begin{cases} MF^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2} \end{cases} &\Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Comme $c > a$, on pose

$$-b^2 = a^2 - c^2 \quad (13)$$

qui est l'homologue pour l'hyperbole de la relation (3) p. 3 pour l'ellipse.

$$\begin{aligned} -x^2b^2 + a^2y^2 &= -a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

□

2 DÉFINITIONS D'UNE HYPERBOLE

Nous avons montré que (9) p. 8 implique (10) p. 8, montrons que (10) implique (9).

Théorème 2.2. *L'ensemble ($\mathcal{H}$) des points M tels que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (14)$$

où a et b sont des constantes, forme une hyperbole.

Démonstration. Par hypothèse

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ x^2 b^2 - a^2 y^2 &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

Posons c tel que $b^2 = a^2 - c^2$:

$$\begin{aligned} x^2 (a^2 - c^2) - a^2 y^2 &= a^2 (a^2 - c^2) \\ x^2 a^2 - x^2 c^2 - a^2 y^2 &= a^4 - a^2 c^2 \\ x^2 - \frac{x^2 c^2}{a^2} - y^2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$

En soustrayant et en additionnant $2xc$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} MF^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \frac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} MF = \pm \left(a - \frac{xc}{a}\right) \\ MF' = \pm \left(a + \frac{xc}{a}\right) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} MF + MF' = \pm 2a \\ MF - MF' = \pm \frac{2xc}{a} \end{cases} &\Rightarrow |MF - MF'| = 2a \quad \square \end{aligned}$$

Il en résulte que (10) p. 8 est équivalente à (9) p. 8 et peut servir de définition de l'hyperbole.

2.2 Définition monofocale d'une hyperbole

Théorème 2.3. *Soit $(D) : x = a^2/c$ une droite du plan et soit $F(c, 0)$ un point du plan. Soit $e = c/a > 1$, et H la projection orthogonale de M sur (D) . L'ensemble ($\mathcal{H}$) des points M tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

forme une branche d'hyperbole, de foyer F , de directrice (D) , et d'excentricité e .

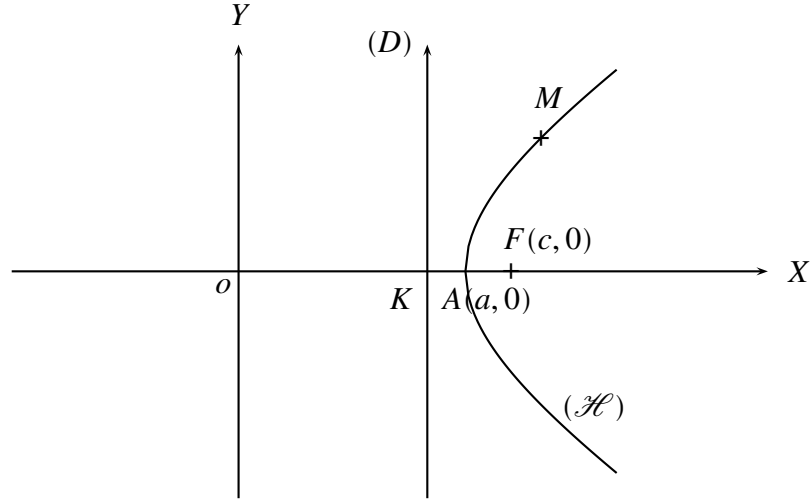


FIG 5 – Une branche d'hyperbole

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{MF}{MH} &= \frac{c}{a} \\ MF^2 &= \frac{c^2}{a^2} MH^2 \\ (x - c)^2 + y^2 &= \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} - x \right)^2 \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 - 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2} \\ x^2 a^2 + c^2 a^2 + y^2 a^2 &= a^4 + x^2 c^2 \\ x^2 (a^2 - c^2) + y^2 a^2 &= a^2 (a^2 - c^2)\end{aligned}$$

$e > 1$ donc $a < c$, on pose b tel que $a^2 - c^2 = b^2$,

$$\begin{aligned}-x^2 b^2 + y^2 a^2 &= -a^2 b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

□

Remarque. Avec la droite $(D') : x = -a^2/c$ et le foyer $F'(-c, 0)$ nous obtenons la seconde branche d'hyperbole d'équation

$$\frac{MF'}{MH'} = e$$

Nous avons montré que pour $e > 1$, (8) p. 5 implique (10) p. 8. Montrons que pour $e > 1$, (10) implique (8).

Théorème 2.4. L'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M d'une branche d'hyperbole de foyer $F(c, 0)$ et de sommet $A(a, 0)$ suit la relation

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e = c/a > 1$.

3 DÉFINITION D'UNE PARABOLE

Démonstration. Par hypothèse

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ -x^2b^2 + y^2a^2 &= -a^2b^2 \\ x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\ x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2 &= a^4 + x^2c^2 \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2} \\ (x - c)^2 + y^2 &= \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} - x \right)^2 \\ MF^2 &= \frac{c^2}{a^2} MH^2 \\ \frac{MF}{MH} &= e\end{aligned}$$

et comme $c > a$, $e > 1$. □

Remarque. A partir de la relation

$$MF' = \left| a + \frac{xc}{a} \right|$$

on obtient l'équation de la seconde branche d'hyperbole,

$$\frac{MF'}{MH'} = e$$

Il en résulte que pour $e > 1$, la relation (8) est équivalente à l'équation (10) et peut servir de définition de l'hyperbole.

3 DÉFINITION D'UNE PARABOLE

Définition 3.1. L'ensemble ($\mathcal{P}$) des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = ax^2$$

avec $a \neq 0$, est une parabole de sommet o et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

3 DÉFINITION D'UNE PARABOLE

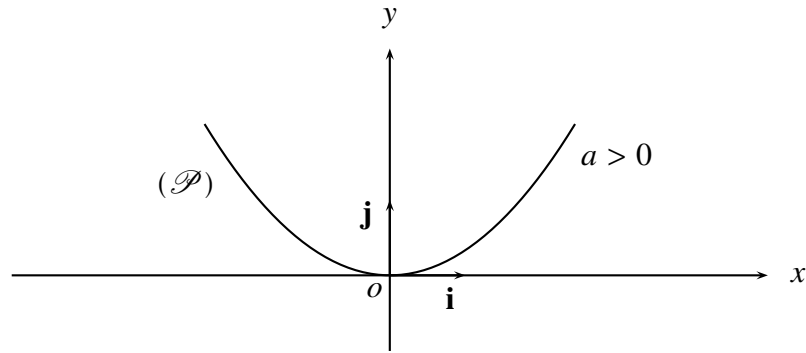


FIG 6 – Une parabole

Cherchons l'équation de la parabole d'axe de symétrie l'axe des abscisses. Considérons le repère $(o, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ avec $\mathbf{I} = \mathbf{j}$, et $\mathbf{J} = -\mathbf{i}$, dans lequel on a $M(X, Y)$ avec,

$$\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$$

L'équation de $(\mathcal{P})$ dans $(o, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ s'écrit,

$$\begin{aligned} X &= a(-Y)^2 \\ Y^2 &= \frac{X}{a} \\ Y &= \pm \sqrt{\frac{X}{a}} \end{aligned} \quad (15)$$

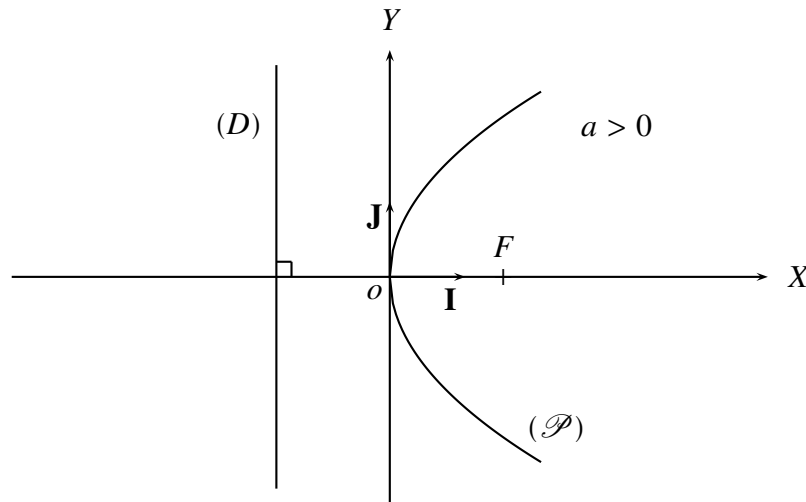


FIG 7 – Une parabole

Théorème 3.1. Soit (D) une droite du plan et soit F un point du plan n'appartenant pas à (D) . Soit $e = 1$, et H la projection orthogonale de M sur (D) . L'ensemble $(\mathcal{P})$ des points M tels que

$$\frac{MF}{MH} = e$$

forme une parabole de foyer F , de directrice (D) , et de sommet équidistant de F et de (D) .

4 EQUATION COMMUNE AUX TROIS CONIQUES

Démonstration.

$$\begin{aligned}MF &= MH \\ MF^2 &= MH^2\end{aligned}$$

Supposons le foyer de coordonnées $F(c, 0)$, et soit (D) la droite verticale d'équation $x = -c$, alors,

$$\begin{aligned}(x - c)^2 + y^2 &= (x + c)^2 \\ y^2 &= 4cx\end{aligned}$$

Dans le cas particulier de la parabole, on appelle $p = 2c$ le paramètre et l'on a,

$$y^2 = 2px \quad \square$$

Nous avons montré que pour $e = 1$ la relation (8) implique (15). Montrons que pour $e = 1$ la relation (15) implique (8).

Théorème 3.2. *L'ensemble $(\mathcal{P})$ des points M d'une parabole suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e = 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}y^2 &= 2px \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ MF^2 &= MH^2 \\ MF &= MH\end{aligned} \quad \square$$

4 EQUATION COMMUNE AUX TROIS CONIQUES

A partir des chapitres précédents, nous pouvons poser une définition commune aux trois coniques.

Définition 4.1. Soient F un point du plan, (D) une droite du plan ne passant pas par F , H la projection orthogonale de M sur (D) et e un réel positif. $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points M du plan tel que

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e < 1$ pour une ellipse, $e = 1$ pour une parabole, et $e > 1$ pour une hyperbole.

Rapportons le plan à un repère orthonormé $(S, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, S étant le sommet de la conique. Etant donné le foyer $F(d, 0)$ et la droite directrice (D) , cherchons l'équation de la conique.

4 EQUATION COMMUNE AUX TROIS CONIQUES

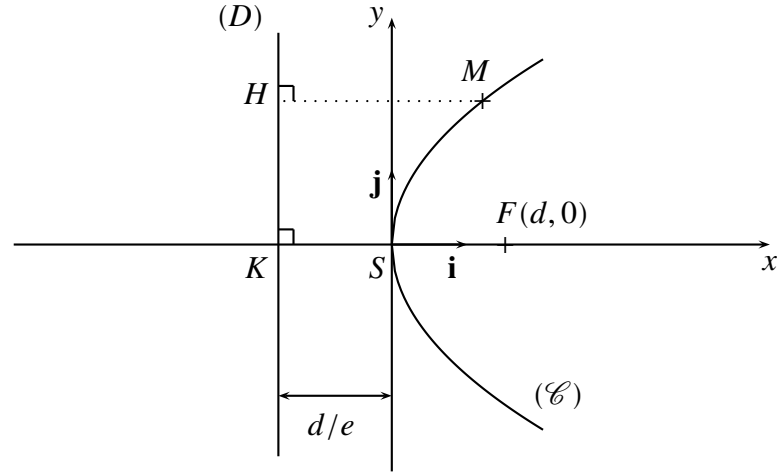


FIG 8 – Une conique

Soit K la projection orthogonale de F sur (D) . Lorsque M passe au sommet S , H est en K , et nous avons

$$\frac{SF}{SK} = e$$

$$SK = \frac{d}{e}$$

par conséquent, le sommet S étant toujours entre le foyer F et la droite (D) , nous avons $K(-\frac{d}{e}, 0)$ donc $H(-\frac{d}{e}, y)$, et,

$$MF^2 = e^2 MH^2$$

$$(x - d)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{d}{e}\right)^2$$

$$x^2 - 2xd + d^2 + y^2 = e^2 x^2 + 2xde + d^2$$

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2xd(e + 1)$$

Pour retrouver l'équation de la parabole pour $e = 1$, on pose $p = d(e + 1)$ le paramètre, et l'on a

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2 \quad (16)$$

qui est l'équation commune aux trois coniques, exprimée dans un repère ayant pour centre le sommet de la conique.

Quelle est l'expression du paramètre p en fonction de a et de b ?

Cherchons l'équation de l'ellipse dans le repère $(A', \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de centre $A'(-a, 0)$. A partir de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x + a \end{cases}$$

4 EQUATION COMMUNE AUX TROIS CONIQUES

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}a^2 Y^2 + b^2 (X - a)^2 &= a^2 b^2 \\a^2 Y^2 + b^2 X^2 - 2Xab^2 + a^2 b^2 &= a^2 b^2 \\Y^2 &= 2 \frac{b^2}{a} X - \frac{b^2}{a^2} X^2 \\&= 2 \frac{b^2}{a} X + (e^2 - 1) X^2\end{aligned}$$

par conséquent, pour une ellipse

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Pour un cercle, $a = b$ et $e = 0$, si bien que

$$p = a$$

L'équation (16) donne

$$\begin{aligned}y^2 &= 2ax - x^2 \\y^2 + (x - a)^2 &= a^2\end{aligned}$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon a et de centre $o(0, 0)$, exprimée dans le repère $(A', \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

De même, cherchons l'équation de l'hyperbole dans le repère $(A, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de centre $A(a, 0)$. A partir de l'équation de l'hyperbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x - a \end{cases}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}b^2 (X + a)^2 - a^2 Y^2 &= a^2 b^2 \\b^2 X^2 + 2Xab^2 + a^2 b^2 - a^2 Y^2 &= a^2 b^2 \\Y^2 &= 2 \frac{b^2}{a} X + \frac{b^2}{a^2} X^2\end{aligned}$$

En utilisant la relation (13), pour une hyperbole,

$$\begin{aligned}e &= \frac{c}{a} \\&= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \\&= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\end{aligned}$$

donc,

$$Y^2 = 2 \frac{b^2}{a} X + (e^2 - 1) X^2$$

par conséquent, pour une hyperbole nous avons encore

$$p = \frac{b^2}{a}$$

5 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

5.1 Représentation paramétrique d'une ellipse

Tout point $M(x, y)$ de l'ellipse ($\mathcal{E}$) vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont des constantes. Or, $\forall \varphi \in [0, 2\pi[$,

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \varphi \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \cos \varphi \\ y = \pm b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad (17)$$

Réciproquement, montrons que tout point $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient (17) est un point de l'ellipse ($\mathcal{E}$)

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \varphi \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Définition 5.1. Anomalie excentrique

L'angle φ est appelé anomalie excentrique.

Les égalités (17) constituent une représentation paramétrique de l'ellipse ($\mathcal{E}$), de paramètre φ . À tout point $M(x, y) \in (\mathcal{E})$, on peut associer un réel unique φ vérifiant (17), et réciproquement. Posons $\tan(\varphi/2) = t$, (17) devient

$$\begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (18)$$

qui est une autre représentation paramétrique de l'ellipse ($\mathcal{E}$), de paramètre t .

$$\begin{array}{llll} \varphi = 0 & \Leftrightarrow & t = 0 & \Leftrightarrow & M(a, 0) = A \\ \varphi = \pi/2 & \Leftrightarrow & t = 1 & \Leftrightarrow & M(0, b) = B \\ \varphi = \pi & \Leftrightarrow & t \rightarrow \pm\infty & \Leftrightarrow & M(-a, 0) = A' \\ \varphi = 3\pi/2 & \Leftrightarrow & t = -1 & \Leftrightarrow & M(0, -b) = B' \end{array}$$

5.2 Anomalie excentrique

Définition 5.2. Soit l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a > b > 0$. On appelle cercle principal de l'ellipse, le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre o et de rayon a , d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2$$

On appelle cercle secondaire de l'ellipse, le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre o et de rayon b , d'équation

$$x^2 + y^2 = b^2$$

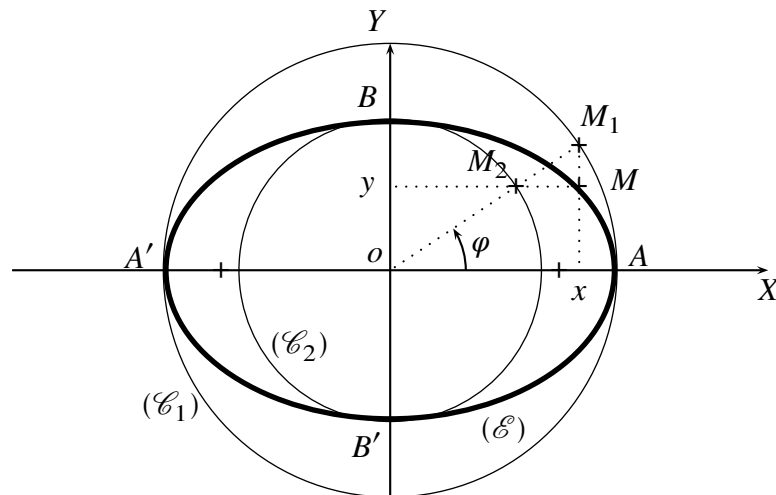


FIG 9 – Anomalie excentrique φ

Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathcal{E})$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \end{cases}$$

Soit $M_1(x_1, y_1)$ un point de $(\mathcal{C}_1)$ de même abscisse que M , $x_1 = x$

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= a^2 \\ y_1^2 &= a^2 - x_1^2 \\ &= a^2 - a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{b^2} y^2 \end{aligned}$$

5 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

et soit $M_2(x_2, y_2)$ un point de $(\mathcal{C}_2)$ de même ordonnée que M , $y_2 = y$

$$\begin{aligned}x_2^2 + y_2^2 &= b^2 \\x_2^2 &= b^2 - y_2^2 \\&= b^2 - b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\&= \frac{b^2}{a^2} x^2\end{aligned}$$

Donc, nous avons $M(x, y)$, $M_1(x, \frac{a}{b}y)$ et $M_2(\frac{b}{a}x, y)$.

Effectuons le produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\mathbf{oM}_1 \times \mathbf{oM}_2 &= \left(xy - \frac{ay}{b} \frac{bx}{a}\right) \mathbf{k} \\&= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Les points o , M_1 et M_2 sont alignés. Si l'on pose $(\mathbf{ox}, \mathbf{oM}_1) = \varphi$, alors, les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ étant de rayons respectifs a et b ,

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \varphi \\ y_2 = b \sin \varphi \end{cases} \equiv \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$$

ce qui donne une interprétation géométrique de l'anomalie excentrique.

5.3 Représentation paramétrique d'une hyperbole

Tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

$\forall \varphi \in [0, 2\pi[:$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$\forall \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \tan^2 \varphi = 1$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \\ \frac{y^2}{b^2} = \tan^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{a}{\cos \varphi} \\ y = \pm b \tan \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\cos \varphi} \\ y = b \tan \varphi \end{cases} \quad (20)$$

Ces relations impliquent qu'à tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole $(\mathcal{H})$, on puisse associer un unique réel φ (dans un intervalle $[0, 2\pi[$ diminué des multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$) vérifiant (20).

Définition 5.3. Anomalie excentrique

L'angle φ est appelé anomalie excentrique.

Réciproquement, montrons que tout point $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient (20) est un point de l'hyperbole ($\mathcal{H}$)

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \varphi} \\ y = b \tan \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \\ \frac{y^2}{b^2} = \tan^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les égalités (20) constituent une représentation paramétrique de l'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'équation (19).

Posons $\tan \frac{\varphi}{2} = t$, les égalités (20) donnent

$$\begin{cases} x = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \quad (21)$$

qui est une autre représentation paramétrique de l'hyperbole ($\mathcal{H}$). Les restrictions suivantes sont équivalentes,

$$\varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t \notin \{-1, +1\}$$

Toutefois,

$$\tan \frac{\varphi}{2} = t \Rightarrow \varphi \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

donc le sommet $A'(-a, 0)$ n'est pas obtenu par (21) quand $t \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$. Cependant, quand $t \rightarrow \infty$, le point M tend vers A' .

6 COORDONNÉES POLAIRES

6.1 Coordonnées polaires centrées sur o

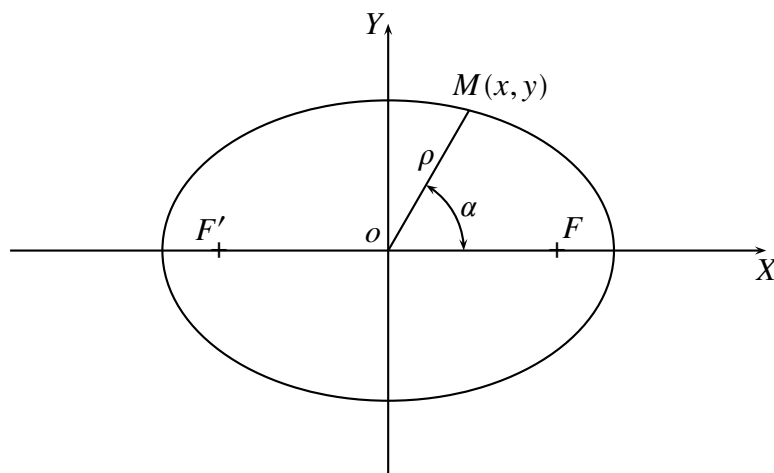


FIG 10 – Coordonnées polaires centrées sur o

Théorème 6.1. En coordonnées polaires (ρ, α) de centre o , l'équation d'une ellipse centrée en $o(0,0)$, de demi-petit axe b , d'excentricité e , et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses, s'écrit :

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} \quad (22)$$

Démonstration. On part de l'équation cartésienne de l'ellipse,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow b^2 \rho^2 \cos^2 \alpha + a^2 \rho^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2$$

On a alors

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{b^2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cos^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

si bien que,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} \\ \rho &= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

car $b > 0$. □

Nous avons montré que (4) p. 3 implique (22) p. 21. Montrons que (22) implique (4).

Théorème 6.2. En coordonnées polaires (ρ, α) de centre o , l'équation

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}}$$

est celle d'une ellipse centrée en $o(0,0)$, de demi-petit axe b , d'excentricité e , et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} \\
 \rho^2 &= \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{b^2}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{b^2}{\sin^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha} \\
 a^2 \rho^2 \sin^2 \alpha + b^2 \rho^2 \cos^2 \alpha &= a^2 b^2
 \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \square$$

6.2 Coordonnées polaires entrées sur le foyer F

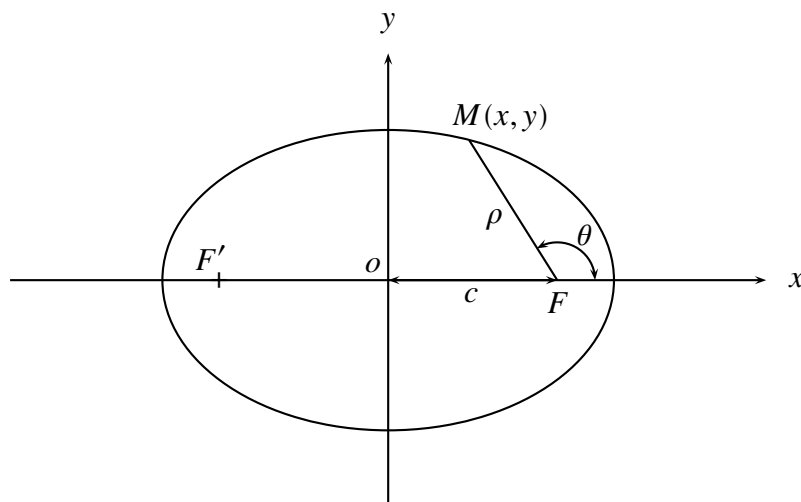


FIG 11 – Coordonnées polaires centrées sur F

Définition 6.1. Anomalie vraie

L'angle θ est appelé anomalie excentrique.

Théorème 6.3. En coordonnées polaires (ρ, θ) de centre F, l'équation d'une ellipse centrée en $o(-c, 0)$, de demi-petit axe b , d'excentricité e , et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses, s'écrit^a :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (23)$$

^a. Voir Le probleme de Kepler.pdf

Démonstration. Cherchons l'équation cartésienne de l'ellipse dans le repère $(F, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. A partir de l'équation (4) dans le repère $(o, \mathbf{i}, \mathbf{j})$,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2\end{aligned}$$

on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} X = x - c \\ Y = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}b^2 (X + c)^2 + a^2 Y^2 &= a^2 b^2 \\ b^2 X^2 + 2b^2 Xc + b^2 c^2 + a^2 Y^2 &= a^2 b^2\end{aligned}$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} X = \rho \cos \theta \\ Y = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \quad \rho^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{et} \quad Y^2 = \rho^2 - \rho^2 \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned}b^2 X^2 + 2b^2 Xc + a^2 Y^2 &= b^2 (a^2 - c^2) \\ b^2 \rho^2 \cos^2 \theta + 2b^2 c \rho \cos \theta + a^2 \rho^2 - a^2 \rho^2 \cos^2 \theta &= b^4\end{aligned}$$

On effectue le changement de paramètres,

$$\begin{cases} e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \\ c = ae \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 \cos^2 \theta (b^2 - a^2) + 2b^2 ae \rho \cos \theta + a^2 \rho^2 &= b^4 \\ \rho^2 \cos^2 \theta \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + 2 \frac{b^2}{a} e \rho \cos \theta + \rho^2 &= \frac{b^4}{a^2}\end{aligned}$$

On pose $p = b^2/a$ appelé paramètre de l'ellipse,

$$\begin{aligned}\rho^2 &= p^2 + e^2 \rho^2 \cos^2 \theta - 2pe \rho \cos \theta \\ &= (p^2 - e \rho \cos \theta)^2 \\ \rho &= \pm (p^2 - e \rho \cos \theta)\end{aligned}$$

Le rayon étant positif,

$$\begin{aligned}\rho &= p^2 - e \rho \cos \theta \\ \rho (1 + e \cos \theta) &= p \\ \rho &= \frac{p}{1 + e \cos \theta}\end{aligned}$$

□

Nous avons montré que l'équation (4) implique l'équation (23). Réciproquement, montrons que l'équation (23) implique l'équation (4).

Théorème 6.4. En coordonnées polaires (ρ, θ) de centre F , l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

est celle d'une ellipse centrée en $O(-c, 0)$, de demi-petit axe b , d'excentricité e , et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses.

Démonstration.

$$\rho + e \rho \cos \theta = p$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \rho = [y^2 + (x - c)^2]^{1/2} \\ \rho \cos \theta = x - c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [y^2 + (x - c)^2]^{1/2} + e(x - c) &= p \\ y^2 + (x - c)^2 &= [p - e(x - c)]^2 \\ y^2 + (x - c)^2 - [p^2 - 2pe(x - c) + e^2(x - c)^2] &= 0 \\ y^2 + (1 - e^2)(x - c)^2 - p^2 + 2pe(x - c) &= 0 \end{aligned}$$

Soit e l'excentricité et p le paramètre, tels que

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \\ p = \frac{b^2}{a} \end{cases} \quad (24)$$

$$(25)$$

Avec ces définitions, nous avons :

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{b^2}{a^2} (x^2 - 2xc + c^2) - \frac{b^4}{a^2} + 2 \frac{b^2}{a} e (x - c) &= 0 \\ a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2b^2 xc + b^2 c^2 - b^4 + 2b^2 a e x - 2b^2 a e c &= 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $ae = c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\begin{aligned} a^2 y^2 + b^2 x^2 - b^4 - b^2 c^2 &= 0 \\ a^2 y^2 + b^2 x^2 &= b^4 + b^2 (a^2 - b^2) \\ a^2 y^2 + b^2 x^2 &= a^2 b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

□

Remarque. Lorsque l'excentricité est nulle nous obtenons un cercle. Il y a deux façon de le voir : l'équation (23) devient $\rho = p$ qui est l'équation d'un cercle de rayon p . En partant de l'expression de l'excentricité :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} &= 0 \\ \frac{b^2}{a^2} &= 1 \\ a &= b\end{aligned}$$

le demi-grand axe et le demi-petit axe sont égaux, nous avons bien un cercle.

Lorsque l'excentricité tend vers l'unité, le rapport b/a tend vers zéro et l'ellipse n'est plus fermée. La définition $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ que nous avons prise pour l'excentricité ne s'applique que pour un cercle ou une ellipse.

Remarque. L'excentricité e et le paramètre p sont indépendants : fixer la valeur de l'un ne fixe pas la valeur de l'autre. Il en va de même en coordonnées cartésiennes pour les longueurs a et b des demi-axes. Par conséquent, les deux relations (24) et (25) sont nécessaires pour que les ellipses d'équations $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ et $p = \rho + \rho e \cos \theta$ soient identiques.

7 SURFACE TOTALE D'UNE ELLIPSE

Théorème 7.1. La surface d'une ellipse est donnée par,

$$S = \pi ab$$

Démonstration. On part de l'équation cartésienne de l'ellipse :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ y(x) &= \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\end{aligned}$$

On intègre la fonction $y(x)$ sur le quart supérieur droit de l'ellipse pour obtenir le quart de la surface totale S . La variable x varie alors de 0 à a , et $y(x)$ reste positive :

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_0^a y(x) dx \\ &= \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx\end{aligned}$$

On pose $t = x/a$, d'où $dx = a dt$,

$$S = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$$

7 SURFACE TOTALE D'UNE ELLIPSE

On pose $t = \sin \theta$, d'où $dt = \cos \theta d\theta$,

$$\begin{aligned} S &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2ab \left(\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta \right) \end{aligned}$$

On pose $\alpha = 2\theta$, d'où $d\theta = \frac{1}{2}d\alpha$,

$$\begin{aligned} S &= 2ab \left([\theta]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha \right) \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} [\sin \alpha]_0^{\pi} \right) \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

□