

o.castera@free.fr  
sciences-physiques.neocities.org

---

---

# **Physique Vol. 4**

# **Tenseur Métrique**

---

---

**Olivier Castéra**

Le 15 avril 2026



# Table des matières

<b>1 Tenseur métrique</b>	<b>1</b>
1.1 Définition	1
1.2 Tenseur métrique et composantes	4
1.3 Les différentes notations du produit scalaire	5
1.4 Notation matricielle des covecteurs	8
1.5 Tenseur métrique dual	8
1.6 Différentielle du déterminant du tenseur métrique	11
1.7 Tenseur métrique et norme	11
1.8 Tenseur métrique et bases	11
1.8.1 Base orthonormée	11
1.8.2 Base orthogonale non normée	14
1.8.3 Base oblique normée	15
<b>2 Espaces riemanniens</b>	<b>17</b>
2.1 Les différents espaces	17
2.2 Propriétés du tenseur métrique	18
<b>3 Formes linéaires</b>	<b>21</b>
3.1 Formes et formes linéaires	21
3.2 Expression analytique d'une forme linéaire	26
3.3 Espace vectoriel dual d'un espace vectoriel	27
3.4 Base duale d'une base	28
3.5 Base réciproque	29
3.6 Indépendance linéaire des vecteurs réciproques	30
3.7 Composantes contravariantes dans la base réciproque	35
3.8 Composantes covariantes dans la base réciproque	36
3.9 Transformation des composantes en bases réciproques	37
3.9.1 Transformation des composantes contravariantes	37
3.9.2 Transformation des composantes covariantes	37
3.9.3 Transformation des vecteurs de base de la base réciproque	38
<b>4 Formes bilinéaires</b>	<b>39</b>
4.1 Définition d'une forme bilinéaire	39
4.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire	41
4.2.1 Expression analytique d'une forme bilinéaire symétrique	41
4.2.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire antisymétrique	42
4.3 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique	42
4.4 Expression analytique d'une forme quadratique	43

## TABLE DES MATIÈRES

4.5 Matrices et formes bilinéaires . . . . .	43
<b>5 Produit de Kronecker</b>	<b>47</b>
5.1 Propriétés du produit de Kronecker . . . . .	47
5.2 Formes bilinéaires . . . . .	50
<b>6 Espaces vectoriels pré-euclidiens</b>	<b>51</b>
6.1 Définitions . . . . .	51
6.2 Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien . . . . .	52
6.3 Angle entre deux vecteurs . . . . .	55
6.3.1 Espace vectoriel euclidien . . . . .	56
6.3.2 Espace vectoriel pseudo-euclidien . . . . .	60
<b>7 Espaces ponctuels</b>	<b>63</b>
7.1 Définitions . . . . .	63
7.2 Repère et coordonnées d'un point . . . . .	63
7.3 Distance . . . . .	64
7.4 Dérivée et différentielle d'un vecteur et d'un point . . . . .	67
<b>8 Gradient</b>	<b>71</b>
8.1 Différentielle d'un champ de scalaires . . . . .	71
8.2 Définition du gradient d'un champ de scalaires . . . . .	72
8.3 Représentation du gradient . . . . .	80
8.4 Base réciproque de la base naturelle . . . . .	80
<b>9 Algèbre tensorielle</b>	<b>83</b>
9.1 Introduction . . . . .	83
9.2 Composantes deux fois contravariantes . . . . .	86
9.3 Produit tensoriel . . . . .	87
9.3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs . . . . .	87
9.3.2 Expression analytique du produit tensoriel . . . . .	88
9.3.3 Éléments d'un espace produit tensoriel . . . . .	90
9.3.4 Produit tensoriel de deux espaces identiques . . . . .	91
9.3.5 Non commutativité du produit tensoriel . . . . .	91
9.3.6 Associativité du produit tensoriel . . . . .	92
9.3.7 Produit tensoriel de plusieurs espaces . . . . .	93
9.4 Produit scalaire . . . . .	93
9.4.1 Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base . . . . .	93
9.4.2 Composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux . . . . .	95
9.4.3 Produit scalaire de deux tenseurs contravariants d'ordre deux . . . . .	95
9.5 Base . . . . .	96
9.5.1 Base duale d'un espace produit tensoriel . . . . .	96
9.5.2 Composantes mixtes . . . . .	96
9.5.3 Changement de base . . . . .	98
9.6 Transformation des composantes d'un tenseur . . . . .	99
9.6.1 Transformation des composantes contravariantes . . . . .	99
9.6.2 Transformation des composantes covariantes . . . . .	101
9.6.3 Transformation des composantes mixtes . . . . .	104
9.7 Définition d'un tenseur . . . . .	107

## TABLE DES MATIÈRES

9.8	Le tenseur métrique . . . . .	111
9.9	Symétrie et antisymétrie des tenseurs . . . . .	113
9.9.1	Tenseurs deux fois contravariant ou deux fois covariant . . . . .	113
9.9.2	Symétrie des tenseurs mixtes . . . . .	113
9.9.3	Décomposition d'un tenseur . . . . .	114
9.10	Opérations sur les tenseurs . . . . .	115
9.10.1	Propriétés des lois de composition tensorielles . . . . .	115
9.10.2	Combinaison linéaire de tenseurs . . . . .	116
9.10.3	Classification des tenseurs . . . . .	117
9.10.4	Multiplication tensorielle . . . . .	117
9.10.5	Contraction des composantes . . . . .	117
9.10.6	Multiplication contractée . . . . .	119
9.10.7	Produit complètement contracté . . . . .	121
9.11	Équations tensorielles . . . . .	122
9.11.1	Changement de système de coordonnées . . . . .	122
9.11.2	Règles sur les indices . . . . .	123
<b>10</b>	<b>Annexes</b>	<b>125</b>
10.1	Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . . .	125
	<b>Index</b>	<b>127</b>



# Chapitre 1

## TENSEUR MÉTRIQUE

### 1.1 Définition

L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs fait apparaître le produit scalaire de tous les vecteurs de base pris deux à deux,  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ . Nous pouvons former une matrice carrée symétrique à partir de ces produits scalaires.

#### Définition 1.1 : Tenseur métrique

La matrice  $[g_{ij}]$  définie par ses composantes  $g_{ij}$  telles que

$$\forall i, j \quad g_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

est appelée tenseur métrique ou tenseur fondamental, noté  $G$ .

On retrouve les propriétés du produit scalaire. On ajoute le fait que les composantes du tenseur métrique sont fonction des coordonnées lorsqu'elles ne sont pas rectilignes puisque les vecteurs de base varient d'un point à l'autre (donc dans les espaces pré-euclidiens en coordonnées curvilignes, et dans tous les espaces ayant une courbure intrinsèque).

Pour un espace donné, les composantes du tenseur métrique dépendent

- a) du choix du système de coordonnées
- b) puis du choix de la base dans ce système de coordonnées, principalement la :
  - base tangente normée
  - base réciproque non normée de la base tangente normée
  - base naturelle
  - base réciproque de la base naturelle

#### Exemple 1.1 : Métrique et tenseur métrique du plan euclidien

La métrique de l'espace euclidien de dimension deux, c.-à-d. le plan euclidien aussi noté  $\mathbb{R}^2$ , s'écrit :

- en coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  :  $ds^2 = dx^2 + dy^2$
- en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  :  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$

En représentation matricielle et en notation li co, le tenseur métrique de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$  a pour expression :

- dans la base rectangulaire orthonormée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dans la base polaire orthonormée  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$  :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dans la base naturelle polaire  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$  en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

- dans la base naturelle polaire  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$  en coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Dans la base naturelle d'un système de coordonnées, tenseur métrique et métrique dans le même système de coordonnées sont intimement liés.

### Exemple 1.2 : Tenseur métrique de l'espace euclidien en coordonnées sphériques

Dans la base naturelle du système de coordonnées sphériques, le tenseur métrique de l'espace vectoriel euclidien  $E_3$  a pour composantes en coordonnées sphériques :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

La métrique de l'espace vectoriel euclidien  $E_3$  en coordonnées sphériques s'écrit :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

### Exemple 1.3 : Tenseur métrique et métrique d'une sphère

À la surface d'une sphère de rayon  $r$ , plaçons-nous dans la base naturelle  $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  associée

aux coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$ , où  $\theta$  est la colatitude et  $\phi$  la longitude. À partir de la métrique de la sphère, le tenseur métrique a pour composantes en coordonnées sphériques :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

où  $r$  est constant. La métrique de l'espace courbe  $E_2$  en coordonnées sphériques s'écrit :

$$ds^2 = r^2 d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

#### Exemple 1.4 : Métrique de l'espace-temps

La métrique de l'espace-temps en convention de genre temps est donnée dans le Vol. 5 Relativité restreinte. Lorsque le  $s^2$  est positif, nous sommes dans l'espace-temps de l'observateur, dans son futur absolu ou dans son passé absolu. Lorsque le  $s^2$  est négatif, nous sommes en dehors de l'espace-temps de l'observateur. Les événements dont le  $s^2$  avec l'évènement origine est négatif, *n'existent pas* pour l'observateur à l'origine (à ce moment précis et à cet endroit précis, ils existeront pour l'observateur plus tard, le temps que l'information arrive).

Au § 9.8 page 111 nous montrons que les composantes de la matrice  $G$  se transforment de façon à rendre invariante la distance entre deux points par changement de coordonnées, donc par changement de base. Un tenseur est un objet mathématique qui a une existence propre indépendante du système de coordonnées dans lequel on le représente. Toutes les matrices ne sont pas des tenseurs, tous les tenseurs à deux indices peuvent être représentés sous forme de matrices. Nous verrons au § 4.5 page 43 que la représentation matricielle des tenseurs à des limites que n'a pas la notation indicielle.

#### Exemple 1.5 : Tenseur métrique associé aux coordonnées cartésiennes

Soit  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  la base d'un système de coordonnées cartésiennes de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ . Le tenseur métrique a pour composantes :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x^2 & \|\mathbf{e}_x\| \|\mathbf{e}_y\| \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) \\ \|\mathbf{e}_x\| \|\mathbf{e}_y\| \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) & \mathbf{e}_y^2 \end{bmatrix}$$

La symétrie du produit scalaire implique la symétrie des  $g_{ij}$  quelle que soit la base :

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \\ g_{ij} = g_{ji}$$

Grâce au tenseur métrique le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u^i v^j \quad (1.1)$$

En utilisant la non dégénérescence ( $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) du produit scalaire :

$$\begin{aligned} & \text{Si } \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ alors } \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \text{ Si } \forall v^j, \quad g_{ij} u^i v^j = 0, \text{ alors } u^i = 0 \\ \Rightarrow & \text{ Si } \forall j, \quad g_{ij} u^i = 0, \text{ alors } u^i = 0 \end{aligned}$$



et pour la seconde composante covariante :

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= (u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u^1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + u^2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= g_{12} u^1 + g_{22} u^2 \end{aligned}$$

En écriture matricielle nous avons le système :

$$\begin{cases} g_{11} u^1 + g_{21} u^2 = u_1 \\ g_{12} u^1 + g_{22} u^2 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

### 1.3 Les différentes notations du produit scalaire

Avec le tenseur métrique le produit scalaire s'écrit, d'après la relation (1.1) page 3 :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u^i v^j$$

#### Notation 1.1

On trouve aussi la notation

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \stackrel{\text{déf}}{=} g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

qui montre explicitement que le tenseur métrique prend en entrée deux vecteurs et donne en sortie un scalaire.

En utilisant (1.3) page précédente et par symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_j v^j \\ &= u^j v_j \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le tenseur métrique n'apparaît plus dans l'expression du produit scalaire et tous les termes sont précédés d'un signe positif,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots + u_n v^n$$

mais chaque terme est algébrique, c.-à-d. positif, négatif ou nul.

#### Exemple 1.7 : Vecteurs orthonormés

Dans le champ de bases naturelles polaires  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$  de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ ,

montrons que les champs de vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  donnés en composantes contravariantes

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \frac{3}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{4}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{v} = \frac{-4}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{3}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix} \\ \mathbf{v} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \end{cases}$$

sont normés et orthogonaux.

- la base naturelle polaire est orthogonale non normée :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \left( \frac{3}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{4}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \right) \cdot \left( \frac{3}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{4}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \right) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{-4}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{3}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \right) \cdot \left( \frac{-4}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{3}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{9}{25} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho + \frac{16}{25\rho^2} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{16}{25} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho + \frac{9}{25\rho^2} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25\rho^2} \rho^2 \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25\rho^2} \rho^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \|\mathbf{v}\| = 1 \end{cases}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left( \frac{3}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{4}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \right) \cdot \left( \frac{-4}{5} \mathbf{e}_\rho + \frac{3}{5\rho} \mathbf{e}_\theta \right) \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{12}{25\rho^2} \rho^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- en passant dans la base rectangulaire :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \frac{3}{5} [\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}] + \frac{4}{5\rho} [-\rho \sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}] \\ \mathbf{v} = \frac{-4}{5} [\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}] + \frac{3}{5\rho} [-\rho \sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\theta) = \frac{1}{5} [3 \cos(\theta) - 4 \sin(\theta)]\mathbf{i} + \frac{1}{5} [3 \sin(\theta) + 4 \cos(\theta)]\mathbf{j} \\ \mathbf{v}(\theta) = \frac{1}{5} [-4 \cos(\theta) - 3 \sin(\theta)]\mathbf{i} + \frac{1}{5} [-4 \sin(\theta) + 3 \cos(\theta)]\mathbf{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{25} (9 \cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta - 24 \cos \theta \sin \theta + 9 \sin^2 \theta + 16 \cos^2 \theta + 24 \cos \theta \sin \theta) \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{25} (16 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta + 24 \cos \theta \sin \theta + 16 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta - 24 \cos \theta \sin \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{25} (9 + 16) \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{25} (19 + 9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \|\mathbf{v}\| = 1 \end{cases}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{25} (-12 \cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta + 7 \cos \theta \sin \theta \\ &\quad -12 \sin^2 \theta + 12 \cos^2 \theta - 7 \cos \theta \sin \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- en notation matricielle avec  $\mathbf{u}^T A \mathbf{u} = a_{ij} u^i u^j$  :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = g_{ij} u^i u^j \\ \|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij} v^i v^j \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix} \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4\rho/5 \end{pmatrix} \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3\rho/5 \end{pmatrix} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{9}{25} + \frac{16\rho}{25\rho} \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{16}{25} + \frac{9\rho}{25\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \|\mathbf{v}\| = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= g_{ij} u^i v^j \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3\rho/5 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{12\rho}{25\rho} \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 1.4 Notation matricielle des covecteurs

Nous pouvons écrire le produit scalaire sous forme de multiplication matricielle :

$$(u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots + u_n v^n$$

et donc représenter les covecteurs par des matrices lignes. La symétrie du produit scalaire devient :

$$(u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

En revanche, l'écriture matricielle de l'égalité 1.4 page 5 n'est plus possible car on aurait

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = (u_1 \quad u_2) \tag{1.6}$$

qui ne respecte pas la notation que l'on a choisi pour la multiplication matricielle. Au chapitre 4 page 39 nous changeons de notation matricielle pour le tenseur métrique.

### Remarque 1.1

Un covecteur n'est pas la transposée d'un vecteur car leurs composantes ne se transforment pas de la même façon par changement de base :

$$(u_1 \quad u_2) \neq (u^1 \quad u^2)$$

## 1.5 Tenseur métrique dual

Cherchons l'expression des composantes contravariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes covariantes. Nous devons résoudre (inverser) le système des  $n$  équations linéaires à  $n$  inconnues  $u^j$  (1.3) page 4 :

$$\forall i \quad g_{ij} u^j = u_i$$

D'après (1.2) page 4 le déterminant  $g$  de la matrice  $G$  est non nul, par suite le système admet une solution unique. La méthode de résolution de Cramer donne alors :

$$\forall j \quad u^j = \sum_i \frac{C_{ij}(G)}{g} u_i$$

En posant,

$$\forall i, j \quad g^{ji} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{C_{ij}(G)}{g} \tag{1.7}$$

nous obtenons les relations cherchées :

$$\forall j \quad u^j = g^{ji} u_i \quad (1.8)$$

où les  $g^{ij}$  sont les éléments de la matrice inverse de la matrice  $G$ , appelé tenseur *dual* ou tenseur *conjugué* du tenseur métrique. Il permet de passer des composantes covariantes aux composantes contravariantes, autrement dit d'élever les indices. La notation avec deux indices supérieurs sera justifiée au § 9.8 page 111.

$G$  étant symétrique, il en est de même de  $[g^{ij}]$ . De plus les déterminants de matrices inverses sont inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned} GG^{-1} &= I \\ \det(GG^{-1}) &= \det I \\ \det G \times \det G^{-1} &= 1 \\ \det[g^{ij}] &= \frac{1}{g} \end{aligned}$$

Les relations (1.3) page 4 et (1.8) de la présente page nous donnent :

$$\begin{aligned} \forall k \quad u_k &= g_{kj} u^j \\ \forall i \quad g^{ik} u_k &= g^{ik} g_{kj} u^j \\ u^i &= g^{ik} g_{kj} u^j \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall i, j \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (1.9)$$

qui exprime en notation indiciaire que les matrices sont inverses l'une de l'autre.

### Remarque 1.2

Concernant la notation des indices :

$$\begin{cases} g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \\ g_{kj} g^{ik} = \delta_j^i \end{cases} \Rightarrow \delta_j^i = \delta_j^i = \delta_j^i$$

Pour un espace à  $n$  dimensions :

$$\sum_{i=1}^n g^{ik} g_{ki} = \sum_{i=1}^n \delta_i^i$$

Avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\begin{aligned} g^{ik} g_{ki} &= \delta_i^i \\ &= \delta_1^1 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^n \\ &= n \end{aligned}$$

Notez que  $\delta_{ii} = 1$  d'après la définition du symbole de Kronecker.

### Exemple 1.8 : Tenseur métrique dual dans la base naturelle polaire

Dans la base naturelle polaire de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ , le tenseur métrique a pour

composantes :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

Les éléments du tenseur métrique sont fonction des coordonnées, par exemple ici  $g_{\theta\theta} = \rho^2$ . On les appelle des *fonctions métriques*. Le déterminant du tenseur métrique polaire vaut :

$$\begin{aligned} g &= 1 \times \rho^2 - 0 \times 0 \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

Le dual du tenseur métrique dans la base naturelle polaire a pour composantes :

$$\begin{aligned} [g^{ij}] &= \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.10}$$

### Exemple 1.9 : Tenseur métrique dual à la surface d'une sphère

À la surface d'une sphère de rayon  $r$  le tenseur métrique a pour composantes en coordonnées sphériques :

$$G \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Le déterminant du tenseur métrique vaut :

$$g = r^4 \sin^2(\theta)$$

Le dual du tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} [g^{ij}] &= \frac{1}{r^4 \sin^2(\theta)} \begin{bmatrix} r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1/[r^2 \sin^2(\theta)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 1.6 Différentielle du déterminant du tenseur métrique

La différentielle du déterminant du tenseur métrique s'écrit (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) :

$$dg = \sum_i \sum_j dg_{ij} C_{ij}(G)$$

(1.7) page 8 donne l'expression du cofacteur :

$$\begin{aligned} dg &= gg^{ij} dg_{ij} \\ \partial_k g dx^k &= gg^{ij} \partial_k g_{ij} dx^k \\ \partial_k g &= gg^{ij} \partial_k g_{ij} \end{aligned}$$


---

## 1.7 Tenseur métrique et norme

Le carré de la norme d'un vecteur (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) peut s'écrire grâce au tenseur métrique.

### Définition 1.2 : Norme d'un vecteur

Le carré de la norme d'un vecteur a pour expression

$$\|\mathbf{u}\|^2 = g_{ij} u^i u^j$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= g^{ij} u_i u_j \\ &= u_i u^i \end{aligned}$$


---

## 1.8 Tenseur métrique et bases

### 1.8.1 Base orthonormée

#### Définition 1.3 : Base orthogonale

Une base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  d'un espace vectoriel euclidien  $E_n$  est orthogonale ssi ses vecteurs

sont orthogonaux deux à deux :

$$\begin{aligned}\forall i \neq j, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0 \\ \forall i \neq j, g_{ij} &= 0\end{aligned}$$

$G$  est donc diagonale. L'inverse d'une matrice diagonale étant diagonale :

$$\forall i \neq k, g^{ik} = 0$$

Les relations (1.9) page 9 pour  $i = j$  deviennent :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad g_{ik}g^{ki} = 1 \quad \text{sans sommer sur } i$$

Les termes non diagonaux étant nuls,  $i = k$  :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad g_{ii}g^{ii} = 1 \quad \text{sans sommer sur } i$$

soit, dans toute base orthogonale :

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \dots, g_{nn} = \frac{1}{g^{nn}} \quad (1.11)$$

#### Définition 1.4 : Base orthonormée

$(\mathbf{e}_i)$  est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien ssi ses vecteurs sont normés et orthogonaux deux à deux :

$$\begin{aligned}\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \delta_{ij} \\ g_{ij} &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

Dans toute base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien, les composantes covariantes et contravariantes sont confondues. En effet, en partant des relations (1.3) page 4 et avec la déf. 1.4 ci-dessus :

$$\begin{aligned}\forall i \quad u_i &= g_{ij}u^j \\ &= \delta_{ij}u^j \\ &= u^i\end{aligned}$$

Il est souvent avantageux de se placer dans une base orthonormée.

#### Théorème 1.1 : Théorème de Gram-Schmidt

*Tout espace vectoriel pré-euclidien admet des bases orthonormées.*

La démonstration est donnée en annexe 10.1 page 125.

#### Exemple 1.10 : Tenseur métrique dans une base orthonormée

Dans l'espace vectoriel euclidien  $E_3$  de la physique newtonienne, plaçons-nous dans la base

orthonormée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Le tenseur métrique a pour composantes :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemple 1.11 : Tenseur métrique dans une base pseudo-orthonormée**

Plaçons-nous dans l'une des deux bases *canoniques*, c.-à-d. les plus simples,  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de l'espace-temps de la relativité restreinte :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0(1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1(0, i, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2(0, 0, i, 0) \\ \mathbf{e}_3(0, 0, 0, i) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_0(i, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1(0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2(0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_3(0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

où  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ . Dans la première base canonique, de convention de genre temps, le tenseur métrique a pour composantes :

$$\eta \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'espace-temps de la relativité restreinte est pseudo-euclidien (en coordonnées rectangulaires son tenseur métrique est diagonal et ses composantes valent  $\pm 1$ ). Sa base canonique est pseudo-orthonormale. Calculons le tenseur dual du tenseur métrique en inversant sa matrice représentative :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Le tenseur métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est égal à son dual.

### 1.8.2 Base orthogonale non normée

Dans une base orthogonale non normée, les composantes covariantes et contravariantes ne sont pas confondues. Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  une base orthogonale non normée d'un espace vectoriel euclidien  $E_2$ , telle que  $\|\mathbf{e}_1\| = 3$  et  $\|\mathbf{e}_2\| = 1$  (Fig. 1.1).

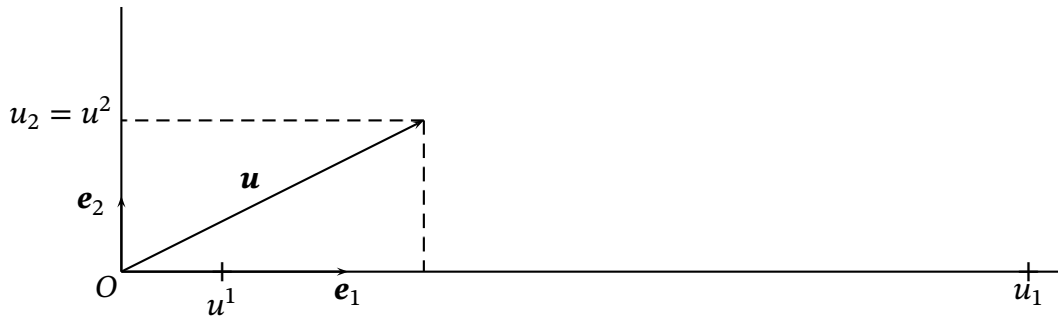


FIG. 1.1 – Base orthogonale non normée

Pour avoir,

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2$$

la composante contravariante  $u^1$  est divisée par 3 pour compenser la multiplication par 3 de la norme du vecteur de base  $\mathbf{e}_1$ . Elle varie contrairement (contra-variante) à la norme de son vecteur de base  $\mathbf{e}_1$ .

La composante covariante  $u_1$ , telle que

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1$$

est multipliée par 3 en même temps que le vecteur de base  $\mathbf{e}_1$ . Elle varie comme (co-variante) la norme de son vecteur de base  $\mathbf{e}_1$ .

Bien que la base soit orthogonale  $\mathbf{u} \neq u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ , car lors d'un changement de base la composante covariante  $u_1$  et le vecteur de base  $\mathbf{e}_1$  sont multipliés dans le même rapport, ne laissant pas invariant  $u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ . En utilisant (1.3) page 4 nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= g_{11} u^1 \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) u^1 \\ &= \|\mathbf{e}_1\|^2 u^1 \\ &= 9u^1 \end{aligned}$$

La composante  $g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1$ , et de façon générale toutes les composantes  $g_{ij}$ , est covariante au carré puisqu'elle varie comme  $\|\mathbf{e}_1\|^2$ . Nous la dirons deux fois covariante.

#### Remarque 1.3

Par abus de langage, nous dirons par exemple qu'un « tenseur est deux fois covariant » alors que ce sont ses composantes qui le sont.

L'écriture en composantes deux fois covariantes du tenseur métrique permet l'invariance du produit scalaire par changement de base, de deux vecteurs écrits en composantes contravariantes.

Pour la seconde composante :

$$\begin{aligned} u_2 &= g_{22}u^2 \\ &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) u^2 \\ &= \|\mathbf{e}_2\|^2 u^2 \\ &= u^2 \end{aligned}$$

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.8.3 Base oblique normée

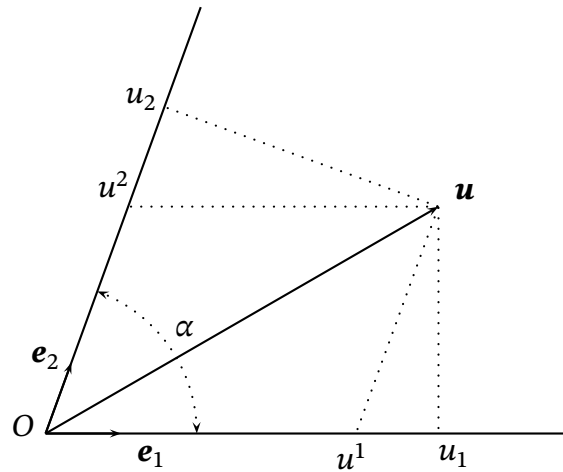


FIG. 1.2 – Base oblique normée

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Son déterminant vaut

$$\begin{aligned} g &= 1 - \cos^2(\alpha) \\ &= \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

et son inverse s'écrit :

$$[g^{ij}] = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Pour les bases obliques non normées, prenons un exemple :

**Exemple 1.12 : Tenseur métrique et son dual dans une base oblique non normée**

Soit  $\{\mathbf{e}_1(2, 0), \mathbf{e}_2(-1, 3)\}$  une base de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ . Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ g_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ g_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 \\ g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 4 \\ g_{12} = -2 \\ g_{21} = -2 \\ g_{22} = 10 \end{cases} \Rightarrow G \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Cette base est oblique (termes rectangles) et non normée. Déterminons les composantes du tenseur dual du tenseur métrique,  $[g^{ij}]$ . L'inverse d'une matrice vaut un sur le déterminant fois la transposée de la comatrice :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} [\text{com}(M)]^T$$

Or :

$$\begin{aligned} g &= 4 \times 10 - (-2) \times (-2) \\ &= 36 \end{aligned}$$

La comatrice de toute matrice symétrique est symétrique. Ici elle a pour composantes :

$$\text{com } G \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Toute matrice symétrique étant égale à sa transposée  $(\text{com } G)^T = \text{com } G$ , et :

$$[g^{ij}] = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons aussi déterminer le tenseur dual du tenseur métrique grâce aux relations (1.9) page 9 :

$$\begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \delta_1^1 \\ g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \delta_1^2 \\ g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21} = \delta_2^1 \\ g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = \delta_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4g^{11} - 2g^{21} = 1 \\ 4g^{12} - 2g^{22} = 0 \\ -2g^{11} + 10g^{21} = 0 \\ -2g^{12} + 10g^{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{11} = 5/18 \\ g^{12} = 1/18 \\ g^{21} = 1/18 \\ g^{22} = 1/9 \end{cases}$$

## Chapitre 2

### ESPACES RIEMANNIENS

#### 2.1 Les différents espaces

Les espaces proprement riemanniens regroupent les espaces euclidiens (plats) et non euclidiens (courbes). La métrique proprement riemannienne est une forme différentielle quadratique définie positive. Les espaces pseudo-riemanniens regroupent les espaces pseudo-euclidiens (plats), et pseudo-riemanniens courbes. La métrique pseudo-riemannienne est une forme différentielle quadratique indéfinie.

Les espaces riemanniens regroupent les espaces proprement riemanniens et pseudo-riemanniens. Dans le système de coordonnées  $(x^i)$ , leurs métriques s'écrivent :

$$ds^2 = g_{ij}(x^i)dx^i dx^j$$

Une variété munie d'un tenseur métrique est appelée variété riemannienne ou pseudo-riemannienne. Les variétés généralisent donc les espaces riemanniens en levant la contrainte sur l'écriture de la métrique. Le tableau suivant récapitule les différents espaces :

Variété ou espace	Proprement r. Pré-euclidien Euclidien	Proprement r. Non-euclidien	Pseudo-riemann. Pré-euclidien Pseudo-euclidien	Pseudo-riemann. Pseudo-r. courbe
Métrique	déf. positive	déf. positive	indéf.	indéf.
Signature	+	+	+ et -	+ et -
Représentation	plat	courbe	plat	courbe
Sys. de coord.	rectiligne	curviligne	rectiligne	curviligne
Coefficients	constants	f(x)	constants	f(x)
Application	Méca class.	Méca. analytique	RR	RG
Exemple	plan	sphère	e. de Minkowski	trajec. Mercure

Par « métrique » on entend forme quadratique associée au tenseur métrique ou bien matrice représentative du tenseur métrique. Les coefficients de la métrique sont les composantes du tenseur métrique.

## 2.2 Propriétés du tenseur métrique

### Propriété 2.1 : Tenseur métrique d'un espace riemannien

- 1) les composantes  $g_{ij}(x^i)$  sont différentiables de classe  $\mathcal{C}^2$  (leurs dérivées partielles secondes par rapport aux coordonnées existent et sont continues)
- 2) les  $g_{ij}$  sont symétriques :  $g_{ij} = g_{ji}$
- 3) la matrice  $G$  est telle que sa forme quadratique différentielle associée est une distance :  $g_{ij}dx^i dx^j$  doit être invariante par changement de coordonnées
- 4) définie :  $\forall \mathbf{u}, g_{ij}u^i u^j = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 5) positive :  $\forall \mathbf{u}, g_{ij}u^i u^j \geq 0$

Lorsque  $G$  est définie positive, le déterminant  $g$  et les termes diagonaux  $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{nn}$  sont tous positifs. Dans les espaces pseudo-riemanniens les propriétés 4) et 5) sont remplacées par la propriété moins restrictive :

- 4) la matrice  $G$  est inversible (ssi son déterminant est non nul :  $g \neq 0$ ). Elle est dite non singulière ou définie

### Remarque 2.1

$G$  est symétrique. Supposons que ce ne soit pas le cas et décomposons le tenseur métrique en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})$$

La contribution à  $ds^2$  de la partie antisymétrique est nulle,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) dx^i dx^j &= \frac{1}{2}(g_{ij} dx^i dx^j - g_{ji} dx^i dx^j) \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij} dx^i dx^j - g_{ij} dx^j dx^i) \\ &= \frac{1}{2}(g_{ij} dx^i dx^j - g_{ij} dx^i dx^j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et la métrique est symétrique.

La métrique d'un espace riemannien étant symétrique, calculons le nombre d'éléments différents de la matrice  $G$ , appelés composantes indépendantes du tenseur métrique. Comptons les éléments diagonaux plus les éléments de la partie triangulaire supérieure de la matrice. Cela représente la moitié des  $n^2$  éléments, plus la moitié restante des  $n$  éléments diagonaux, soit

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

éléments différents.

### Remarque 2.2

Si la matrice  $G$

- est définie et positive, l'espace est dit *proprement riemannien* : pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  non nul,

$$g_{ij} v^i v^j > 0$$

$g$  et  $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{nn}$  sont tous positifs. De plus,  $G^{-1}$  est aussi définie positive. On peut faire le rapprochement avec la définition d'un espace (proprement) euclidien.

- n'est pas définie positive, la métrique peut être positive, négative ou nulle, elle est indéfinie et l'espace est dit pseudo-riemannien. On peut faire le rapprochement avec la définition d'un espace pseudo-euclidien.

### Remarque 2.3

Un espace riemannien existe en lui-même et n'a nul besoin d'être plongé dans un espace de dimension supérieure pour être représenté.

### Exemple 2.1 : Matrice représentant un tenseur métrique

Montrons que le champ de matrice suivant est le tenseur métrique d'un espace riemannien :

$$\begin{bmatrix} (x^1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (x^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix}$$

On suppose que la métrique associée à cette matrice est invariante par changement de coordonnées.

- les éléments de la matrice sont des polynômes en  $x^1$  et  $x^2$ , donc de classe  $\mathcal{C}^2$
- la matrice est symétrique
- par hypothèse la métrique associée est invariante par changement de coordonnées
- $g = \frac{64}{9} \{(x^2)^2 [(x^1)^2 - 1] - 1\}$ . On suppose que  $[(x^1)^2 - 1] - 1 \neq 1$  pour que la matrice soit inversible.

Calculons la longueur de la courbe paramétrée  $\mathcal{C} : \forall i = 1, 2, 3 \ x^i = x^i(p)$  :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^1 = 2p - 1 \\ x^2 = 2p^2 \\ x^3 = p^3 \end{cases} \quad (0 \leq p \leq 1)$$

Le carré de la dérivée de la distance élémentaire s'écrit :

$$\varepsilon \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 = g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}$$

En notation matricielle :

$$\varepsilon \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 = \left( \frac{dx^i}{dp} \right)^T G \left( \frac{dx^j}{dp} \right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 4p & 3p^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (2p-1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (2p^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4p \\ 3p^2 \end{pmatrix} \\ &= 64p^6 + 64p^4 + 16p^2 \end{aligned}$$

donc  $\varepsilon = 1$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 &= (8p^3 + 4p)^2 \\ \frac{ds}{dp} &= 8p^3 + 4p \end{aligned}$$

Pour  $1 > p > 0$  :

$$\Gamma = \int_0^1 ds = \int_0^1 (8p^3 + 4p) dp = [2p^4 + 2p^2]_0^1 = 4$$

## Chapitre 3

# FORMES LINÉAIRES

### 3.1 Formes et formes linéaires

#### Définition 3.1 : Forme

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . Une forme  $\tilde{x}$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

Une forme est une application qui prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire. C'est une application qui a la particularité d'avoir pour ensemble d'arrivée le corps de l'espace vectoriel de départ.

$$\begin{aligned}\tilde{x} &: E \rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{v} &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \alpha\end{aligned}$$

#### Exemple 3.1 : Norme d'un vecteur

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ , et soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $E$  de composantes  $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ . L'application qui à un vecteur associe sa norme est une forme linéaire (Cf. la déf. 1.2 page 11 de la norme d'un vecteur) :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{g_{ij}v^i v^j}\end{aligned}$$

Le scalaire obtenu est positif ou nul.

La définition qui suit d'une forme linéaire est une alternative à la définition donnée dans le Vol. 1 Notion d'espace, l'équivalence entre les deux définitions est démontrée par le th. 3.2 page 26.

#### Définition 3.2 : Forme linéaire

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . Une forme linéaire  $\tilde{x}$  est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

Si l'on reprend la définition d'une application linéaire (Cf. Vol. 1 Notion d'espace), alors la forme linéaire  $\tilde{x}$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\tilde{x} &: E \rightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{v} &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \alpha\end{aligned}$$

qui est linéaire, c.-à-d.  $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \forall\alpha \in \mathbb{K}$  :

- additive :  $\tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})$
- homogène de degré un :  $\tilde{x}(\alpha \odot \mathbf{u}) = \alpha\tilde{x}(\mathbf{u})$

### Remarque 3.1

On dit aussi qu'à tout vecteur d'un espace vectoriel, la forme linéaire associe, ou fait correspondre, un scalaire de son propre corps.

### Remarque 3.2

Les deux conditions de linéarité peuvent être remplacées par la seule condition suivante :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \forall\alpha \in \mathbb{K}, \quad \tilde{x}(\alpha \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha\tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})$$

### Notation 3.1

L'ensemble des formes linéaires de l'espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

$\tilde{x}$  prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire, en conservant les deux opérations de base d'un espace vectoriel, l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire.

Nous dirons que  $\tilde{x}$  préserve les opérations de combinaison linéaire des vecteurs car peu importe que  $\tilde{x}$  soit appliquée avant ou après l'addition vectorielle ou la multiplication par un scalaire.

### Exemple 3.2 : Application $i^{\text{ème}}$ projection

Soit  $\pi_i$  l'application  $i^{\text{ème}}$  projection, qui prend en entrée un vecteur et donne en sortie sa  $i^{\text{ème}}$  composante :

$$\begin{aligned}\pi_i &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \pi_i(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_i\end{aligned}$$

L'application projection possède les propriétés de linéarité d'une application linéaire :

- a) additivité : soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$  tels que  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned}\pi_i(\mathbf{u}) + \pi_i(\mathbf{v}) &= u_i + v_i \\ &= w_i \\ &= \pi_i(\mathbf{w}) \\ &= \pi_i(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})\end{aligned}$$

b) homogénéité de degré un : soit  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathbf{v} = \alpha \odot \mathbf{u}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \pi_i(\mathbf{u}) &= \alpha u_i \\ &= v_i \\ &= \pi_i(\mathbf{v}) \\ &= \pi_i(\alpha \odot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\pi_i$  est une forme linéaire.

### Exemple 3.3 : Forme linéaire dans un espace vectoriel de dimension 2

Soit  $E = \mathbb{R}^2$  un espace vectoriel de dimension 2, et soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $E$  de composantes  $(v^1, v^2)$ . L'application,

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(v^1, v^2) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = 2v^1 + 3v^2 \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet,  $\tilde{x}$  prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire (sous la forme d'un polynôme homogène de degré un des variables  $v^1$  et  $v^2$ ). Vérifions les deux conditions de linéarité :

a) additivité : soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^2$  tels que  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \tilde{x}(\mathbf{w}) \\ &= 2w^1 + 3w^2 \\ &= 2(u^1 + v^1) + 3(u^2 + v^2) \\ &= 2u^1 + 3u^2 + 2v^1 + 3v^2 \\ &= \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

b) homogénéité de degré un : soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\alpha \odot \mathbf{v}) &= \tilde{x}(\mathbf{u}) \\ &= 2u^1 + 3u^2 \\ &= 2(\alpha v^1) + 3(\alpha v^2) \\ &= \alpha(2v^1 + 3v^2) \\ &= \alpha \tilde{x}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

### Exemple 3.4 : Produit scalaire avec un vecteur donné

Soit  $\mathbf{a}$  un vecteur donné d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{R}$ . Le produit scalaire avec le vecteur  $\mathbf{a}$ , noté  $f_{\mathbf{a}}$ , prend en entrée un vecteur  $\mathbf{u}$  de  $E$  et donne en sortie un scalaire de  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \\ &= a^i x_i \end{aligned}$$

De plus, le produit scalaire possède les propriétés de linéarité de la définition d'une application linéaire :

a) additivité : soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$  tels que  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{u}) + f_a(\mathbf{v}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} \\ &= f_a(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \end{aligned}$$

b) homogénéité de degré un : soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathbf{v} = \alpha \odot \mathbf{u}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha f_a(\mathbf{u}) &= \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\alpha \odot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ &= f_a(\mathbf{v}) \\ &= f_a(\alpha \odot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_a$  est une forme linéaire. Reprenons l'expression (1.5) page 5 du produit scalaire :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i$$

Nous pouvons l'écrire

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = u_i v^i$$

où  $\tilde{u}$  prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire. Notons que par symétrie du produit scalaire :

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = \tilde{v}(\mathbf{u})$$

Le produit scalaire avec un vecteur donné est une forme linéaire, en revanche le produit scalaire lui-même est une forme bilinéaire (Cf. ex. 4.1 page 40).

### Exemple 3.5 : Dérivée en un point

Soit  $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  indéfiniment dérivables et de dérivées continues. Soient  $x_0 \in [a, b]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . La dérivée  $n^{\text{ème}}$  en  $x_0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto f^n(x_0) \end{aligned}$$

qui à toute fonction  $f(x)$  de  $\mathcal{C}^\infty$  associe sa dérivée  $n^{\text{ème}}$  en  $x_0$  est une forme linéaire.

### Exemple 3.6 : Intégrale définie

Soit  $C([a, b], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  continues. L'intégrale définie,

$$\begin{aligned} C &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

qui à toute fonction  $f(x)$  de  $C$  associe son intégrale définie de  $a$  à  $b$  est une forme linéaire.

**Exemple 3.7 : Norme, carré de la norme et forme quadratique**

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ , et soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $E$  de composantes  $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ . L'application qui à un vecteur associe sa norme est non linéaire. En effet, soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$  :

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \\ &\neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \\ &\neq \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

L'application qui à un vecteur associe le carré de sa norme est une forme quadratique :

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij}v^i v^j \end{aligned}$$

Elle est non linéaire. En effet, soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$  :

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2 \\ &\neq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\neq \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

**Remarque 3.3**

Une forme est définie de manière intrinsèque, le scalaire associé à tout vecteur ne dépend pas de la base choisie. Le scalaire associé à  $\mathbf{u}$  est déterminé de façon définitive, nous dirons que  $\tilde{x}(\mathbf{u})$  est un scalaire intrinsèque. Ainsi, dans le cas où l'on associe au vecteur  $\mathbf{u}$  la valeur de l'une de ses composantes  $u^i$  dans une base donnée, on garde cette valeur y compris lorsque l'on change de base. Autrement dit, on ne refait pas l'association du vecteur avec sa nouvelle valeur de composantes.

Montrons l'équivalence avec de la déf. 3.2 page 21 d'une forme linéaire avec la définition donnée au Vol. 1 Notion d'espace.

**Théorème 3.1**

*Tout polynôme homogène de degré un des  $n$  variables  $v^1, v^2, \dots, v^n$  est une application linéaire qui au vecteur  $\mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n)$  de l'espace vectoriel  $E$  sur le corps des réels fait correspondre un réel.*

*Démonstration.* C'est la généralisation à  $\mathbb{R}^n$  de l'ex. 3.3 page 23.

Soit  $a_1 v^1 + a_2 v^2 + \dots + a_n v^n$  un polynôme homogène de degré un, il existe une application  $\tilde{x}$  telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{x} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall a_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = a_1 v^1 + a_2 v^2 + \dots + a_n v^n \\ \forall a_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}(u^1, u^2, \dots, u^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{u}) = a_1 u^1 + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n \end{aligned}$$

Alors cette application est linéaire :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= a_1(\lambda u^1 + v^1) + a_2(\lambda u^2 + v^2) + \dots + a_n(\lambda u^n + v^n) \\ &= \lambda a_1 u^1 + a_1 v^1 + \lambda a_2 u^2 + a_2 v^2 + \dots + \lambda a_n u^n + a_n v^n \\ &= \lambda \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

□

Réciproquement :

### Théorème 3.2

Toute forme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  peut s'écrire comme un polynôme homogène de degré un par rapport à  $n$  variables  $v^1, v^2, \dots, v^n$ . Pour toute une forme linéaire  $\tilde{x}$  :

$$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = a_1 v^1 + a_2 v^2 + \dots + a_n v^n\end{aligned}$$

où  $\forall i \ a_i \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , soit le vecteur  $\mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n)$ . En utilisant l'additivité puis l'homogénéité,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{v}) &= \tilde{x}(v^1 \mathbf{e}_1 \oplus v^2 \mathbf{e}_2 \oplus \dots \oplus v^n \mathbf{e}_n) \\ &= \tilde{x}(v^1 \mathbf{e}_1) + \tilde{x}(v^2 \mathbf{e}_2) + \dots + \tilde{x}(v^n \mathbf{e}_n) \\ &= v^1 \tilde{x}(\mathbf{e}_1) + v^2 \tilde{x}(\mathbf{e}_2) + \dots + v^n \tilde{x}(\mathbf{e}_n) \\ &= a_1 v^1 + a_2 v^2 + \dots + a_n v^n \\ &= a_i v^i\end{aligned}$$

où l'on a posé  $\forall i \ \tilde{x}(\mathbf{e}_i) = a_i \in \mathbb{R}$ .

□

## 3.2 Expression analytique d'une forme linéaire

Dans la base  $(\mathbf{e}_i)$  de l'espace vectoriel  $E$ , soit  $\mathbf{u}$  un vecteur :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) &= \tilde{x}(u^i \mathbf{e}_i) \\ &= u^i \tilde{x}(\mathbf{e}_i) \\ &= u^i a_i\end{aligned}\tag{3.1}$$

où l'on a posé  $\forall i \ \tilde{x}(\mathbf{e}_i) = a_i \in \mathbb{R}$ . La forme linéaire  $\tilde{x}(\mathbf{u})$  est donc parfaitement déterminée par les  $n$  scalaires  $a_i$ , sa décomposition étant unique. Ainsi on peut déterminer une forme linéaire par correspondance des vecteurs de base avec des scalaires déterminés.

### 3.3 Espace vectoriel dual d'un espace vectoriel

Considérons l'ensemble des formes linéaires définies sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Pour en faire un espace vectoriel adoptons pour cet ensemble les deux lois de composition :

1) addition vectorielle

La somme de deux formes linéaires est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{y}(\mathbf{u}) &= u^i a_i + u^i b_i \\ &= \sum_i u^i (a_i + b_i) \\ &= u^i c_i \\ &= \tilde{z}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

2) multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire d'une forme linéaire est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\alpha \tilde{x}(\mathbf{u}) &= \alpha (u^i a_i) \\ &= (\alpha a_i) u^i \\ &= b_i u^i \\ &= \tilde{y}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

Ces deux lois de composition vérifient les propriétés d'un espace vectoriel (Cf. Vol. 1 Notion d'espace). Par conséquent, l'ensemble des formes linéaires munies de ces deux lois forment un espace vectoriel appelé *dual*<sup>1</sup>, dont les formes linéaires de  $E$  en sont les vecteurs. Un espace vectoriel et son dual sont isomorphes. Ils ont même structure et les règles de calcul y sont analogues, on peut y définir des mesures de longueurs et d'angles (donc un produit scalaire).

#### Notation 3.2

L'espace dual de  $E$  est noté  $E^*$  ou  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  ou  $\text{hom}(E, \mathbb{K})$ .

#### Remarque 3.4

L'espace dual de l'espace dual, appelé espace *bidual* et noté  $E^{**}$ , est assimilable à l'espace vectoriel de départ  $E$ .

1. « dual » signifie « deux » .

### 3.4 Base duale d'une base

Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur d'un espace vectoriel  $E$ , et soit la forme linéaire  $e^{*i}$  telle que :

$$\forall i \quad e^{*i}(\mathbf{u}) = u^i$$

C'est l'application projection de l'ex. 3.2 page 22. Cette forme linéaire donne en sortie la  $i^{\text{ème}}$  composante contravariante du vecteur qu'elle prend en entrée. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^i \mathbf{e}_i \\ &= e^{*i}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

D'après (3.1) page 26, pour toute forme linéaire  $\tilde{x}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\mathbf{u}) &= u^i a_i \\ &= a_i e^{*i}(\mathbf{u}) \\ \tilde{x} &= a_i e^{*i} \end{aligned}$$

La forme linéaire  $\tilde{x}$  se décompose d'une façon unique sur l'espace des formes linéaires  $e^{*i}$ . Les  $n$  formes linéaires  $e^{*i}$  constituent donc une base de l'espace vectoriel dual  $E^*$ , et les  $a_i$  sont les composantes de la forme linéaire dans cette base.

De plus

$$\begin{aligned} \forall j \quad e^{*j}(\mathbf{u}) &= e^{*j}(u^i \mathbf{e}_i) \\ \forall j \quad u^j &= u^i e^{*j}(\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

donc :

$$\forall i, j \quad e^{*j}(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j$$

#### Définition 3.3 : Base duale d'une base

La base  $(e^{*1}, e^{*2}, \dots, e^{*n})$  de  $E^*$  telle que

$$\forall i, j \quad e^{*j}(\mathbf{e}_i) \stackrel{\text{déf}}{=} \delta_i^j$$

est appelée base duale de la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $E$ . La base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $E$  est appelée base antéduale de la base  $(e^{*1}, e^{*2}, \dots, e^{*n})$  de  $E^*$ .

#### Exemple 3.8

Soit la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons les composantes  $a_i$  et  $b_i$  des vecteurs  $e^{*1}(a_1, a_2)$  et  $e^{*2}(b_1, b_2)$  de la base duale

$(e^{*1}, e^{*2})$ . D'après la déf. 3.3 des bases duales, les formes linéaires sont telles que :

$$\begin{cases} e^{*1}(\mathbf{e}_1) = 1 \\ e^{*1}(\mathbf{e}_2) = 0 \\ e^{*2}(\mathbf{e}_1) = 1 \\ e^{*2}(\mathbf{e}_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{*1}(2, 1) = 1 \\ e^{*1}(3, 1) = 0 \\ e^{*2}(2, 1) = 1 \\ e^{*2}(3, 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 1 \\ 3a_1 + a_2 = 0 \\ 2b_1 + b_2 = 1 \\ 3b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 3 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = -2 \end{cases}$$

Donc les vecteurs de la base duale sont  $e^{*1}(-1, 3)$  et  $e^{*2}(1, -2)$ .

### 3.5 Base réciproque

#### Définition 3.4 : Base réciproque

La base  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de l'espace vectoriel  $E_n$ , telle que

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \epsilon_j \stackrel{\text{déf}}{=} \delta_{ij}$$

est appelée base réciproque de la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $E_n$ .

Si la base  $(\mathbf{e}_i)$  est la base formée par les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées, alors sa base réciproque  $\epsilon_j$  est la base formée par les vecteurs perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées.

#### Remarque 3.5

Une base est confondue avec sa base réciproque si elle est orthogonale et normée. Normée car avec  $\mathbf{e}_1 \cdot \epsilon_1 = 1$ , si  $\epsilon_1 = 2$  alors  $\epsilon_1 = 1/2$ .

Cette définition est proche de la déf. 3.3 page précédente ci-dessus de la base duale. Cependant on reste dans l'espace  $E$  et on utilise un produit scalaire. Dans les espaces définis sans produit scalaire, donc sans métrique, la base réciproque s'appelle base duale, et les covecteurs s'appellent des formes linéaires ou vecteurs duaux.

Soit  $B$  la matrice changement de base  $(\epsilon_j) \rightarrow (\mathbf{e}_i)$  :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \mathbf{e}_i &= \sum_j B_{ij} \epsilon_j \\ \forall i, k \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k &= \sum_j B_{ij} \epsilon_j \cdot \mathbf{e}_k \\ g_{ik} &= \sum_j B_{ij} \delta_{jk} \\ g_{ik} &= B_{ik} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall i \quad \mathbf{e}_i = \sum_j g_{ij} \epsilon_j$$

Le tenseur métrique  $G$  permet de passer des vecteurs d'une base réciproque à ceux de la base d'origine. Nous voyons que cette relation qui s'appliquait à des composantes, relations (1.3)

page 4, s'applique ici à des vecteurs. Par analogie, les vecteurs de la base réciproque seront notés avec un indice supérieur, ce qui permettra l'emploi de la convention de sommation sur les indices répétés. En remplaçant  $\epsilon_j$  par  $\mathbf{e}^j$ , la dernière relation s'écrit

$$\forall i \quad \mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j$$

et la déf. 3.4 page précédente devient :

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j \stackrel{\text{déf}}{=} \delta_i^j \tag{3.2}$$

Avec (1.9) page 9 :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j &= \delta_i^j \\ g_{ik} \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j &= g_{ik} g^{kj} \\ \forall k, j \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j &= g^{kj} \end{aligned}$$

justifiant l'emploi d'indices supérieurs pour l'écriture du tenseur métrique réciproque. Soit  $A$  la matrice changement de base ( $\mathbf{e}_j \rightarrow \mathbf{e}^i$ ) :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \mathbf{e}^i &= \sum_j A_{ij} \mathbf{e}_j \\ \forall i, k \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k &= \sum_j A_{ij} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k \\ g^{ik} &= \sum_j A_{ij} \delta_j^k \\ g^{ik} &= A_{ik} \end{aligned}$$

Le tenseur métrique  $[g^{ij}]$  permet de passer d'une base à sa base réciproque :

$$\forall i \quad \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \tag{3.3}$$

Si la base d'origine n'est pas orthonormée, les vecteurs de la base réciproque ne sont pas de norme unité :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j &= \delta_i^j \\ \forall i \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i &= 1 \\ \|\mathbf{e}_i\| \|\mathbf{e}^i\| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i) &= 1 \\ \|\mathbf{e}^i\| &= \frac{1}{\|\mathbf{e}_i\| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i)} \end{aligned}$$

### 3.6 Indépendance linéaire des vecteurs réciproques

Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  une base de  $E_n$ . Pour démontrer que les vecteurs réciproques  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n)$  forment aussi une base de  $E_n$ , nous devons montrer qu'ils sont linéairement indépendants :

$$\lambda_j \mathbf{e}^j = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall j \quad \lambda_j = 0$$

Posons  $\lambda_j \mathbf{e}^j = \mathbf{0}$ . Soit  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  un vecteur de l'espace vectoriel  $E_n$  :

$$\begin{aligned}\lambda_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{u} &= \lambda_j \mathbf{e}^j \cdot u^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} &= \lambda_j u^i (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i) \\ 0 &= \lambda_j u^i \delta_i^j \\ 0 &= \lambda_j u^j\end{aligned}$$

Cette égalité devant être vérifiée quels que soient les  $u^j$ , tous les  $\lambda_j$  sont nuls et les vecteurs  $\mathbf{e}^j$  sont linéairement indépendants.

**Exemple 3.9 : Base réciproque d'une base quelconque**

Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  la base d'un espace vectoriel euclidien  $E_2$ , telle que :

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs de base sont exprimés dans la base orthonormée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ . Déterminons sa base réciproque  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ .

a) en utilisant la définition de la base réciproque (3.2) page précédente.

Posons  $\mathbf{e}^1(a, b)$  et  $\mathbf{e}^2(c, d)$  :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 3 - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e}^1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + 2d = 0 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2d \\ -2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

b) en se servant du tenseur dual du tenseur métrique (3.3) page ci-contre :

$$G \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow [g^{ij}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 25 & -11 \\ -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^1 = g^{11} \mathbf{e}_1 + g^{12} \mathbf{e}_2 = \frac{25}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}^2 = g^{21} \mathbf{e}_1 + g^{22} \mathbf{e}_2 = -\frac{11}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

**Exemple 3.10 : Base réciproque d'une base orthogonale**

Soit  $\{\mathbf{e}_1(a, 0, 0), \mathbf{e}_2(0, b, 0), \mathbf{e}_3(0, 0, c)\}$  une base de l'espace vectoriel euclidien  $E_3$ . Déterminons sa base réciproque. Soit  $\mathbf{e}^1(x_1, x_2, x_3)$  :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}^1 = 1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = 0 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 1 \\ (0, b, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \\ (0, 0, c) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 = 1 \\ bx_2 = 0 \\ cx_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/a \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent  $\mathbf{e}^1 = \left(\frac{1}{a}, 0, 0\right)$ . De même on trouve  $\mathbf{e}^2 = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  et  $\mathbf{e}^3 = \left(0, 0, \frac{1}{c}\right)$ . Lorsque la base est orthonormée,  $a = b = c = 1$ , elle se confond avec sa base réciproque.

**Exemple 3.11 : Base réciproque d'une base normée**

Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  une base normée de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ , telle que  $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = 70^\circ$ . Construisons sa base réciproque.

a) en utilisant la définition de la base réciproque (3.2) page 30 :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{e}^1\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\| \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^1)} = \frac{1}{\cos(20)} \approx 1,064$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{e}^2\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_2\| \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}^2)} = \frac{1}{\cos(20)} \approx 1,064$$

b) en se servant du tenseur métrique (3.3) page 30 :

$$G \begin{bmatrix} 1 & \cos(70) \\ \cos(70) & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [g^{ij}] = \frac{1}{\sin^2(70)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(70) \\ -\cos(70) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= g^{11}\mathbf{e}_1 + g^{12}\mathbf{e}_2 \\ &= \frac{\mathbf{e}_1}{\sin^2(70)} - \frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^2 &= g^{21}\mathbf{e}_1 + g^{22}\mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{e}_2}{\sin^2(70)} \end{aligned}$$

En exprimant  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  dans la base orthonormée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{1}{\sin^2(70)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos(70)}{\sin^2(70)} \begin{pmatrix} \cos(70) \\ \sin(70) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos(70)/\sin(70) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^2 &= -\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sin^2(70)} \begin{pmatrix} \cos(70) \\ \sin(70) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sin(70) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

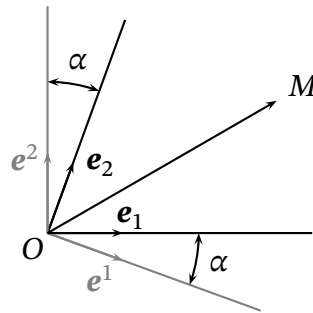


FIG. 3.1 – Bases réciproques

### Exemple 3.12

Base réciproque de la base naturelle polaire  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$

a) en utilisant la définition de la base réciproque (3.2) page 30 :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = 1 \\ \mathbf{e}^\rho \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{e}^\rho\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_\rho\|} = 1 \Rightarrow \mathbf{e}^\rho = \mathbf{e}_\rho$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}_\rho = 0 \\ \mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{e}^\theta\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_\theta\|} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \mathbf{e}^\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\rho^2}$$

b) en se servant du tenseur dual du tenseur métrique en coordonnées polaires (1.10) page 10 :

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^\rho &= g^{\rho\rho}\mathbf{e}_\rho + g^{\rho\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &= \mathbf{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^\theta &= g^{\theta\rho}\mathbf{e}_\rho + g^{\theta\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &= \mathbf{e}_\theta/\rho^2\end{aligned}$$

### Exemple 3.13

Base réciproque de la base  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  de la relativité restreinte

- en utilisant la définition de la base réciproque (3.2) page 30. Pour le vecteur réciproque  $\mathbf{e}^0$  porté par la coordonnée temporelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

En convention de genre temps :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1 \\ &= \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}_0\end{aligned}$$

Pour le vecteur réciproque  $\mathbf{e}^1$  porté par la première coordonnée spatiale :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= -1 \\ &= -\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}^1\end{aligned}$$

De même  $\mathbf{e}^2 = -\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_3$ .

- d'après (1.12) page 13 le tenseur métrique en relativité restreinte est égal à son inverse :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ -\mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

### 3.7 Composantes contravariantes dans la base réciproque

À partir de la définition des composantes contravariantes (Cf. Vol. 1 Notion d'espace), dans la base réciproque :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= u^i \epsilon_i \\ &= \sum_i u^i \mathbf{e}^i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall j \quad \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_j &= \sum_i u^i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_i u^i \delta_j^i \\ u_j &= u^j\end{aligned} \tag{3.4}$$

et

$$\overrightarrow{OM} = u_i \mathbf{e}^i$$

#### Exemple 3.14 : Composantes contravariantes dans la base réciproque

En reprenant l'exercice 3.11 page 32, représentons les composantes contravariantes du vecteur  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM}$  dans la base réciproque  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$  non normée (Fig. 3.2) :

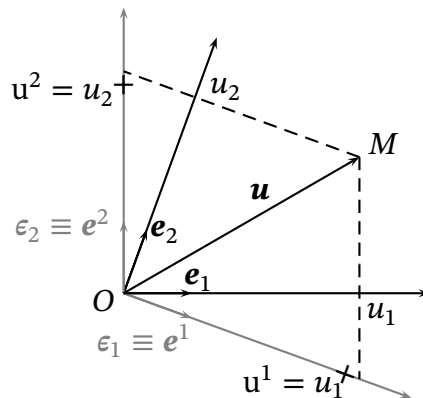


FIG. 3.2 – Composantes contravariantes dans la base réciproque

### 3.8 Composantes covariantes dans la base réciproque

À partir de la définition des composantes contravariantes (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) dans la base d'origine :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM} &= u^i \mathbf{e}_i \\
 \forall j \quad \overrightarrow{OM} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j &= u^i \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \\
 &= u^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j \\
 &= u^i \delta_i^j \\
 u_j &= u^j
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$\forall i \quad \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}^i = u^i$$

#### Exemple 3.15 : Composantes covariantes dans la base réciproque

En reprenant l'exercice 3.11 page 32, représentons les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM}$  dans la base réciproque  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$  non normée (Fig. 3.3) :

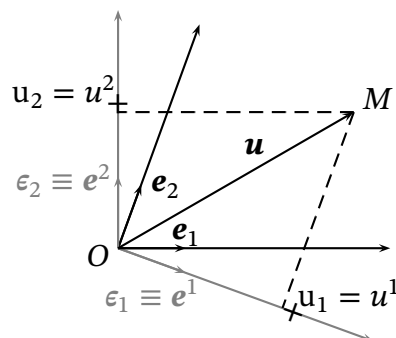


FIG. 3.3 – Composantes covariantes dans la base réciproque

---

## 3.9 Transformation des composantes en bases réciproques

---

### 3.9.1 Transformation des composantes contravariantes

Soient deux bases d'un espace vectoriel  $E_3$ , chacune ayant une base réciproque. Avec (3.4) page 35 :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad u^i &= u_i \\ &= A_i^{j'} u_{j'} \\ &= \sum_{j=1}^3 A_i^{j'} u^{j'} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les composantes contravariantes dans la base réciproque se transforment de façon identique aux composantes covariantes dans la base d'origine. Si les bases sont naturelles :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad u^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u^{j'}$$

---

### 3.9.2 Transformation des composantes covariantes

Soient deux bases d'un espace vectoriel  $E_3$ . Avec (3.5) page ci-contre :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad u_i &= u^i \\ &= B_{j'}^i u^{j'} \\ &= \sum_{j=1}^3 B_{j'}^i u_j \end{aligned}$$

Les composantes covariantes dans la base réciproque se transforment de façon identique aux composantes contravariantes dans la base d'origine. Si les bases sont naturelles :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad u_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u_{j'}$$

### 3.9.3 Transformation des vecteurs de base de la base réciproque

Soient  $(\epsilon_i)$  et  $(\epsilon_{j'})$  les bases réciproques respectives des bases  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}_{j'})$ . Soient  $A$  la matrice changement de base  $(\mathbf{e}_i) \rightarrow (\mathbf{e}_{j'})$ , et  $A'$  la matrice changement de base  $(\mathbf{e}_{j'}) \rightarrow (\mathbf{e}_i)$ . Avec (3.6) page précédente :

$$\begin{aligned} u^{i'} \epsilon_{i'} &= u^j \epsilon_j \\ \sum_{i=1}^3 u^{i'} \epsilon_{i'} &= \sum_{j=1}^3 \left( \sum_i A_j^{i'} u^{i'} \right) \epsilon_j \\ \forall u^{i'} \quad \sum_{i=1}^3 u^{i'} \epsilon_{i'} &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 A_j^{i'} \epsilon_j \right) u^{i'} \\ \forall i = 1, 2, 3 \quad \epsilon_{i'} &= \sum_{j=1}^n A_j^{i'} \epsilon_j \end{aligned}$$

En changeant de notation,  $\epsilon_i$  devient  $\mathbf{e}^i$  :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}^{i'} = A_j^{i'} \mathbf{e}^j$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall k = 1, 2, 3 \quad B_{i'}^k \mathbf{e}^{i'} &= B_{i'}^k A_j^{i'} \mathbf{e}^j \\ &= \delta_j^k \mathbf{e}^j \\ &= \mathbf{e}^k \end{aligned}$$

$$\forall k = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}^k = B_{i'}^k \mathbf{e}^{i'}$$

Les vecteurs de base de la base réciproque se transforment de façon « contraire » (par la matrice inverse de la transposée) aux vecteurs de base de la base d'origine.

Si  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}_{j'})$  sont des bases naturelles :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \tag{3.7}$$

$$\forall k = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}^{i'} \tag{3.8}$$

## Chapitre 4

# FORMES BILINÉAIRES

### 4.1 Définition d'une forme bilinéaire

#### Définition 4.1 : Forme bilinéaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une forme bilinéaire est une application qui à deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $E^2$  associe un scalaire de son propre corps  $\mathbb{R}$ ,

$$B : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha$$

qui est linéaire pour chacun de ses arguments.  $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

- a)  $B$  est linéaire pour son premier argument,
- additive :  $B(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
  - homogène de degré un :  $B(\lambda \odot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- b)  $B$  est linéaire pour son second argument :
- additive :  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
  - homogène de degré un :  $B(\mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Les formes bilinéaires généralisent les formes linéaires, en ce sens qu'elles prennent en entrée deux vecteurs plutôt qu'un seul. On appelle les formes linéaires des *une-formes*, et les formes bilinéaires des *deux-formes*, ce qui permet de généraliser aux *n-formes* qui prennent en entrée  $n$  vecteurs et donnent en sortie un scalaire.

#### Définition 4.2 : Forme bilinéaire symétrique

$B$  est une forme bilinéaire symétrique ssi :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

**Exemple 4.1**

Le produit scalaire euclidien est une forme bilinéaire symétrique. En effet :

$$E^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha$$

Le produit scalaire est linéaire dans ses deux arguments :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}$$

$$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$$

Le produit scalaire est symétrique :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

**Exemple 4.2**

Le tenseur métrique est une forme bilinéaire symétrique. En effet :

$$g : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha$$

$g$  est linéaire dans ses deux arguments :

$$g_{ij}u^i v^j = g_{ij}(a^i + b^i) v^j = (g_{ij}a^i + g_{ij}b^i) v^j = g_{ij}a^i v^j + g_{ij}b^i v^j$$

$$g_{ij}u^i v^j = g_{ij}u^i (a^j + b^j) = u^i (g_{ij}a^j + g_{ij}b^j) = g_{ij}u^i a^j + g_{ij}u^i b^j$$

$$g_{ij}(\lambda u^i) v^j = \lambda g_{ij}u^i v^j = g_{ij}u^i (\lambda v^j)$$

$g$  est symétrique :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

**Définition 4.3 : Forme bilinéaire antisymétrique**

$B$  est une forme bilinéaire antisymétrique ssi :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

On en déduit que pour une forme bilinéaire antisymétrique  $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ .

## 4.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire

Dans la base  $(\mathbf{e}_i)$  de l'espace vectoriel  $E_n$ , soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= B(u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j) \\ &= u^i v^j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \\ &= u^i v^j a_{ij} \end{aligned}$$

où

$$\forall i, j \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

La forme bilinéaire  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est donc parfaitement déterminée par les  $n^2$  scalaires  $a_{ij}$ , sa décomposition étant unique. Ainsi on peut déterminer une forme bilinéaire en mettant en correspondance les couples de vecteurs de base avec les scalaires déterminés.

### Exemple 4.3 : Décomposition d'une forme bilinéaire

La forme bilinéaire  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  se décompose sur  $E_2 \times E_2$  selon :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = au^1v^1 + b(u^1v^2) + b'(u^2v^1) + cu^2v^2$$

où  $a, b, b', c$  sont des scalaires.

### 4.2.1 Expression analytique d'une forme bilinéaire symétrique

Lorsque la forme bilinéaire est symétrique

$$a_{ij} = a_{ji}$$

sa décomposition est déterminée par les  $n(n+1)/2$  scalaires  $a_{ij}$ .

### Exemple 4.4 : Décomposition d'une forme bilinéaire symétrique

La forme bilinéaire symétrique  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  se décompose sur  $E_2 \times E_2$  selon :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = au^1v^1 + b(u^1v^2 + u^2v^1) + cu^2v^2$$

où  $a, b, c$  sont des scalaires.

### 4.2.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire antisymétrique

Lorsque la forme bilinéaire est antisymétrique

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

sa décomposition est déterminée par les  $n(n - 1)$  scalaires  $a_{ij}$ .

#### Exemple 4.5 : Décomposition d'une forme bilinéaire antisymétrique

La forme bilinéaire antisymétrique  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  se décompose sur  $E_2 \times E_2$  selon :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= b(u^1v^2) - b(u^2v^1) \\ &= b(u^1v^2 - u^2v^1) \end{aligned}$$

où  $b$  est un scalaire.

### 4.3 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Soit  $B$  une forme bilinéaire symétrique et soit  $Q$  la forme quadratique telle que :

$$\begin{aligned} Q : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto Q(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

$Q$  est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique  $B$ .

$B$  étant symétrique, utilisons la linéarité des formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= Q(\mathbf{u}) + 2B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Q(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Soit  $Q$  une forme quadratique du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  dans le corps des réels  $\mathbb{R}$  et soit  $B$  la forme bilinéaire symétrique telle que :

$$\begin{aligned} B : E^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v})] \end{aligned}$$

$B$  est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $Q$ . Toute forme quadratique définit une forme bilinéaire symétrique et réciproquement. Les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques se déterminent mutuellement. Les théories des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques sont essentiellement les mêmes.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} Q(\lambda \odot \mathbf{u}) &= B(\lambda \odot \mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 Q(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = 0$  :

$$Q(0 \odot \mathbf{u}) = 0^2 Q(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad Q(\mathbf{0}) = 0$$

#### 4.4 Expression analytique d'une forme quadratique

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= B(u^i \mathbf{e}_i, u^j \mathbf{e}_j) \\ &= u^i u^j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

##### Exemple 4.6

La forme bilinéaire sur  $E_2 \times E_2$  :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= au^1u^1 + b(u^1u^2 + u^2u^1) + cu^2u^2 \\ &= a(u^1)^2 + 2b(u^1u^2) + c(u^2)^2 \end{aligned}$$

où  $a, b, c$  sont des scalaires.

#### 4.5 Matrices et formes bilinéaires

D'après sa définition (Cf. Vol. 1 Notion d'espace), une transformation linéaire est une matrice carrée prenant en entrée un vecteur et donnant en sortie un vecteur. Les matrices carrées ne peuvent donc pas représenter aussi les formes bilinéaires qui elles prennent en entrée un vecteur et donnent en sortie une forme linéaire (ou prennent en entrée deux vecteurs et donne en sortie un scalaire).

Une représentation des formes bilinéaires reste cependant possible sous la forme d'une matrice ligne de matrices lignes. La relation (1.6) page 8 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} &= \left( \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} u^2 \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} g_{11}u^1 & g_{12}u^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{21}u^2 & g_{22}u^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( g_{11}u^1 + g_{21}u^2 \quad g_{12}u^1 + g_{22}u^2 \right) \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\left( g_{11}u^1 + g_{21}u^2 \quad g_{12}u^1 + g_{22}u^2 \right) = \left( u_1 \quad u_2 \right)$$

qui redonne bien le système :

$$\begin{cases} u_1 = g_{11} u^1 + g_{21} u^2 \\ u_2 = g_{12} u^1 + g_{22} u^2 \end{cases}$$

Dans un espace vectoriel de dimension trois, le tenseur métrique s'écrit :

$$\left( \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \right)$$

Pour inverser  $G$  nous devons revenir à une matrice carrée. De plus, cette notation n'est pas applicable à des tenseurs ayant plus de deux indices.

**Exemple 4.7 : Tenseur métrique en deux dimensions**

Soit  $\{\mathbf{e}_1(2, 0), \mathbf{e}_2(-1, 3)\}$  une base de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ . Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 4 \\ g_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -2 \\ g_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -2 \\ g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow G \left( \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right)$$

**Exemple 4.8 : Tenseur métrique en trois dimensions**

Dans l'espace de la physique newtonienne, plaçons-nous dans la base orthonormée  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \right) \\ & = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

**Exemple 4.9 : Tenseur métrique de l'espace-temps relativiste**

Plaçons-nous dans l'une des deux bases canoniques (métrique de genre temps ou espace)  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , de l'espace-temps de la relativité restreinte en deux dimensions d'espace :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0(1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1(0, i, 0) \\ \mathbf{e}_2(0, 0, i) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_0(i, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1(0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_2(0, 0, 1) \end{cases}$$

Dans le premier cas, le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \right) \\ & = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

**Exemple 4.10 : Inverse d'un tenseur métrique quelconque**

Dans une base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  de l'espace vectoriel  $E_2$ , on se donne le tenseur métrique suivant :

$$G\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Déterminons les composantes de son inverse  $[g^{ij}]$  grâce aux relations (1.9) page 9 :

$$\begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \delta_1^1 \\ g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \delta_1^2 \\ g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21} = \delta_2^1 \\ g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = \delta_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2g^{11} - 3g^{21} = 1 \\ 2g^{12} - 3g^{22} = 0 \\ -3g^{11} + g^{21} = 0 \\ -3g^{12} + g^{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{11} = -1/7 \\ g^{12} = -3/7 \\ g^{21} = -3/7 \\ g^{22} = -2/7 \end{cases}$$

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La matrice de matrice suggère d'introduire un nouveau produit matriciel, le *produit de Kronecker*.



## Chapitre 5

### PRODUIT DE KRONECKER

#### 5.1 Propriétés du produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices de tailles arbitraires, carrées ou rectangulaires, donne une matrice de sous-matrices. Le produit de Kronecker de deux matrices s'écrit :

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes B \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Contrairement à la multiplication matricielle les matrices n'ont pas besoin d'être compatibles. Si la matrice  $A$  a  $n$  éléments, son produit de Kronecker aura aussi  $n$  éléments, qui seront des matrices.

**Propriété 5.1 : Produit de Kronecker**

1) associativité :

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

2) distributivité à gauche par rapport à l'addition matricielle :

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

3) distributivité à droite par rapport à l'addition matricielle :

$$(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$$

4) multiplication par un scalaire :

$$k(A \otimes B) = (kA) \otimes B = A \otimes (kB)$$

5) en général non commutativité :

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

**Exemple 5.1 : Produit de Kronecker de deux matrices colonnes**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le résultat est une matrice colonne de matrices colonnes, c.-à-d. une matrice ayant deux éléments et non quatre.

**Exemple 5.2 : Produit de Kronecker d'une matrice colonne par une matrice ligne**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes (b_1 \ b_2) &= \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le résultat est une matrice colonne de matrices lignes, ayant aussi deux éléments et non quatre. La pré-multiplication matricielle de ce résultat (et non le produit de Kronecker) par une forme linéaire  $\underline{u}$  donne une forme linéaire,

$$\begin{aligned} (u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} (a_1 b_1 \quad a_1 b_2) \\ (a_2 b_1 \quad a_2 b_2) \end{pmatrix} &= u_1 (a_1 b_1 \quad a_1 b_2) + u_2 (a_2 b_1 \quad a_2 b_2) \\ &= (u_1 a_1 b_1 \quad u_1 a_1 b_2) + (u_2 a_2 b_1 \quad u_2 a_2 b_2) \\ &= (u_1 a_1 b_1 + u_2 a_2 b_1 \quad u_1 a_1 b_2 + u_2 a_2 b_2) \end{aligned}$$

puis la post-multiplication matricielle par un vecteur  $\mathbf{v}$  donne un scalaire :

$$\begin{aligned} (u_1 a_1 b_1 + u_2 a_2 b_1 \quad u_1 a_1 b_2 + u_2 a_2 b_2) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} &= u_1 a_1 b_1 v^1 + u_2 a_2 b_1 v^1 \\ &\quad + u_1 a_1 b_2 v^2 + u_2 a_2 b_2 v^2 \end{aligned}$$

**Exemple 5.3 : Produit de Kronecker d'une matrice ligne par une matrice colonne**

$$\begin{aligned} (b_1 \quad b_2) \otimes \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} & b_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 a_1 \\ b_1 a_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_2 a_1 \\ b_2 a_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le résultat est une matrice ligne de matrices colonnes. La post-multiplication matricielle de ce résultat par un vecteur  $\mathbf{v}$  donne un vecteur,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 a_1 \\ b_1 a_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_2 a_1 \\ b_2 a_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 a_1 \\ b_1 a_2 \end{pmatrix} v^1 + \begin{pmatrix} b_2 a_1 \\ b_2 a_2 \end{pmatrix} v^2 \end{pmatrix} \\ &= \left[ \begin{pmatrix} b_1 a_1 v^1 \\ b_1 a_2 v^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 a_1 v^2 \\ b_2 a_2 v^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} b_1 a_1 v^1 + b_2 a_1 v^2 \\ b_1 a_2 v^1 + b_2 a_2 v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis la pré-multiplication par une forme linéaire  $\underline{u}$  donne le même scalaire qu'en 5.2 :

$$(u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} b_1 a_1 v^1 + b_2 a_1 v^2 \\ b_1 a_2 v^1 + b_2 a_2 v^2 \end{pmatrix} = u_1 b_1 a_1 v^1 + u_1 b_2 a_1 v^2 + u_2 b_1 a_2 v^1 + u_2 b_2 a_2 v^2$$

## 5.2 Formes bilinéaires

Le produit de Kronecker d'une matrice ligne par une matrice ligne donne une matrice ligne de matrices lignes :

$$\begin{aligned} (a_1 \ a_2) \otimes (b_1 \ b_2) &= \left[ a_1 (b_1 \ b_2) \ a_2 (b_1 \ b_2) \right] \\ &= \left[ (a_1 b_1 \ a_1 b_2) \ (a_2 b_1 \ a_2 b_2) \right] \end{aligned}$$

On note que :

$$\begin{aligned} (b_1 \ b_2) \otimes (a_1 \ a_2) &= \left[ b_1 (a_1 \ a_2) \ b_2 (a_1 \ a_2) \right] \\ &= \left[ (b_1 a_1 \ b_1 a_2) \ (b_2 a_1 \ b_2 a_2) \right] \\ &\neq (a_1 \ a_2) \otimes (b_1 \ b_2) \end{aligned}$$

On vérifie que c'est une forme bilinéaire. La multiplication matricielle par un premier vecteur  $\mathbf{u}$  donne une forme linéaire :

$$\begin{aligned} \left[ (a_1 b_1 \ a_1 b_2) \ (a_2 b_1 \ a_2 b_2) \right] \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} &= \left[ (a_1 b_1 \ a_1 b_2) u^1 + (a_2 b_1 \ a_2 b_2) u^2 \right] \\ &= \left[ (a_1 b_1 u^1 \ a_1 b_2 u^1) + (a_2 b_1 u^2 \ a_2 b_2 u^2) \right] \\ &= (a_1 b_1 u^1 + a_2 b_1 u^2 \ a_1 b_2 u^1 + a_2 b_2 u^2) \end{aligned}$$

La multiplication matricielle par un second vecteur  $\mathbf{v}$  donne un scalaire :

$$(a_1 b_1 u^1 + a_2 b_1 u^2 \ a_1 b_2 u^1 + a_2 b_2 u^2) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 u^1 v^1 + a_2 b_1 u^2 v^1 + a_1 b_2 u^1 v^2 + a_2 b_2 u^2 v^2$$

## Chapitre 6

# ESPACES VECTORIELS PRÉ-EUCLIDIENS

### 6.1 Définitions

Le produit scalaire ne fait pas partie intégrante de la structure d'espace vectoriel, mais est une structure supplémentaire qui peut ou non être introduite. Les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire portent les adjectifs suivants :

#### **Définition 6.1 : Espaces vectoriels pré-euclidiens**

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (tout court) est appelé espace vectoriel pré-euclidien.

#### **Définition 6.2 : Espace vectoriel euclidien**

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien est appelé espace vectoriel euclidien, ou parfois proprement euclidien ou purement euclidien.

Les espaces vectoriels euclidiens sont inclus dans les espaces vectoriels pré-euclidiens.

#### **Exemple 6.1 : Espace euclidien**

L'ensemble  $\mathbb{R}^n$  des  $n$ -uplets de nombres réels (un  $n$ -uplet est une liste (ou séquence ou multiuplet) ordonnée de  $n$  objets, alors qu'un  $n$ -uple est une liste non ordonnée de  $n$  objets) muni du produit scalaire euclidien est un espace euclidien de dimension  $n$ . Les  $n$ -uplets de réels ne sont en fait que les coordonnées cartésiennes des points de l'espace euclidien.

#### **Définition 6.3 : Espace vectoriel pseudo-euclidien**

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire indéfini (qui peut être positif, négatif ou nul) est appelé espace vectoriel pseudo-euclidien ou improprement euclidien.

Les espaces vectoriels pseudo-euclidiens sont inclus dans les espaces vectoriels pré-euclidiens.

**Remarque 6.1**

Les espaces vectoriels pré-euclidiens sont des espaces plats et réciproquement. Pré-euclidien et plat sont des synonymes. L'existence d'un produit scalaire n'est possible que dans ces espaces, et par conséquent les définit pleinement. Dans un espace courbe, le produit scalaire n'est défini que localement dans l'espace pré-euclidien tangent.

D'après le théorème de Gram-Schmidt, dans tout espace pré-euclidien on peut trouver une base orthonormale ou pseudo-orthonormale, par exemple en relativité restreinte. Le tenseur métrique est alors diagonal, ses termes sont indépendants des coordonnées et la base est donc globale. À cette base nous associons un système de coordonnées rectangulaires, global. En revanche, dans un espace courbe il n'existe pas de base globale, les vecteurs de base sont fonction des coordonnées. Le tenseur métrique est diagonal ssi le système de coordonnées est orthogonal, mais ses éléments dépendent des coordonnées, il est local.

**6.2 Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien**

Grâce au th. 1.1 page 12 de Gram-Schmidt plaçons-nous dans une base orthogonale d'un espace vectoriel pré-euclidien. Dans cette base le tenseur métrique est diagonal et les coefficients  $g_{ij}$  sont des constantes. Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  s'écrit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{11}u^1v^1 + g_{22}u^2v^2 + \dots + g_{nn}u^nv^n$$

et la norme d'un vecteur non nul  $\mathbf{u}$  a pour expression :

$$\|\mathbf{u}\| = \left[ g_{11} (u^1)^2 + g_{22} (u^2)^2 + \dots + g_{nn} (u^n)^2 \right]^{1/2}$$

**Définition 6.4 : Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien**

On appelle signature d'un espace vectoriel l'ensemble des signes positifs et négatifs apparaissant dans l'expression du produit scalaire de deux vecteurs ou de la norme d'un vecteur, où l'on a remplacé tous les  $g_{ii}$  par leur valeur respective, positive ou négative.

Le nombre de signes + et de signes – est une caractéristique intrinsèque de l'espace vectoriel, indépendante de la base orthogonale considérée.

Si la signature ne comporte que des signes identiques elle est dite *euclidienne*. La forme quadratique est alors définie et l'espace vectoriel est euclidien.

Si elle ne comporte que des signes positifs, la forme quadratique est définie positive. Tous les  $g_{ii}$  sont positifs, le produit scalaire est euclidien et la norme d'un vecteur non nul est strictement positive.

**Exemple 6.2 : Signature de l'espace de la physique non relativiste**

Dans une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien de la physique non relativiste, le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$$

C'est l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, de signature euclidienne (+ + +).

**Exemple 6.3 : Signature de l'espace vectoriel euclidien de dimension 2**

À la surface d'un cylindre de rayon  $\rho$ , plaçons-nous dans la base naturelle  $(\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$  associée aux coordonnées cylindriques  $(\phi, z)$  (Cf. figure dans Vol. 1 Notion d'espace). Le tenseur métrique s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où  $\rho$  est constant. C'est l'espace euclidien de dimension 2, de signature (+ +). Le tenseur métrique est le même que celui d'un plan car en déroulant un cylindre (ou un cône) on obtient un plan.

Si la signature comporte des signes différents, le produit scalaire est pseudo-euclidien, la norme s'appelle pseudo-norme car elle ne satisfait pas à la condition de séparation (Cf. Vol. 1 Notion d'espace). L'espace est pseudo-euclidien, son tenseur métrique est de la forme

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \pm \delta_{ij}$$

avec au moins un signe positif et un signe négatif. Lorsqu'un seul signe est différent des autres, la signature est dite *lorentzienne*.

**Exemple 6.4 : Signature de l'espace-temps de la relativité restreinte**

Dans une base orthonormée de l'espace-temps de la relativité restreinte, le 4-produit scalaire en convention de genre temps s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3$$

C'est un espace pseudo-euclidien de dimension 4, de signature (+ - - -). Les signatures (+ - - -) et (- + + +) sont des signatures lorentziennes.

**Exemple 6.5 : Signature d'un espace dont on connaît la métrique**

Cherchons la signature de l'espace plat dont la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon ds^2 &= 4(dx^1)^2 + 5(dx^2)^2 - 2(dx^3)^2 + 2(dx^4)^2 - 4dx^2 dx^3 - 4dx^2 dx^4 - 10dx^3 dx^4 \\ &= \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 & dx^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où la matrice carrée est la représentation du tenseur métrique dans la base inconnue d'origine. Nous supposons qu'il existe une base  $(\mathbf{v}_i)$  dans laquelle la matrice représentative du tenseur

métrique est diagonale :

$$G \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

Pour le premier vecteur  $\mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de cette base hypothétique nous aurons :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, dans cette base  $(\mathbf{v}_i)$  :

$$\forall i = 1, \dots, 4 \quad [G]\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (6.1)$$

Les  $\lambda_i$  sont les *valeurs propres* de la matrice  $G$ , les  $\mathbf{v}_i$  sont les *vecteurs propres* de  $G$ , associés aux valeurs propres. Les vecteurs propres de  $G$  forment une base dans laquelle  $G$  est diagonale. Notez que les vecteurs propres sont définis à un coefficient multiplicateur près :

$$\begin{aligned} [G](k\mathbf{v}) &= k[G](\mathbf{v}) \\ &= k(\lambda\mathbf{v}) \\ &= \lambda(k\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Cherchons donc un scalaire  $\lambda$  et un vecteur non nul  $\mathbf{v}$  associé à  $\lambda$ , respectant (6.1) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 - \lambda & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 - \lambda & -5 \\ 0 & -2 & -5 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Ce système homogène a une solution non nulle ssi son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 5 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 0 \\ 2 & 2+\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 5 & \lambda-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda) \left[ (\lambda-5) \begin{vmatrix} 2+\lambda & 3-\lambda \\ 5 & \lambda-7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \det(G - \lambda I) &= (4 - \lambda) \{ (\lambda - 5) [(2 + \lambda)(\lambda - 7) - 5(3 - \lambda)] - 2 [2(\lambda - 7) - 2(3 - \lambda)] \} \\ &= (4 - \lambda) [(\lambda - 5)(\lambda^2 - 29) - 8(\lambda - 5)] \\ &= (4 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda^2 - 37) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quatre valeurs propres annulent le déterminant :  $\lambda = +4, +5, +\sqrt{37}, -\sqrt{37}$

En injectant chaque valeur propre dans (6.2), on trouve le vecteur propre qui lui est associé. Il existe bien une transformation des coordonnées telle que dans le nouveau système de coordonnées la métrique s'écrive :

$$\begin{aligned} \varepsilon ds^2 &= 4(dx^1)^2 + 5(dx^2)^2 + \sqrt{37}(dx^3)^2 - \sqrt{37}(dx^4)^2 \\ &= (d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + (d\bar{x}^3)^2 - (d\bar{x}^4)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent la signature est (+ + +-).

### 6.3 Angle entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  d'un espace vectoriel pré-euclidien donnés en fonction de leurs composantes contravariantes. À partir de la définition du cosinus (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) :

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{|g_{pq}u^p u^q|} \sqrt{|g_{rs}v^r v^s|}} \quad (6.3)$$

**Remarque 6.2**

L'angle étant défini uniquement à partir de produits scalaires, il est invariant par changement de coordonnées.

**6.3.1 Espace vectoriel euclidien**

Dans un espace vectoriel euclidien nous pouvons supprimer les valeurs absolues :

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{pq}u^p u^q} \sqrt{g_{rs}v^r v^s}}$$

**Théorème 6.1**

*On considère la base naturelle d'un système de coordonnées quelconque d'un espace vectoriel pré-euclidien. Soit  $G$  le tenseur métrique local. Si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont les champs de vecteurs tangents à deux familles de courbes, alors ces familles sont mutuellement orthogonales ssi*

$$g_{ij}u^i v^j = 0$$

**Définition 6.5 : Vecteur normal à une surface**

Un vecteur est normal à une surface en un point  $P$  de cette surface, s'il est orthogonal au vecteur tangent de toute courbe appartenant à la surface et passant par ce point  $P$ .

Dans un système de coordonnées  $(x^i)$  d'un espace vectoriel euclidien, considérons l'hypersurface de coordonnée  $x^\alpha = c^{ste}$ . Tout vecteur  $\mathbf{T}$  tangent à cette surface a sa composante  $t^\alpha$  nulle :

$$\begin{aligned} t^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un paramètre. Le vecteur  $\mathbf{N}$  de composantes contravariantes

$$n^i = g^{i\alpha}$$

est normal à cette hyper-surface, en effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} &= g_{ij}n^i t^j \\ &= g_{ij}g^{i\alpha} t^j \\ &= g^{i\alpha} t_i \\ &= t^\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression de l'angle  $\theta$  entre les normales aux surfaces  $x^\alpha = c^{ste}$  et  $x^\beta = c^{ste}$ . En appelant  $\mathbf{u}(g^{i\alpha})$  et  $\mathbf{v}(g^{j\beta})$  les vecteurs normaux aux hyper-surfaces, (6.3) page 55

donne :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{g_{ij}g^{i\alpha}g^{j\beta}}{\sqrt{g_{pq}g^{p\alpha}g^{q\alpha}}\sqrt{g_{rs}g^{r\beta}g^{s\beta}}} \\ &= \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sqrt{g^{\beta\beta}}}\end{aligned}\quad (6.4)$$

Par exemple, en coordonnées orthogonales (curvilignes ou rectilignes), donc pour lesquelles le cosinus de l'angle est nul, en tout point

$$\forall i \neq j \quad g_{ij} = 0$$

ou de façon équivalente

$$\forall i \neq j \quad g^{ij} = 0$$

Soit  $(x^i)$  un système de coordonnées quelconques et soit  $x^\alpha(\lambda) = \lambda$  une ligne de coordonnée de paramètre  $\lambda$ , les autres coordonnées étant nulles :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} i = \alpha, & x^\alpha = \lambda \\ i \neq \alpha, & x^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad x^i = \lambda \delta_{i\alpha}$$

Soit une autre ligne de coordonnées d'équation :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad x^j = \lambda \delta_{j\beta}$$

(6.3) page 55 donne l'angle  $\phi$  entre ces deux lignes de coordonnées :

$$\begin{aligned}\cos(\phi) &= \frac{g_{ij}\lambda\delta_{i\alpha}\lambda\delta_{j\beta}}{\sqrt{g_{pq}\lambda\delta_{p\alpha}\lambda\delta_{q\alpha}}\sqrt{g_{rs}\lambda\delta_{r\beta}\lambda\delta_{s\beta}}} \\ &= \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}}\end{aligned}$$

En général cet angle est différent de l'angle  $\theta$  donné par (6.4) de la présente page.

### Exemple 6.6 : Angle entre deux vecteurs

Soient  $\mathbf{u}(1, 0, -2, -1, 0)$  et  $\mathbf{v}(0, 0, 2, 2, 0)$  deux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien  $E_5$ , alors :

$$\mathbf{u}^2 = 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 6$$

$$\mathbf{v}^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \times 0 + 0 \times 0 - 2 \times 2 - 1 \times 2 + 0 \times 0 = -6$$

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

**Exemple 6.7 : Familles de courbes orthogonales**

En coordonnées polaires d'un espace vectoriel euclidien  $E_2$ , cherchons la famille de courbes orthogonales à la famille de courbes suivante :

$$\theta = \rho - c$$

où  $c$  est une constante. Nous pouvons la paramétrer sous la forme :

$$\begin{cases} \rho(t) = t \\ \theta(t) = t - c \end{cases}$$

Le champ de vecteurs tangents à cette famille de courbes,

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} d\rho/dt \\ d\theta/dt \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est constant dans le système de coordonnées polaires. Nous cherchons la famille de courbes de paramètre  $\tau$ , c.-à-d.  $\rho(\tau)$  et  $\theta(\tau)$ , dont le champ de vecteurs tangents

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} v^\rho \\ v^\theta \end{pmatrix} = \mathbf{v} \begin{pmatrix} d\rho/d\tau \\ d\theta/d\tau \end{pmatrix}$$

est tel que le numérateur de (6.3) page 55 soit nul :

$$\begin{aligned} g_{ij}u^i v^j &= 0 \\ g_{\rho\rho}u^\rho v^\rho + g_{\rho\theta}u^\rho v^\theta + g_{\theta\rho}u^\theta v^\rho + g_{\theta\theta}u^\theta v^\theta &= 0 \\ v^\rho + \rho^2 v^\theta &= 0 \\ \frac{d\rho}{d\tau} + \rho^2 \frac{d\theta}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

On résoud l'équation différentielle à variables séparables :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho^2} &= -d\theta \\ \rho^{-1} &= \theta + c \\ \rho &= \frac{1}{\theta + c} \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante.

**Exemple 6.8 : Courbes orthogonales**

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  d'un espace vectoriel euclidien  $E_3$ , soient deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sur une sphère de rayon  $a$ , d'équations :

$$\mathcal{C}_1 : \phi = f(\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \phi = g(\theta)$$

Cherchons la condition pour que ces courbes soient orthogonales. Nous pouvons les paramétrer :

$$\mathcal{C}_1(t) : \begin{cases} r = a \\ \theta = t \\ \phi = f(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2(\tau) : \begin{cases} r = a \\ \theta = \tau \\ \phi = g(\tau) \end{cases}$$

Les vecteurs tangents à ces courbes sont respectivement :

$$\mathbf{u}(0, 1, d_\theta f(\theta)) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(0, 1, d_\theta g(\theta))$$

D'après (6.3) page 55, ces courbes sont orthogonales au point d'intersection  $(a, \theta_0, \phi_0)$  ssi le produit scalaire des vecteurs tangents est nul en ce point,  $g_{ij}u^i v^j = 0$  :

$$\left(0 \quad 1 \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \sin^2(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{dg(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(0 \quad 1 \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \\ a^2 \sin^2(\theta_0) \times \frac{dg(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} a^2 + d_\theta f(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \times a^2 \sin^2(\theta_0) \times d_\theta g(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} &= 0 \\ d_\theta f(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \times d_\theta g(\theta) \Big|_{\theta=\theta_0} &= -\sin^{-2}(\theta_0) \end{aligned}$$

### Exemple 6.9 : Champs de vecteurs orthogonaux

Soient deux champs de vecteurs en coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$ ,

$$\mathbf{u}(0, 1, 2b\phi) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(0, -2b\phi, \rho^2)$$

où  $b$  est une constante. Montrons qu'ils sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} g_{ij}u^i v^j &= \left(0 \quad 1 \quad 2b\phi\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2b\phi \\ \rho^2 \end{pmatrix} \\ &= \left(0 \quad 1 \quad 2b\phi\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2b\phi\rho^2 \\ \rho^2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{u}$  est le champ de vecteurs tangents à la courbe paramétrique de paramètre  $t$

$$\mathcal{C} : \rho = a, \quad \phi = t, \quad z = bt^2$$

car en dérivant on retrouve  $\mathbf{u}$  :

$$d\rho/dt = da/dt = 0, \quad d\phi/dt = dt/dt = 1, \quad dz/dt = d(bt^2)/dt = 2bt = 2b\phi$$

D'après son système d'équations paramétriques,  $\mathcal{C}$  est une hélice à pas variable sur le cylindre droit de rayon  $a$ . De même, la courbe  $\mathcal{L}$  de paramètre  $\tau$  :

$$\mathcal{L} : \rho = a, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = -2b\phi, \quad \frac{dz}{d\tau} = a^2$$

a pour champ de vecteurs tangents  $\mathbf{v}$  :

$$d\rho/d\tau = 0, \quad d\phi/d\tau = -2b\phi, \quad dz/d\tau = a^2$$

Nous avons montré que cette courbe est orthogonale à la courbe  $\mathcal{C}$ . La courbe  $\mathcal{L}$  s'écrit aussi :

$$\rho = a, \quad \frac{d\phi}{\phi} = -2bd\tau, \quad z = a^2\tau + c_1$$

Supposons qu'à  $\tau = 0, z = 0$  :

$$\begin{aligned} \rho &= a, \quad \ln \phi = -2b\tau + c_2, \quad z = a^2\tau \\ \rho &= a, \quad \phi = C \exp(-2bz/a^2) \end{aligned}$$

Cette solution n'inclue pas toutes les courbes orthogonales à  $\mathcal{C}$  car certaines n'ont pas pour champ de vecteurs tangents  $\mathbf{v}$ .

### 6.3.2 Espace vectoriel pseudo-euclidien

Pour la métrique indéfinie d'un espace pseudo-euclidien, l'angle  $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$  entre deux vecteurs non nuls (dont la norme est non nulle) donnés en composantes contravariantes, s'écrit :

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{|g_{pq}u^p u^q|} \sqrt{|g_{rs}v^r v^s|}} \\ &= \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{\varepsilon_1 g_{pq}u^p u^q} \sqrt{\varepsilon_2 g_{rs}v^r v^s}} \end{aligned}$$

Deux cas sont alors possibles :

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &\leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \\ \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} &\leq 1 \\ -1 &\leq \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 1 \end{aligned}$$

L'angle  $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$  des deux vecteurs existe, est unique et compris entre 0 et  $\pi$ .

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est plus valable :

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| > \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Nous avons alors

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k \quad (|k| > 1)$$

Il existe une infinité de solutions pour l'angle, toutes complexes. Par convention on choisit :

$$(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \begin{cases} i \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}) & k > 1 \\ \pi + i \ln(-k + \sqrt{k^2 - 1}) & k < 1 \end{cases}$$

avec les limites  $k \rightarrow 1^+$  et  $k \rightarrow -1^-$



## Chapitre 7

# ESPACES PONCTUELS

---

### 7.1 Définitions

À chaque vecteur nous avons associé un couple de points (Cf. Vol. 1 Notion d'espace). Nous revenons ici sur cette correspondance.

**Définition 7.1 : Espace ponctuel pré-euclidien**

On appelle espace ponctuel pré-euclidien, un espace ponctuel tel que l'espace vectoriel associé soit un espace pré-euclidien.

**Définition 7.2 : Espace ponctuel euclidien**

On appelle espace ponctuel euclidien, un espace ponctuel tel que l'espace vectoriel associé soit un espace euclidien.

---

### 7.2 Repère et coordonnées d'un point

**Définition 7.3 : Repère d'un espace ponctuel**

On appelle repère  $(O, \mathbf{e}_i)$  d'un espace ponctuel  $E_n$ , l'ensemble d'un point  $O$  de  $E_n$  appelé origine du repère, et d'une base quelconque  $(\mathbf{e}_i)$  de l'espace vectoriel  $E_n$  associé à l'espace ponctuel  $E_n$ .

**Définition 7.4 : Coordonnées d'un point**

Dans un système de coordonnées cartésiennes de centre  $O$  d'un espace ponctuel pré-euclidien  $E_n$ , les  $n$  coordonnées  $x^i$  d'un point  $M$  sont aussi les  $n$  composantes contravariantes  $x^i$  du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de l'espace vectoriel associé  $E_n$ , exprimées dans le repère naturel  $(O, \vec{e}_i)$  associé

au système de coordonnées.

Dans un système de coordonnées quelconque, soient deux points  $M(x_M^i)$  et  $N(x_N^j)$ . Dans la base naturelle de ce système de coordonnées, et uniquement dans cette base :

$$\begin{cases} d\overrightarrow{OM} = dx_M^i \vec{e}_i \\ d\overrightarrow{ON} = dx_N^j \vec{e}_j \end{cases}$$

$dx_M^i$  et  $dx_N^j$  sont respectivement les composantes contravariantes des vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{ON}$ . En utilisant les deux premiers axiomes de la définition d'un espace ponctuel :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{MN} &= d\overrightarrow{MO} + d\overrightarrow{ON} \\ &= d\overrightarrow{ON} - d\overrightarrow{OM} \\ &= (dx_N^j - dx_M^i) \vec{e}_i \end{aligned}$$

$(dx_N^j - dx_M^i)$  sont les composantes contravariantes du vecteur infinitésimal  $d\overrightarrow{MN}$  dans la base naturelle ( $\vec{e}_i$ ).

### 7.3 Distance

#### Définition 7.5 : Distance euclidienne

La distance euclidienne  $MN$  entre deux points  $M$  et  $N$  d'un espace ponctuel euclidien  $E_n$ , est la norme euclidienne du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  de l'espace vectoriel euclidien normé  $E_n$  associé à  $E_n$  :

$$MN = \|\overrightarrow{MN}\|$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes (rectilignes), si les points  $M$  et  $N$  ont respectivement pour coordonnées  $x_M^i$  et  $x_N^j$ , dans la base naturelle (normée) associée à ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_M^i - x_N^i) \vec{e}_i \cdot (x_N^j - x_M^j) \vec{e}_j \\ &= g_{ij} (x_N^i - x_M^i) (x_N^j - x_M^j) \end{aligned}$$

où le produit scalaire est défini positif, c.-à-d. euclidien.

#### Définition 7.6 : Distance pré-euclidienne

La distance  $MN$  entre deux points  $M$  et  $N$  d'un espace ponctuel pré-euclidien  $E_n$ , est la pseudo-norme du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  de l'espace vectoriel pré-euclidien normé  $E_n$  associé à  $E_n$  :

$$MN = \|\overrightarrow{MN}\|$$

Dans un système de coordonnées cartésienne (rectilignes), si les points  $M$  et  $N$  ont respectivement pour coordonnées  $x_M^i$  et  $x_N^j$ , dans la base naturelle (pseudo-normée) associée à ce

système de coordonnées :

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_M^i - x_N^i) \vec{e}_i \cdot (x_N^j - x_M^j) \vec{e}_j \\ &= g_{ij} (x_N^i - x_M^i) (x_N^j - x_M^j) \end{aligned} \quad (7.1)$$

où le produit scalaire est non-dégénéré.

(7.1) n'est valable que lorsque les  $g_{ij}$  ne sont pas des fonctions des coordonnées, c.-à-d. en coordonnées cartésiennes (rectilignes), donc dans un espace pré-euclidien (euclidien ou pseudo-euclidien).

Supposons  $N$  infiniment proche de  $M$  et désignons par  $x^i$  les coordonnées de  $M$  et  $x^i + dx^i$  et les coordonnées de  $N$ . Si l'on note ds la distance infinitésimale  $MN$ , (7.1) devient la forme quadratique de différentielles, appelée *forme quadratique fondamentale*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

où les coefficients  $g_{ij}$  sont les produits scalaires des vecteurs de base de la base naturelle du système de coordonnées quelconque ( $x^i$ ). Ils sont fonction des coordonnées  $x^i$  lorsque la base varie localement. En permettant le calcul de la distance infinitésimale localement en chaque point et dans toutes les directions, les  $g_{ij}$  caractérisent complètement la géométrie de l'espace considéré (pré-euclidien ou non). Ils définissent cette géométrie de manière intrinsèque sans qu'il soit nécessaire de considérer que l'hypersurface est plongée dans un espace de dimension supérieure. Lorsque les  $g_{ij}$  sont fonction des coordonnées  $x^i$ , soit l'espace est pré-euclidien mais le système de coordonnées n'est pas cartésien (rectiligne), soit l'espace riemannien n'est pas pré-euclidien. Lorsque  $E_n$  est pré-euclidien, le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt page 125 nous assure qu'il est toujours possible de trouver une base orthonormale ou pseudo-orthonormale.

Lorsque  $E_n$  est euclidien et le système de coordonnées rectangulaires, les termes diagonaux du tenseur métrique valent l'unité et les termes non diagonaux sont nuls. Il ne reste que les termes carrés  $dx^i dx^i$ , les termes rectangles  $dx^i dx^j$ ,  $i \neq j$  étant nuls :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n dx^i dx^i \\ &= \delta_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

La distance est alors positive, ou nulle si les points sont confondus. Cette expression généralise à  $n$  dimensions le carré de la distance élémentaire de l'espace euclidien de la géométrie classique en coordonnées rectangulaires (théorème de Pythagore).

### Exemple 7.1

Distance en coordonnées rectilignes obliques ( $x^1, x^2$ ) En coordonnées cartésiennes obliques

dans le plan le carré de la distance s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= g_{ij}\Delta x^i\Delta x^j \\ &= g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{12}\Delta x^1\Delta x^2 + g_{21}\Delta x^2\Delta x^1 + g_{22}(\Delta x^2)^2 \\ &= g_{11}(\Delta x^1)^2 + 2g_{12}\Delta x^1\Delta x^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 \\ &= (\Delta x^1)^2 + 2\cos(\alpha)\Delta x^1\Delta x^2 + (\Delta x^2)^2\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Pythagore pour le triangle quelconque.

**Exemple 7.2 : Distance en coordonnées polaires**  $(\rho, \theta)$

Le carré de la distance infinitésimale

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

est de signature  $(++)$ . Le premier terme  $g_{11}(dx^1)^2 = d\rho^2$  est la distance entre deux points sur la ligne de coordonnée  $x^1 = \rho$ , et le second terme  $g_{22}(dx^2)^2 = \rho^2 d\theta^2$  est la distance entre deux points sur la ligne de coordonnée  $x^2 = \theta$ . Le terme croisé  $2g_{12}dx^1dx^2$  n'apparaît pas car les coordonnées polaires sont orthogonales.

Nous pouvons donner une nouvelle définition du système de coordonnées rectangulaires :

**Définition 7.7 : Système de coordonnées rectangulaires**

Dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , un système de coordonnées  $(x^i)$  est rectangulaire si la distance entre deux points arbitraires  $P(x_P^1, \dots, x_P^n)$  et  $Q(x_Q^1, \dots, x_Q^n)$  est donnée par une généralisation du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{(x_Q^1 - x_P^1)^2 + \dots + (x_Q^n - x_P^n)^2} \\ &= \sqrt{\delta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j}\end{aligned}$$

où  $\Delta x^i = x_Q^i - x_P^i$ .

En notation vectorielle :

$$\begin{aligned}d(P, Q) &= \|Q - P\| \\ &= \sqrt{(Q - P)^T (Q - P)}\end{aligned}$$

Cherchons l'expression de la distance entre deux points lorsque l'on applique une transformation linéaire  $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$  inversible ( $\det A \neq 0$ ). Posons  $A^{-1} = B$  c.-à-d.  $\mathbf{u} = B\mathbf{u}'$ . La transformation

linéaire conserve les distances :

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{u}', \mathbf{v}') &= d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\
 &= \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^T (\mathbf{u} - \mathbf{v})} \\
 &= \sqrt{(\mathbf{B}\mathbf{u}' - \mathbf{B}\mathbf{v}')^T (\mathbf{B}\mathbf{u}' - \mathbf{B}\mathbf{v}')} \\
 &= \sqrt{[\mathbf{B}(\mathbf{u}' - \mathbf{v}')]^T \mathbf{B}(\mathbf{u}' - \mathbf{v}')} \\
 &= \sqrt{(\mathbf{u}' - \mathbf{v}')^T \mathbf{B}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}' - \mathbf{v}')}
 \end{aligned}$$

On pose

$$G = \mathbf{B}^T \mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$$

Les éléments de la matrice  $\mathbf{A}$  étant des constantes, les éléments de  $G$  sont aussi des constantes.

### Exemple 7.3 : Relativité restreinte

Plaçons-nous dans le système de coordonnées galiléennes  $(t, x, y, z)$ . La distance de carré  $c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$  n'a pas d'intérêt car elle n'est pas invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré. En revanche, la distance d'univers de carré

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \pm(c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\
 &= \eta_{00} t^2 + \eta_{11} x^2 + \eta_{22} y^2 + \eta_{33} z^2
 \end{aligned}$$

est invariante par la transformation de spéciale de Lorentz (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte), l'autre invariant étant la constante de structure de l'espace-temps. Ces deux invariants relativistes remplacent les invariants de la physique non relativiste, la distance entre deux points de l'espace et la durée entre deux instants.

Pour « pseudo-normer » la base, c.-à-d. pour avoir  $\eta_{00} = \pm 1$ , il suffit d'effectuer le changement de variable  $t = ct$ , ce qui revient à poser  $c = 1$ . C'est ce que nous ferons, les unités de temps et d'espace étant arbitraires, comme d'ailleurs toutes les unités de la physique.

## 7.4 Dérivée et différentielle d'un vecteur et d'un point

### Définition 7.8 : Vecteur fonction d'une variable

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, et soit  $t$  une variable scalaire variant dans un intervalle  $[a, b]$ . Si à chaque valeur de  $t$  nous faisons correspondre un vecteur  $\vec{u}$  de  $E$ , nous dirons que le vecteur  $\vec{u}$  est une fonction de la variable  $t$ , et nous noterons ce vecteur variable  $\vec{u}(t)$ .

### Définition 7.9 : Vecteur tendant vers le vecteur nul

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Un vecteur variable  $\vec{u}(t)$  de  $E$  tend vers le vecteur nul, si le scalaire  $\|\vec{u}(t)\|$  tend vers zéro quand  $t$  croît.

**Définition 7.10 : Vecteur fonction continue d'une variable**

Le vecteur  $\vec{u}(t)$  est une fonction continue de la variable  $t$ , si, la variable  $t$  ayant reçu un accroissement  $\Delta t$ , le vecteur

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)$$

tend vers zéro quand  $\Delta t$  tend vers zéro.

**Définition 7.11 : Vecteur dérivée d'un vecteur**

S'il existe un vecteur  $\dot{\vec{u}}(t)$  tel que,

$$\dot{\vec{u}}(t) - \frac{\Delta \vec{u}(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$$

nous dirons que  $\dot{\vec{u}}(t)$  est le vecteur dérivée de  $\vec{u}(t)$  pour la variable  $t$ . Nous noterons :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d\vec{u}}{dt} \end{aligned}$$

**Définition 7.12 : Vecteur différentielle d'un vecteur**

Nous appellerons différentielle du vecteur  $\vec{u}(t)$ , le vecteur :

$$d\vec{u} = \dot{\vec{u}} dt$$

**Définition 7.13 : Point fonction d'une variable**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace ponctuel euclidien, et soit  $t$  une variable scalaire variant dans un intervalle  $[a, b]$ . Si à chaque valeur de  $t$  nous faisons correspondre un point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , nous dirons que  $M$  est une fonction de la variable  $t$ , et nous noterons cette fonction  $M(t)$ .

Soit  $M(t)$  une fonction de la variable  $t$ , et soit  $O$  un point fixe arbitraire d'un espace ponctuel euclidien  $\mathcal{E}$  : le vecteur  $\overrightarrow{OM}(t)$  est alors une fonction de  $t$ . Soit  $O'$  un autre point fixe arbitraire de  $\mathcal{E}$ , alors,  $\overrightarrow{OO'}$  étant constant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}(t) \\ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \\ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Le vecteur dérivée du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est indépendant du point fixe  $O$  choisi, d'où les notations :

**Notation 7.1**

Le vecteur dérivée d'un point  $M$  fonction de la variable  $t$  est noté :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} \equiv \dot{\vec{M}}$$

Le vecteur différentielle d'un point  $M$  fonction de la variable  $t$  (ou différentielle de  $M$ ) est noté :

$$d\vec{M} \equiv \dot{\vec{M}}dt$$

#### Exemple 7.4

Vecteurs de base de la base naturelle du système de coordonnées  $(x^i)$  Ils sont notés :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i}$$



## Chapitre 8

### GRADIENT

#### 8.1 Différentielle d'un champ de scalaires

En un point donné d'un espace ponctuel  $\mathcal{E}$ , soient  $(x^i)$  et  $(x^{i'})$  deux systèmes de coordonnées quelconques, rectilignes ou curvilignes, orthogonaux ou non. Soit  $f$  une fonction scalaire des coordonnées. On note cette fonction  $f(x^i)$  ou  $f(x^{i'})$  selon les coordonnées employées. En un point donné, la différentielle de  $f$  est la même indépendamment de tout système de coordonnées :

$$\begin{aligned}df(x^{i'}) &= df(x^i) \\ \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'} &= \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \\ \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\end{aligned}$$

##### Notation 8.1

Les dérivées partielles sont notées avec un indice inférieur :

$$\forall i \quad \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Les dérivées partielles de  $f$  par rapport aux coordonnées se transforment comme les composantes covariantes d'un vecteur :

$$\forall i \quad \partial_{i'} f = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i f \quad (8.1)$$

##### Exemple 8.1 : Formule de dérivation en chaîne

Soit  $(\rho, \theta)$  et  $(x, y)$  deux systèmes de coordonnées d'un espace ponctuel euclidien  $E_2$ .

Soit  $f$  un champ de scalaires, en un point donné la différentielle de  $f$  s'écrit :

$$df(\rho, \theta) = df(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\begin{cases} x = x(\rho, \theta) \\ y = y(\rho, \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \partial_\rho x d\rho + \partial_\theta x d\theta \\ dy = \partial_\rho y d\rho + \partial_\theta y d\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

## 8.2 Définition du gradient d'un champ de scalaires

La différentielle du champ de scalaires  $f$  s'écrit sous la forme d'un produit scalaire,

$$df = \partial_i f dx^i$$

où d'après (8.1) page précédente les  $\partial_i f$  sont les composantes covariantes d'un vecteur, et où les  $dx^i$  sont les composantes contravariantes du vecteur différentiel position. L'expression (1.5) page 5 du produit scalaire permet d'écrire la définition :

### Définition 8.1 : Opérateur gradient

On appelle gradient d'un champ de scalaires  $f$ , le vecteur noté  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  tel que :

$$df \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{M}$$

L'opérateur différentiel gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}$  prend en entrée un champ de scalaires  $f$  et donne en sortie un champ de vecteurs  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ .

Aux valeurs prises par la fonction  $f$  en un point de l'espace et au voisinage de ce point, le gradient associe le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ .

À partir de la définition du gradient et de celle de la base naturelle :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i} dx^i$$

$$\partial_i f dx^i = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_i dx^i \tag{8.2}$$

$$\forall i \quad \partial_i f \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_i$$

Le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  a donc pour composantes covariantes les  $\partial_i f$  dans la base naturelle  $(\vec{e}_i)$  du système de coordonnées  $(x^i)$ .

**Remarque 8.1**

Par abus de langage, nous dirons que les composantes covariantes forment le « covecteur » gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)$$

où le soulignement rappelle que les composantes entre parenthèses sont covariantes.

Dans la base naturelle ( $\vec{e}_i$ ), posons momentanément les composantes contravariantes suivantes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(f^1, f^2, \dots, f^n)$$

On a alors

$$\begin{aligned} f^j \vec{e}_j &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) \\ f^j \vec{e}_j \cdot dx^i \vec{e}_i &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot dx^i \vec{e}_i \end{aligned}$$

Avec (8.2) page précédente :

$$\begin{aligned} f^j \vec{e}_j \cdot dx^i \vec{e}_i &= \partial_i f dx^i \\ \forall j \quad f^j g_{ij} &= \partial_i f \\ f^j g_{ij} g^{ik} &= \partial_i f g^{ik} \\ \forall k \quad f^k &= g^{ki} \partial_i f \end{aligned}$$

Nous obtenons les composantes contravariantes dans la base naturelle, exprimées en fonction des composantes covariantes et du tenseur métrique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(g^{1i} \partial_i f, g^{2i} \partial_i f, \dots, g^{ni} \partial_i f) \tag{8.3}$$

Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = g^{1j} \partial_j f \vec{e}_1 + g^{2j} \partial_j f \vec{e}_2 + \dots + g^{nj} \partial_n f \vec{e}_n$$

**Remarque 8.2**

Gradient est un vecteur qui, comme tous les vecteurs, n'est ni covariant ni contravariant. Ce n'est qu'après avoir choisi de l'exprimer en composantes covariantes ou contravariantes que, par abus de langage, on parle de covecteur ou de vecteur contravariant. Les composantes covariantes du vecteur gradient apparaissent en premier dans la théorie et permettent de calculer les composantes contravariantes.

**Exemple 8.2 : Expressions du vecteur gradient**

- Soit  $f(x, y, z)$  un champ de scalaires en fonction des coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$  de l'espace euclidien. Dans la base naturelle orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associée, les composantes covariantes du 3-vecteur gradient de  $f$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_x f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{i} \\ \partial_y f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{j} \\ \partial_z f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Dans toute base orthonormée, les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs sont confondues, et l'on a pour le 3-vecteur gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \partial_x f \vec{i} + \partial_y f \vec{j} + \partial_z f \vec{k}$$

où les composantes contravariantes sont exprimées en fonction des composantes covariantes.

- Soit  $f = f(\rho, \theta, z)$  une fonction scalaire des coordonnées cylindriques. Dans la base naturelle orthogonale  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associée, les composantes covariantes du 3-vecteur gradient  $f$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_\rho = \partial_\rho f \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_\theta = \partial_\theta f \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_z = \partial_z f \end{cases}$$

Dans la base naturelle associée aux coordonnées cylindriques, les composantes covariantes forment donc le covecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(\partial_\rho f, \partial_\theta f, \partial_z f)$$

Les coordonnées cylindriques étant orthogonales, les termes croisés du tenseur métrique sont nuls. En composantes contravariantes, avec (8.3) page précédente puis avec (1.10) page 10 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f) &= (g^{\rho\rho} \partial_\rho f + g^{\theta\theta} \partial_\theta f + g^{zz} \partial_z f) \vec{e}_\rho \\ &\quad + (g^{\theta\rho} \partial_\rho f + g^{\theta\theta} \partial_\theta f + g^{\theta z} \partial_z f) \vec{e}_\theta \\ &\quad + (g^{z\rho} \partial_\rho f + g^{z\theta} \partial_\theta f + g^{zz} \partial_z f) \vec{e}_z \\ &= (g^{\rho\rho} \partial_\rho f) \vec{e}_\rho + (g^{\theta\theta} \partial_\theta f) \vec{e}_\theta + (g^{zz} \partial_z f) \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (8.4)$$

Dans la base tangente orthonormée associée aux coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- Soit  $f = f(r, \theta, \phi)$  une fonction scalaire des coordonnées sphériques. Dans la base naturelle orthogonale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$  associée, les composantes covariantes du 3-vecteur gradient  $f$  s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

Dans la base tangente orthonormée associée aux coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

### Exemple 8.3 : Vecteur gradient dans une base oblique normée

Soit  $(x, y)$  un système de coordonnées rectangulaire de l'espace ponctuel euclidien  $E_2$ . Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  la base naturelle orthonormée de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$  associé. Soit  $(x', y')$  un système de coordonnées cartésiennes obliques de base naturelle associée  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ . En

s'aidant de la figure 8.1 la transformation de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x = x' + y' \cos(\alpha) \\ y = y' \sin(\alpha) \end{cases}$$

L'angle  $\alpha$  étant constant, la transformation est linéaire.

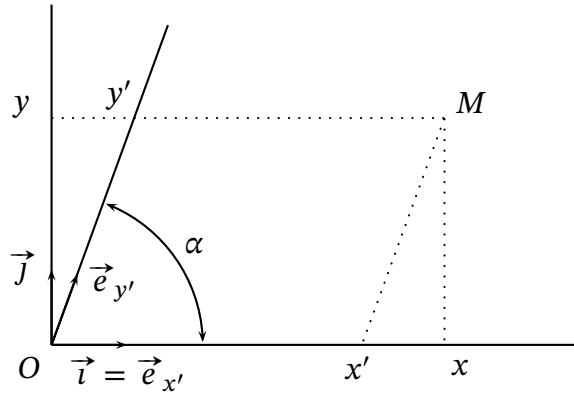


FIG. 8.1 – Base naturelle en coordonnées cartésiennes obliques

Inversement :

$$\begin{cases} x' = x - y' \cos(\alpha) \\ y' = \frac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - \frac{y}{\tan \alpha} \\ y' = \frac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x \vec{i} + y \vec{j} \\ &= [x' + y' \cos(\alpha)] \vec{i} + y' \sin(\alpha) \vec{j} \end{aligned}$$

Cette relation donne les vecteurs de la base naturelle  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$  du système de coordonnées cartésiennes obliques  $(x', y')$  :

$$\begin{cases} \vec{e}_{x'} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x'} \\ \vec{e}_{y'} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_{x'} = \vec{i} \\ \vec{e}_{y'} = \cos(\alpha) \vec{i} + \sin(\alpha) \vec{j} \end{cases}$$

Ils sont de norme unité

$$\begin{cases} \|\vec{e}_{x'}\| = \|\vec{i}\| \\ \|\vec{e}_{y'}\|^2 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{e}_{x'}\| = 1 \\ \|\vec{e}_{y'}\| = 1 \end{cases}$$

On a bien

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ &= [x' + y' \cos(\alpha)] \vec{i} + y' \sin(\alpha) \left[ \frac{\vec{e}_{x'} - \cos(\alpha) \vec{i}}{\sin(\alpha)} \right] \\ &= x' \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'}\end{aligned}$$

Dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , les composantes covariantes du vecteur gradient  $f$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{i} = \partial f / \partial x \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{j} = \partial f / \partial y \end{cases}$$

Dans la base  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ , les composantes covariantes du vecteur gradient  $f$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_{x'} = \partial f / \partial x' \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_{y'} = \partial f / \partial y' \end{cases}$$

Par exemple pour  $f = x = x' + y' \cos(\alpha)$  :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{i} = 1 \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{j} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_{x'} = 1 \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_{y'} = \cos(\alpha) \end{cases}$$

Dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  les composantes contravariantes et covariantes sont confondues :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \\ &= \vec{i}\end{aligned}$$

Dans la base primée  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ , puisque  $\vec{i} = \vec{e}_{x'}$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{e}_{x'}$$

#### Exemple 8.4 : Dérivée d'un champ de scalaires le long d'une courbe

Dans un espace vectoriel pré-euclidien, soit la courbe  $\mathcal{C}$  d'équations paramétriques  $x^i = x^i(p)$ , et soit  $\phi(x^i)$  une fonction scalaire le long de  $\mathcal{C}$ . Sa dérivée a pour expression :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dp} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dp} \\ &= \partial_i \phi u^i\end{aligned}$$

$u^i = dx^i/dp$  est un vecteur partout tangent à  $\mathcal{C}$ . Il se transforme suivant les relations :

$$\begin{aligned} \forall i \quad dx^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i \\ \frac{dx^{i'}}{dp} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dp} \\ u^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} u^i \end{aligned}$$

$u^i$  est contravariant.  $\partial_i \phi$  est le gradient de la fonction  $\phi$ , il est covariant d'après (8.1) page 71.  $d\phi/dp$  est donc invariant par changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(x^i)}{dp} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dp} \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{dx^{i'}}{dp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(x^i)}{dp} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} \frac{dx^{i'}}{dp} \\ &= \frac{d\phi(x^{i'})}{dp} \end{aligned}$$

En effet  $d\phi/dp$  est le rapport de deux invariants. Le produit du covecteur  $\partial_i \phi$  par le vecteur  $u^i$  est appelé *multiplication contractée*.

### Exemple 8.5 : Covecteur gradient en relativité restreinte

La 4-vitesse d'un mobile a pour expression en composantes contravariantes (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte) en unités géométriques :

$$[{}_4\mathbf{u}] \begin{pmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix} = [{}_4\mathbf{u}] \begin{pmatrix} dt/d\tau \\ dx/d\tau \\ dy/d\tau \\ dz/d\tau \end{pmatrix}$$

où  $\tau$  est le temps propre de ce mobile. Soit  $\phi(t, x, y, z)$  une fonction scalaire, sa différentielle s'écrit :

$$d\phi(t, x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

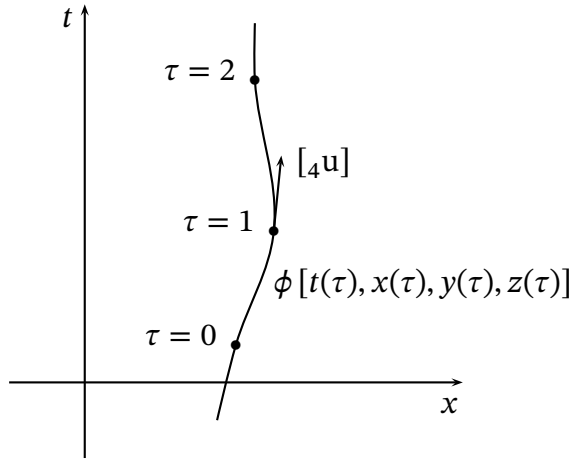


FIG. 8.2 – Champ de scalaires le long d’une ligne d’univers

Si l’on prend un point sur la ligne d’univers du mobile (Fig. 8.2), les coordonnées en entrée de  $\phi$  sont toutes des fonctions du temps propre  $\tau$ , et  $\phi$  qui est une fonction explicite des coordonnées, est aussi une fonction implicite du temps propre :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi [t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]}{d\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} \\ &= \partial_t\phi u^t + \partial_x\phi u^x + \partial_y\phi u^y + \partial_z\phi u^z \end{aligned}$$

On peut réécrire cette égalité sous forme matricielle :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \begin{pmatrix} \partial_t\phi & \partial_x\phi & \partial_y\phi & \partial_z\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^t \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{pmatrix}$$

Les composantes  $\partial_t\phi$ ,  $\partial_x\phi$ ,  $\partial_y\phi$ ,  $\partial_z\phi$  étant covariantes, nous définissons le covecteur gradient phi par :

$$\underline{d\phi} \left( \partial_t\phi \quad \partial_x\phi \quad \partial_y\phi \quad \partial_z\phi \right)$$

Pour chaque évènement  $(t, x, y, z)$  de la ligne d’univers du mobile,  $\phi(t, x, y, z)$  étant un scalaire, il en va de même de  $d\phi/d\tau$ , si bien que la multiplication contractée du covecteur gradient par le 4-vecteur vitesse donne un champ de scalaires. Le covecteur gradient est donc une forme, une application qui à un vecteur fait correspondre un scalaire.

Contrairement au produit scalaire, la contraction (le fait d’égaliser un indice contravariant et un indice covariant dans un monome) ne fait pas intervenir le tenseur métrique. En effet, l’un des deux membres est déjà un covecteur.

**Exemple 8.6 : Covecteur 4-vitesse**

D'après l'ex. 7.3 page 67, avec une métrique de genre temps de signature (+ - - -) et avec (1.3) page 4 qui donnent le passage des composantes contravariantes aux covariantes, les composantes covariantes du covecteur 4-vitesse sont données par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dt/d\tau \\ dx/d\tau \\ dy/d\tau \\ dz/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt/d\tau \\ -dx/d\tau \\ -dy/d\tau \\ -dz/d\tau \end{pmatrix}$$

La notation du terme de droite sous forme de matrice colonne semble indiquer que les composantes sont contravariantes alors qu'elles sont covariantes. Seul le signe négatif permet la distinction. On note le covecteur en ligne,

$$\underline{u}(dt/d\tau, -dx/d\tau, -dy/d\tau, -dz/d\tau)$$

où les virgules entre les composantes indiquent qu'il ne s'agit pas d'une matrice uniligne qui serait la transposée d'un vecteur unicolonne, mais d'un ensemble ordonné de valeurs. On note aussi les composantes du covecteur explicitement avec un indice en bas :

$$\begin{aligned} u_1 &= dt/d\tau \\ u_2 &= -dx/d\tau \\ u_3 &= -dy/d\tau \\ u_4 &= -dz/d\tau \end{aligned}$$

D'après (1.11) page 12 et (8.3) page 73, le vecteur adjoint (ou associé, ou réciproque) du covecteur gradient de  $\phi$ , c.-à-d. le vecteur gradient de  $\phi$  écrit en composantes contravariantes, s'écrit en relativité restreinte :

$$\begin{bmatrix} 1/1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \phi \\ \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \phi \\ -\partial_x \phi \\ -\partial_y \phi \\ -\partial_z \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \begin{pmatrix} \partial_t \phi \\ -\partial_x \phi \\ -\partial_y \phi \\ -\partial_z \phi \end{pmatrix}$$

Les composantes contravariantes sont écrites en fonction des composantes covariantes.

### Remarque 8.3

La notation n'est pas parfaite, dans l'écriture verticale des composantes contravariantes, l'indice de dérivation partielle est en bas et semble indiquer une covariance des composantes.

### Notation 8.2

On peut trouver la notation  $\mathbf{u}^T = (x \ y \ z)$  pour le covecteur adjoint au vecteur  $\mathbf{u}$ . Or le covecteur n'est la transposée du vecteur que dans un espace vectoriel euclidien car le tenseur métrique est alors la matrice identité. En effet, l'ex. 7.3 page 67 montre que dans l'espace-

temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte un signe négatif apparaît.

### 8.3 Représentation du gradient

Il s'agit de représenter un covecteur gradient en un point donné de l'espace, en ayant à l'esprit que le covecteur gradient est l'archétype des covecteurs. Sa représentation servira pour tous les covecteurs. On représente de petites tangentes aux courbes de niveau (non représentées) localement autour du point (Fig. 8.3).

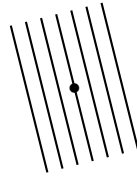


FIG. 8.3 – Représentation d'un covecteur en un point

Plus les lignes parallèles sont rapprochées et plus la norme du covecteur est grande (plus le gradient est fort). La contraction des composantes d'un covecteur et d'un vecteur est le nombre de segments de droite traversés par le vecteur en ce point, ici environ 3,4 (Fig. 8.4).

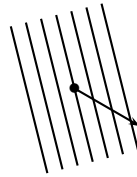


FIG. 8.4 – Contraction d'un covecteur et d'un vecteur

### 8.4 Base réciproque de la base naturelle

Soit  $(x^i)$  un système de coordonnées curvilignes d'un espace ponctuel euclidien  $E_n$ , et soit  $M$  un point de cet espace. Soit  $(\vec{e}_i)$  une base naturelle de l'espace vectoriel euclidien  $E_n$  associé à  $E_n$ . Montrons que la base formée par les vecteurs  $\overrightarrow{\text{grad}}(x^j)$  est la base réciproque de la base  $(\vec{e}_i)$ . D'après la déf. 8.1 page 72 du vecteur gradient :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{M}$$

Pour  $f = x^1$  :

$$\begin{aligned} dx^1 &= \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot d\vec{M} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot (\vec{e}_1 dx^1 + \vec{e}_2 dx^2 + \dots + \vec{e}_n dx^n) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \vec{e}_1 = 1 \\ \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \vec{e}_k = 0 \quad \forall k = 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

De même pour  $f = x^2, \dots, x^n$ . Par conséquent,

$$\forall i, j \quad \overrightarrow{\text{grad}}(x^j) \cdot \vec{e}_i = \delta_{ij}$$

qui est la définition de bases réciproques. En général, les vecteurs de base de la base réciproque de la base naturelle ne sont pas de norme unité, comme on peut le constater dans l'ex. 8.3 page 74.

Montrons que les vecteurs de base de la base réciproque sont perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées. Dans le système de coordonnées  $(x^i)$ , considérons l'hypersurface de coordonnée  $x^1 = c^{ste}$ , sur laquelle la différentielle de  $x^1$  est nulle :

$$\begin{aligned} dx^1 &= \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot d\vec{M} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}(x^1)$  est donc perpendiculaire à  $d\vec{M}$ , lui-même tangent en  $M$  à l'hypersurface  $x^1 = c^{ste}$ . Par conséquent  $\overrightarrow{\text{grad}}(x^1)$  est perpendiculaire en  $M$  à l'hypersurface  $x^1 = c^{ste}$ .

**Exemple 8.7 : Base réciproque de la base naturelle polaire**

- en utilisant l'expression du gradient en coordonnées cylindriques (8.4) page 74 :

$$\begin{cases} \vec{e}^\rho = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \\ \vec{e}^\theta = \overrightarrow{\text{grad}}(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^\rho = \partial_\rho \rho \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta \rho \vec{e}_\theta \\ \vec{e}^\theta = \partial_\rho \theta \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta \theta \vec{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^\rho = \vec{e}_\rho \\ \vec{e}^\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{\rho^2} \end{cases}$$

- en utilisant l'expression du gradient en coordonnées rectangulaires :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{e}^\rho = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \\ \vec{e}^\theta = \overrightarrow{\text{grad}}(\theta) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^\rho = \partial_x \rho \vec{i} + \partial_y \rho \vec{j} \\ \vec{e}^\theta = \partial_x \theta \vec{i} + \partial_y \theta \vec{j} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \\ \vec{e}^\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^\rho = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \\ \vec{e}^\theta = -\frac{1}{\rho} \sin(\theta) \vec{i} + \frac{1}{\rho} \cos(\theta) \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^\rho = \vec{e}_\rho \\ \vec{e}^\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{\rho^2} \end{cases}$$



## Chapitre 9

# ALGÈBRE TENSORIELLE

---

### 9.1 Introduction

Les lois de la géométrie et de la physique ont une existence intrinsèque indépendante du système de coordonnées dans lequel on les exprime. Il est donc naturel d'essayer de se débarrasser des systèmes de coordonnées et de raisonner sur des objets géométriques ou physiques. On a d'abord fait correspondre à ces objets des éléments simples euclidiens sur lesquels on a défini des opérations dont on a étudié les propriétés. Ce procédé a conduit au *Calcul vectoriel*, puis au *Calcul tensoriel*. Cependant, le choix d'un système de coordonnées est resté nécessaire, et les vecteurs et tenseurs, bien qu'indépendants de tout système de coordonnées, sont donnés par leurs coordonnées, sans que cela soit contradictoire. Plutôt que de particulariser un système de coordonnées en en choisissant un, on écrit les équations sous une forme valable dans n'importe quel système de coordonnées.

Il existe en physique des quantités intrinsèques qui, comme les vecteurs, existent en elles-mêmes indépendamment de la base dans laquelle on les exprime. Par exemple la matrice inertie ou la matrice rotation d'un solide. Ces matrices carrées particulières sont appelées des *tenseurs*. Toute combinaison linéaire de deux tenseurs donne un tenseur, les tenseurs sont donc des vecteurs. Les matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont aussi des vecteurs, et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est donc un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. En effet, toute combinaison linéaire de deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  donne une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Elles sont de plus invariantes par changement de base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Les tenseurs sont des matrices particulières car ils sont invariants par changement de base lié au changement de coordonnées de l'espace-temps physique. Un changement de coordonnées de l'espace-temps induit un changement de base de l'espace vectoriel des forces, des vitesses, des accélérations, et des tenseurs en général, mais pas de celui des matrices. Les tenseurs ont donc un sens physique que n'ont pas les matrices.

Un tenseur ayant  $p$  indices contravariants est dit contravariant d'ordre  $p$  et de type  $(p, 0)$ . Un tenseur ayant  $q$  indices covariants est dit covariant d'ordre  $q$  et de type  $(0, q)$ . S'il est les deux il est dit d'ordre  $p + q$  et de type  $(p, q)$ . L'ordre (ou rang) d'un tenseur est son nombre d'indices, et n'a donc rien à voir avec l'ordre  $n$  d'une matrice carré  $n \times n$  qui est de combien varient ses indices.

Habituellement on appelle « vecteurs » uniquement les tenseurs d'ordre un alors que tous les ten-

seurs sont des vecteurs, quel que soit leur ordre. En physique, nous utiliserons cet abus de langage pour dire que les vecteurs appartiennent à une catégorie plus grande d'objets mathématiques, les tenseurs. Les scalaires sont alors des tenseurs d'ordre zéro.

Les tenseurs d'ordre deux sont souvent représentés par des matrices carrées dont les éléments sont leurs composantes. Pour les tenseur d'ordre trois la multiplication des matrices 3D n'est pas définie. Il faut alors abandonner la représentation matricielle des tenseurs et n'utiliser que la représentation indicielle.

Toutes les équations de la physique doivent être *invariantes de forme* par changement de coordonnées, donc par changement de base, elles sont dites *covariantes*. Elles varient toutes de la même façon, c'est le principe de covariance des équations de la physique. Or, pour les vecteurs comme pour les tenseurs, les composantes de même variance se transforment de la même façon. Par conséquent, toutes les équations de la physique doivent être écrites sous la forme d'une égalité entre tenseurs de même ordre et de même variance. Pour assurer l'invariance des tenseurs, leurs composantes doivent se transformer d'une façon bien précise que nous allons déterminer. Cette propriété d'invariance des tenseurs par changement de base est fondamentale puisqu'elle nous servira de définition des tenseurs. Dans un second temps, de même que nous avons défini les vecteurs et les espaces vectoriels uniquement à partir de leurs propriétés opératoires, nous définirons les tenseurs et les espaces tensoriels uniquement à partir de leurs propriétés opératoires.

**Exemple 9.1 : Multiplication des composantes de deux vecteurs**

Une façon simple de former un nouveau vecteur (dans le sens d'une quantité indépendante de la base dans laquelle on l'exprime), consiste à multiplier les composantes de deux vecteurs dans un ordre déterminé. Soient  $\mathbf{u}(u^1, u^2)$  et  $\mathbf{v}(v^1, v^2)$  deux vecteurs de l'espace vectoriel  $E_2$ , le nouveau vecteur  $\mathbf{T}$  a quatre composantes et appartient à l'espace vectoriel  $E_4$  (les dimensions des espaces vectoriels de départ se multiplient) :

$$\mathbf{T} = (u^1v^1, u^1v^2, u^2v^1, u^2v^2)$$

**Notation 9.1**

En notation indicielle, si  $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j$  alors

$$\forall i, j \quad t^{ij} = u^i v^j$$

où l'ordre des indices  $i$  et  $j$  compte car en général  $u^1v^2 \neq u^2v^1$  donc  $t^{ij} \neq t^{ji}$ .

En utilisant cette notation :

$$\mathbf{T} = (t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22})$$

$\mathbf{T}$  est un tenseur, appelé produit tensoriel de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . On note  $\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ , et on lit «  $\mathbf{u}$  tensoriel  $\mathbf{v}$  ». On définit le produit tensoriel par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= (u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2) \otimes (v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2) \\ &= u^1\mathbf{e}_1 \otimes v^1\mathbf{e}_1 + u^1\mathbf{e}_1 \otimes v^2\mathbf{e}_2 + u^2\mathbf{e}_2 \otimes v^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 \otimes v^2\mathbf{e}_2 \\ &= u^1v^1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + u^1v^2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + u^2v^1\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + u^2v^2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ &= t^{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t^{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + t^{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + t^{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{T} \end{aligned}$$

Soient  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  les vecteurs de base d'une base orthonormée de  $E_2$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= (1 \times 1, 1 \times 0, 0 \times 1, 0 \times 0) \\ &= (1, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 &= (1 \times 0, 1 \times 1, 0 \times 0, 0 \times 1) \\ &= (0, 1, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 &= (0 \times 1, 0 \times 0, 1 \times 1, 1 \times 0) \\ &= (0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 &= (0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1) \\ &= (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

En écriture matricielle, effectuons le produit de Kronecker (chapitre 5) :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^1 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ u^2 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 v^1 \\ u^1 v^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u^2 v^1 \\ u^2 v^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{12} \\ t^{21} \\ t^{22} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notez qu'ici le produit de Kronecker a deux composantes et non quatre. En effectuant le produit tensoriel nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^1 v^1 \\ u^1 v^2 \\ u^2 v^1 \\ u^2 v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{12} \\ t^{21} \\ t^{22} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{T}\end{aligned}$$

## 9.2 Composantes deux fois contravariantes

Par changement de base, les composantes du tenseur  $T$  produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , se transforment selon :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad t^{i'j'} &= u^{i'} v^{j'} \\ &= B_k^{i'} u^k B_l^{j'} v^l \\ &= B_k^{i'} B_l^{j'} u^k v^l \\ &= B_k^{i'} B_l^{j'} t^{kl} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Les  $t^{ij}$  sont les composantes deux fois contravariantes du tenseur  $T$ . Par changement de base naturelle :

$$\forall i, j \quad t^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} t^{kl}$$

Le produit tensoriel des vecteurs des bases est défini de façon à assurer l'invariance du tenseur  $T$  par changement de base :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)' &= \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'} \\ &= A_{i'}^k \mathbf{e}_k \otimes A_{j'}^l \mathbf{e}_l \\ &= A_{i'}^k A_{j'}^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \end{aligned} \quad (9.2)$$

$T$  est alors indépendant de la base naturelle dans laquelle on l'exprime :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})' &= (u^i \mathbf{e}_i \otimes v^j \mathbf{e}_j)' \\ &= (u^i v^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)' \\ &= t^{i'j'} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)' \\ &= B_k^{i'} B_l^{j'} t^{kl} A_{i'}^k A_{j'}^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= t^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\ &= u^k \mathbf{e}_k \otimes v^l \mathbf{e}_l \\ &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \end{aligned}$$

### Exemple 9.2 : Composantes d'un produit tensoriel

Dans une base quelconque  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  de l'espace vectoriel euclidien  $E_2$ , on considère les deux vecteurs  $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$ . Déterminons les composantes contravariantes du produit tensoriel de  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{v}$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= (4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) \\ &= 4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$t^{11} = 4, \quad t^{12} = 20, \quad t^{21} = 3, \quad t^{22} = 15$$

En reprenant l'exercice de rotation d'une base vu dans le Vol. 1 Notion d'espace, déterminons les composantes contravariantes du produit tensoriel dans la nouvelle base. Par changement de base, les composantes de  $T$  se transforment selon (9.1) page précédente avec  $B_i^{j'}$  telle que :

$$B_1^{1'} = \cos(\alpha), \quad B_1^{2'} = -\sin(\alpha), \quad B_2^{1'} = \sin(\alpha), \quad B_2^{2'} = \cos(\alpha)$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} t^{1'1'} = B_1^{1'} B_1^{1'} t^{11} + B_1^{1'} B_2^{1'} t^{12} + B_2^{1'} B_1^{1'} t^{21} + B_2^{1'} B_2^{1'} t^{22} \\ t^{1'2'} = B_1^{1'} B_1^{2'} t^{11} + B_1^{1'} B_2^{2'} t^{12} + B_2^{1'} B_1^{2'} t^{21} + B_2^{1'} B_2^{2'} t^{22} \\ t^{2'1'} = B_1^{2'} B_1^{1'} t^{11} + B_1^{2'} B_2^{1'} t^{12} + B_2^{2'} B_1^{1'} t^{21} + B_2^{2'} B_2^{1'} t^{22} \\ t^{2'2'} = B_1^{2'} B_1^{2'} t^{11} + B_1^{2'} B_2^{2'} t^{12} + B_2^{2'} B_1^{2'} t^{21} + B_2^{2'} B_2^{2'} t^{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^{1'1'} = 4 \cos^2(\alpha) + 23 \cos(\alpha) \sin(\alpha) + 15 \sin^2(\alpha) \\ t^{1'2'} = 11 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 20 \cos^2(\alpha) - 3 \sin^2(\alpha) \\ t^{2'1'} = 11 \sin(\alpha) \cos(\alpha) - 20 \sin^2(\alpha) + 3 \cos^2(\alpha) \\ t^{2'2'} = 4 \sin^2(\alpha) - 23 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 15 \cos^2(\alpha) \end{cases}$$

## 9.3 Produit tensoriel

Dans ce paragraphe nous formalisons ce que nous venons de voir en introduction.

### 9.3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs

Soient  $E_n$  et  $F_p$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ , et soit  $E_n \times F_p$  un espace à  $q = n \times p$  dimensions.  $\forall \mathbf{u} \in E_n, \forall \mathbf{v} \in F_p$ , au couple de vecteurs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  nous faisons correspondre l'élément noté  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  de l'espace  $E_n \times F_p$ , la loi de composition  $\otimes$  ayant les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in E_n, \forall (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in F_p$ , la loi  $\otimes$  est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition vectorielle (notée  $+$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2 \\ (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v} \end{aligned}$$

- 2) Soit  $\alpha$  un scalaire. La loi  $\otimes$  est associative par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned} \alpha (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \otimes \alpha \mathbf{v} \end{aligned}$$

**Définition 9.1 : Élément produit tensoriel de deux vecteurs**

La loi de composition  $\otimes$  est appelée multiplication tensorielle. L'élément  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  est appelé produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  ou produit dyadique.

**Définition 9.2 : Espace produit cartésien**

L'espace produit cartésien  $E_n \times F_p$  est l'ensemble des produits tensoriels de tous les vecteurs des espaces vectoriels  $E_n$  et  $F_p$ . Ce n'est pas un espace vectoriel car une combinaison linéaire de ses éléments ne donne pas nécessairement un élément de cet espace.

**Définition 9.3 : Espace produit tensoriel**

L'espace vectoriel  $G_q = E_n \otimes F_p$  est appelé produit tensoriel des espaces vectoriels  $E_n$  et  $F_p$ . C'est l'espace de toutes les combinaisons linéaires des éléments de  $E_n \times F_p$ .

La loi de composition  $\otimes$  a également la propriété suivante :

3. Soit  $(\mathbf{e}_i)$  une base de  $E_n$  et soit  $(\mathbf{f}_\alpha)$  une base de  $F_p$ . Les  $np$  éléments,

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$$

forment une base de  $G_q$ .

**Remarque 9.1**

L'espace  $E_n \otimes F_p$  se distingue de l'espace  $G_q$  en ce qu'il est muni de la loi  $\otimes$ . Nous dirons que  $G_q$  constitue le support de  $E_n \otimes F_p$ .

**9.3.2 Expression analytique du produit tensoriel**

**Théorème 9.1**

Les espaces  $E_n$ ,  $F_p$ , et  $E_n \otimes F_p$  étant rapportés à des bases associées par les relations  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha = \epsilon_{i\alpha}$ , la seule loi de composition satisfaisant aux propriétés du § 9.3.1 page précédente est celle qui aux vecteurs  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{f}_\alpha$  fait correspondre le vecteur  $u^i v^\alpha \epsilon_{i\alpha}$  de  $E_n \otimes F_p$ .

*Démonstration.* Soient  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ ,  $(\mathbf{f}_\alpha)_{\alpha=1,\dots,p}$ , et  $(\epsilon_{i\alpha})_{i=1,\dots,n; \alpha=1,\dots,p}$  des bases respectives de  $E_n$ ,  $F_p$  et de  $E_n \otimes F_p$ . Alors :

$$\forall \mathbf{u} \in E_n, \forall \mathbf{v} \in F_p, \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i \otimes v^\alpha \mathbf{f}_\alpha$$

Supposons  $n = 2$  et  $p = 3$  :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2) \otimes (v^1 \mathbf{f}_1 + v^2 \mathbf{f}_2 + v^3 \mathbf{f}_3)$$

En utilisant l'axiome (1) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^1 \mathbf{f}_1 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^2 \mathbf{f}_2 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^3 \mathbf{f}_3 \\ &\quad + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^1 \mathbf{f}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^2 \mathbf{f}_2 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^3 \mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

En utilisant l'axiome (2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= u^1 v^1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + u^1 v^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_2 + u^1 v^3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_3 \\ &\quad + u^2 v^1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_1 + u^2 v^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + u^2 v^3 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{f}_3 \end{aligned}$$

En généralisant à  $n$  et  $p$  quelconques,

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$$

et avec l'axiome (3) :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^\alpha \epsilon_{i\alpha} \quad (9.3)$$

Les trois axiomes du § 9.3.1 page 87 impliquent que les composantes du produit tensoriel  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  s'écrivent sous la forme  $u^i v^\alpha$  dans la base  $\epsilon_{i\alpha}$ .

L'expression analytique (9.3) de la loi de composition  $\otimes$ , implique-t-elle à son tour ces trois axiomes ?

Pour retrouver l'axiome (1) page 87, posons  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_3 \\ &= u^i v_3^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \\ &= u^i (v_1^\alpha + v_2^\alpha) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \\ &= (u^i v_1^\alpha + u^i v_2^\alpha) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \\ &= u^i v_1^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha + u^i v_2^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \\ &= u^i \mathbf{e}_i \otimes v_1^\alpha \mathbf{f}_\alpha + u^i \mathbf{e}_i \otimes v_2^\alpha \mathbf{f}_\alpha \\ &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Pour retrouver l'axiome (2) page 87 à partir de (9.3) de la présente page, posons  $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} &= w^i v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\beta \\ (\alpha \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} &= \sum_i [(\alpha u^i) v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\beta] \\ &= \alpha (u^i v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\beta) \\ &= \alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \end{aligned}$$

(9.3) de la présente page est elle compatible avec l'axiome (3) page ci-contre ?

Soit  $(\mathbf{e}_i)$  une base de  $E_n$  et soit  $(\mathbf{f}_\alpha)$  une base de  $F_p$ , le produit tensoriel  $(\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{f}_\alpha)$  forme une base de  $E_n \otimes F_p$  par hypothèse. Soit  $(\mathbf{e}_{j'})$  une autre base de  $E_n$  et soit  $(\mathbf{f}_{\beta'})$  une autre base de  $F_p$ , le produit tensoriel  $(\mathbf{e}_{j'}) \otimes (\mathbf{f}_{\beta'})$  est-t-il une base de  $E_n \otimes F_p$  ?

Soient  $A_i^{j'}$  et  $B_\alpha^{\beta'}$  les matrices changement de base :

$$\begin{cases} \forall i \mathbf{e}_i = A_i^{j'} \mathbf{e}_{j'} \\ \forall \alpha \mathbf{f}_\alpha = B_\alpha^{\beta'} \mathbf{f}_{\beta'} \end{cases}$$

Les éléments T s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \\ &= t^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \end{aligned} \quad (9.4)$$

Effectuons le changement de base :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= t^{i\alpha} A_i^{j'} \mathbf{e}_{j'} \otimes B_\alpha^{\beta'} \mathbf{f}_{\beta'} \\ &= t^{i\alpha} A_i^{j'} B_\alpha^{\beta'} \mathbf{e}_{j'} \otimes \mathbf{f}_{\beta'} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Les  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$  formant une base par hypothèse, d'après (9.4),

$$\mathbb{T} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall i, \alpha, \quad t^{i\alpha} = 0$$

Cette implication restant vraie pour (9.5), les éléments  $\mathbf{e}_{j'} \otimes \mathbf{f}_{\beta'}$  sont linéairement indépendants, et constituent donc une base de l'espace  $E_n \otimes F_p$ . Nous dirons que  $(\mathbf{e}_{j'}) \otimes (\mathbf{f}_{\beta'})$  est la base associée aux bases  $(\mathbf{e}_{j'})$  et  $(\mathbf{f}_{\beta'})$ .  $\square$

### 9.3.3 Éléments d'un espace produit tensoriel

Tous les éléments de l'espace  $E_n \otimes F_p$  sont-ils des produits tensoriels ?

Soit  $\mathbb{T}$  un élément de l'espace  $E_n \otimes F_p$  :

$$\mathbb{T} = t^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$$

Peut-on toujours l'écrire sous la forme :

$$\mathbb{T} = u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha$$

où  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  est un vecteur de  $E_n$  et  $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{f}_\alpha$  un vecteur de  $F_p$  ? Raisonnons par l'absurde et supposons que, quel que soit  $t^{i\alpha}$ , l'on ait :

$$\forall i, \alpha \quad t^{i\alpha} = u^i v^\alpha$$

Pour  $n = p = 2$  :

$$\mathbb{T}(t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22}) = \mathbb{T}(u^1 v^1, u^1 v^2, u^2 v^1, u^2 v^2)$$

soit,

$$u^1 v^1 = t^{11} \quad ; \quad u^1 v^2 = t^{12} \quad ; \quad u^2 v^1 = t^{21} \quad ; \quad u^2 v^2 = t^{22}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{v^1}{v^2} = \frac{t^{11}}{t^{12}} \\ \frac{v^1}{v^2} = \frac{t^{21}}{t^{22}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^{11}}{t^{12}} = \frac{t^{21}}{t^{22}}$$

ce qui *a priori* n'est pas toujours vrai, les composantes de l'élément  $\mathbb{T}$  étant quelconques. Nous en concluons qu'il existe des éléments de l'espace  $E_n \otimes F_p$  qui ne sont pas des produits tensoriels de deux vecteurs.

#### Exemple 9.3 : Identification d'un tenseur comme produit tensoriel

Le tenseur  $\mathbb{T}$  suivant est-il le produit tensoriel de deux vecteurs ?

$$\mathbb{T} = 11\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

Si  $\mathbb{T}$  est le produit tensoriel de deux vecteurs alors il est de la forme

$$\mathbb{T} = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

et l'on a :

$$u^1v^1 = 11, \quad u^1v^2 = 8, \quad u^2v^1 = 20, \quad u^2v^2 = 12$$

En faisant les rapports des deux premières expressions puis celui des deux dernières :

$$\frac{v^1}{v^2} = \frac{11}{8} \quad \frac{v^1}{v^2} = \frac{20}{12}$$

Ces valeurs étant différentes,  $T$  n'est pas le produit tensoriel de deux vecteurs.

### 9.3.4 Produit tensoriel de deux espaces identiques

En pratique on a très souvent à effectuer le produit tensoriel de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels identiques. Soient  $(\mathbf{e}_i)$  une base de  $E_n$ , et soient  $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j$  deux vecteurs de cet espace. Le produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= t^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Le produit tensoriel de  $E_n$  par lui-même est noté  $E_n \otimes E_n$  ou encore  $E_n^{(2)}$ . D'après l'axiome (3) page 88, les vecteurs (les tenseurs)  $\epsilon_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  constituent une base de  $E_n^{(2)}$ .

#### Exemple 9.4 : Espace vectoriel du tenseur métrique

Le tenseur métrique appartient à l'espace produit tensoriel de l'espace vectoriel  $E_n$  avec lui-même,  $E_n^{(2)}$ .

### 9.3.5 Non commutativité du produit tensoriel

Le produit tensoriel d'un espace vectoriel  $E_n$  avec lui-même,  $E_n \otimes E_n$ , a pour vecteurs de base les produits tensoriels  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ . Par exemple, les vecteurs  $(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)$  et  $(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$  sont chacun des vecteurs de base, et ne peuvent donc pas être confondus. Le produit tensoriel des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$  n'est donc pas commutatif. Il en va de même pour tout produit tensoriel de vecteurs.

#### Exemple 9.5 : Non commutativité du produit tensoriel

Soient  $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j$  deux vecteurs de l'espace vectoriel  $E_2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= u^1 v^1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + u^1 v^2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + u^2 v^1 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + u^2 v^2 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \\ &= T(u^1 v^1, u^1 v^2, u^2 v^1, u^2 v^2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &= v^j u^i (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \\ &= v^1 u^1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + v^1 u^2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + v^2 u^1 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + v^2 u^2 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \\ &= Z(u^1 v^1, u^2 v^1, u^1 v^2, u^2 v^2) \end{aligned}$$

Par suite, en général :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$$

### 9.3.6 Associativité du produit tensoriel

Soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , trois vecteurs appartenant respectivement aux espaces vectoriels  $E_n, F_p, G_q$ . Nous pouvons multiplier tensoriellement l'élément  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  de  $E_n \otimes F_p$  par le vecteur  $\mathbf{w}$  de  $G_q$ . Nous obtenons alors l'élément  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$  de l'espace vectoriel  $H_{npq} = (E_n \otimes F_p) \otimes G_q$ .

Nous posons comme nouvel axiome que le produit tensoriel des espaces vectoriels est associatif :

$$\begin{aligned} H_{npq} &= (E_n \otimes F_p) \otimes G_q \\ &= E_n \otimes F_p \otimes G_q \end{aligned}$$

Cela revient à poser l'associativité des vecteurs de base :

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha) \otimes \mathbf{g}_\beta = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \quad (9.6)$$

Pour les éléments résultants, nous avons :

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = (u^i \mathbf{e}_i \otimes v^\alpha \mathbf{f}_\alpha) \otimes w^\beta \mathbf{g}_\beta$$

En utilisant le th. 9.1 page 88

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} &= (u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}) \otimes w^\beta \mathbf{g}_\beta \\ &= u^i v^\alpha w^\beta \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha} \otimes \mathbf{g}_\beta \\ &= u^i v^\alpha w^\beta (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha) \otimes \mathbf{g}_\beta \end{aligned}$$

et, en utilisant l'axiome (9.6) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} &= u^i v^\alpha w^\beta \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \\ &= u^i \mathbf{e}_i \otimes (v^\alpha w^\beta \mathbf{f}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta) \\ &= u^i \mathbf{e}_i \otimes (v^\alpha \mathbf{f}_\alpha \otimes w^\beta \mathbf{g}_\beta) \\ &= \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$$

### 9.3.7 Produit tensoriel de plusieurs espaces

Étant donné un nombre fini  $r$  d'espaces vectoriels  $E_n, F_p, G_q, \dots$  la définition par récurrence du produit tensoriel de ces  $r$  espaces résulte du § précédent. D'après le § 9.3.3 page 90, tout élément de  $E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \dots$  n'étant pas nécessairement le produit tensoriel de  $r$  vecteurs appartenant respectivement à  $E_n, F_p, G_q, \dots$  nous sommes conduit à la définition suivante :

#### Définition 9.4 : Tenseur

On appelle tenseur construit sur les espaces de base  $E_n, F_p, G_q, \dots$  tout élément de l'espace vectoriel  $E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \dots$

Soit  $T$  un tenseur « contravariant d'ordre  $p$  » et « covariant d'ordre  $q$  », et soit  $U$  un tenseur « contravariant d'ordre  $r$  » et « covariant d'ordre  $s$  ». Le produit tensoriel de ces deux tenseurs donne un tenseur  $V$  « contravariant d'ordre  $p + r$  » et « covariant d'ordre  $q + s$  » :

$$\begin{aligned} T \otimes U &= t_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_q}) \\ &\quad \otimes u_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} (e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes \dots \otimes e_{k_r} \otimes e^{l_1} \otimes e^{l_2} \otimes \dots \otimes e^{l_s}) \\ &= t_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} u_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \\ &\quad \otimes e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes \dots \otimes e_{k_r} \otimes e^{l_1} \otimes e^{l_2} \otimes \dots \otimes e^{l_s}) \\ &= V \end{aligned}$$

#### Remarque 9.2

Les tenseurs ont un ordre mais pas de variance. Parler d'un tenseur contravariant d'ordre  $p$  et covariant d'ordre  $q$  est un abus de langage pour parler d'un tenseur d'ordre  $p + q$  dont  $p$  composantes sont contravariantes et  $q$  sont covariantes.

## 9.4 Produit scalaire

### 9.4.1 Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base

#### Définition 9.5 : Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base

Soient  $\mathbf{u} = u^i e_i$  et  $\mathbf{v} = v^j e_j$  deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien  $E_n$ . Le produit scalaire du produit tensoriel  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  par un vecteur de base  $(e_i \otimes e_j)$  de  $E_n^{(2)}$  s'écrit :

$$\forall i, j \quad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (e_i \otimes e_j) \stackrel{\text{déf}}{=} u_i v_j$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad u^k v^l (e_k \otimes e_l) \cdot (e_i \otimes e_j) &= u^k v^l g_{ki} g_{lj} \\ \forall i, j, k, l \quad (e_i \otimes e_j) \cdot (e_k \otimes e_l) &= g_{ik} g_{jl} \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\forall i, j, k, l \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l)$$

**Exemple 9.6 : Composantes du tenseur métrique de l'espace produit tensoriel**

Soit  $\{\mathbf{e}_1(2, 0, 0), \mathbf{e}_2(1, 3, 0), \mathbf{e}_3(1, 1, 1)\}$  une base de l'espace vectoriel  $E_3$ . Déterminons les composantes du tenseur métrique de l'espace produit tensoriel  $E_3 \otimes E_3$ . Les vecteurs de base s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = (4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = (2, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 = (2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 = (2, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = (1, 3, 0, 3, 9, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 = (1, 1, 1, 3, 3, 3, 0, 0, 0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 = (1, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 3, 0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \end{cases}$$

Leur produit scalaire donne 81 composantes dont voici les premières :

$$\begin{cases} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = 40 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = 8 \end{cases} \quad \dots$$

On retrouve le résultat précédent en utilisant (9.7) page précédente. Le tenseur métrique de  $E_3$  a pour composantes :

$$G \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{11}g_{11} = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{11}g_{12} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{11}g_{13} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{12}g_{11} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{12}g_{12} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{12}g_{13} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{13}g_{11} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{13}g_{12} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{13}g_{13} = 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{11}g_{21} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{11}g_{22} = 40 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{11}g_{23} = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{12}g_{21} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{12}g_{22} = 20 \quad \dots \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{12}g_{23} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{13}g_{21} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{13}g_{22} = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{13}g_{23} = 8 \end{array} \right.$$

#### 9.4.2 Composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux

##### Notation 9.2

Si  $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $v_j = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j$ , et  $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  alors

$$\forall i, j \quad t_{ij} = u_i v_j$$

Pour tout tenseur  $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  d'un espace vectoriel euclidien  $E_n^{(2)}$ , avec (9.7) page 93 et la déf. 9.5 page 93, le produit scalaire de ce tenseur par un vecteur de base s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) &= (u^k \mathbf{e}_k \otimes v^l \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ \forall i, j \quad u_i v_j &= u^k v^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ \forall i, j \quad t_{ij} &= t^{kl} g_{ki} g_{lj} \end{aligned}$$

Les  $t_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes du tenseur d'ordre deux  $T$ .

#### 9.4.3 Produit scalaire de deux tenseurs contravariants d'ordre deux

Soient  $U$  et  $V$  deux tenseurs de composantes deux fois contravariantes, de l'espace vectoriel euclidien  $E_n^{(2)}$  :

$$\begin{aligned} U \cdot V &= [u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)] \cdot [v^{kl} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)] \\ &= u^{ij} v^{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= u^{ij} v^{kl} g_{ik} g_{jl} \\ &= u^{ij} v_{ij} \end{aligned}$$

## 9.5 Base

### 9.5.1 Base duale d'un espace produit tensoriel

Soit  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n)$  la base duale de la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  de l'espace vectoriel  $E_n$ . D'après le § 9.3.4 page 91 les vecteurs  $\epsilon_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  constituent une base de  $E_n^{(2)}$ . D'après le § 3.6 page 30, les vecteurs  $\mathbf{e}^j$  forment une base de  $E_n$ . Par conséquent, les vecteurs  $\epsilon_i^j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ , les vecteurs  $\epsilon^i_j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$ , et les vecteurs  $\epsilon^{ij} = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ , sont trois bases de  $E_n^{(2)}$ .

#### Remarque 9.3

L'écriture  $\epsilon_i^j$  avec les indices l'un sous l'autre est à éviter, elle ne permet pas de distinguer  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$  de  $\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i$ . Or d'après le § 9.3.5 page 91 le produit tensoriel n'est pas commutatif,

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \neq \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i$$

autrement dit

$$\epsilon_i^j \neq \epsilon_j^i$$

### 9.5.2 Composantes mixtes

Soit  $(\mathbf{e}^j)$  la base duale de la base  $(\mathbf{e}_i)$ . La décomposition du tenseur  $T$  sur la base mixte  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$  s'écrit :

$$T = t^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$$

Les  $t^i_j$  sont les composantes mixtes du tenseur  $T$ , une fois contravariante et une fois covariante.

$$\begin{aligned} T &= t^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \\ t^{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k &= t^i_j g^{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \\ \forall i, k \quad t^{ik} &= t^i_j g^{jk} \end{aligned}$$

#### Notation 9.3

L'ordre des indices est important. Par conséquent, en indices mixtes il faut garder l'ordre des indices en conservant une espace typographique,  $t^i_j$  ou  $t_j^i$ , mais pas  $t_j^i$ . En abaissant puis en élevant un indice on obtiendrait

$$t^{ij} \rightarrow t_j^i \rightarrow t^{ji}$$

Si le tenseur de départ  $t^{ij}$  est symétrique cela n'a pas d'importance. En revanche, s'il est antisymétrique on commet ici une erreur de signe puisque

$$t^{ij} = -t^{ji}$$

Pour un tenseur non symétrique, on retiendra que :

$$\begin{aligned} t_j^i &\neq t_j^i \\ t_j^i &\neq t_i^j \end{aligned}$$

car en remontant les indices on aurait

$$t^{ij} = t^{ji}$$

### Exemple 9.7 : Tenseur métrique en composantes mixtes

D'après (1.9) page 9 :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad g_j^i &= g^{ik} g_{kj} \\ &= \delta_j^i \end{aligned}$$

Les composantes mixtes  $g_j^i$  sont donc identiques dans tous les systèmes de coordonnées. Quel que soit le tenseur A :

$$\begin{aligned} a_i g_j^i &= a_j \\ a^i g_i^j &= a^j \end{aligned}$$

$g_j^i$  est un opérateur de substitution d'indice. Les trois ensembles de composantes  $g_j^i, g^{ik}, g_{kj}$  forment un groupe. Ils définissent le tenseur fondamental d'ordre deux  $G$ .

### Exemple 9.8 : Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker en composantes mixtes,

$$\delta_j^i \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

est-il un tenseur comme le suggère l'exemple précédent ? On note que le symbole de Kronecker mixte est symétrique :

$$\delta_j^i = \delta_i^j$$

Supposons que dans la base  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$  on ait

$$t_j^i = \delta_j^i$$

et effectuons un changement de base. Avec les matrices changement de base  $A$  et  $B$  telles

que  $A = B^{-1}$  :

$$\begin{aligned} t_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j &= \delta_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \\ t_j^i A_i^k \mathbf{e}_k \otimes B_m^j \mathbf{e}^m &= \delta_j^i A_i^k \mathbf{e}_k \otimes B_m^j \mathbf{e}^m \\ t_j^i A_i^k B_m^j \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m &= A_i^k B_m^i \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \\ t_m^k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m &= \delta_m^k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \\ t_m^k &= \delta_m^k \end{aligned}$$

Le symbole de Kronecker mixte est donc bien un tenseur, appelé *tenseur unitaire*. En relativité restreinte c'est donc le 4-vecteur unitaire dont la trace, appelée norme pour un vecteur, vaut 4.

Le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  est-il un tenseur ? Supposons que dans la base  $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$  on ait  $t_{ij} = \delta_{ij}$  et effectuons un changement de base :

$$\begin{aligned} t_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j &= \delta_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \\ t_{ij} A_k^i A_m^j \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_k^i A_m^j \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m \\ t_{km} &= \sum_i A_k^i A_m^i \end{aligned}$$

$\delta_{ij}$  n'est donc pas un tenseur, de même on montre que  $\delta^{ij}$  n'est pas un tenseur.

### 9.5.3 Changement de base

Soient  $(\mathbf{e}_i)$  et  $(\mathbf{e}_{p'})$  deux bases naturelles d'un espace vectoriel  $E_n$ . Prenons le cas d'un espace tensoriel  $E_n^{(3)}$  dont la base associée à  $(\mathbf{e}_i)$  est  $(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$ , et celle associée à  $(\mathbf{e}_{p'})$  est  $(\mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'})$ . D'après (9.2) page 86 :

$$\begin{cases} \forall j, k, l & \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^l} (\mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'}) \\ \forall q, r, s & \mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{r'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \end{cases}$$

Soit  $(\mathbf{e}^j)$  la base naturelle duale de  $(\mathbf{e}_i)$ , et soit  $(\mathbf{e}^{q'})$  la base naturelle duale de  $(\mathbf{e}_{p'})$ . Utilisons le changement de base naturelle duale (3.7) et (3.8) page 38 :

$$\begin{cases} \forall j & \mathbf{e}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \mathbf{e}^{q'} \\ \forall q & \mathbf{e}^{q'} = \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \end{cases}$$

Soient  $(\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$  et  $(\mathbf{e}^{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'})$  deux bases naturelles de  $E_n^{(3)}$ . Nous avons les relations

suivantes :

$$\begin{cases} \forall j, k, l & \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^l} (\mathbf{e}^{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'}) \\ \forall q, r, s & \mathbf{e}^{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'} = \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{r'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} (\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \end{cases}$$

## 9.6 Transformation des composantes d'un tenseur

### 9.6.1 Transformation des composantes contravariantes

Soit T un tenseur de l'espace tensoriel  $E_n^{(2)}$  :

$$\begin{aligned} t^{i'j'} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) &= t^{pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= t^{pq} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) \\ \forall i, j & \quad t^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} t^{pq} \end{aligned} \quad (9.8)$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets  $p$  puis  $q$  donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \forall i, j & \quad t^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t^{pq} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ T'_{\text{con}} &= J^T T_{\text{con}} J^T \end{aligned} \quad (9.9)$$

Les  $t^{i'j'}$  sont appelées composantes contravariantes du tenseur T.

#### Remarque 9.4

Les tenseurs de composantes deux fois contravariantes généralisent à l'ordre deux les vecteurs ordinaires (donnés en composantes contravariantes).

Généralisons à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit T un tenseur de l'espace tensoriel  $E_n \otimes E_n \otimes E_n \otimes \dots$  tel que

$$\begin{aligned} t^{i'j'k' \dots} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'} \otimes \mathbf{e}_{k'} \otimes \dots) &= t^{pqr \dots} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r \otimes \dots) \\ &= t^{pqr \dots} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r} \dots (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'} \otimes \mathbf{e}_{k'} \otimes \dots) \\ \forall i, j, k, \dots & \quad t^{i'j'k' \dots} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r} \dots t^{pqr \dots} \end{aligned}$$

Inversement,

$$\begin{aligned}
 t^{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) &= t^{i'j'}(\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) \\
 &= t^{i'j'} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\
 \forall p, q \quad t^{pq} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t^{i'j'} \\
 &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t^{i'j'} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\
 \mathbb{T}_{\text{con}} &= J^{-1} \mathbb{T}'_{\text{con}} (J^{-1})^T
 \end{aligned}$$

On trouve cette relation directement à partir de (9.9) page précédente :

$$\begin{aligned}
 J^{-1} \mathbb{T}' &= J^{-1} J \mathbb{T} J^T \\
 J^{-1} \mathbb{T}' (J^T)^{-1} &= \mathbb{T} J^T (J^T)^{-1} \\
 &= \mathbb{T}
 \end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p, q, r, \dots \quad t^{pqr\dots} = \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} \dots t^{i'j'k'\dots}$$

### Exemple 9.9 : Transformation des composantes contravariantes d'un tenseur

Dans la base naturelle du système de coordonnées  $(x^1, x^2)$ , soit le tenseur de composantes deux fois contravariantes  $\mathbb{T}(t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22}) = (1, 1, -1, 2)$ . Quelles sont ses composantes deux fois contravariantes  $t^{i'j'}$  lors du changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x^{1'} = (x^2)^2 \\ x^{2'} = x^1 x^2 \end{cases}$$

- en notation indicielle

$$\begin{aligned}
 t^{1'1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{22} \\
 &= 2x^2 \times 2x^2 \times t^{22} \\
 &= 8(x^2)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t^{1'2'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{22} \\
 &= 2x^2 \times x^2 \times t^{21} + 2x^2 \times x^1 \times t^{22} \\
 &= -2(x^2)^2 + 4x^1 x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t^{2'1'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{22} \\
 &= x^2 \times 2x^2 \times t^{12} + x^1 \times 2x^2 \times t^{22} \\
 &= 2(x^2)^2 + 4x^1 x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t^{2'2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{22} \\
 &= x^2 x^2 \times t^{11} + x^2 x^1 \times t^{12} + x^1 x^2 \times t^{21} + x^1 x^1 \times t^{22} \\
 &= (x^2)^2 + 2(x^1)^2
 \end{aligned}$$

- en notation matricielle

(9.9) page 99,  $T'_{\text{con}} = J T_{\text{con}} J^T$ , donne :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} t^{1'1'} & t^{1'2'} \\ t^{2'1'} & t^{2'2'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 2x^2 & x^1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2x^2 & 4x^2 \\ x^2 - x^1 & x^2 + 2x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 2x^2 & x^1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8(x^2)^2 & -2(x^2)^2 + 4x^1 x^2 \\ 2(x^2)^2 + 4x^1 x^2 & (x^2)^2 + 2(x^1)^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Par exemple au point de coordonnées  $x^1 = 1$ ,  $x^2 = -2$ , le tenseur a pour composantes :

$$T' \begin{bmatrix} 32 & -16 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

### 9.6.2 Transformation des composantes covariantes

Soit  $T$  un tenseur de l'espace tensoriel  $E_n^{(2)}$  tel que

$$\begin{aligned}
 T \cdot (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) &= T \cdot \left[ \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \right] \\
 \forall i, j \quad t_{i'j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} T \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\
 &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t_{pq}
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets  $p$  puis  $q$  donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned}
 \forall i, j \quad t_{i'j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t_{pq} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\
 T'_{\text{cov}} &= (J^{-1})^T T_{\text{cov}} J^{-1}
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Les  $t_{i'j'}$  sont appelées composantes covariantes du tenseur  $T$ .

**Remarque 9.5**

Les tenseurs d'ordre deux de composantes deux fois covariantes généralisent à l'ordre deux les vecteurs de type gradient (qui sont exprimés en composantes covariantes).

Généralisons à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit  $T$  un tenseur de l'espace tensoriel  $E_n \otimes E_n \otimes E_n \otimes \dots$  tel que,

$$\forall i, j, k, \dots \quad t_{i'j'k' \dots} = T \cdot (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'} \otimes \mathbf{e}_{k'} \otimes \dots)$$

$$\begin{aligned} \forall i, j, k, \dots \quad t_{i'j'k' \dots} &= T \cdot \left[ \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} \dots (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r \otimes \dots) \right] \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} \dots T \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_r \otimes \dots) \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} \dots t_{pqr \dots} \end{aligned}$$

Inversement :

$$\begin{aligned} \forall p, q \quad t_{pq} &= T \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= T \cdot \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) \right] \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} t_{i'j'} \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t_{i'j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ T_{\text{cov}} &= J^T T'_{\text{cov}} J \end{aligned}$$

On trouve cette relation directement à partir de (9.11) page précédente :

$$\begin{aligned} T'_{\text{cov}} J &= (J^{-1})^T T_{\text{cov}} J^{-1} J \\ J^T T'_{\text{cov}} J &= J^T (J^{-1})^T T_{\text{cov}} \\ &= T_{\text{cov}} \end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p, q, r, \dots \quad t_{pqr \dots} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r} \dots t_{i'j'k' \dots}$$

Pour le tenseur métrique habituellement donné en composantes covariantes :

$$G = J^T G' J$$

En particulier si le nouveau système de coordonnées (primé) est rectangulaire, la base naturelle est orthonormée et  $G' = I$ , dans l'ancien système de coordonnées le tenseur métrique s'écrit alors :

$$G = J^T J \tag{9.12}$$

### Exemple 9.10 : Transformation des composantes covariantes d'un tenseur

Dans la base naturelle du système de coordonnées  $(x^1, x^2)$ , soit le tenseur de composantes deux fois covariantes  $T(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) = (1, 1, -1, 2)$ . Quelles sont ses composantes deux

fois covariantes  $t_{i'j'}$  lors du changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x^1 = (x^{2'})^2 \\ x^2 = x^{1'} x^{2'} \end{cases}$$

- en notation indicielle

$$\begin{aligned} t_{1'1'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} t_{22} \\ &= x^{2'} \times x^{2'} \times t_{22} \\ &= 2(x^{2'})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{1'2'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} t_{22} \\ &= x^{2'} \times 2x^{2'} \times t_{21} + x^{2'} \times x^{1'} \times t_{22} \\ &= -2(x^{2'})^2 + 2x^{1'} x^{2'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2'1'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} t_{22} \\ &= 2x^{2'} \times x^{2'} \times t_{12} + x^{1'} \times x^{2'} \times t_{22} \\ &= 2(x^{2'})^2 + 2x^{1'} x^{2'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2'2'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} t_{22} \\ &= 2x^{2'} \times 2x^{2'} \times t_{11} + 2x^{2'} x^{1'} \times t_{12} + 2x^{1'} x^{2'} \times t_{21} + x^{1'} x^{1'} \times t_{22} \\ &= 4(x^{2'})^2 + 2x^{2'} x^{1'} - 2x^{1'} x^{2'} + 2(x^{1'})^2 \\ &= 4(x^{2'})^2 + 2(x^{1'})^2 \end{aligned}$$

- en notation matricielle

(9.11) page 101,  $T'_{\text{cov}} = (J^{-1})^T T_{\text{cov}} J^{-1}$ , donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_{1'1'} & t_{1'2'} \\ t_{2'1'} & t_{2'2'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & x^{2'} \\ 2x^{2'} & x^{1'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2x^{2'} \\ x^{2'} & x^{1'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x^{2'} & 2x^{2'} \\ 2x^{2'} - x^{1'} & 2x^{2'} + 2x^{1'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2x^{2'} \\ x^{2'} & x^{1'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(x^{2'})^2 & -2(x^{2'})^2 + 2x^{1'} x^{2'} \\ 2(x^{2'})^2 + 2x^{1'} x^{2'} & 4(x^{2'})^2 + 2(x^{1'})^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple au point de coordonnées  $x_1 = 1, x_2 = -2$ , le tenseur a pour composantes :

$$T' \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$$

### 9.6.3 Transformation des composantes mixtes

Soit  $T$  un tenseur de l'espace tensoriel  $E_n^{(2)}$  tel que,

$$\begin{aligned} t_{i'}^{j'} (\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) &= t_p^q (\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= t_p^q \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} (\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) \\ \forall i, j \quad t_{i'}^{j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} t_p^q \end{aligned} \quad (9.13)$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets  $p$  puis  $q$  donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad t_{i'}^{j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t_p^q \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ T'_{\text{mix}} &= (J^{-1})^T T_{\text{mix}} J^T \end{aligned} \quad (9.14)$$

Les  $t_{i'}^{j'}$  sont appelées composantes mixtes covariante-contravariante du tenseur  $T$ . Nous avons également

$$\forall i, j \quad t^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t^p_q$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets  $p$  puis  $q$  donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad t^{i'}_{j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t^p_q \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ T'_{\text{mix}} &= J T_{\text{mix}} J^{-1} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Les  $t^{i'}_{j'}$  sont appelées composantes mixtes contravariante-covariante du tenseur  $T$ .

On généralise à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit  $T$  un tenseur de l'espace tensoriel  $E_n \otimes E_n \otimes E_n \otimes \dots$  tel que,

$$\begin{aligned} t_{i'_1 i'_2 \dots}^{j'_1 j'_2 \dots} (\mathbf{e}^{i'_1} \otimes \mathbf{e}^{i'_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \mathbf{e}_{j'_2} \otimes \dots) &= t_{p_1 p_2 \dots}^{q_1 q_2 \dots} (\mathbf{e}^{p_1} \otimes \mathbf{e}^{p_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{q_1} \otimes \mathbf{e}_{q_2} \otimes \dots) \\ &= t_{p_1 p_2 \dots}^{q_1 q_2 \dots} \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i'_2}} \dots \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{q_1}} \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{q_2}} \dots (\mathbf{e}^{i'_1} \otimes \mathbf{e}^{i'_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \mathbf{e}_{j'_2} \otimes \dots) \\ &= \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i'_2}} \dots \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{q_1}} \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{q_2}} \dots t_{p_1 p_2 \dots}^{q_1 q_2 \dots} \end{aligned}$$

Les indices  $i'$  et  $j'$  étant muets :

$$t_{i'}^{j'} (\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) = t_{j'}^{i'} (\mathbf{e}_{j'} \otimes \mathbf{e}^{i'})$$

En revanche, la matrice représentative du tenseur d'ordre deux  $t^{i' j'} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'})$  est la transposée de la matrice représentative du tenseur  $t_{i' j'} (\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'})$  (la notion de transposée n'a pas de sens pour les tenseurs d'ordre supérieur à deux) :

$$\begin{aligned} t^{i' j'} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}) &= t^p_q (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q) \\ &= t^p_q \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}) \\ \forall i, j \quad t^{i' j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t^p_q \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t^p_q \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ \mathbb{T}'^T_{\text{mix}} &= J \mathbb{T}_{\text{mix}}^T J^{-1} \end{aligned}$$

On obtient directement le résultat en prenant la transposée de (9.14) page précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}'^T_{\text{mix}} &= \left[ (J^{-1})^T \mathbb{T}_{\text{mix}} J^T \right]^T \\ &= (\mathbb{T}_{\text{mix}} J^T)^T J^{-1} \\ &= J \mathbb{T}_{\text{mix}}^T J^{-1} \end{aligned}$$

Inversement,

$$\begin{aligned} t_p^q (\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_q) &= t_{i' j'} (\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}) \\ &= t_{i' j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} (\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_q) \\ \forall p, q \quad t_p^q &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t_{i' j'} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ \mathbb{T}_{\text{mix}} &= J^T \mathbb{T}'_{\text{mix}} (J^{-1})^T \end{aligned}$$

La transposée s'écrit,

$$\begin{aligned} t^p_q (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q) &= t^{i' j'} (\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}) \\ &= t^{i' j'} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q) \\ \forall p, q \quad t^p_q &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} t^{i' j'} \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t^{i' j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ \mathbb{T}_{\text{mix}}^T &= J^{-1} (\mathbb{T}'_{\text{mix}})^T J \end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots \quad t_{p_1 p_2 \dots}^{q_1 q_2 \dots} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{p_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{p_2}} \dots \frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{q_2}}{\partial x^{j'_2}} \dots t_{i'_1 i'_2 \dots}^{j'_1 j'_2 \dots}$$

**Exemple 9.11 : Changement des coordonnées sphériques en rectangulaires**

À partir du changement de coordonnées sphériques en rectangulaires, cherchons l'expression du tenseur métrique euclidien en coordonnées sphériques.

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

D'après (9.12) page 102,

$$\begin{aligned} G &= J^T J \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Exemple 9.12 : Tenseur métrique par changement de système de coordonnées**

Soit le système de coordonnées  $(u, v)$ , défini à partir des coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  :

$$\begin{cases} u = x \\ v = \exp(y - x) \end{cases}$$

Cherchons les composantes du tenseur métrique euclidien dans ce système de coordonnées. Nous devons inverser le système d'équations pour avoir la matrice jacobienne de la transformation  $x = x(u, v)$  et  $y = y(u, v)$  :

$$\begin{cases} x = u \\ y = u + \ln v \end{cases} \quad (9.16)$$

D'après (9.12) page 102,

$$\begin{aligned} G &= J^T J \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (v)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (v)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & (v)^{-1} \\ (v)^{-1} & (v)^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculons la longueur de la courbe suivante :

$$\mathcal{C}(p) \quad : \quad \begin{cases} u = 3p \\ v = e^p \end{cases} \quad 2 \geq p \geq 0$$

Le carré de la dérivée de la distance élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dp}\right)^2 &= g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} \\ &= 2 \left(\frac{du}{dp}\right)^2 + 2(v)^{-1} \frac{du}{dp} \frac{dv}{dp} + (v)^{-2} \left(\frac{dv}{dp}\right)^2 \\ &= 2 \times 9 + 2e^{-p} \times 3e^p + e^{-2p} e^{2p} \\ &= 25 \\ \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{ds}{dp}\right)^2} dp &= 5 \int_0^2 dp \\ \Gamma &= 10 \end{aligned}$$

Nous pouvons effectuer le même calcul en coordonnées rectangulaires. En nous servant du changement de variable (9.16) page ci-contre, l'équation de  $\mathcal{C}$  devient en coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  :

$$\mathcal{C}(p) \quad : \quad \begin{cases} x = 3p \\ y = 3p + p = 4p \end{cases} \quad 2 \geq p \geq 0$$

C'est l'équation de la droite

$$y = \frac{4}{3}x$$

qui passe au point  $(0, 0)$  en  $p = 0$ , et au point  $(6, 8)$  en  $p = 2$ . La distance entre ces points vaut  $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

## 9.7 Définition d'un tenseur

Au § 9.5.3 page 98, nous avons vu comment se transforment les composantes d'un tenseur lors d'un changement de base.

Réciproquement, donnons nous  $n^3$  quantités que nous rattachons à une base naturelle  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ . Si, lors d'un changement de base naturelle, vers une nouvelle base naturelle  $\mathbf{e}_{p'} \otimes \mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'}$ , les  $n^3$  quantités se transforment selon les formules (9.8) page 99, alors on peut faire correspondre un tenseur à ces  $n^3$  quantités, dont elles constituent les composantes contravariantes. De même, si les  $n^3$  quantités se transforment par changement de base naturelle selon les formules (9.10) page 101 ou (9.13) page 104 alors elles constituent respectivement les composantes covariantes ou mixtes d'un tenseur. Ce résultat se généralise à  $n^p$  quantités. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 9.2**

Pour que  $n^p$  quantités rapportées à une base naturelle d'un espace vectoriel  $E_n^{(p)}$  soient les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que ces quantités se transforment par changement de base naturelle selon les formules du § 9.5.3 page 98.

Ce théorème est en fait aussi une définition des tenseurs. Ce n'est un théorème que si l'on définit d'abord les tenseurs comme un ensemble non vide d'éléments muni de deux lois de composition, l'addition tensorielle et la multiplication par un scalaire.

**Exemple 9.13 : Caractère tensoriel des invariants**

Soit  $E$  un invariant par changement de base.

$$\begin{aligned} E' &= E \\ \forall i \quad \frac{\partial E'}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial E}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \end{aligned}$$

Les invariants sont des tenseur.

**Exemple 9.14 : Dérivée d'un champ de scalaires**

Soit  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$  une fonction dérivable par rapport aux  $n$  coordonnées  $x^i$ . Montrons que les dérivées partielles de  $f$  sont les composantes d'un tenseur d'ordre un.

Soit la transformation de coordonnées  $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$  et soit  $x^j = x^j(x^{i'})$  la transformation inverse. La dérivation partielle de  $f$  s'écrit :

$$\forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Donc les dérivées partielles se transforment comme les vecteurs de la base naturelle. Ce sont donc les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un, justifiant la notation  $\partial_i f$  et  $f_{,i}$  avec l'indice en bas.

**Exemple 9.15 : Différentielles de composantes covariantes**

Montrons que les différentielles des composantes covariantes  $du_i$  ne sont pas les composantes d'un tenseur :

$$\begin{aligned} \forall i \quad u_i &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} u_{k'} \\ du_i &= d\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} du_{k'} \end{aligned}$$

Le premier terme est nul si les coordonnées  $x^{k'}$  sont des fonctions affines des coordonnées

$x^j$ . En effet, les  $a_i$  et  $b$  étant des constantes :

$$\begin{aligned} \forall k' \quad x^{k'} &= a_i x^i + b \\ \forall k', i \quad d\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) &= da_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il faut donc que les coordonnées  $x^j$  et  $x^{k'}$  soient rectilignes. Pour autant, pour être un tenseur la loi de transformation des composantes doit être valable quelle que soit la transformation de coordonnées.

### Exemple 9.16 : Dérivée partielle de composantes covariantes

Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur de composantes covariantes  $u_i$ . Montrons que les dérivées partielles  $\partial_j u_i$  des composantes covariantes ne sont pas les composantes deux fois covariantes d'un tenseur. Dans la base naturelle, les composantes covariantes d'un vecteur se transforment selon

$$\forall i \quad u_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} u_{k'}$$

La dérivation partielle de cette expression nous donne :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \partial_j u_i &= \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \partial_j u_{k'} \\ &= \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \partial_{l'} u_{k'} \end{aligned} \quad (9.17)$$

Le premier terme est nul si les coordonnées  $x^{k'}$  sont des fonctions affines des coordonnées  $x^j$ , c.-à-d. si  $x^j$  et  $x^{k'}$  sont des coordonnées cartésiennes (rectilignes). Les  $a_i$  et  $b$  étant des constantes :

$$\begin{aligned} \forall k' \quad x^{k'} &= a_i x^i + b \\ \forall k', i \quad \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) &= a_i \\ \forall k', i, j \quad \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Pour autant, pour être un tenseur la loi de transformation des composantes doit être valable quelle que soit la transformation de coordonnées.

### Exemple 9.17 : Transformation du rotationnel par changement de coordonnées

Déterminons les formules de transformation du rotationnel d'un vecteur lors d'un changement

de coordonnées curvilignes. Avec (9.17) valables lors d'un changement de base naturelle :

$$\forall i, j \quad \overrightarrow{\text{rot}}_{ij}(\mathbf{u}) = \partial_j u_i - \partial_i u_j \\ = \left( \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} \partial_{l'} u_{k'} \right) - \left( \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^j \partial x^i} \partial_{l'} u_{k'} \right)$$

où les indices  $k$  et  $l$  sont muets. Or

$$\forall i, j, k \quad \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$$

donc :

$$\forall i, j \quad \overrightarrow{\text{rot}}_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} \partial_{l'} u_{k'} - \frac{\partial x^{m'} \partial x^{n'}}{\partial x^j \partial x^i} \partial_{n'} u_{m'} \\ = \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} \partial_{l'} u_{k'} - \frac{\partial x^{l'} \partial x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} \partial_{k'} u_{l'} \\ \partial_j u_i - \partial_i u_j = \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} (\partial_{l'} u_{k'} - \partial_{k'} u_{l'})$$

C'est la formule de transformation des composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux lors d'un changement de base naturelle.

Examinons l'autre possibilité pour l'expression du rotationnel. Supposons  $\mathbf{u}$  de composantes contravariantes  $u^i$ . Par changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment selon :

$$\forall i \quad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} u^{k'} \\ \forall i, j \quad \partial_j u^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}} u^{k'} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \partial_j u^{k'} \\ = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}} u^{k'} + \frac{\partial x^i \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^j} \partial_{l'} u^{k'}$$

$$\forall i, j \quad \partial_j u^i - \partial_i u^j = \left( \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}} u^{k'} + \frac{\partial x^i \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^j} \partial_{l'} u^{k'} \right) - \left( \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{k'}} u^{k'} + \frac{\partial x^j \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^i} \partial_{l'} u^{k'} \right)$$

Ce ne sont pas les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux car en général

$$\forall i \neq j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \neq \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad \forall i \neq j \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}} \neq \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{k'}}$$

## 9.8 Le tenseur métrique

À partir de la définition 1.1 page 1 du tenseur métrique, dans une base naturelle :

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

Lors d'un changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad g_{ij} &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{k'} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \mathbf{e}_{l'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \mathbf{e}_{k'} \cdot \mathbf{e}_{l'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} g^{k'l'} \end{aligned}$$

Les  $g_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique associée à la matrice  $G$  soit invariante par changement de coordonnées. En effet :

$$\forall i, j \quad g_{i'j'} = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'} &= g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r} dx^r \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^s} dx^s \\ &= g_{pq} \delta_r^p \delta_s^q dx^r dx^s \\ &= g_{pq} dx^p dx^q \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad g^{ij} &= \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \mathbf{e}^{k'} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} \mathbf{e}^{l'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} \mathbf{e}^{k'} \cdot \mathbf{e}^{l'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} g^{k'l'} \end{aligned}$$

Les  $g^{ij}$  sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur d'ordre deux. Formons le déterminant des matrices figurant de part et d'autre de cette égalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= J^2 \frac{1}{g'} \\ g' &= J^2 g \end{aligned}$$

**Exemple 9.18 : Tenseur métrique par changement de base**

Soit le changement de base quelconque d'un espace vectoriel  $E_2$  :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Déterminons les nouvelles composantes du tenseur métrique  $g_{k'l'}$  en fonction de ses anciennes composantes  $g_{ij}$ .

- en partant de la définition du tenseur métrique dans une base quelconque :

$$g_{k'l'} = \mathbf{e}_{k'} \cdot \mathbf{e}_{l'}$$

$$\begin{cases} g_{1'1'} = (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ g_{1'2'} = (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \\ g_{2'1'} = (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \cdot (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ g_{2'2'} = (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \cdot (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{1'1'} = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22} \\ g_{1'2'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'1'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'2'} = g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22} \end{cases}$$

- en utilisant la formule de changement de base quelconque d'un tenseur d'ordre deux :

$$\forall k, l \quad g_{k'l'} = A_{k'}^i A_{l'}^j g_{ij}$$

Pour déterminer les  $A_{k'}^i$ , on utilise :

$$\forall k \quad \mathbf{e}_{k'} = A_{k'}^i \mathbf{e}_i$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = A_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = A_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow A_{1'}^1 = 3 ; A_{1'}^2 = 1 ; A_{2'}^1 = -1 ; A_{2'}^2 = 2$$

$$\begin{cases} g_{1'1'} = A_{1'}^1 A_{1'}^1 g_{11} + A_{1'}^2 A_{1'}^1 g_{21} + A_{1'}^1 A_{1'}^2 g_{12} + A_{1'}^2 A_{1'}^2 g_{22} \\ g_{1'2'} = A_{1'}^1 A_{2'}^1 g_{11} + A_{1'}^2 A_{2'}^1 g_{21} + A_{1'}^1 A_{2'}^2 g_{12} + A_{1'}^2 A_{2'}^2 g_{22} \\ g_{2'1'} = A_{2'}^1 A_{1'}^1 g_{11} + A_{2'}^2 A_{1'}^1 g_{21} + A_{2'}^1 A_{1'}^2 g_{12} + A_{2'}^2 A_{1'}^2 g_{22} \\ g_{2'2'} = A_{2'}^1 A_{2'}^1 g_{11} + A_{2'}^2 A_{2'}^1 g_{21} + A_{2'}^1 A_{2'}^2 g_{12} + A_{2'}^2 A_{2'}^2 g_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{1'1'} = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22} \\ g_{1'2'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'1'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'2'} = g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22} \end{cases}$$

## 9.9 Symétrie et antisymétrie des tenseurs

### 9.9.1 Tenseurs deux fois contravariant ou deux fois covariant

Un tenseur est symétrique pour deux indices de même variance (soit covariants soit contravariants) si l'on peut échanger ces deux indices. La symétrie d'un tenseur ou son antisymétrie sont des propriétés intrinsèques, indépendantes de la base dans laquelle on exprime le tenseur.

#### Exemple 9.19

Si le tenseur  $t^i k_l$  est symétrique en  $i$  et  $k$ , alors :

$$t^i k_l = t^k i_l$$

Par changement de base :

$$t^{p' r' s'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} t^{i k}_l \quad \text{et} \quad t^{r' p' s'} = \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} t^{k i}_l$$

$$t^{p' r' s'} = t^{r' p' s'}$$

### 9.9.2 Symétrie des tenseurs mixtes

En revanche, la symétrie d'un tenseur mixte pour deux indices de variance différente est fortuite, elle ne se produit que dans une base particulière.

#### Exemple 9.20

Soit la matrice changement de base suivante :

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminons les nouvelles composantes mixtes du tenseur contravariant-covariant *a priori*

symétrique  $t^i_j(1, 2, 2, 3)$ . Avec (9.15) page 104 :

$$\begin{aligned} t' &= (A^{-1})^T t A^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{-1}{2} & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le tenseur mixte n'est plus symétrique dans la nouvelle base.

### 9.9.3 Décomposition d'un tenseur

#### Théorème 9.3

*Tout tenseur ayant deux indices de même variance peut se décomposer en une somme de deux tenseurs, l'un symétrique, l'autre antisymétrique.*

*Démonstration.* Soit le tenseur  $t^{ij}_k$ . Supposons la décomposition possible, alors

$$t^{ij}_k = s^{ij}_k + a^{ij}_k$$

avec  $s^{ij}_k = s^{ji}_k$  et  $a^{ij}_k = -a^{ji}_k$ . Alors :

$$\begin{aligned} t^{ij}_k + t^{ji}_k &= s^{ij}_k + a^{ij}_k + s^{ji}_k + a^{ji}_k \\ t^{ij}_k + t^{ji}_k &= 2s^{ij}_k \end{aligned}$$

De même nous avons :

$$\begin{aligned} t^{ij}_k - t^{ji}_k &= s^{ij}_k + a^{ij}_k - s^{ji}_k - a^{ji}_k \\ t^{ij}_k - t^{ji}_k &= 2a^{ij}_k \end{aligned}$$

Si la décomposition est possible nous avons nécessairement

$$s^{ij}_k = \frac{1}{2}(t^{ij}_k + t^{ji}_k) \quad \text{et} \quad a^{ij}_k = \frac{1}{2}(t^{ij}_k - t^{ji}_k)$$

Réciproquement, si l'on pose le tenseur symétrique par construction  $s^{ij}_k = \frac{1}{2}(t^{ij}_k + t^{ji}_k)$  et le tenseur antisymétrique par construction  $a^{ij}_k = \frac{1}{2}(t^{ij}_k - t^{ji}_k)$ , alors on a bien

$$t^{ij}_k = s^{ij}_k + a^{ij}_k$$

La décomposition étant toujours possible. □

## 9.10 Opérations sur les tenseurs

Les opérations sur les tenseurs généralisent celles sur les vecteurs définies dans le Vol. 1 Notion d'espace. Leurs propriétés permettent de définir les tenseurs.

- 1) Pour être additionnés, les tenseurs doivent être du même ordre et être rapportés à une même base (leurs composantes ont alors même variance). Dans un espace vectoriel  $E_n^{(2)}$ , soient  $U = u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  et  $V = v^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  deux tenseurs « contravariants » d'ordre deux. L'addition tensorielle consiste à additionner les composantes respectives des tenseurs :

$$\begin{aligned} U \oplus V &= u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + v^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= (u^{ij} + v^{ij}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= w^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= W \end{aligned}$$

L'addition tensorielle fait correspondre aux deux tenseurs initiaux un tenseur de même ordre et du même espace vectoriel.

- 2) La multiplication d'un tenseur par un scalaire  $\alpha$  consiste à multiplier chaque composante du tenseur par ce scalaire. Dans un espace vectoriel  $E_n^{(2)}$ , soit  $\alpha$  un scalaire et soit  $U = u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  un tenseur « contravariant » d'ordre deux.

$$\begin{aligned} \alpha U &= \alpha(u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= (\alpha u^{ij})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= v^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= V \end{aligned}$$

La multiplication d'un tenseur par un scalaire lui fait correspondre un tenseur de même ordre et du même espace vectoriel.

### 9.10.1 Propriétés des lois de composition tensorielles

- L'addition tensorielle a les propriétés suivantes :
  - 1) commutativité :  $\forall i, j \quad u^{ij} + v^{ij} = v^{ij} + u^{ij}$
  - 2) associativité :  $\forall i, j \quad u^{ij} + (v^{ij} + w^{ij}) = (u^{ij} + v^{ij}) + w^{ij} = u^{ij} + v^{ij} + w^{ij}$
  - 3) existence d'un élément neutre noté  $\mathbf{0}$ , de composantes nulles  $\forall i, j \quad n^{ij} = 0$ , et tel que  $\forall T, T + \mathbf{0} = T$
  - 4) pour tout tenseur  $U$  il existe le tenseur *opposé* noté  $-U$ , tel que :

$$\begin{aligned} U + (-U) &= \mathbf{0} \\ \forall i, j \quad u^{ij} + (-u^{ij}) &= 0 \end{aligned}$$

- La multiplication par un scalaire a les propriétés suivantes :
  - 1) associativité :  $\forall i, j \quad \lambda(\mu u^{ij}) = (\lambda\mu) u^{ij}$
  - 2) distributivité par rapport à l'addition des scalaires :  $\forall i, j \quad (\lambda + \mu) u^{ij} = \lambda u^{ij} + \mu u^{ij}$
  - 3) distributivité par rapport à l'addition tensorielle :  $\forall i, j \quad \lambda(u^{ij} + v^{ij}) = \lambda u^{ij} + \lambda v^{ij}$
  - 4) il existe un élément neutre, le réel 1, tel que :  $\forall i, j \quad 1 \times u^{ij} = u^{ij}$

### 9.10.2 Combinaison linéaire de tenseurs

Soient  $u^{ij}$  et  $v^{ij}$  les composantes deux fois contravariantes de deux tenseurs d'ordre deux. Soit  $t^{ij}$  leur combinaison linéaire :

$$\forall i, j \quad t^{ij} = u^{ij} + \lambda v^{ij}$$

Par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad t^{ij} &= \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} u^{k'l'} \right) + \lambda \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} v^{k'l'} \right) \\ &= \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} \right) (u^{k'l'} + \lambda v^{k'l'}) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} t^{k'l'} \end{aligned}$$

D'après le th. 9.2 page 108, les quantités  $t^{ij}$  constituent les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur d'ordre deux. La combinaison linéaire de deux tenseurs du même ordre donne un tenseur du même ordre.

#### Exemple 9.21 : Caractère tensorielle d'opérations sur les composantes

Soient  $t^{ij}$  les composantes d'un tenseur, montrer que les  $t^{ij} - t^{ji}$  sont également les composantes d'un tenseur. Commençons par montrer que si les  $t^{ij}$  sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur alors les composantes transposées  $t^{ji}$  sont aussi deux fois contravariantes :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad t^{i'j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} t^{kl} \\ t^{j'i'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} t^{kl} \end{aligned}$$

Par conséquent les  $t^{ji}$  sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur, ainsi que les  $t^{ij} - t^{ji}$  d'après le § 1) page précédente.

#### Exemple 9.22

Soit  $T$  un tenseur de composantes mixtes, contravariante-covariante, montrons que sa transposée est un tenseur. Les composantes mixtes de  $T$  se transforment par changement de base selon :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad t^{i'j'} &= t^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \\ t^{j'i'} &= t^j_i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Par conséquent  $T^T$  est un tenseur.

### 9.10.3 Classification des tenseurs

L'addition tensorielle et la multiplication par un scalaire sont des lois de composition de  $E_n^{(2)}$  dans  $E_n^{(2)}$ . Les tenseurs suivent donc la définition d'un espace vectoriel et sont par conséquent des vecteurs d'un espace vectoriel  $H_{n,p,q,\dots}$  muni d'une structure de produit tensoriel. Les espaces produits tensoriels deviennent pré-euclidiens lorsqu'on les munit d'un produit scalaire.

Afin d'unifier la classification, les espaces élémentaires  $E_1$  non munis d'une structure de produit tensoriel ont pour éléments des tenseurs d'ordre un, que l'on appellera vecteurs. Comme vu précédemment, les tenseurs d'ordre zéro sont appelés des scalaires.

### 9.10.4 Multiplication tensorielle

Les produits tensoriels d'espaces vectoriels sont des espaces vectoriels. Ils peuvent à leur tour former de nouveaux espaces vectoriels par multiplication tensorielle.

Soit  $U = u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  un tenseur de  $E_n^{(2)}$ , et soit  $V = v^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  un tenseur de  $E_n^{(3)}$ . La multiplication tensorielle leur fait correspondre le tenseur  $T$  d'ordre cinq, de l'espace  $E_n^{(5)} = E_n^{(2)} \otimes E_n^{(3)}$ , tel que :

$$\begin{aligned} T &= U \otimes V \\ t^{ijklm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m &= (u^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (v^{klm} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \\ &= u^{ij} v^{klm} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \\ \forall i, j, k, l, m \quad t^{ijklm} &= u^{ij} v^{klm} \end{aligned}$$

#### Notation 9.4

Le produit tensoriel est aussi noté :

$$T = [UV]$$

### 9.10.5 Contraction des composantes

La contraction des composantes d'un tenseur consiste à égaler l'un des indices contravariants avec l'un des indices covariants. À partir d'un tenseur d'ordre  $q$  de composantes mixtes, elle permet d'obtenir de nouveaux tenseurs d'ordre  $q - 2$ , le tenseur initial étant amputé d'une composante covariante et d'une composante contravariante.

Soit un tenseur d'ordre deux de composantes contravariantes  $t^{ij}$ . Nous pouvons toujours l'écrire en composantes mixtes, l'un des systèmes de composantes mixtes étant  $t^i_j$ , l'autre étant  $t_i^j$ . La

contraction de ce tenseur, appelé sa *trace* est un scalaire. En effet

$$\begin{aligned} t_i^i &= A_i^{k'} A_{l'}^j t_{k'}^{l'} \\ &= \delta_{l'}^{k'} t_{k'}^{l'} \\ &= t_{k'}^{k'} \\ &= t_1^1 + t_2^2 + \dots + t_n^n \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat en partant de  $t_i^i$ , nous avons  $t_i^i = t_i^i = t_i^i$

**Exemple 9.23 : Contraction des composantes d'un tenseur d'ordre deux**

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $E_n$  de composantes respectives contravariantes  $u^i$  et covariantes  $v_j$ , et soit T leur produit tensoriel :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ t_j^i(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) &= u^i \mathbf{e}_i \otimes v_j \mathbf{e}^j \\ \forall i, j \quad t_j^i &= u^i v_j \end{aligned}$$

En posant  $i = j$  nous additionnons les composantes et formons le produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  :

$$\begin{aligned} \forall i \quad t_i^i &= u^i v_i \\ &= u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3 + \dots \\ &= t_1^1 + t_2^2 + t_3^3 + \dots \end{aligned}$$

L'opération de contraction des composantes fait passer un tenseur d'ordre deux de composantes mixtes à un scalaire ou tenseur d'ordre zéro. Par contraction répétée des composantes d'un tenseur d'ordre pair on déduit donc un invariant.

**Exemple 9.24 : Contraction des composantes d'un tenseur d'ordre trois**

Soit U un tenseur d'ordre trois de composantes mixtes  $u_{k'}^{ij}$ , deux fois contravariantes et une fois covariantes. La contraction des composantes d'indices  $j$  et  $k$  donne les quantités suivantes :

$$\forall i \quad u_{j'}^{ij} = v^i$$

Par exemple  $v^1 = u^{11}_1 + u^{12}_2 + u^{13}_3$ . Montrons qu'elles constituent les composantes d'un vecteur. Par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall i \quad u_{j'}^{ij} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^j} u^{k'm'}_{n'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \delta_{m'}^{n'} u^{k'm'}_{n'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} u^{k'm'}_{m'} \\ \forall i \quad v^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} v^{k'} \end{aligned}$$

Les  $v^i$  se transforment par changement de base naturelle comme les composantes contravariantes d'un tenseur. L'opération de contraction des composantes fait passer un « tenseur mixte » d'ordre trois à un tenseur d'ordre un (vecteur).

### 9.10.6 Multiplication contractée

#### Définition 9.6 : Multiplication contractée

La multiplication tensorielle suivie de la contraction des composantes s'appelle la multiplication contractée, ou multiplication mixte, ou produit tensoriel contracté.

En particulier, appliquée à deux tenseurs du premier ordre de variances différentes, elle donne un invariant  $u_i v^i$  appelé *produit intérieur* de U par V, analogue du produit scalaire du calcul vectoriel (Cf. ex. 8.4 page 76).

#### Notation 9.5

La multiplication contractée de U par V est notée :

$$T = UV$$

Elle donne un critère de tensorialité.

- Si pour tout vecteur de composantes contravariantes  $v^i$

$$u_i v^i = E$$

est un invariant, alors les  $u_i$  sont les composantes covariantes d'un vecteur (tenseur d'ordre un). En effet,  $E$  est par hypothèse invariant par changement de base :

$$\begin{aligned} E &= E' \\ u_i v^i &= u_{j'} v^{j'} \end{aligned}$$

Les  $v^i$  sont par hypothèse les composantes contravariantes d'un vecteur, par changement de base naturelle,

$$\begin{aligned} u_i v^i &= u_{j'} v^k \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \\ &= u_{j'} v^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \end{aligned}$$

relation vraie quelles que soient les  $v^i$ , donc par changement de base naturelle :

$$\forall i \quad u_i = u_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

et les  $u_i$  sont les composantes covariantes d'un vecteur.

- Si pour tout vecteur de composantes contravariantes  $u^i$

$$\forall j \quad t_{ij} u^i = v_j$$

sont les composantes covariantes d'un vecteur, alors les  $t_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, les  $v_j$  sont par hypothèse les composantes covariantes d'un vecteur. Par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall j \quad v_{j'} &= v_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\ \forall j \quad t'_{ij} u^{i'} &= t_{lk} u^l \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

Les  $u^i$  sont par hypothèse les composantes contravariantes d'un vecteur,

$$\begin{aligned} \forall j \quad t'_{ij} u^{i'} &= t_{lk} u^{m'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\ &= t_{lk} u^{i'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\ \forall i, j \quad t'_{ij} &= t_{lk} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

et les  $t'_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur. Dans la suite, nous les noterons  $t_{i'j'}$ .

- Si pour tous vecteurs de composantes contravariantes  $u^i$  et  $v^i$

$$t_{ij} u^i v^j = E$$

est un invariant par changement de base, alors les  $t_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, d'après (9.10.6), les  $t_{ij} u^i$  sont les composantes covariantes d'un vecteur, et par conséquent d'après (9.10.6) les  $t_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

- Si les  $t_{ij}$  sont symétriques et si pour tout vecteur de composantes contravariantes  $v^i$

$$t_{ij} v^i v^j = E$$

est un invariant par changement de base, alors les  $t_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, soit  $u^i$  les composantes contravariantes d'un autre vecteur, alors  $w^i = u^i + v^i$  est aussi un vecteur contravariant. Alors,

$$\begin{aligned} t_{ij} w^i w^j &= t_{ij} (u^i + v^i) (u^j + v^j) \\ &= t_{ij} u^i u^j + t_{ij} v^i v^j + t_{ij} u^i v^j + t_{ij} v^i u^j \\ &= t_{ij} u^i u^j + t_{ij} v^i v^j + 2t_{ij} u^i v^j \end{aligned}$$

où le terme de gauche et les deux premiers termes de droite sont des invariants par hypothèse. Par conséquent  $t_{ij} u^i v^j$  doit aussi être un invariant, et d'après (9.10.6), les  $t_{ij}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

La généralisation des exemples (9.10.6), (9.10.6) et (9.10.6) permet d'énoncer le théorème suivant :

#### **Théorème 9.4 : Critère général de tensorialité - Théorème du quotient**

*Pour qu'une suite ordonnée de quantité constitue les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que le produit contracté de cette suite ordonnée de quantités avec un tenseur donne un tenseur.*

**Exemple 9.25 : Différentielle d'un champ de scalaires**

Reprenons l'ex. 9.14 page 108. Soit  $f(v^1, v^2, \dots, v^n)$  une fonction dérivable par rapport à ses  $n$  variables  $v^i$ . Montrons que les dérivées partielles de  $f$  sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un.

La différentielle de  $f$  s'écrit :

$$df = f_{,i} du^i$$

C'est le produit contracté du vecteur gradient de  $f$  avec le vecteur différentiel  $d\mathbf{M}$  dont les composantes sont contravariantes. Or  $df$  est un scalaire donc les dérivées partielles sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un.

**Exemple 9.26 : Tenseur métrique**

Montrons que les  $n^2$  quantités  $g_{ij}$  sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Le produit tensoriel des  $g_{ij}$  avec les composantes contravariantes d'un vecteur quelconque  $\mathbf{v}$  donne  $g_{ij}v^j$ . La contraction sur les indices  $j$  et  $k$  donne les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{v}$  :

$$\forall i \quad g_{ij}v^j = v_i$$

Selon le critère général de tensorialité, les  $n^2$  quantités  $g_{ij}$  sont donc les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

**9.10.7 Produit complètement contracté**

Soit une suite ordonnée de  $n^3$  quantités  $u^{ij}_k$  attachées à une base quelconque  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k$  :

$$u^{11}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + u^{11}_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \dots + u^{11}_n \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^n + u^{12}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1 + \dots$$

Ces quantités sont-elles les composantes d'un tenseur ? Si le produit complètement contracté avec trois vecteurs quelconques  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j$  et  $\mathbf{z} = z^k \mathbf{e}_k$  donne un tenseur (un scalaire puisque complètement contracté),

$$u^{ij}_k x_i y_j z^k = \alpha$$

(où l'on a pris les composantes covariantes des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ ) alors d'après le critère général de tensorialité appliqué trois fois, la suite des  $n^3$  quantités  $u^{ij}_k$  constitue les composantes d'un tenseur.

Réciproquement, si la suite des  $n^3$  quantités  $u^{ij}_k$  constitue les composantes d'un tenseur, alors par définition de la multiplication tensorielle et de la contraction des composantes, le produit complètement contracté  $u^{ij}_k x_i y_j z^k$  donne un tenseur (un scalaire). Les  $n^3$  quantités  $u^{ij}_k$  sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre trois.

**Théorème 9.5 : Critère de tensorialité**

*Pour qu'un ensemble de  $n^{p+q}$  quantités ayant  $p$  indices supérieurs et  $q$  indices inférieurs soit un tenseur, il faut et il suffit que leur produit complètement contracté par les composantes contravariantes de  $p$  vecteurs quelconques et par les composantes covariantes de  $q$  vecteurs*

quelconques donne un scalaire.

Ce théorème est équivalent au critère général de tensorialité 9.4 page 120 lorsque le produit est complètement contracté.

**Exemple 9.27 : Produit contracté et produit scalaire**

Démontrons que le produit contracté des tenseurs U et V est invariant par changement de base. Effectuons un changement de base naturelle :

$$\forall j \quad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u^i \quad ; \quad \forall l \quad v_{l'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} v_k$$

Le produit des composantes donne :

$$\forall j, l \quad u^{j'} v_{l'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} u^i v_k$$

Contractons des indices j et l :

$$\begin{aligned} u^{j'} v_{j'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} u^i v_k \\ &= \delta_i^k u^i v_k \\ &= u^k v_k \end{aligned}$$

$u^k v_k$  est invariant par changement de base naturelle. C'est le produit scalaire des vecteurs U et V.

## 9.11 Équations tensorielles

### 9.11.1 Changement de système de coordonnées

Une équation tensorielle vraie dans un système de coordonnées est vraie dans tout système de coordonnées.

**Exemple 9.28 : Tenseur zéro d'ordre deux**

Soit T un tenseur dont les composantes deux fois covariantes sont nulles dans la base naturelle d'un certain système de coordonnées :

$$\forall i, j \quad t_{ij} = 0$$

Alors, par changement de base naturelle :

$$\forall k, l \quad t_{k'l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} t_{ij} = 0$$

et les composantes du tenseur  $T$ , appelé tenseur zéro, sont nulles dans toute base naturelle.

### Exemple 9.29 : Validité d'une équation tensorielle

Dans une base quelconque, soit l'équation suivante,

$$\forall i, j \quad r_{ijk} s^k = 3t_i^{kl} u_{jk} v_l + w_{ij}$$

qui peut toujours s'écrire :

$$\forall i, j \quad r_{ijk} s^k - 3t_i^{kl} u_{jk} v_l - w_{ij} = 0$$

Si l'on peut montrer que les composantes

$$z_{ij} = r_{ijk} s^k - 3t_i^{kl} u_{jk} v_l - w_{ij}$$

sont les composantes (covariantes) d'un tenseur (d'ordre deux), alors d'après l'exemple précédent cette équation tensorielle est vraie dans toute base naturelle, autrement dit dans tout système de coordonnées.

#### 9.11.2 Règles sur les indices

- indice muet

Dans tout monome tensoriel, on peut inverser les positions haut et bas de tout indice muet. Soient  $A$  et  $B$  deux tenseurs :

$$\begin{aligned} A^i_j B_i &= g^{ik} A_{kj} g_{il} B^l \\ &= g^{ik} g_{il} A_{kj} B^l \\ &= \delta_l^k A_{kj} B^l \\ &= A_{lj} B^l \\ &= A_{ij} B^i \end{aligned}$$

- indice libre

Si dans *tous* les termes d'une équation tensorielle figure un même indice libre, on a une équation équivalente en élevant ou en abaissant partout cet indice. Soient  $S$  et  $Q$  deux tenseurs, et soit  $\chi$  un scalaire :

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \quad S_{\lambda\mu} &= \chi Q_{\lambda\mu} \\ \forall \nu, \mu \quad g^{\lambda\nu} S_{\lambda\mu} &= g^{\lambda\nu} \chi Q_{\lambda\mu} \\ \forall \nu, \mu \quad S^\nu_\mu &= \chi Q^\nu_\mu \\ \forall \lambda, \mu \quad S^\lambda_\mu &= \chi Q^\lambda_\mu \end{aligned}$$

Si nous appliquons cette règle une seconde fois :

$$\forall \lambda, \xi \quad g^{\mu\xi} S_{\mu}^{\lambda} = g^{\mu\xi} \chi Q_{\mu}^{\lambda}$$

$$\forall \lambda, \xi \quad S^{\lambda\xi} = \chi Q^{\lambda\xi}$$

$$\forall \lambda, \mu \quad S^{\lambda\mu} = \chi Q^{\lambda\mu}$$

## Chapitre 10

### ANNEXES

---

#### 10.1 Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

*Démonstration.* Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Pour tout espace vectoriel pré-euclidien, la méthode d'orthonormalisation de Schmidt permet la construction effective d'une base orthonormée.

Soit  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  une base quelconque d'un espace vectoriel pré-euclidien  $E_n$ . Cherchons  $n$  vecteurs  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ , orthogonaux entre eux et linéairement indépendants pour former une base orthogonale. Pour le premier de ces vecteurs, nous posons :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

Bien entendu,  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  forme une base de  $E_n$ . Cherchons le deuxième vecteur  $\mathbf{v}_2$  sous la forme de la combinaison linéaire suivante, où  $\lambda_1$  est l'inconnue :

$$\mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2$$

Écrivons la relation d'orthogonalité entre  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 0 \\ \mathbf{u}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= 0 \\ \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= -\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\end{aligned}$$

$\lambda_1$  est non nul car  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont supposés non orthogonaux. Le vecteur  $\mathbf{v}_2$  est non nul car le système  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  étant libre,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont non nuls et linéairement indépendants.  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n)$  est donc un système libre. Cherchons le troisième vecteur  $\mathbf{v}_3$  sous la forme :

$$\mathbf{v}_3 = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3$$

Les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_2$  se calculent en écrivant d'une part les relations d'orthogonalité entre  $\mathbf{v}_1$

et  $\mathbf{v}_3$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \\
 \mathbf{u}_1 \cdot (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3) &= 0 \\
 \mathbf{u}_1 \cdot [\mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3] &= 0 \\
 \mu_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mu_2 \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
 \mu_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \mu_2 \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 - \mu_2 \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
 \mu_1 &= -\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_1\|^2}
 \end{aligned}$$

et d'autre part les relations d'orthogonalité entre  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_3$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \\
 (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3) &= 0 \\
 \lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mu_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + \mu_1 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
 \lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mu_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + \mu_1 (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 \\
 + \mu_2 (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
 \mu_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
 \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
 \mu_2 &= -\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_2\|^2}
 \end{aligned}$$

Nous avons déterminé le vecteur  $\mathbf{v}_3$ , orthogonal aux vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Ce vecteur est non nul, car le système  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n)$  étant libre,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{u}_3$  sont non nuls et linéairement indépendants. Le système  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{u}_n)$  est donc libre. On construit ainsi de proche en proche le système de vecteurs  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  orthogonaux entre eux, dont aucun n'est nul, et dont l'ensemble forme une base orthogonale de  $E_n$ .

En divisant chacun de ces vecteurs par sa norme,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$$

l'ensemble des vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  forme une base orthonormée de  $E_n$ . □

# Index

- Algèbre tensorielle, 83
- Angle entre deux vecteurs
  - d'un espace vectoriel euclidien, 56
  - d'un espace vectoriel pré-euclidien, 55
- Application
  - projection, 22
- Base
  - duale définition, 28
  - naturelle
    - polaire, 2
  - orthogonale, 11
  - orthonormée, 12
  - réciproque
    - de la base naturelle, 80
    - de la base naturelle polaire, 81
  - définition, 29
- Composantes
  - covariantes
    - deux fois, 86
- Convention
  - de sommation sur les indices répétés, 9, 30
- Coordonnées
  - cartésiennes, 63
    - obliques, 65
  - d'un point, 63
  - polaires, 58
  - rectangulaires, 66
  - rectilignes, 63
    - obliques, 65
  - sphériques, 106
- Covariance
  - principe de, 84
- Covecteur
  - gradient, 77
  - notation matricielle, 8
- Différentielle
  - d'un champ de scalaires, 71
- Distance
  - en coordonnées polaires, 66
  - euclidienne, 64
  - pré-euclidienne, 64
- Équation(s)
  - tensorielles, 122
- Espace
  - ponctuel
    - euclidien, 63
    - pré-euclidien, 63
    - repère, 63
  - produit
    - cartésien, 88
    - tensoriel, 88
  - vectorel
    - euclidien, 51
    - improprement euclidien, 51
    - pré-euclidien, 51
    - pseudo-euclidien, 51
    - signature, 52
- Forme, 21
  - bilinéaire, 39, 50
    - antisymétrique, 40
    - expression analytique, 41
    - symétrique, 39
  - linéaire, 21
    - expression analytique, 26
  - quadratique
    - associée au tenseur métrique, 18, 111
    - associée à une forme bilinéaire
      - symétrique, 42
    - carré de la norme, 25
    - différentielle, 18
    - expression analytique, 43
    - fondamentale, 65
- Gradient, 80, 102

- d'un champ de scalaires, 72
- en coordonnées
  - cylindriques, 81
  - rectangulaires, 81
- produit contracté, 121
- représentation, 80
- Loi
  - de composition
    - $\otimes$ , 87
  - de multiplication tensorielle, 88
- Métrique
  - d'une sphère, 2
  - de l'espace-temps, 3
  - du plan, 1
    - en coordonnées polaires, 2
    - en coordonnées rectangulaires, 2
- Multiplication contractée, 119
- Norme
  - d'un vecteur, 11
- Opérateur
  - gradient, 72
- Point
  - fonction d'une variable, 68
- Principe
  - de covariance, 84
- Produit
  - de Kronecker, 47
  - scalaire
    - avec un vecteur donné, 23
    - d'un produit tensoriel, 93
    - définition, 51
    - euclidien, 51, 52
    - indéfini, 51
    - invariance, 14
    - les différentes notations, 5
    - lien avec la signature, 52
    - lien avec le tenseur métrique, 1
    - multiplication matricielle, 8
    - non dégénéré, 3
    - notation avec le tenseur métrique, 3
    - pseudo-euclidien, 53
    - symétrie, 3, 5, 24
  - tensoriel, 87
  - contracté, 119
  - de deux espaces identiques, 91
  - de deux vecteurs, 87
  - de plusieurs espaces, 93
  - expression analytique, 88
- Pseudo
  - euclidien, 51
  - norme, 53
  - riemannien, 19
- Signature
  - d'un espace vectoriel pré-euclidien, 52
  - de l'espace
    - de la physique non relativiste, 52
    - vectoriel euclidien, 53
  - de l'espace-temps de la relativité restreinte, 53
  - euclidienne, 53
  - lorentzienne, 53
    - (+ + + -), 55
    - (+ - - -), 79
- Tenseur
  - définition, 93
  - métrique, 1
    - définition, 1
    - du plan, 1
    - propriétés, 18
  - zéro, 122
- Théorème
  - critère de tensorialité, 121
  - d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, 12, 52, 65, 125
  - de Pythagore
    - généralisation, 66
  - du quotient, 120
  - sur les composantes d'un tenseur, 108
- Variété, 17
  - pseudo-riemannienne, 17
  - riemannienne, 17
- Vecteur(s)
  - différentielle
    - d'un vecteur, 68
  - dérivée d'un vecteur, 68
  - fonction d'une variable, 67
  - normal à une surface, 56
  - tendant vers le vecteur nul, 67