

o.castera@free.fr  
sciences-physiques.neocities.org

---

---

# Physique Vol. 2

# Mécanique Classique

---

---

Olivier Castéra

Le 19 mai 2026



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions intuitives et définitions</b>	<b>1</b>
1.1	Temps	1
1.2	Espace	2
1.3	Corps	2
1.4	Force	2
1.5	Vitesse	2
1.6	Accélération	3
1.7	Champ gravitationnel	3
<b>2</b>	<b>Cinématique</b>	<b>5</b>
2.1	Vecteurs vitesse et accélération	5
2.2	Référentiels	5
2.3	Référentiels galiléens	6
2.4	Principe de relativité	7
2.5	Principe d'équivalence	9
2.6	Référentiels inertiels	10
2.7	Principe de Mach	12
2.8	Forces de marée	13
<b>3</b>	<b>Mouvement rectiligne</b>	<b>15</b>
3.1	Inertie du mouvement rectiligne	15
3.2	Masse inerte et quantité de mouvement	17
3.3	Centre d'inertie	23
3.4	Modèle de force	27
3.5	Relation fondamentale de la dynamique	28
3.5.1	Définition d'une force	28
3.5.2	Action-réaction	30
3.5.3	Relation fondamentale de la dynamique (RFD)	31
3.6	Masse grave et force de gravitation	32
3.7	Énergie	40
3.7.1	Travail d'une force	40
3.7.2	Énergie cinétique	41
3.7.3	Énergie potentielle	43
3.7.4	Énergie mécanique	46
<b>4</b>	<b>Mouvement de rotation</b>	<b>61</b>
4.1	Inertie en rotation	61
4.2	Moment cinétique	62

## TABLE DES MATIÈRES

4.3	Moment de force . . . . .	65
4.4	Axiome du moment cinétique . . . . .	67
4.5	Un seul axiome pour la mécanique . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Loi de conservation</b> . . . . .	<b>71</b>
5.1	Opérateur divergence . . . . .	71
5.2	Théorème de Gauss . . . . .	73
5.3	Hypothèse d'un milieu continu . . . . .	74
5.3.1	Nombre volumique . . . . .	74
5.3.2	Courant - débit . . . . .	75
5.3.3	Équation de conservation . . . . .	76
5.4	Opérateur nabla . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Gravitation newtonienne</b> . . . . .	<b>81</b>
6.1	Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire . . . . .	81
6.2	Champ gravitationnel créé par une sphère homogène . . . . .	84
6.3	Champ gravitationnel créé par une boule homogène . . . . .	86
6.4	Équations de Poisson et de Laplace . . . . .	87
6.4.1	Loi de Gauss pour la gravitation . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Les forces fictives</b> . . . . .	<b>91</b>
7.1	Loi de composition des vitesses . . . . .	91
7.2	Loi de composition des accélérations . . . . .	96
7.3	Forces dans un référentiel non galiléen . . . . .	99
7.4	Exemple de force fictive : la force centrifuge . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Le pendule balistique</b> . . . . .	<b>103</b>
8.1	Description . . . . .	103
8.2	Théorème du moment cinétique . . . . .	104
8.3	Conservation de l'énergie mécanique après l'impact . . . . .	106
8.4	Conservation de l'énergie totale . . . . .	107
8.5	Condition pour annuler la percussion . . . . .	108
<b>9</b>	<b>Le problème de Kepler</b> . . . . .	<b>111</b>
9.1	Coordonnées polaires . . . . .	111
9.1.1	Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée . . . . .	111
9.1.2	Expression du vecteur position . . . . .	112
9.1.3	Dérivée des vecteurs de base . . . . .	112
9.1.4	Expression du vecteur vitesse . . . . .	113
9.1.5	Expression du vecteur accélération . . . . .	113
9.2	Force centrale - Cas général . . . . .	113
9.2.1	Centre d'inertie . . . . .	113
9.2.2	Masse réduite . . . . .	114
9.2.3	Relation fondamentale de la dynamique (RFD) . . . . .	114
9.2.4	Conservation du moment cinétique . . . . .	117
9.2.5	Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	118
9.2.6	Intégration de l'équation différentielle du mouvement . . . . .	118
9.2.7	Potentiel effectif . . . . .	119
9.2.8	Étude de la trajectoire . . . . .	120

## TABLE DES MATIÈRES

9.2.9 Cas où le rayon vecteur tend vers zéro . . . . .	122
9.3 Force de gravitation . . . . .	122
9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique . . . . .	122
9.3.2 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique . . . . .	123
9.3.3 Intégration de l'équation différentielle du mouvement . . . . .	124
9.4 Étude de la trajectoire . . . . .	126
9.4.1 L'excentricité $e$ . . . . .	126
9.4.2 L'ellipse . . . . .	127
9.4.3 Orientation de l'ellipse . . . . .	128
9.4.4 Demi-grand axe $a$ . . . . .	130
9.4.5 Demi-petit axe $b$ . . . . .	131
9.4.6 Période de révolution $T$ . . . . .	131
9.5 Equations paramétriques . . . . .	132
9.5.1 Angle en fonction du temps . . . . .	132
9.5.2 Rayon en fonction du temps . . . . .	133
<b>10 Le tenseur d'inertie</b> . . . . .	<b>137</b>
10.1 Moment d'inertie . . . . .	137
10.2 Tenseur d'inertie . . . . .	138
10.3 Repère principal d'inertie . . . . .	141
10.3.1 Moments principaux d'inertie . . . . .	141
10.3.2 Axes principaux d'inertie . . . . .	142
10.3.3 Ellipsoïde d'inertie . . . . .	145
10.3.4 Théorème de Huygens . . . . .	145
10.4 Moment cinétique . . . . .	146
10.4.1 Moment cinétique par rapport à un point . . . . .	146
10.4.2 Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation . . . . .	149
10.4.3 Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie . . . . .	150
10.5 Énergie cinétique d'un solide en rotation . . . . .	150
<b>11 Annexes</b> . . . . .	<b>153</b>
11.1 Premier théorème d'analyse vectorielle . . . . .	153
11.2 Deuxième théorème d'analyse vectorielle . . . . .	154
11.3 Troisième théorème d'analyse vectorielle . . . . .	155
<b>Index</b> . . . . .	<b>157</b>



# Chapitre 1

## NOTIONS INTUITIVES ET DÉFINITIONS

À partir d'expériences et d'observations, la physique consiste à établir des hypothèses<sup>1</sup> pour modéliser la nature, et à en tirer des conséquences<sup>2</sup> par une démonstration<sup>3</sup>. La mécanique générale peut être construite à partir d'axiomes<sup>4</sup> successifs de plus en plus puissants, le dernier incluant tous ceux qui le précèdent.

Les notions de temps, d'espace, de corps, de force, de vitesse et d'accélération sont supposées intuitives, c.-à-d. issues de notre expérience quotidienne. Nous les prendrons dans leurs sens commun avant de les définir plus précisément.

### 1.1 Temps

Le temps n'a pas d'existence propre, c'est un modèle de la réalité créé par notre cerveau. Par exemple, ce modèle est probablement très différent pour les insectes. En physique classique<sup>5</sup> le modèle de temps est celui très simple de la vie de tous les jours, indépendant de la vitesse de l'observateur et de la présence de matière ou d'énergie. Nous prendrons la définition du temps donnée par Newton<sup>6</sup> :

#### **Définition 1.1 : Temps**

Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, s'écoule uniformément et s'appelle durée.

Pour nous repérer dans le temps, nous utiliserons une horloge.

1. Raisonnement par induction.
2. Raisonnement par déduction.
3. Succession d'inférences logiques.
4. Un axiome est une proposition non démontrable, à la base d'un système hypothético-déductif. Dans le langage courant, axiome est synonyme d'hypothèse, de principe, ou de postulat.
5. La physique classique est la physique non quantique et, selon les auteurs, non relativiste. On considère ici qu'elle est non relativiste et donc synonyme de physique newtonienne.
6. Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, 1687.

## 1.2 Espace

Comme pour le temps, l'espace n'a pas d'existence propre, c'est aussi un modèle de la réalité créé par notre cerveau. En physique classique on prend le modèle le plus simple, celui de la vie de tous les jours, indépendant de la vitesse de l'observateur et de la présence de matière ou d'énergie. Le modèle mathématique le plus simple est l'espace plat de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

---

## 1.3 Corps

### Définition 1.2 : Corps

Objet matériel caractérisé par ses propriétés physique.

On parlera de *mobile* pour un corps en mouvement, et d'*astre* pour un corps céleste (dont le champ gravitationnel n'est en général pas négligeable).

---

## 1.4 Force

### Définition 1.3 : Force

Toute cause capable de déformer un corps ou d'en modifier le mouvement.

En mécanique classique, les mobiles dont la trajectoire est courbe subissent une force centripète dirigée vers le centre de courbure instantané de la trajectoire. La force courbe leur trajectoire qui sans cela serait rectiligne.

---

## 1.5 Vitesse

Dans le langage courant la vitesse est un nombre, c'est la distance parcourue divisée par le temps de parcours. La vitesse n'est jamais ressentie, elle n'est qu'observée, donc relative. Cela signifie que parler de vitesse n'a de sens que si l'on précise par rapport à quoi. Par exemple, la vitesse d'un conducteur est nulle par rapport à son véhicule.

## 1.6 Accélération

Dans le langage courant l'accélération est aussi un nombre, c'est la variation de vitesse divisée par le temps mis pour cette variation.

---

## 1.7 Champ gravitationnel

Le champ gravitationnel d'un astre n'est pas uniforme car

- il converge vers le centre de gravité de l'astre
- son intensité est maximale à la surface de l'astre et tend vers zéro à l'infini et au centre de l'astre

### Définition 1.4 : Lignes de champ

Courbes en tout point tangentes au champ de vecteurs.

Les lignes de champ du champ de gravitation d'un astre sont approximativement des droites passant par le centre de gravité de cet astre.

### Définition 1.5 : Équipotentielle de champ

Région de l'espace dans laquelle les points sont au même potentiel.

Les équipotentielles terrestres sont appelées surfaces de niveau ou géoïdes. Elles ressemblent à des sphères ayant pour centre le centre de gravité de la Terre. Les équipotentielles et les lignes de champ sont partout et toujours perpendiculaires.



## Chapitre 2

# CINÉMATIQUE

---

### 2.1 Vecteurs vitesse et accélération

En physique la vitesse est modélisée par un vecteur ayant une norme, une direction et un sens. Lorsque l'on représente un vecteur par une flèche, sa longueur est proportionnelle à la norme du vecteur. L'accélération est aussi un vecteur, c'est le vecteur variation dans le temps du vecteur vitesse. Un changement de norme du vecteur vitesse est une accélération, un changement de direction du vecteur vitesse est aussi une accélération. Pour faire du calcul vectoriel nous aurons besoin d'une base et d'un repère. En physique, une base est un ensemble de trois vecteurs distincts, non proportionnels.

---

### 2.2 Référentiels

À partir des notions de temps et d'espace, on définit un système de référence ou référentiel.

**Définition 2.1 : Référentiel**

Un référentiel est un système de coordonnées et une mesure du temps (une horloge).

Un référentiel est donc une référence spatiale et une référence temporelle. On peut associer un référentiel à tout observateur, et réciproquement, un observateur à tout référentiel. Les observateurs se distinguent les uns des autres par leur état de mouvement relatif, modélisé par un vecteur vitesse relatif fonction du temps. Nous dirons qu'un observateur change de référentiel pour dire qu'il change son état de mouvement.

La définition d'un référentiel en mécanique classique sous-entend l'existence préalable d'un espace absolu et d'un temps absolu, identiques pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement relatif. Un changement de référentiel n'est alors qu'un changement d'instruments de mesure de cet espace et de ce temps.

En physique classique l'espace et le temps sont absolus et n'ont pas les mêmes unités. On peut

définir une distance dans l'espace seul et une durée dans le temps seul, mais on ne peut définir une distance spatio-temporelle. Il n'y a donc pas à proprement parler d'espace-temps. On note alors l'espace et le temps par le produit cartésien  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ .

### Définition 2.2 : Centrale inertielle

Ensemble de six instruments de mesure :

- trois accéléromètres selon trois axes indépendants
- trois gyromètres également selon trois axes indépendants

### Définition 2.3 : Référentiel propre

Un référentiel dans lequel un observateur, un mobile, une horloge atomique, une centrale inertielle etc., est immobile, est appelé référentiel propre de cet observateur, de cette particule, etc.

### Expérience 2.1

Le physicien Galilée<sup>a</sup> note qu'aucune expérience effectuée dans la cale d'un navire ne permet de mettre en évidence la vitesse du navire, si celle-ci est constante en norme et en direction par rapport aux étoiles lointaines.

a. Galileo Galilei, *Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde*, 1632.

### Remarque 2.1

Le mouvement, sous-entendu à vitesse constante en norme et en direction, est comme rien, disait Galilée en s'appuyant sur les travaux de son contemporain Giordano Bruno<sup>a</sup> qui avait compris la relativité du mouvement et l'inexistence du mouvement absolu : une pierre qui tombe du haut du mât d'un navire arrive au pied du mât, quelle que soit la vitesse (constante en norme et en direction) du navire.

a. Giordano Bruno, *Le Banquet des cendres*, 1584.

## 2.3 Référentiels galiléens

L'expérience de pensée de Galilée nous amène à définir une classe<sup>1</sup> de référentiels particuliers, appelés référentiels galiléens.

### Définition 2.4 : Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen ssi il se déplace d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport aux étoiles lointaines.

### Remarque 2.2

Cette définition est partiellement opératoire, dans le sens qu'on peut la mettre en partie en oeuvre en vérifiant à chaque instant l'absence de mouvement par rapport aux étoiles lointaines. En revanche il faut un accéléromètre pour vérifier l'absence d'accélération rectiligne.

1. Le terme « classe » est pris dans le sens d'un ensemble d'individus ou d'objets ayant des caractères communs, comme une classe d'élèves par exemple.

### Remarque 2.3

Il serait plus juste de parler d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au reste de l'univers, mais cette définition n'est pas opératoire.

Les référentiels galiléens se déplacent

- libres dans l'espace profond loin de toute masse, sans tourner sur eux-même par rapport aux étoiles lointaines
- non libres dans un champ de pesanteur lorsqu'une force de réaction s'oppose exactement à la force gravitationnelle. Leur trajectoire est une équipotentielle du champ gravitationnel (trajectoire du navire), qui est approximée localement dans l'espace par une trajectoire rectiligne, et dans le temps par une vitesse constante en norme et en direction

### Définition 2.5 : Observateur galiléen

Un observateur fixe dans un référentiel galiléen est appelé observateur galiléen.

En tout point d'un référentiel galiléen le vecteur vitesse est constant, autrement dit le vecteur accélération est nul. Reprenons les définitions d'une trajectoire (Cf. Vol 1 : courbe suivie par le centre d'inertie d'un mobile) et d'une géodésique (Cf. Vol 1 : courbe de longueur extrémale) : un mobile suit une trajectoire géodésique ssi son centre d'inertie suit une géodésique.

### Théorème 2.1

*Dans l'espace euclidien de la mécanique classique, si un référentiel est galiléen alors il suit une trajectoire géodésique (en l'occurrence une droite).*

En mécanique classique, l'espace et le temps sont indépendants, et les géodésiques sont définies uniquement dans l'espace. Cela a deux conséquences :

- la réciproque du théorème 2.1 est fautive : si un référentiel suit une trajectoire géodésique alors il n'est pas forcément galiléen, car il peut accélérer tout en restant sur la géodésique
- la durée de parcours de la géodésique n'est pas fixée, elle peut prendre différentes valeurs. On peut parcourir une géodésique à la vitesse que l'on veut

### Remarque 2.4

En relativité restreinte et générale, les géodésiques sont définies dans l'espace-temps et non dans l'espace seul.

- En relativité restreinte, un référentiel est galiléen ssi il suit une géodésique de l'espace-temps de Minkowski, une sorte de 4-géodésique. L'espace et le temps étant liés par la constante  $c$ , chaque géodésique a une unique durée de parcours. La relativité restreinte ne traitant pas de la gravitation, les référentiels galiléens et inertiels sont confondus
- En relativité générale, la notion de référentiel galiléen perd son sens, seuls existent les référentiels inertiels. La durée de parcours entre deux points d'une géodésique est fixée, si bien qu'un satellite qui accélère change de géodésique

## 2.4 Principe de relativité

L'expérience de pensée de Galilée permet d'énoncer le premier axiome de la mécanique :

### Axiome 2.1 : Principe de relativité

Parmi tous les référentiels possibles, il existe un ensemble infini continu de référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme fonctionnelle.

Même forme fonctionnelle signifie même fonction mathématique, les variables étant, elles, différentes. La physique ne permet donc aucune distinction entre ces référentiels.

### Définition 2.6 : Référentiels équivalents

Référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme fonctionnelle.

Les relations d'équivalence généralisent la relation d'égalité.

### Définition 2.7 : Relation d'égalité

La relation d'égalité sur un ensemble  $E$  est une relation binaire, c.-à-d. de la forme  $R\{x, y\}$  à deux variables  $x$  et  $y$ , que l'on écrit :

$$x = y$$

Elle se lit «  $x$  égale  $y$  », ou «  $x$  et  $y$  sont égaux » et satisfait les quatre propriétés suivantes ( $a$  et  $b$  sont des valeurs prises par  $x$  et  $y$ ) :

- réflexivité :  $\forall a \in E, a = a$
- symétrie :  $\forall (a, b) \in E^2, \text{ si } a = b, \text{ alors } b = a$
- transitivité :  $\forall (a, b, c) \in E^3, \text{ si } a = b \text{ et } b = c, \text{ alors } a = c$
- compatibilité : Pour toute relation  $R\{x\}$  de la théorie axiomatique

$$\forall (a, b) \in E^2, \text{ si } R\{a\} \text{ et } a = b, \text{ alors } R\{b\}$$

Autrement dit, deux éléments égaux ont les mêmes propriétés.

Ces quatre propriétés sont les axiomes de caractérisation égalitaire.

### Définition 2.8 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence  $R$  sur un ensemble  $E$  est une relation binaire que l'on écrit :

$$x \equiv y \pmod{R}$$

Nous dirons que  $x$  est équivalent à  $y$  (ou congru à  $y$ ) modulo  $R$ , ou encore  $x$  et  $y$  sont équivalents modulo  $R$ . La relation d'équivalence satisfait les trois propriétés suivantes :

- réflexivité :  $\forall a \in E, a \equiv a$
- symétrie :  $\forall (a, b) \in E^2, \text{ si } a \equiv b, \text{ alors } b \equiv a$
- transitivité :  $\forall (a, b, c) \in E^3, \text{ si } a \equiv b \text{ et } b \equiv c, \text{ alors } a \equiv c$

Des relations d'équivalences  $R_i$  divisent l'ensemble  $E$  en classes d'équivalence, où chaque classe regroupe les éléments qui sont équivalents entre eux modulo  $R_i$ . Nous ne pouvons pas dire que certains référentiels sont égaux entre eux pour l'écriture des lois de la physique, en revanche nous pouvons dire que certains référentiels sont équivalents modulo l'écriture des lois de la physique, et forment une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence « écriture des lois de la physique ».

### Exemple 2.1

- L'égalité est une relation d'équivalence, compatible avec toutes les relations  $R$  de la théorie.
- L'équipotence (existence d'une bijection) est une relation d'équivalence car elle possède les trois propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité.
- Dans l'espace géométrique, on définit arbitrairement mais une fois pour toutes une origine  $O$ . Tous les vecteurs peuvent être ramenés à cette origine par simple translation. Chaque vecteur ayant son origine en  $O$  est le représentant d'une classe d'équivalence. La relation d'équivalence des vecteurs modulo une translation est appelée *équipotence*, ces vecteurs sont dits équipollents.

### Remarque 2.5

Dans l'expérience de pensée de Galilée les référentiels équivalents sont les référentiels liés au navire et au port.

Définir les référentiels équivalents c'est poser le principe de relativité, et poser le principe de relativité c'est définir les référentiels équivalents.

### Axiome 2.2 : Principe de relativité galiléenne

*Dans l'espace euclidien de la mécanique classique, les référentiels galiléens sont équivalents pour l'écriture des lois de la physique.*

Comme nous allons le voir, la réciproque est fautive, tous les référentiels équivalents ne sont pas galiléens.

## 2.5 Principe d'équivalence

On énonce le principe d'équivalence dans le cadre de la mécanique classique.

### Expérience 2.2

Un vaisseau spatial hors de l'atmosphère terrestre, moteur éteint, tombe en chute libre en direction du centre de gravité d'un astre. L'équipage observe son accélération par rapport à l'astre en le voyant se rapprocher de plus en plus vite, mais il ne ressent aucune force, indiquant que le vaisseau est en chute libre et ne tourne pas sur lui-même. Ce sentiment est confirmé par la centrale inertielle embarquée dont les accéléromètres et gyromètres n'indiquent aucune accélération.

Quelle que soit la trajectoire d'un vaisseau libre dans un champ gravitationnel, qu'elle soit circulaire, elliptique, parabolique, hyperbolique ou rectiligne, en l'absence de rotation propre du vaisseau (rotation sur lui-même) la centrale inertielle à bord n'indique aucune accélération. L'équipage ne ressent pas la force gravitationnelle qui pourtant courbe leur trajectoire et accélère le vaisseau vers le centre de gravité de l'astre. Aucune expérience locale à bord du vaisseau ne peut mettre en évidence son accélération vers l'astre.

En mécanique classique, la force d'inertie axifuge qui s'exerce au centre d'inertie d'un mobile

libre dans un champ de gravitation est exactement égale et opposée à la force de gravitation qui s'exerce sur ce mobile, quelle que soit la trajectoire libre de ce mobile.

### Remarque 2.6

On parlera de forces axifuges, qui fuient l'axe instantané de rotation, et non de forces centrifuges, qui fuient le centre instantané de rotation. En effet, les systèmes physiques ayant une extension spatiale en trois dimensions, chaque partie du système subit une force d'inertie en éloignement de l'axe de rotation, et non en éloignement d'un centre de rotation. À moins d'être plat, le système « voit » une force axifuge.

### Expérience 2.3

Un vaisseau spatial est posé sur le sol terrestre, la centrale inertielle embarquée mesure une accélération constante de  $1g$ . Sans données extérieures et en négligeant les forces fictives dues au mouvement non-inertiel de la Terre, l'équipage ne peut savoir s'il n'est pas dans l'espace profond, moteur allumé, avec une accélération constante de  $1g$ . Aucune expérience locale à bord du vaisseau ne permet de distinguer ces deux cas.

De façon générale, l'équipage d'un vaisseau qui n'est pas libre dans un champ gravitationnel ressent en partie ou totalement le champ gravitationnel local. Si le vaisseau est immobile par rapport à l'astre, l'équipage ressent l'intégralité du champ gravitationnel créé par celui-ci en cet endroit.

Un référentiel est dit *local*, dans le sens qu'il ne s'applique que dans une petite région de l'espace, pendant un court instant (durée de l'observation suffisamment courte). Une équivalence locale signifie locale dans l'espace et locale dans le temps.

### Axiome 2.3 : Principe d'équivalence

- *un référentiel libre dans un champ gravitationnel (autrement dit, en chute libre) est localement équivalent à un référentiel libre dans l'espace profond, loin de toute masse-énergie*
- *un référentiel non-libre dans un champ gravitationnel est localement équivalent à un référentiel en rotation autour d'un axe lointain*
- *un référentiel non-libre dans un champ gravitationnel d'intensité  $g$  est localement équivalent à un référentiel d'accélération uniforme  $g$*

En mécanique classique, la modélisation de la gravitation par une force a des limites, elle n'est ressentie et mesurable que lorsque le corps n'est pas libre, par exemple un corps posé sur une balance. À bord d'un vaisseau en orbite, moteur éteint, la force de gravitation et la force axifuge s'annulent. En relativité générale ces deux forces n'existent pas, l'espace-temps est déformé par la présence de matière-énergie et le vaisseau suit une géodésique de l'espace-temps.

## 2.6 Référentiels inertiels

Les expériences de pensée précédentes montrent que les référentiels galiléens ne sont pas les seuls référentiels équivalents pour l'écriture des lois de la physique. Les référentiels dont la centrale inertielle n'indique aucune accélération sont aussi des référentiels équivalents pour l'écriture des lois de la physique. Nous donnons la définition opératoire suivante :

### Définition 2.9 : Référentiel inertiel

Un référentiel est inertiel ssi une centrale inertielle immobile dans ce référentiel n'indique aucune accélération.

Dans un référentiel inertiel il n'y a pas de force fictive (pseudo-force ayant pour origine le mouvement même de l'observateur). Les observateurs inertiels sont dits libres ou en chute libre dans le champ de gravitation local. Ils ne subissent pas d'interaction autre que celle gravitationnelle, et se déplacent dans le vide sans système de propulsion. Les centres des référentiels inertiels suivent les géodésiques de l'espace-temps courbe ou plat, cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Il faut préciser qu'il n'y a pas de rotation sur lui-même du référentiel.

### Définition 2.10 : Mouvement inertiel

Un mobile a un mouvement inertiel ssi

- son centre d'inertie suit une géodésique de l'espace-temps
- chacune de ses parties suit autant que possible une géodésique de l'espace-temps

En effet, seul un point massique peut suivre précisément une géodésique de l'espace-temps. Les éléments de matière constituant un mobile d'extension spatiale non-nulle ne peuvent suivre leur géodésique, les forces de cohésion du mobile les obligent à suivre la trajectoire du centre d'inertie du mobile. Le mobile subit alors des forces de marée.

Par conservation du moment cinétique, un mobile libre peut avoir et conserver un mouvement de rotation propre. Un mobile peut donc être libre et non inertiel, une centrale à inertie indique qu'il a un mouvement de rotation sur lui-même.

### Expérience 2.4

Un référentiel ayant pour centre celui de la Terre et tournant sur lui-même en même temps que celle-ci est non inertiel car la Terre ne montre pas la même face au Soleil (Cf. 2.7 page suivante)

L'axiome suivant généralise l'axiome 2.2 page 9 du principe de relativité galiléenne, en passant des référentiels galiléens aux référentiels inertiels :

### Axiome 2.4 : Principe de relativité généralisé

*Un référentiel est équivalent pour l'écriture des lois de la physique ssi il est inertiel.*

Les référentiels inertiels sont aussi appelés référentiels lorentziens. En l'absence de champ gravitationnel comme en relativité restreinte, les référentiels inertiels et galiléens sont confondus. En présence d'un champ gravitationnel, leur mouvement est différent et dans les référentiels galiléens existe une force gravitationnelle.

Une conséquence du principe d'équivalence est la courbure de la lumière dans un champ gravitationnel.

### Expérience 2.5

Dans une fusée d'accélération constante  $1g$ , un rayon LASER part horizontalement de la paroi de gauche. Le temps d'arriver sur la paroi de droite, la fusée a changé de vitesse, pour un passager de la fusée le rayon LASER décrit une parabole.

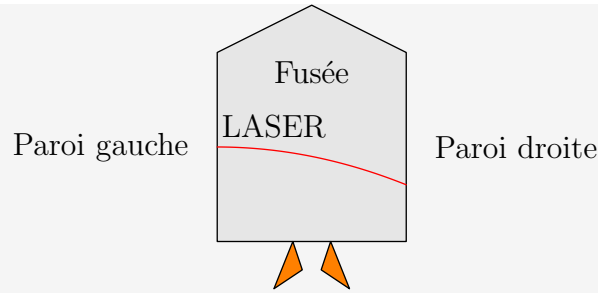


FIG. 2.1 – Trajectoire d'un rayon LASER à bord d'une fusée

En appliquant le principe d'équivalence locale entre référentiel accéléré et champ gravitationnel, on en conclue que la lumière est courbée par la gravitation.

## 2.7 Principe de Mach

La rotation des observateurs et de leurs référentiels associés est modélisée par un pseudovecteur vitesse angulaire porté par l'axe de rotation. La rotation n'est pas ressentie sur l'axe de rotation ( $r = 0$ ).

### Remarque 2.7

La rotation n'est pas symétrique, ce que j'observe en tournant sur moi-même n'est pas ce que vous observez en me regardant tourner sur moi-même.

### Expérience 2.6

Par une nuit sans nuages, une personne qui tourne sur elle-même en tenant des poids dans les mains, observe les étoiles tourner en sens inverse de sa rotation, et ressent une force d'inertie axifuge qui éloigne ses bras de son corps. Plus la personne tourne vite, plus cette force est importante.

### Axiome 2.5 : Principe de Mach

*Le physicien Mach<sup>a</sup> écrit : « D'après moi il n'existe somme toute qu'un mouvement relatif et je n'aperçois à cet égard aucune distinction entre la rotation et la translation. Une rotation relativement aux étoiles fixes fait naître dans un corps des forces d'éloignement de l'axe ; si la rotation n'est pas relative aux étoiles fixes, ces forces d'éloignement n'existent pas. »*

*On énonce le principe dit « principe de Mach » : les forces d'accélération sont dues au mouvement par rapport aux étoiles fixes.*

a. Ernst Mach, *La mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, 1883, p. 231

### Expérience 2.7

Imaginons deux satellites identiques gravitant dans le même plan autour d'un astre, en décrivant dans le même sens une trajectoire circulaire de même rayon. Ils se suivent donc

sur la même trajectoire.

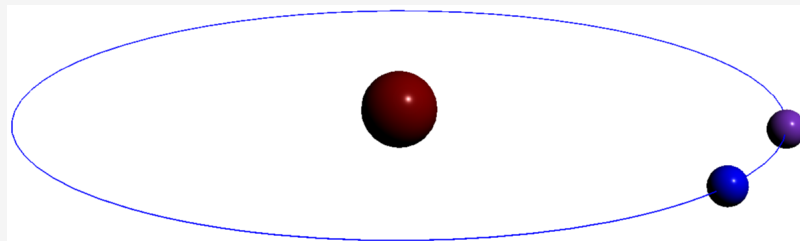


FIG. 2.2 – Deux satellites sur une même orbite

Relions-les par une barre rigide pour qu'ils ne constituent qu'un seul et même satellite. Ce satellite montre toujours la même face à l'astre, il tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines. Pour autant ce satellite est inertielle, aucune expérience locale réalisée à bord ne permet de mettre en évidence sa rotation par rapport aux étoiles lointaines. Cette expérience de pensée montre qu'un mobile inertielle (et son référentiel inertielle associé) dans un champ gravitationnel tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines. Une centrale inertielle au centre d'inertielle de ce satellite n'indiquerait aucune accélération, ni en déplacement, ni en rotation propre.

Un référentiel inertielle tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines lorsqu'il est dans un champ gravitationnel en dehors d'une ligne de champ. Cette conclusion remet en question le principe de Mach.

## 2.8 Forces de marée

### Expérience 2.8

À bord d'un vaisseau spatial en orbite circulaire autour d'un astre, les passagers observent que deux masses initialement sur une même

- ligne de champ s'éloignent l'une de l'autre, elles se déplacent l'une par rapport à l'autre sur leur équipotentielle de champ respective. La force axifuge est croissante en  $r$ , alors que la force gravitationnelle est décroissante en  $1/r^2$ . Par conséquent, la masse la plus proche de l'astre a une période de révolution plus courte que la masse la plus éloignée (de la même manière que Mercure tourne plus vite autour du Soleil que les autres planètes du système solaire).
- équipotentielle n'ont pas de mouvement relatif

### Expérience 2.9

À bord d'un vaisseau spatial en chute libre vers le centre de gravité d'un astre, les passagers observent que deux masses initialement sur la même

- ligne de champ s'éloignent l'une de l'autre en restant sur cette ligne de champ, car l'intensité du champ est plus importante pour la masse la plus proche de l'astre

- équipotentielle se rapprochent car les lignes de champ du champ gravitationnel convergent vers le centre de gravité de l'astre

L'inhomogénéité des champs gravitationnels, c.-à-d. leur convergence et leur décroissance vers zéro à l'infini, est à l'origine des forces de marée qui s'exercent sur tous les mobiles dont l'extension spatiale est non nulle.

### Remarque 2.8

Les forces de marée sont des forces réelles, ce ne sont pas des forces fictives. Un observateur non-inertiel, en accélération rectiligne et/ou en rotation, ne verra pas de forces de marée apparaître dues à son mouvement propre.

En revanche il existe des forces de marées électromagnétiques car comme le champ gravitationnel, le champ électromagnétique est convergent et décroît vers zéro à l'infini.

## Chapitre 3

# MOUVEMENT RECTILIGNE

### Définition 3.1 : Corps isolé

Un corps isolé n'a aucune interaction avec l'extérieur. Il n'échange ni matière, ni rayonnement, et ne subit aucune force (de contact, gravitationnelle, électromagnétique, etc.).

### Définition 3.2 : Corps pseudo-isolé

Un corps pseudo-isolé n'échange ni matière, ni rayonnement, et la somme des forces qui s'exercent dessus est nulle.

## 3.1 Inertie du mouvement rectiligne

### Expérience 3.1

Pour un observateur galiléen, lorsqu'un corps est mis en mouvement sur une surface plane, la distance parcourue par rapport à l'observateur est d'autant plus grande que les frottements sont petits. Nous supposons que lorsque les frottements de contact et les frottements de l'air tendent vers zéro, la distance parcourue par le corps tend vers l'infini et sa vitesse reste constante par rapport à l'observateur.

### Remarque 3.1

Dans son mouvement rectiligne uniforme le corps observé peut être en rotation sur lui-même, son mouvement n'est pas obligatoirement en translation.

Cette expérience permet d'observer l'inertie du mouvement d'un corps pseudo-isolé (le poids du corps et la réaction de la surface plane s'annulent) en mouvement rectiligne, donc *a fortiori* d'un corps isolé.

Nous pouvons énoncer le principe d'inertie des corps isolés en mouvement rectiligne par rapport aux étoiles lointaines :

**Axiome 3.1 : Principe d’inertie du mouvement rectiligne d’un corps isolé**

Tout corps isolé se déplace à vecteur vitesse constant ou nul pour un observateur ssi ce dernier est galiléen :

$$\text{Pour tout observateur galiléen} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_{\text{corps isolé}} = \vec{C}^{ste}$$

Il faut lire « le référentiel d’un observateur est par définition galiléen ssi le vecteur vitesse d’un corps isolé est constant ». Cet axiome issu de l’observation n’a de valeur que la précision de cette observation. Il énonce un principe et en même temps définit les référentiels galiléens.

Si on observe l’inertie du mouvement rectiligne d’un corps isolé alors notre référentiel est galiléen. Réciproquement, si notre référentiel est galiléen alors on observe l’inertie du mouvement rectiligne d’un corps isolé. Nous pouvons donner une définition alternative à la déf. 2.4 page 6 d’un référentiel galiléen :

**Définition 3.3 : Référentiel galiléen**

Un observateur est galiléen ssi il peut observer le principe d’inertie d’un corps isolé.

Notez que définir les référentiels galiléens c’est poser le principe d’inertie d’un système isolé (qui n’interagissent pas avec leur environnement) en mouvement rectiligne, et réciproquement poser le principe d’inertie d’un système isolé en mouvement rectiligne c’est définir les référentiels galiléens. Le principe d’inertie et la définition des référentiels galiléens disent la même chose, « le mouvement rectiligne uniforme est comme rien ».

Nous verrons que cet axiome peut être remplacé par des axiomes plus puissants, et, bien qu’il devienne alors un théorème<sup>1</sup>, nous continuerons de l’appeler « principe » pour des raisons historiques. Les axiomes suivants seront à leur tour remplacés par des axiomes plus puissants au fur et à mesure que nous construirons la mécanique. Présentés comme des axiomes, ils deviendront des théorèmes, excepté le dernier. Ainsi au § 4 page 61 le principe d’inertie du mouvement rectiligne est remplacé par un principe plus général d’inertie en rotation.

**Expérience 3.2**

Lorsque nous nous déplaçons dans un train, notre vitesse par rapport à la gare est la somme vectorielle de notre vitesse dans le train et de la vitesse du train par rapport à la gare.

En cinématique classique nous supposons l’additivité vectorielle des vitesses. Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel galiléen et soit  $\mathcal{R}'$  un autre référentiel galiléen en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$  constante dans  $\mathcal{R}$ . Pour tout corps, isolé ou non :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(t) \cong \vec{v}_{\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_{\mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} \tag{3.1}$$

Cette égalité suppose qu’il n’existe pas de vitesse limite. De plus elle est observationnelle, elle ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Il faut lire « l’observation montre que le vecteur vitesse d’un corps dans  $\mathcal{R}$  est la somme de son vecteur vitesse dans  $\mathcal{R}'$  et du vecteur vitesse de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  ».

1. Un théorème est une proposition démontrable à partir d’axiomes.

### Notation 3.1

Le symbole  $\cong$  rappelle que cette égalité est observationnelle, ce n'est pas une égalité mathématique absolument vraie, des observations plus précises pourraient la remettre en question.

En physique il existe plusieurs « sortes » d'égalité, qui seront précisées par des symboles différents. Le symbole mathématique  $=$  qui représente une égalité stricte, symétrique et atemporelle ne capture pas toutes ces nuances.

D'après l'axiome 3.1 page ci-contre, pour un même corps isolé vu de deux référentiels galiléens :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{corps isolé}} &= \vec{C}_{\mathcal{R}}^{ste} \\ \vec{v}'_{\text{corps isolé}} &= \vec{C}_{\mathcal{R}'}^{ste}\end{aligned}$$

L'additivité des vitesses est cohérente avec le principe d'inertie du mouvement rectiligne dans les référentiels galiléens, tous les termes de (3.1) page précédente sont des constantes. Cela ne signifie pas que le principe d'inertie valide l'additivité des vitesses, d'autres lois de composition des vitesses pourraient aussi être cohérentes avec le principe d'inertie<sup>2</sup>.

## 3.2 Masse inerte et quantité de mouvement

La masse inerte  $m_i$  est un coefficient que l'on associe à tout corps, donc *a priori* à la quantité de matière et à la matière constitutive de ce corps. On mesure la masse inerte d'un corps :

- par comparaison directe en désignant un corps de référence de masse inerte unité, avec lequel les masses inertes d'autres corps sont comparées par interaction autre que gravitationnelle, par exemple par choc
- par comparaison indirecte, en passant par une valeur intermédiaire. Avec une balance inertielle par mesure de la fréquence des oscillations dans le plan horizontal d'une masse attachée à un ressort. Par mesure de la force centrifuge. Une masse attachée à un dynamomètre grâce à une corde, tourne dans le plan horizontal. Le dynamomètre mesure la force axifuge qui dépend de la masse inerte. À vitesse angulaire et longueur de corde fixes, on compare les masses inertes des différents corps grâce aux valeurs indiquées par le dynamomètre

### Expérience 3.3

Dans un référentiel galiléen, faisons interagir deux corps précédemment isolés. La collision peut être

- élastique c.-à-d. sans « création de chaleur<sup>a</sup> » donc avec conservation de l'énergie cinétique, par exemple le choc dur de boules de billard
- inélastique c.-à-d. avec « création de chaleur », par exemple le choc mou de boules de pâte à modeler

Une collision peut aussi être une interaction électrostatique entre corps chargés, ou une interaction magnétique entre deux corps aimantés.

2. L'additivité des vitesses n'est plus vérifiée en relativité restreinte mais les référentiels galiléens se déplacent quand même avec des vitesses relatives constantes en norme et en direction.

Si l'interaction est sans échange de matière entre les deux corps on peut les désigner par les indices 1 et 2 avant et après l'interaction. Nous observons que, quelle que soit la matière constituant ces corps, les variations des vecteurs vitesses des corps sont proportionnelles et opposées. Pour un observateur galiléen les vecteurs variation de vitesse  $\Delta \vec{v}_1$  et  $\Delta \vec{v}_2$  sont donc colinéaires :

$$\Delta \vec{v}_1 \cong -k \Delta \vec{v}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Le coefficient  $k$  est un réel positif, *a priori* fonction de la norme de la vitesse relative avant le choc  $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$  et des quantités de matière mises en jeu. En mécanique classique (à faible vitesse devant  $c$ ) on observe que le coefficient  $k$  n'est fonction que des quantités de matière mises en jeu<sup>b</sup>, pas de la vitesse relative avant l'interaction.

Prenons le corps 1 comme corps de référence et faisons-le interagir avec d'autres corps. Notons  $b$  la première expérience,  $c$  la deuxième, etc. Les coefficients de proportionnalité sont alors notés  $k_b, k_c, k_d$ , etc. :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_1 &\cong -k_b \Delta \vec{v}_2 && \text{pour tout observateur galiléen} && (3.2) \\ \Delta \vec{v}_1 &\cong -k_c \Delta \vec{v}_3 \\ \Delta \vec{v}_1 &\cong -k_d \Delta \vec{v}_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dans ces relations les  $\Delta \vec{v}_1$  ne sont pas égaux mais correspondent à des expériences différentes. Lorsque l'on fait interagir les corps 2 et 3, l'expérience montre le fait remarquable suivant :

$$k_b \Delta \vec{v}_2 \cong -k_c \Delta \vec{v}_3 \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

*a.* Le terme « chaleur » est à prendre ici dans son sens commun d'énergie d'agitation thermique, pas dans son sens thermodynamique de *transfert* d'énergie sous forme désordonnée.

*b.* Cela ne vaut que ce que vaut la qualité de l'observation, d'où le symbole  $\cong$ . En relativité,  $k$  est fonction de la norme de la vitesse relative  $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$  avant l'interaction.

Nous pouvons alors associer les coefficients de proportionnalité aux différents corps. En mécanique classique, ces coefficients sont appelés masses inertes ou masses inertielles ou masses dynamiques<sup>3</sup>. On note ce coefficient  $m_i$  (« i » pour inerte) ou parfois simplement  $m$ . La masse inerte du corps 1 de référence est posée égale à l'unité

$$m_1 = 1$$

La masse inerte du corps 2 est alors  $m_2 = k_b$ , celle du corps 3 est  $m_3 = k_c$ , etc.

### Définition 3.4 : Masse inerte

La masse inerte d'un corps est un coefficient propre à ce corps, qui mesure la résistance à la modification de son état de mouvement.

### Notation 3.2

3. En relativité ces coefficients sont appelés inertie.

On note les vecteurs surmontés d'une dague pour signifier après interaction. On réserve ainsi le prime aux vecteurs dans les référentiels primés une ou deux fois,  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ .

Avec  $m_1 = 1$ , l'équation (3.2) page ci-contre devient :

$$\begin{aligned} m_1 \Delta \vec{v}_1 &\cong -m_2 \Delta \vec{v}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ m_1(\vec{v}_1^\dagger - \vec{v}_1) &\cong -m_2(\vec{v}_2^\dagger - \vec{v}_2) \\ m_1 \vec{v}_1^\dagger + m_2 \vec{v}_2^\dagger &\cong m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La définition de la masse inerte permet d'écrire que la somme initiale des produits des masses inertes par leur vitesse respective se conserve lors de toute interaction, et réciproquement, la conservation de la somme des produits des coefficients par leur vitesse respective définit la masse inerte. La définition de la masse inerte et la conservation de la somme du produit de ces masses inertes par leur vitesse respective lors de toute interaction sont une seule et même notion.

#### Expérience 3.4

À partir d'un corps de masse inerte  $m_1$  et d'un corps de masse inerte  $m_2$ , formons un nouveau corps de masse inerte  $m_3$ . Par interaction avec un autre corps de masse inerte connue, l'expérience montre que la masse inerte de ce nouveau corps est la somme des masses inertes de départ

$$m_3 \cong m_1 + m_2$$

Les masses inertes semblent donc additives. Cette loi de conservation des masses inertes est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure.

#### Expérience 3.5

Quelle que soit la matière (or, argent, plomb, verre, sable, sel, eau, etc.), si l'on double une quantité de matière homogène en doublant son volume, on constate lors d'une interaction que la masse inerte est double. La masse inerte et la quantité de matière semblent donc proportionnelles<sup>a</sup> :

$$\text{Quantité de matière} \propto m_i$$

À nouveau, cette loi est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure.

<sup>a</sup>. reliées par une fonction linéaire car sans matière pas de masse inerte et la fonction passe donc par le point (0, 0), et avec deux fois plus de matière la masse inerte est multipliée par deux.

#### Expérience 3.6

S'il y a échange de matière lors de l'interaction, les corps 1 et 2 donnent les corps 3 et 4. L'expérience montre que

$$m_1 \vec{v}_1^\dagger + m_2 \vec{v}_2^\dagger \cong m_3 \vec{v}_1 + m_4 \vec{v}_2$$

avec

$$m_1 + m_2 \cong m_3 + m_4$$

La masse inerte totale  $m_1 + m_2$  se conserve lors de toute interaction :

$$\sum_i m_i \cong c^{ste} \text{ lors de toute interaction}$$

Cette loi de conservation est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Elle n'est plus vérifiée en relativité.

Il nous reste à voir les deux cas extrêmes suivants :

a) les deux corps fusionnent pendant l'interaction :

$$\vec{v}_1^\dagger = \vec{v}_2^\dagger = \vec{v}^\dagger$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &\cong m_1 \vec{v}_1^\dagger + m_2 \vec{v}_2^\dagger \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ &\cong (m_1 + m_2) \vec{v}^\dagger \end{aligned}$$

Posons  $\Delta m$  le gain de masse inerte du corps 1, et  $m$  la masse inerte finale :

$$\begin{cases} \Delta m = m_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases} \Rightarrow m_1 = m - \Delta m$$

$$\begin{aligned} (m - \Delta m) \vec{v}_1 + \Delta m \vec{v}_2 &\cong m \vec{v}^\dagger \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ \Delta m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) &\cong m (\vec{v}^\dagger - \vec{v}_1) \\ \vec{v}_{\text{choc}} \Delta m &\cong m \Delta \vec{v} \end{aligned} \tag{3.4}$$

b) un corps se scinde en deux :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1^\dagger + m_2 \vec{v}_2^\dagger &\cong m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ &\cong (m_1 + m_2) \vec{v} \end{aligned}$$

Posons  $\Delta m$  la perte de masse inerte du corps 1, et  $m$  la masse inerte initiale :

$$\begin{cases} \Delta m = m_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases} \Rightarrow m_1 = m - \Delta m$$

$$\begin{aligned} (m - \Delta m) \vec{v}_1^\dagger + \Delta m \vec{v}_2^\dagger &\cong m \vec{v} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ m (\vec{v}_1^\dagger - \vec{v}) &\cong \Delta m (\vec{v}_1^\dagger - \vec{v}_2^\dagger) \\ m \Delta \vec{v} &\cong -\vec{v}_{\text{éjection}} \Delta m \end{aligned} \tag{3.5}$$

### Définition 3.5 : Quantité de mouvement

Le produit de la masse inerte  $m_i$  d'un corps par sa vitesse  $\vec{v}(t)$  mesurée dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque, est appelé sa quantité de mouvement dans  $\mathcal{R}$ .

$$\vec{p}(t) \Leftarrow m_i \vec{v}(t)$$

### Notation 3.3

Le symbole  $\Leftarrow$  rappelle qu'il s'agit d'une définition, le membre de gauche reçoit la définition du membre de droite. Poser une définition est un acte de langage, ce n'est pas une égalité.

### Remarque 3.1

- Pour être plus précis, nous devrions parler de « quantité de mouvement rectiligne », car nous verrons au § 4.2 page 62 qu'il existe une « quantité de mouvement en rotation »
- Tout comme la vitesse, la quantité de mouvement est toujours relative, parler de quantité de mouvement n'a de sens que si l'on précise par rapport à quoi, c-à-d le référentiel

D'après la déf. 3.2 page 15 d'un corps pseudo-isolé, et d'après l'expérience 3.4 page 19, la masse inerte d'un corps isolé est constante. L'axiome 3.1 page 16 du principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne se réécrit :

### Axiome 3.2 : Principe d'inertie du mouvement rectiligne d'un corps isolé

*Tout corps isolé se déplace à vecteur quantité de mouvement constant ou nul pour un observateur galiléen :*

$$\text{Pour tout observateur galiléen} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}_{\text{corps isolé}} = \vec{C}^{ste}$$

En notant  $\vec{p}$  la quantité de mouvement avant le choc et  $\vec{p}^\dagger$  celle après le choc, (3.3) page 19 devient :

$$\vec{p}_1^\dagger + \vec{p}_2^\dagger \cong \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen} \quad (3.6)$$

La somme des quantités de mouvement du système isolé formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps lorsque mesurée dans un référentiel galiléen, elle est identique avant, pendant et après l'interaction entre les deux corps. Cette relation n'est valable que si l'on retrouve les corps 1 et 2 après l'interaction, autrement dit lorsqu'il n'y a pas d'échange de matière.

*Définir la masse inerte c'est poser la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé pour un observateur galiléen, et réciproquement poser la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé c'est définir la masse inerte.*

### Définition 3.6 : Système

En physique on désigne par système l'objet de notre étude. Habituellement, un système est un ensemble quelconque de corps, en interaction entre-eux ou non.

Un système est

- isolé s'il n'a aucune interaction avec l'extérieur. Il n'échange ni matière ni rayonnement et ne subit aucune force (de contact, gravitationnelle, électromagnétique, etc.)
- libre s'il ne subit que des forces gravitationnelles
- pseudo-isolé s'il n'échange ni matière ni rayonnement et si la somme des forces qui s'exercent dessus est nulle
- fermé s'il n'échange ni matière ni rayonnement mais sur lequel peuvent agir des forces
- ouvert s'il évolue dans le temps en recevant ou en perdant de la matière ou de l'énergie, des forces pouvant agir sur lui

Référentiel et système sont des notions distinctes bien que l'on puisse associer un référentiel à tout système. L'observateur est fixe dans le référentiel, ce qui est observé est le système.

La variation de quantité de mouvement d'un système est possible par variation de sa vitesse et/ou de sa masse :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p} &= \Delta(m_i \vec{v}) \\ &= m_i \Delta \vec{v} + \vec{v} \Delta m_i\end{aligned}\quad (3.7)$$

#### Notation 3.4

Cette égalité est une égalité mathématique, toujours vraie, on utilise le symbole « = ».

Dans le premier terme du membre de droite,  $\Delta \vec{v}$  est la variation de vitesse du système. Dans le second terme,  $\vec{v}$  est la vitesse relative de  $\Delta m_i$  et  $m_i$ . C'est le vecteur vitesse du choc ou de l'éjection de  $\Delta m_i$  avec  $m_i$  ((3.4) et (3.5) page 20). Lorsque la masse varie le système est ouvert, il évolue dans le temps et n'est plus lié à un ou plusieurs corps physiques. Dans l'ex. 3.3 page 24, au départ le système est la fusée et son plein de propergol, à l'arrivée le système est la fusée seule. Le système est « ce sur quoi s'exerce la poussée du réacteur ».

Lorsque la masse inerte du système est constante, la relation (3.7) devient simplement :

$$\Delta \vec{p} = m_i \Delta \vec{v}$$

La relation (3.2) page 18 dans laquelle  $m_1 = 1$ , devient :

$$\Delta \vec{p}_1 \cong -\Delta \vec{p}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

L'interaction entre deux corps correspond donc à un transfert de quantité de mouvement car la variation de quantité de mouvement du corps 1 est égale et opposée à la variation de quantité de mouvement du corps 2.

Les quantités de mouvement étant des vecteurs, la somme de deux quantités de mouvement est encore une quantité de mouvement. Appelons *quantité de mouvement totale* d'un système, notée  $\vec{p}_{\text{système}}$ , la somme des quantités de mouvement des corps constituant un système :

$$\vec{p}_{\text{système}} \Leftarrow \sum_{j=1}^2 \vec{p}_j$$

L'expérience a donc montré que la quantité de mouvement totale de ce système isolé constitué de deux corps se conserve pour un observateur galiléen,

$$\vec{p}_{\text{système}}^\dagger \cong \vec{p}_{\text{système}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions dans le système (sans quoi tout se conserve lorsqu'il ne se passe rien). En considérant l'interaction de ce système avec un troisième corps, puis un quatrième, etc., nous formons un nouveau système à  $n$  corps tel que :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \vec{p}_j^\dagger &\cong \sum_{j=1}^n \vec{p}_j \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ \sum_{j=1}^n \vec{p}_j &\cong \vec{C}^{ste}\end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer l'axiome suivant :

**Axiome 3.3 : Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé**

La quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps,

$$\text{Pour tout observateur galiléen} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}_{\text{système isolé}} = \vec{C}^{ste}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions entre les corps constituant le système isolé.

À partir d'une nouvelle expérience, nous avons obtenu ce nouvel axiome de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé. Il inclut le principe 3.2 page 21 d'inertie d'un système constitué d'un unique corps.

### 3.3 Centre d'inertie

**Définition 3.7 : Particule**

On appelle particule ponctuelle ou simplement particule, un mobile dont on néglige l'extension spatiale.

**Définition 3.8 : Centre d'inertie**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$ , le centre d'inertie  $G$  d'un système de  $N$  particules chacune de rayon vecteur  $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$ , a pour rayon vecteur  $\vec{R} = \overrightarrow{OG}$  tel que

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N M_i}$$

Le centre d'inertie (*c.i.*) est aussi appelé centre de gravité ou centre de masse du système.

**Exemple 3.1**

Pour un système de deux particules

$$\vec{R}_{c.i.} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2}$$

**Définition 3.9 : Référentiel du centre d'inertie**

Le référentiel  $\mathcal{R}_{c.i.}$  de centre le centre d'inertie est appelé référentiel du centre d'inertie, ou référentiel du centre de masse.

En dérivant par rapport au temps

$$\begin{aligned} \vec{\dot{R}}_{c.i.} &= \frac{\sum_{i=1}^N M_i \vec{\dot{r}}_i}{\sum_{i=1}^N M_i} \\ \vec{V}_{c.i.} &= \frac{\sum_{i=1}^N M_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N M_i} \end{aligned} \tag{3.8}$$

En l'absence de forces extérieures, dans tout référentiel galiléen la quantité de mouvement totale du système  $\sum_{i=1}^N M_i \vec{v}_i$  se conserve. Dans tout référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie de  $N$  particules est donc constant :

$$\vec{V}_{c.i.} = \vec{C}^{ste}$$

En particulier, dans le référentiel galiléen du centre d'inertie, le centre d'inertie a une vitesse nulle :

$$\vec{V}_{c.i.} = \vec{0}$$

Nous avons également la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N M_i \vec{OG} &= \sum_{i=1}^N M_i \vec{OA}_i \\ &= \sum_{i=1}^N M_i (\vec{OG} + \vec{GA}_i) \\ \sum_{i=1}^N M_i \vec{GA}_i &= \vec{0} \end{aligned}$$

### Exemple 3.2

Pour un système de deux particules

$$M_1 \vec{GA}_1 + M_2 \vec{GA}_2 = \vec{0}$$

### Exemple 3.3

Dans l'espace, une fusée allume son réacteur avec un débit de gaz  $\mu(t)$ . La vitesse  $\vec{v}_{gaz}$  d'éjection des gaz relativement à la fusée est supposée constante. Quelle est l'accélération de la fusée ? Quelle est la vitesse maximale atteinte ?

Pour pouvoir appliquer l'axiome 3.3 page précédente de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé, l'observateur doit être galiléen et le système considéré doit être isolé. Nous supposons que nous sommes un observateur dans un référentiel galiléen particulier, on précisera lequel par la suite. La fusée n'est pas un système isolé car elle éjecte du gaz, en revanche l'ensemble (fusée + propergol + gaz) constitue un système isolé, le seul qui le soit. Dans notre référentiel galiléen, la quantité de mouvement de ce système isolé se conserve au cours du temps, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{p}_{fusée} + \vec{p}_{propergol} + \vec{p}_{gaz}) &\cong \vec{0} \\ \frac{d\vec{p}_{fusée}}{dt} + \frac{d\vec{p}_{propergol}}{dt} + \frac{d\vec{p}_{gaz}}{dt} &\cong \vec{0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le système étant isolé, sa masse inerte se conserve. On note cependant que les différentes parties du système n'ont pas la même vitesse ni une masse constante. Le gaz n'a pas la même vitesse que la fusée ni que le propergol, et le propergol et le gaz ont des masses variables. En revanche le propergol a la même vitesse que la fusée.

- Le terme de la fusée s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}_{fusée}}{dt} = m_{fusée} \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} + v_{fusée}(t) \frac{dm_{fusée}}{dt}$$

La masse de la fusée étant constante :

$$\frac{d\vec{p}_{fusée}}{dt} = m_{fusée} \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt}$$

- Le terme du propergol s'écrit (avec  $\vec{v}_{propergol} = \vec{v}_{fusée}$ ) :

$$\frac{d\vec{p}_{propergol}}{dt} = m_{propergol}(t) \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} + \vec{v}_{fusée}(t) \frac{dm_{propergol}}{dt}$$

Choisissons pour notre référentiel galiléen celui qui à  $t_0$  est confondu avec celui non galiléen de la fusée. Une fois fixé notre référentiel galiléen nous ne pouvons plus en changer.

$$\left. \frac{d\vec{p}_{propergol}}{dt} \right|_{t_0} = m_{propergol}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0}$$

- À l'instant  $t_0$  le terme du gaz s'écrit :

$$\left. \frac{d\vec{p}_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = m_{gaz}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} + \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0}$$

### Remarque 3.2

Si la vitesse d'éjection des gaz est supposée constante par rapport à la fusée, alors dans notre référentiel elle varie dans le temps. En effet, soit  $\vec{a}(t)$  l'accélération de la fusée à l'instant  $t$ , alors dans notre référentiel

$$\vec{v}_{gaz}(t) = \vec{v}_{gaz}(t_0) - \vec{a}(t)t$$

où  $t$  est le temps qui s'écoule après  $t_0$  :

$$\left. \frac{d\vec{v}_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = -\vec{a}(t_0)$$

La masse de gaz à  $t_0$  est nulle (masse de gaz produite en un temps nul) :

$$\left. \frac{d\vec{p}_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0}$$

Dans notre référentiel à  $t_0$ , la relation (3.9) page précédente devient :

$$m_{fusée} \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} + m_{propergol}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} + \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = \vec{0}$$

Isoler le terme concernant la fusée c'est la prendre pour système :

$$m_{fusée} \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} = -m_{propergol}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} - \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0}$$

Le terme de droite est non nul, la fusée n'est donc pas un système isolé. Prenons pour système la fusée et le propergol encore à son bord :

$$\left[ m_{\text{fusée}} + m_{\text{propergol}}(t_0) \right] \frac{d\vec{v}_{\text{fusée}}}{dt} \Big|_{t_0} = -\vec{v}_{\text{gaz}}(t_0) \frac{dm_{\text{gaz}}}{dt} \Big|_{t_0} \quad (3.10)$$

On retrouve (3.5) page 20. Nous voyons avec cet exemple que  $\vec{v} dm/dt$  est bien une force. La masse du système (fusée plus propergol) est variable, le système est ouvert. Au départ le système c'est la fusée avec le plein de propergol, à chaque instant il est redéfini avec moins de propergol, à la fin le système c'est la fusée seule. Le système n'est pas lié à des corps physiques.

$\mu(t) = \frac{dm_{\text{gaz}}}{dt}$  est le débit de gaz éjecté par la fusée à l'instant  $t$  :

$$\vec{a}_{\text{fusée}}(t_0) = -\frac{\mu(t_0) \vec{v}_{\text{gaz}}(t_0)}{m_{\text{fusée+propergol}}(t_0)}$$

ce qui répond à la première question. Comme on pouvait s'y attendre, l'accélération est proportionnelle au débit et à la vitesse d'éjection des gaz, et inversement proportionnelle à la masse restante à  $t_0$ .

Pendant le temps  $dt$ , la masse de propergol diminue, il se transforme en gaz

$$dm_{\text{propergol}} = -dm_{\text{gaz}}$$

où la variation infinitésimale de masse  $dm_{\text{propergol}}$  est négative puisque le propergol perd de la masse et  $dm_{\text{gaz}}$  est positive puisque du gaz est créé.

$$dm_{\text{fusée+propergol}} = -dm_{\text{gaz}}$$

car  $dm_{\text{fusée}}$  est nulle. En reprenant (3.10) de la présente page :

$$\begin{aligned} \left[ m_{\text{fusée}} + m_{\text{propergol}}(t_0) \right] \frac{d\vec{v}_{\text{fusée}}}{dt} \Big|_{t_0} &= \vec{v}_{\text{gaz}}(t_0) \frac{dm_{\text{fusée+propergol}}}{dt} \Big|_{t_0} \\ d\vec{v}_{\text{fusée}} \Big|_{t_0} &= \vec{v}_{\text{gaz}}(t_0) \frac{dm_{\text{fusée+propergol}}}{m_{\text{fusée+propergol}}} \Big|_{t_0} \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour toutes les valeurs du paramètre  $t_0$ . Nous pouvons intégrer la relation pour  $t_0$  variant entre 0 et  $T$  (le paramètre  $t_0$  est noté comme une variable  $t$ ) :

$$\int_0^T d\vec{v} = \int_0^T \vec{v}_{\text{gaz}}(t) \frac{dm_{\text{fusée+propergol}}}{m_{\text{fusée+propergol}}(t)}$$

Pour pouvoir intégrer il nous faut la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. Elle est supposée constante :

$$[\vec{v}(t)]_0^T = \vec{v}_{\text{gaz}} [\ln(m_{\text{fusée+propergol}})]_0^T$$

$$\vec{v}(T) - \vec{v}(0) = \vec{v}_{\text{gaz}} \ln\left(\frac{m_{\text{fusée}} + m_{\text{propergol}}(T)}{m_{\text{fusée}} + m_{\text{propergol}}(0)}\right)$$

Si à l'instant  $T$  tout le propergol est consommé,  $m_{\text{propergol}}(T) = 0$  et la vitesse est maximale :

$$\vec{v}_{\text{max}} = \vec{v}(0) + \vec{v}_{\text{gaz}} \ln\left(\frac{m_{\text{fusée}}}{m_{\text{fusée}} + m_{\text{propergol}}(0)}\right)$$

$$= \vec{v}(0) - \vec{v}_{\text{gaz}} \ln\left(1 + \frac{m_{\text{fusée}}}{m_{\text{propergol}}(0)}\right)$$

La vitesse maximale est proportionnelle à la vitesse d'éjection des gaz et dépend de la quantité de propergol embarquée. En revanche elle est indépendante du débit de gaz. Le signe négatif est dû au fait que les gaz sont de sens opposé à celui de la fusée.

### 3.4 Modèle de force

#### Définition 3.10 : Modèle de force

On appelle modèle de force la représentation théorique d'une force physique réelle.

#### Exemple 3.4

Une masse au repos est fixée à un ressort vertical.

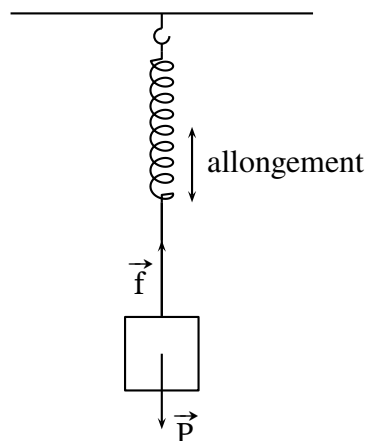


FIG. 3.1 – Masse suspendue par un ressort

Pour rester dans les limites élastiques du ressort, la masse n'est ni trop lourde ni trop légère. Si l'on double la masse, donc le poids, on double la force exercée sur le ressort. On constate

que dans cette nouvelle position de repos, l'allongement du ressort a à peu près doublé. Or, lorsqu'un système est au repos la somme des forces exercées sur lui est nulle. On peut donc modéliser la force de rappel  $\vec{F}$  du ressort par un vecteur force proportionnel et de sens contraire à l'allongement du ressort par rapport à sa position de repos :

$$\vec{F} \leftarrow -k\vec{x} \quad (3.11)$$

### Notation 3.5

Le symbole  $\leftarrow$  rappelle que  $-k\vec{x}$  n'est pas la force physique réelle exercée par le ressort, c'est un modèle. On utilise la notation algorithmique pour l'affectation. Il faut lire « la force de rappel est modélisée par  $-k\vec{x}$  ».

Ce modèle donne une oscillation sinusoïdale sans amortissement, très loin de la réalité. C'est le travail du physicien ou de l'ingénieur de trouver un bon modèle de force pour le problème posé, tout en restant conscient des limites du modèle choisi. Le modèle de force peut dépendre explicitement ou implicitement des coordonnées, du vecteur vitesse, du vecteur accélération, du temps, ou de tout autre paramètre, température, pression, angle, surface, volume, etc.

$$\vec{F} = \vec{F}(x, \vec{v}, \vec{a}, t, T, \alpha, S, V, \text{etc.})$$

Lorsque la masse attachée au ressort oscille sans frottements sur une surface horizontale, le modèle de force du ressort reste celui donné par (3.11).

### Notation 3.6

La force réelle (impossible à connaître) est notée  $\vec{f}$ , son modèle est noté  $\vec{F}$ .

### Remarque 3.3

Dans l'ex. 3.3 page 24 de la fusée, nous n'avons pas eu besoin de modéliser de force. En revanche nous avons utilisé une théorie physique avec ses limites, par exemple la masse inerte supposée indépendante de la vitesse relative.

## 3.5 Relation fondamentale de la dynamique

### 3.5.1 Définition d'une force

D'après l'axiome 3.3 page 23, la quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps lorsqu'elle est mesurée par un observateur galiléen. Lorsque nous agissons sur un système isolé, qui *de facto* n'est plus isolé, par exemple en le poussant, nous faisons varier sa quantité de mouvement dans le temps et nous le déformons.

Nous dirons que nous exerçons une *force* sur ce système, cette force étant extérieure au système. Réciproquement, lorsque la quantité de mouvement d'un système précédemment isolé varie ce ne peut être que parce qu'une force s'exerce sur lui.

### Remarque 3.4

Dès l'instant où une force s'exerce sur un système, celui-ci n'est plus isolé. Dans la suite nous écrirons « isolé » en lieu et place de « précédemment isolé ».

La variation de quantité de mouvement d'un système isolé et la déformation qu'il subit sont indépendantes. Nous nous intéressons ici uniquement à la variation de quantité de mouvement du système.

Lorsque la somme des forces exercées sur un système est nulle, le système n'est pas isolé mais pseudo-isolé, sa quantité de mouvement se conserve et le système est le plus souvent assimilable à un système isolé.

Considérons un système isolé, donc de masse constante. Avec (3.7) page 22 :

$$\begin{aligned}d\vec{p} &= m_i d\vec{v} + \vec{v} dm_i \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= m_i \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{p} &= m_i \vec{a}\end{aligned}$$

Nous posons la définition suivante :

### Définition 3.11 : Force s'exerçant sur un système isolé

On appelle force s'exerçant sur un système isolé, toute action faisant varier dans le temps sa quantité de mouvement pour un observateur galiléen :

$$\vec{f} \Rightarrow m_i \vec{a}_{\text{système isolé}}$$

### Notation 3.7

Le symbole  $\vec{f}$  n'est pas une façon simple et rapide de désigner  $\vec{p}$ , comme c'est le cas pour  $\vec{p}$  qui désigne  $m_i \vec{v}$ . Nous utilisons le symbole  $\Rightarrow$  car ce n'est pas une égalité mais une relation de causalité, la force est la cause et la variation de la quantité de mouvement est la conséquence de cette cause. L'ordre temporel intervient car la cause a lieu avant sa conséquence. Il faut lire « toute force exercée sur un système isolé provoque la variation de sa quantité de mouvement dans le temps et, seule une force extérieure peut provoquer la variation de quantité de mouvement dans le temps d'un système isolé ».

### Remarque 3.5

Une relation de causalité n'est pas une implication au sens mathématique.

La définition précédente de force peut quand même s'écrire sous la forme d'une double implication « si-alors » en conservant l'ordre temporel : « Si une force s'exerce sur un système isolé alors elle provoque la variation de sa quantité de mouvement, si la quantité de mouvement d'un système isolé varie alors une force s'est exercée dessus. »

La phrase suivante est une implication au sens mathématique du terme : « si c'est un diamant alors c'est dur ». Ce n'est pas une relation de causalité car l'ordre temporel n'intervient pas.

Les variations de quantités de mouvement étant des vecteurs, nous n'avons d'autre choix que de modéliser les forces par des vecteurs. Ce faisant nous supposons que les forces s'additionnent.

**Axiome 3.4 : Indépendance des forces**

*Quand plusieurs forces sont appliquées à un même système, chacune d'elles produit le même effet que si elle était seule.*

Soient  $q$  forces s'exerçant sur un système isolé, de quantité de mouvement  $\vec{p}$  :

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots + \vec{f}_q \Rightarrow \frac{d_1 \vec{p}}{dt} + \frac{d_2 \vec{p}}{dt} + \dots + \frac{d_q \vec{p}}{dt}$$

où  $d_1 \vec{p}$ ,  $d_2 \vec{p}$ , ...,  $d_q \vec{p}$  sont  $q$  différentielles de  $\vec{p}$  distinctes. La somme des forces extérieures exercées sur un système isolé fait varier dans le temps sa quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \vec{f}_j &\Rightarrow \sum_{j=1}^q \frac{d_j \vec{p}}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système isolé}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum \vec{f} \Rightarrow m_i \vec{a}_{\text{système isolé}}} \tag{3.12}$$

**3.5.2 Action-réaction**

L'axiome 3.3 page 23 de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé donne pour un système constitué de deux corps :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} \cong \vec{0}$$

Si la somme des effets est nulle alors la somme des causes est nulle :

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \cong \vec{0}$$

où  $\vec{f}_1$  est la force exercée par le corps 1 sur le corps 2, et  $\vec{f}_2$  est la force exercée par le corps 2 sur le corps 1. Pour le système isolé constitué des corps 1 et 2, la somme des forces *intérieures* au système est nulle. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.1 : Loi de l'action-réaction**

*Lors de toute interaction, la force exercée par le corps 1 sur le corps 2 est égale et opposée à celle exercée par le corps 2 sur le corps 1 :*

$$\vec{f}_1 \cong -\vec{f}_2$$

Pour un système de plusieurs corps, en repartant de l'axiome de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé :

**Théorème 3.2**

La somme des forces intérieures à tout système, isolé ou non, est nulle :

$$\sum_{j=1}^n \vec{f}_j^{int} \cong \vec{0}$$

Il peut y avoir des forces à l'intérieur d'un système, mais elles s'annulent toutes.

### 3.5.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Lorsque l'on remplace la somme des forces réelles  $\sum \vec{f}$  par la somme des modèles de force  $\sum \vec{F}$ , la relation 3.12 page ci-contre devient une équation dont on peut chercher une solution.

#### Remarque 3.6

De la même façon, la définition de la vitesse  $\vec{v} \leftarrow \frac{d\vec{x}}{dt}$  devient une équation lorsque l'on remplace la trajectoire réelle par une trajectoire théorique d'équation  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ .

On généralise aux systèmes non isolés. Une force fait toujours varier dans le temps la quantité de mouvement d'un système, qu'il soit isolé ou non :

#### Axiome 3.5 : Relation fondamentale de la dynamique

Pour tout système de masse inerte  $m_i$  constante

$$\sum \vec{F}^{ext} \Rightarrow m_i \vec{a}_{\text{système à masse constante}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Le membre de gauche, la « cause », est un modèle de force. Le membre de droite, la « conséquence », est issue de l'observation du principe d'inertie et de l'expérience sur les interactions permettant de définir la masse inerte et la quantité de mouvement. Une fois les forces modélisées, la RFD est posée comme une égalité stricte. C'est une équation différentielle que l'on résout mathématiquement pour obtenir l'équation du mouvement. Celle-ci permet de valider ou d'invalider les modèles de force choisis (Cf. ex. 3.4 page 27 du ressort).

#### Remarque 3.2

- On mesure parfois la variation de quantité de mouvement pour en déduire le modèle de force. Cela ne signifie pas que la relation de causalité soit inversée, c'est toujours la force qui crée la variation de quantité de mouvement lorsque le système est isolé.
- La relation fondamentale de la dynamique devrait s'appeler « la relation fondamentale de la dynamique en translation », car nous verrons que le théorème du moment cinétique est en fait « la relation fondamentale de la dynamique en rotation ».

Dans le cas particulier d'un système à masse variable (ex. 3.3 page 24, 3.8 page 38 et 3.9 page 39), l'axiome 3.5 de la présente page de la RFD s'écrit :

#### Axiome 3.6 : Relation fondamentale de la dynamique

Pour tout système de masse inerte  $m_i$  variable au cours du temps

$$\sum \vec{F}^{ext} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système à masse inerte variable}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Elle inclut l'axiome 3.3 page 23 de conservation de la quantité de mouvement. En effet, lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur un système sa quantité de mouvement se conserve dans tout

référentiel galiléen :

$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{p} \cong \vec{C}^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

La RFD est valable dans tout référentiel galiléen, elle est donc covariante c.-à-d. invariante de forme fonctionnelle par changement de référentiel galiléen, en accord avec le principe de relativité galiléenne 2.4 page 11.

### 3.6 Masse grave et force de gravitation

Comme pour la masse inerte, la masse grave  $m_g$  ou masse pesante ou encore charge gravitationnelle, est un coefficient que l'on associe à tout corps, donc *a priori* à la quantité de matière et à la matière constitutive de ce corps. Ce coefficient se mesure :

- par comparaison directe de deux masses, par exemple grâce à une balance de Roberval (balance à deux fléaux), ou une balance romaine (balance à un fléau)
- par comparaison indirecte grâce à une balance piezoélectrique (compression d'un cristal), ou un peson à ressort (ou dynamomètre, par élongation ou compression d'un ressort dans le plan vertical)

La balance de Roberval donne le rapport des poids des corps indépendamment de l'endroit où l'on se trouve. Pour que la masse grave soit un coefficient intrinsèque au corps, autrement dit pour qu'il ne dépende pas des conditions extérieures mais seulement du corps considéré, nous définissons le rapport des masses graves de deux corps comme égal au rapport de leurs poids lorsqu'ils sont pesés au même endroit :

$$\frac{m_{g1}}{m_{g2}} = \frac{P_1}{P_2}$$

On désigne un corps de référence qui aura une masse grave unité. Par équilibrage de la balance de Roberval, on crée autant de masse unité que l'on souhaite, avec lesquelles on compare les masses graves des autres corps.

#### Remarque 3.7

Les deux raisonnements suivants sont fallacieux :

- une pierre chutant dans le champ de pesanteur terrestre peut être considérée comme étant formée de deux parties accolées tombant à la même vitesse. La vitesse de chute n'est par conséquent pas fonction de la masse de l'objet
- la matière posée sur l'un des plateaux en équilibre d'une balance de Roberval peut être considérée comme étant formée de deux parties identiques accolées. Par symétrie chaque partie contribue pour moitié à abaisser le plateau. Quantité de matière et masse grave sont donc parfaitement proportionnelles

Prenons un exemple où la fonction est avec certitude non linéaire. Sur un drap tendu horizontalement, plaçons deux boules de pétanques identiques. Par symétrie chaque boule est responsable de la moitié de la déformation du drap. La conclusion fautive serait de dire que la déformation du drap est une fonction linéaire de la masse grave posée dessus, car il faudrait sortir l'une des deux boules pour savoir quelle déformation provoque l'autre boule lorsqu'elle est seule.

#### Définition 3.12 : Masse grave

Dans son rôle actif, la masse grave  $m_g$  d'un corps mesure l'intensité du champ gravitationnel créé par ce corps. Dans son rôle passif, elle mesure la réponse de ce corps aux champs gravitationnels créés par d'autres corps.

**Définition 3.13 : Vecteur position**

Le vecteur position d'un système, ou d'un corps, d'un mobile, etc. dans un référentiel galiléen de centre  $O$ , est le vecteur

$$\vec{r} = \overrightarrow{OG}$$

où  $G$  est le centre de gravité du système.

Nous appellerons *rayon vecteur* le vecteur reliant deux centres de gravité.

Soient deux corps de masse gravitationnelle  $m_{g1}$  et  $m_{g2}$ , et  $\vec{r}_{12}$  le rayon vecteur dirigé de la masse 1 vers la masse 2. L'expérience montre que la *force de gravitation* s'exerçant entre deux corps a pour direction la droite passant par les deux corps et est proportionnelle aux masses. En suivant l'intuition de Robert Hooke, la force d'attraction gravitationnelle est supposée inversement proportionnelle à la distance au carré. Il reste à déterminer le sens de la force, autrement dit son signe.  $m_1$ ,  $m_2$ , et la constante de proportionnalité sont positifs, et l'expérience montre que la force de gravitation est attractive :

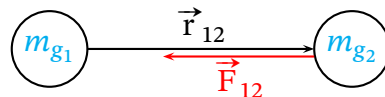


FIG. 3.2 – Détermination du signe de la force de gravitation

La force est de sens opposé à  $\vec{r}_{12}$ , donc le signe est négatif. Le modèle de force exercée par un corps 1 (rôle actif) sur un corps 2 (rôle passif) est alors

$$\vec{F}_{12} \leftarrow -\mathcal{G} \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r} \tag{3.13}$$

où la constante de proportionnalité  $\mathcal{G}$  est appelée *constante gravitationnelle*.  $\frac{\vec{r}_{12}}{r}$  est un vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

La loi de l'action-réaction donne :

$$\vec{F}_{21} \cong -\vec{F}_{12}$$

Par exemple la force exercée par la Terre sur un corps est égale et opposée à la force exercée par ce corps sur la Terre. Les rôles actif et passif sont échangés, le rôle passif correspond au système étudié, celui sur lequel s'exerce la force.

**Définition 3.14 : Champ gravitationnel créé par une masse**

On définit le champ gravitationnel créé par la masse grave  $m_{g1}$  indépendamment de la masse grave  $m_{g2}$ , par

$$\vec{g}_1 \leftarrow -\frac{\mathcal{G} m_{g1}}{r^3} \vec{r}_{12} \tag{3.14}$$

**Exemple 3.5**

Le champ gravitationnel créé par la Terre s'écrit :

$$\vec{g}_{\oplus} \leftarrow -\mathcal{G} \frac{M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r}$$

où  $M_{g\oplus}$  est la masse gravitationnelle de la Terre.

D'où la relation entre le modèle de force de gravitation et le modèle de champ gravitationnel :

$$\vec{F}_{12} \leftarrow m_{g_2} \vec{g}_1 \tag{3.15}$$

En utilisant l'axiome 3.5 page 31 de la RFD pour un corps tombant à la surface de la Terre

$$-\mathcal{G} \frac{m_g M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \frac{d(m_i \vec{v})}{dt}$$

La masse inerte du corps est supposée constante :

$$-\mathcal{G} \frac{m_g M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r} \Rightarrow m_i \vec{a} \tag{3.16}$$

### Expérience 3.7

L'expérience montre que si l'on se place dans le vide pour s'affranchir des frottements de l'air, tous les corps de masse négligeable devant celle de la Terre, tombent vers la Terre avec la même accélération  $\vec{a}$  indépendamment de leur masse (grave ou inerte). Plus généralement, les corps lâchés au même endroit avec la même vitesse initiale, suivent les mêmes trajectoires dans l'espace et dans le temps.

### Remarque 3.8

On néglige le fait que les corps et la Terre tombent vers leur centre de gravité commun, car la masse des corps étudiés est supposée négligeable devant celle de la Terre. Si l'on considère l'interaction Terre-Lune, cette approximation n'est plus valable.

Cette expérience nous suggère de simplifier l'égalité (3.16) par  $m_i$  et  $m_g$ , c.-à-d. supposer l'égalité

$$m_{\text{inerte}} \cong m_{\text{grave}}$$

pour obtenir une accélération indépendante de la masse du corps considéré. Cette égalité est observationnelle, elle ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Elle est justifiée au § 2.5 page 9 par le *principe d'équivalence*. Les expériences récentes montrent que masse inerte et masse grave sont égales avec une incertitude relative de  $10^{-15}$ . On choisit le même corps de référence pour la masse inerte et la masse grave ce qui permet de ne pas introduire de constante de passage arbitraire entre les deux, et qui fixe par conséquent la constante gravitationnelle :

$$-\mathcal{G} \frac{M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \vec{a}$$

$$\vec{g}_{\oplus} \Rightarrow \vec{a}$$

Le champ gravitationnel terrestre local  $\vec{g}_{\oplus}$  provoque l'accélération  $\vec{a}$  d'un objet quelconque de masse négligeable par rapport à celle de la Terre. On mesure alors la constante gravitationnelle grâce à un pendule de torsion<sup>4</sup> :

$$\mathcal{G} \approx 6,674\ 30 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Le fait que la trajectoire des corps au voisinage de la Terre ne dépende pas des corps eux-même montre que cette trajectoire dans l'espace et dans le temps est déterminée uniquement par la Terre (au moins en première approximation, lorsque les corps ont une masse petite devant celle de la Terre).

### Expérience 3.8

Quelle que soit la matière (or, argent, plomb, verre, sable, sel, eau, etc.), si l'on double une quantité de matière homogène en doublant son volume, on constate lors d'une interaction gravitationnelle que la masse grave est double. La masse grave  $m_g$  semble donc proportionnelle à la quantité de matière :

$$\text{Quantité de matière} \propto m_g$$

À nouveau, cette loi est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Elle va dans le sens de l'égalité supposée  $m_i = m_g$ .

### Exemple 3.6 : Le pendule simple, plan

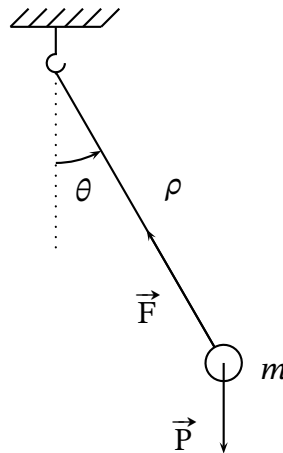


FIG. 3.3 – Pendule simple, plan

On note  $\vec{F}$  la force exercée par la tige sur la masse  $m$  et  $\vec{P}$  son poids. (9.2) page 113 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$  :

$$\begin{aligned} m_i \vec{a} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P} + \vec{F} \\ m_i \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m_i \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho &= -m_g g \sin(\theta) \vec{e}_\theta + m_g g \cos(\theta) \vec{e}_\rho - F \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

4. Henry Cavendish, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1798.

qui donne le système,

$$\begin{cases} m_i \rho \dot{\theta}^2 + m_g g \cos(\theta) = F \\ m_i \rho \ddot{\theta} + m_g g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

La seconde relation est l'équation différentielle de l'élongation  $\theta(t)$  du pendule simple en fonction du temps. Dans l'approximation des petites oscillations, on utilise le développement limité de la fonction sinus à l'ordre un. L'équation devient :

$$m_i \rho \ddot{\theta} + m_g g \theta = 0$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre par rapport au temps est de forme sinusoïdale, fonction sinus ou cosinus au choix, la phase à l'origine des temps  $\varphi_0$  permettant de passer d'une fonction circulaire à l'autre :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{\theta}(t) &= A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{\theta}(t) &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

où  $A$  est l'amplitude (élongation maximale) et  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  est la phase du mouvement oscillatoire. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve l'expression de la pulsation propre,

$$\begin{aligned} -m_i \rho A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + m_g g A \sin(\omega t + \varphi_0) &= 0 \\ \omega &= \pm \sqrt{\frac{m_g g}{m_i \rho}} \end{aligned}$$

pour laquelle on ne conserve que la valeur positive. La fréquence des petites oscillations est alors :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_g g}{m_i \rho}}$$

Elle dépend du rapport masse grave sur masse inerte. On peut donc se servir du pendule simple pour vérifier expérimentalement la constance de ce rapport pour différentes matières. C'est ce que fit Newton en utilisant de l'or, de l'argent, du plomb, du verre, du sable, du sel, du bois, de l'eau et du blé, montrant que le rapport était constant avec une précision relative de l'ordre de  $10^{-3}$ .

### Exemple 3.7

Reprenons l'ex. 3.4 page 27 d'une masse attachée à un ressort dans le plan vertical, en présence d'un champ gravitationnel  $\vec{g}$ . Prenons comme système la masse.

- La position d'équilibre  $x_0$  de la masse par rapport à la position de repos du ressort seul, dépend de sa masse grave  $m_g$  (la position d'équilibre est fonction de l'intensité du champ de gravitation, donc de la masse grave). Déterminons la position d'équilibre

$x_0$  de la masse :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{ext} &\Rightarrow \vec{0} \\ \vec{T}_0 + \vec{P} &\Rightarrow \vec{0}\end{aligned}$$

$\vec{T}_0$  est le modèle de force de rappel statique du ressort,  $\vec{P}$  est le modèle de force de pesanteur de la masse. Remplaçons par leur expression respective :

$$\begin{aligned}-k\vec{x}_0 + m_g\vec{g} &\Rightarrow \vec{0} \\ -kx_0\vec{j} - m_gg\vec{j} &\Rightarrow \vec{0} \\ kx_0 + m_gg &\Rightarrow 0\end{aligned}$$

- L'oscillation  $x(t)$  de la masse autour de sa position d'équilibre est déterminée par sa masse inerte car en l'absence de champ de gravitation la masse oscille quand même autour de la position de repos du ressort seul. Déterminons le mouvement de la masse grâce à la RFD :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{ext} &\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{T}(t) + \vec{P} &\Rightarrow m_i\vec{a}(t) \\ -k[\vec{x}(t) + \vec{x}_0] + m_g\vec{g} &\Rightarrow m_i\vec{\ddot{x}}(t) \\ [-kx(t) - kx_0 - m_gg]\vec{j} &\Rightarrow m_i\ddot{x}(t)\vec{j} \\ -kx(t) &\Rightarrow m_i\ddot{x}(t)\end{aligned}$$

- Le problème n'est plus « que » mathématique. Pour chercher une solution, supposons l'égalité stricte :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m_i} x(t) = 0$$

Les fonctions circulaires sinus et cosinus (et les exponentielles complexes) changent de signe lorsque dérivées deux fois. La solution a donc pour forme générale :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

où  $A$  est l'amplitude maximale,  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  est la phase,  $\omega$  est la pulsation et  $\varphi_0$  est la phase à l'origine des temps.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

si bien que :

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m_i} A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m_i}$$

Si l'amplitude  $x(t)$  est maximale à  $t = 0$  alors  $\varphi_0 = 0$  et :

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_i}} t\right)$$

### Exemple 3.8

Une balance est tarée avec un récipient posé dessus. À  $t = 0$  le récipient est vide et la balance indique 0. On verse de l'eau dans le récipient d'une hauteur  $h$ , avec un débit massique  $\mu$  constant (une sorte de choc continu). Qu'indique la balance ?

a) Première méthode : système à masse variable

Prenons pour système l'eau dans le récipient. Ce système est à masse variable fonction du temps

$$m(t) = \mu t$$

Dans le référentiel supposé galiléen du récipient et de la balance liés à la Terre, le système est immobile, sa vitesse ne varie pas et reste nulle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système}} &= m_{\text{système}} \frac{d\vec{v}_{\text{système}}}{dt} + \frac{dm_{\text{système}}}{dt} \vec{v}_{\text{système}} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Les conséquences sont nulles, la somme des causes est donc nulle elle aussi. D'après l'axiome 3.5 page 31 de la RFD, la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système est donc nulle. Soient  $\vec{R}(t)$  la réaction de la balance sur l'eau via le récipient,  $\vec{P}(t)$  le poids de l'eau présente dans le récipient, et  $\vec{f}$  la force exercée par l'eau qui percute le système avec la vitesse  $\vec{v}$  :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{ext} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système}} \\ \vec{R}(t) + \vec{P}(t) + \vec{f} &= \vec{0} \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique pendant la chute donne la norme de la vitesse d'impact :

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

En un temps  $dt$  le système reçoit de la part de l'eau qui tombe la quantité de mouvement  $\vec{v} dm$ , donc l'eau qui tombe exerce sur le système la force :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{dm}{dt} \vec{v} \\ &= \mu \vec{v} \end{aligned} \tag{3.17}$$

À l'instant  $t$  la balance affiche la norme de sa réaction :

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= -\vec{P}(t) - \vec{f} \\ \|\vec{R}(t)\|_{\vec{j}} &= -[-gm(t)\vec{j}] - (-\mu\|\vec{v}\|\vec{j}) \\ \|\vec{R}(t)\| &= \mu(gt + \sqrt{2gh})\end{aligned}$$

b) Seconde méthode : système à masse constante

Prenons pour système une masse constante  $m$  d'eau. En arrivant dans le récipient elle subit une variation de vitesse  $\Delta\vec{v}$  en un intervalle de temps  $\Delta t$ . La force exercée sur le système a pour expression :

$$\vec{f} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La variation de vitesse est indépendante de la durée de l'impact, elle vaut

$$\begin{aligned}\Delta\vec{v} &= \vec{v} - \vec{0} \\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

Pour un système de masse d'eau infinitésimale  $dm$  versée en un temps  $dt$  :

$$\vec{f} = dm \frac{d\vec{v}}{dt}$$

C'est un choc, c.-à-d. une variation de vitesse importante pendant un temps très court. Il nous faut la durée  $dt$  pendant laquelle la masse  $dm$  impacte le récipient. C'est le débit qui indirectement nous donne cette durée. Pour une masse d'eau  $m$  et un débit  $\mu$ , la durée totale de l'impact vaut  $m/\mu$ . Pour une masse d'eau  $dm$ , la durée est donc  $dt = dm/\mu$  si bien que

$$\vec{f} = \mu\vec{v}$$

et l'on retrouve (3.17).

### Exemple 3.9

Du sable tombe en continu sur un tapis roulant avec un débit massique  $\mu$  constant. En bout de tapis le sable tombe si bien que la masse de sable sur le tapis est constante. Quelle force doit exercer le moteur du tapis roulant pour entrainer le sable et maintenir constante la vitesse  $\vec{v}$  du tapis roulant ?

a) Première méthode

Prenons pour système le tapis roulant et le sable qu'il charrie. Dans le référentiel supposé galiléen qui lui est lié le système est immobile (sa vitesse est nulle et ne varie pas). D'après l'axiome 3.5 page 31 de la RFD, la somme des forces extérieures s'exerçant sur lui est nulle :

$$\begin{aligned}\sum \vec{f} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système}} \\ \vec{f}_{\text{moteur}} + \vec{f}_{\text{sable}} &= \vec{0}\end{aligned}$$

En un temps  $dt$  le système reçoit de la part du sable la quantité de mouvement  $-\vec{v}dm$ , donc le sable exerce sur le système la force :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{sable} &= -\frac{dm}{dt} \vec{v} \\ &= -\mu \vec{v} \\ \vec{f}_{moteur} &= \mu \vec{v}\end{aligned}$$

b) Seconde méthode

Si l'on prend comme système une masse  $m$  de sable tombée en un temps  $\Delta t$ , la force moyenne sur ce temps  $\Delta t$  exercée par le moteur sur le système a pour expression :

$$\vec{f}_{moteur} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La variation de vitesse du sable est indépendante de la durée de l'impact, elle vaut

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v} &= \vec{v} - \vec{0} \\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

Pour une masse infinitésimale  $dm$  de sable déposée sur le tapis en un temps  $dt$  :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{moteur} &= \frac{dm}{dt} \vec{v} \\ &= \mu \vec{v}\end{aligned}$$

## 3.7 Énergie

### 3.7.1 Travail d'une force

Pour mesurer l'effet total d'une force nous calculons la circulation de cette force le long de la trajectoire du point sur lequel elle s'exerce. Intégrons l'axiome 3.5 page 31 de la RFD par rapport à l'espace parcouru par le système sous l'action des forces exercées sur ce système :

$$\begin{aligned}\int_A^B \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} &\Rightarrow \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ \sum \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &\Rightarrow \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} \quad (3.18)\end{aligned}$$

Le produit scalaire permet de ne prendre en compte que les forces ou les composantes de force qui créent le déplacement ou qui s'y opposent.

#### Définition 3.15 : Travail

On appelle travail d'une force, et on note  $W$  (« work »), l'intégrale curviligne d'un modèle

de force sur le trajet de cette force.

$$W \Leftarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

### Remarque 3.3

- Le travail est positif si le déplacement est dans le sens de la force, le produit scalaire est alors positif. C'est toujours le cas lorsque la force crée le déplacement. Le travail est négatif si le déplacement et la force sont de sens contraire, comme pour toutes les forces de frottements. Il est nul si le déplacement et la force sont perpendiculaires, comme pour les forces de réaction
- Le travail des forces intérieures d'un système isolé peut être positif. Prenons par exemple un système isolé constitué de deux corps en interaction, d'après la loi de l'action-réaction 3.1 page 30, les deux forces intérieures sont égales et opposées :

$$\vec{f}_1 \cong -\vec{f}_2$$

Si les deux corps se déplacent, le déplacement est de même direction mais en sens opposé, car les forces étant opposées, elles sont toutes les deux attractives ou répulsives. Le travail intérieur de ces deux forces s'écrit :

$$\int_A^B \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{f}_2 \cdot (-d\vec{r}) = 2 \int_A^B \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} \neq 0$$

### 3.7.2 Énergie cinétique

Dans (3.18) page ci-contre, pour simplifier le raisonnement sans perdre en généralité, posons

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

Le terme de gauche s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} &= \int_A^B \left( \frac{dp_x}{dt} dx + \frac{dp_y}{dt} dy \right) \\ &= \int_A^B \frac{d(mv_x)}{dt} dx + \int_A^B \frac{d(mv_y)}{dt} dy \\ &= \int_A^B \left( \frac{dm}{dt} v_x + m \frac{dv_x}{dt} \right) dx + \int_A^B \left( \frac{dm}{dt} v_y + m \frac{dv_y}{dt} \right) dy \end{aligned}$$

La masse du système est supposée constante :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} &= \int_A^B m \frac{dv_x}{dt} dx + \int_A^B m \frac{dv_y}{dt} dy \\ &= m \int_A^B dv_x \frac{dx}{dt} + m \int_A^B dv_y \frac{dy}{dt} \\ &= m \int_A^B v_x dv_x + m \int_A^B v_y dv_y \\ &= \frac{1}{2} m [v_x^2]_A^B + \frac{1}{2} m [v_y^2]_A^B \\ &= \frac{1}{2} m [v_x^2 + v_y^2]_A^B \\ &= \left[ \frac{1}{2} m v^2 \right]_A^B \text{ dans tout référentiel} \end{aligned} \tag{3.19}$$

**Définition 3.16 : Énergie cinétique**

Elle est définie par

$$E_c \Leftarrow \frac{1}{2}mv^2$$

Avec cette définition (3.19) devient :

$$\int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = E_{cB} - E_{cA} \text{ dans tout référentiel}$$

L'énergie cinétique n'est pas une modélisation, elle est toujours une fonction explicite de la vitesse. Elle peut aussi être une fonction explicite des coordonnées, par exemple en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  :

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\theta}^2)$$

Elle peut être une fonction implicite des coordonnées, de l'accélération, du temps ou d'autres paramètres par l'intermédiaire de la vitesse.

**Exemple 3.10**

Une boîte de masse négligeable, au repos dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , contient deux particules de masse  $m$  qui se déplacent horizontalement avec une vitesse  $v$  changeant de sens à chaque choc sur la paroi interne de la boîte. L'énergie cinétique contenue dans la boîte vaut :

$$\begin{aligned} E_c &= 2 \times \frac{1}{2}mv^2 \\ &= mv^2 \end{aligned}$$

Si la boîte ou l'observateur est accéléré horizontalement jusqu'à la vitesse  $v$ , l'énergie totale du système boîte par rapport à l'observateur peut être calculée de deux façons :

- à chaque instant une particule a une vitesse nulle par rapport à l'observateur alors que l'autre a une vitesse  $2v$ , donc :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(2v)^2 \\ &= 2mv^2 \end{aligned}$$

- l'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique de la boîte et des énergies cinétiques des particules dans le référentiel du centre d'inertie de la boîte :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 2mv^2 \end{aligned}$$

### 3.7.3 Énergie potentielle

Revenons à (3.18) page 40. Pour intégrer la somme des travaux des modèles des forces exercées sur le système, nous devons faire des hypothèse sur ces modèles de force.

#### Définition 3.17 : Gradient

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction scalaire de trois variables, habituellement les coordonnées spatiales, qui en tout point de son espace de définition renvoie un scalaire.  $f$  définit donc un champ de scalaires. On appelle gradient l'opérateur différentiel  $\overrightarrow{\text{grad}}$ , tel qu'appliqué à  $f$  on ait en coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

L'opérateur gradient est une dérivée spatiale (ici tridimensionnelle) qui en chaque point de l'espace de définition d'une fonction scalaire donne son taux de variation dans la direction de chacune des coordonnées. C'est la généralisation à plusieurs dimensions de la notion de dérivée directionnelle. L'opérateur vectoriel gradient a pour coordonnées rectangulaires  $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ . Lorsqu'il s'applique à  $f$  on l'appelle gradient de  $f$ . Il prend en entrée la fonction  $f$  et renvoie le champ de vecteurs  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$ . Un champ de vecteurs est une fonction qui en tout point de son espace de définition renvoie un vecteur. Cette notion fût inventée par Michael Faraday par analogie avec les champs de blé, chaque pied représentant un vecteur.

#### Définition 3.18 : Potentiel d'un champ vectoriel

La fonction scalaire  $f$  est dite potentielle du champ vectoriel  $\vec{A}$  ssi :

$$\vec{A} \leftarrow -\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Réciproquement, le champ vectoriel  $\vec{A}$  dérive du champ de scalaires  $f$ .

#### Exemple 3.11

En coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques, dans leur base associée :

$$\begin{aligned} A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}\right) \\ A_\rho \vec{e}_\rho + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z &= -\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z\right) \\ A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi &= -\left(\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi\right) \end{aligned}$$

Lorsque le champ vectoriel est un modèle de force, la fonction scalaire est appelée énergie potentielle de cette force.

#### Définition 3.19 : Énergie potentielle ou potentiel de force

Un modèle de force dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  lorsque l'on peut écrire :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \quad (3.20)$$

$\vec{F}$  étant un modèle de force,  $E_p$  est un modèle d'énergie potentielle adapté au problème. La convention de signe négatif rend compte du fait que la force est dirigée selon les potentiels décroissants. Tout comme le modèle de force dont elle dérive, l'énergie potentielle peut dépendre explicitement ou implicitement des coordonnées, de la norme du vecteur vitesse, de la norme du vecteur accélération, du temps, ou de tout autre paramètre.

Les surfaces de l'espace où le potentiel a une valeur fixée sont appelées *surfaces équipotentielles*. La force est en chaque point normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point, elle est dirigée dans le sens des potentiels décroissants (par exemple la force de pesanteur est dirigée dans le sens des énergies potentielles décroissantes) et son intensité est égale à la dérivée directionnelle du potentiel suivant la normale.

### Exemple 3.12 : Énergie potentielle d'une force de gravitation

Soit  $E_{pp}$  l'énergie potentielle de pesanteur du modèle de la force gravitationnelle  $\vec{F}$ . D'après la définition 3.18 page précédente, en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \\ F \vec{e}_\rho &= -\frac{\partial E_{pp}}{\partial \rho} \vec{e}_\rho \\ F &= -\frac{\partial E_{pp}}{\partial \rho} \\ \int_A^B F d\rho &= -(E_{ppB} - E_{ppA}) \end{aligned}$$

La relation (3.13) page 33 donne le modèle de force gravitationnelle :

$$\begin{aligned} -(E_{ppB} - E_{ppA}) &= -\int_A^B \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\rho^2} d\rho \\ E_{ppA} - E_{ppB} &= \left[ \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\rho} \right]_A^B \end{aligned}$$

$$E_{pp} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\rho} \quad (3.21)$$

### Exemple 3.13 : Potentiel d'un champ gravitationnel

Soit  $\mathcal{V}$  le potentiel scalaire du champ gravitationnel  $\vec{g}$ . D'après la déf. 3.18 page précédente, en coordonnées sphériques :

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{V})$$

$$g \vec{e}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} \vec{e}_\rho$$

$$g = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho}$$

$$\int_A^B g d\rho = -(\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_A)$$

La relation (3.14) page 33 donne l'expression du champ gravitationnel :

$$-(\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_A) = -\int_A^B \frac{gm}{\rho^2} d\rho$$

$$\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B = \left[ \frac{gm}{\rho} \right]_A^B$$

$$\boxed{\mathcal{V} = -\frac{gm}{\rho}} \quad (3.22)$$

$\mathcal{V}$  est le potentiel du champ de gravitation. En partant de (3.15) page 34, nous trouvons la relation entre énergie potentielle et potentiel d'un champ :

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{g}_1$$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p_{12}}) = -m_2 \overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{V}_1)$$

$$E_{p_{12}} = m_2 \mathcal{V}_1$$

relation que l'on retrouve directement en utilisant (3.21) et (3.22).

Lorsque plusieurs forces s'exercent sur le système, les modèles étant des vecteurs, nous pouvons les additionner. Par linéarité de l'opérateur gradient, nous pouvons de même additionner les énergies potentielles correspondant à ces forces :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p1}) - \overrightarrow{\text{grad}}(E_{p2})$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p1} + E_{p2})$$

Donc les énergies potentielles s'additionnent :

$$E_{p \text{ Totale}} = \sum_i E_{pi}$$

Dans le cas général la force et son modèle associé dépendent du temps (par exemple une particule chargée dans un champ électrique variable) et de la position (par exemple le champ de gravitation). Par conséquent le modèle d'énergie potentielle aussi,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p(\vec{r}, t))$$

et la différentielle totale exacte (dte) de l'énergie potentielle s'écrit :

$$dE_p(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} + \frac{\partial E_p}{\partial t} dt$$

Si la force est indépendante du temps, elle dérive (spatialement) d'une énergie potentielle elle aussi indépendante du temps, et dans ce cas la dte s'écrit :

$$dE_p(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r}$$

### 3.7.4 Énergie mécanique

- Cas d'un modèle de force indépendant du temps  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  (ne dépend pas explicitement du temps mais dépend du temps implicitement via  $\vec{r}(t)$ )

#### **Théorème 3.3**

*Si un modèle de force indépendant du temps dérive d'une énergie potentielle, alors le travail de ce modèle de force ne dépend pas du trajet suivi mais uniquement des points de départ et d'arrivée.*

*Démonstration.* Supposons que le modèle de force dérive d'une énergie potentielle et ne dépende pas explicitement du temps :

$$\begin{aligned}
 \int_A^B \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} &= \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\
 &= - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_A^B \left( \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right) \\
 &= - \int_A^B dE_p \\
 &= - [E_p]_A^B \\
 &= E_p(A) - E_p(B) \quad \text{pour tout observateur galiléen} \quad \square
 \end{aligned}$$

On démontre le théorème réciproque.

#### **Théorème 3.4**

*Si le travail d'un modèle de force indépendant du temps est indépendant du trajet suivi, alors ce modèle de force dérive d'une énergie potentielle.*

*Démonstration.* Imaginons deux trajets pour aller de  $A$  à  $B$ , et supposons que le travail effectué soit le même pour chaque trajet. Si l'on utilise le premier trajet pour l'aller, et le second pour le retour, le travail à l'aller est égal et opposé à celui du retour, autrement dit il est nul le long du chemin fermé :

$$\text{travail indépendant du trajet} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = 0$$

#### **Définition 3.20 : Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs**

Dans le repère naturel orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associé au système de coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ , soit un champ de vecteurs  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ . On appelle rotationnel

l'opérateur différentiel  $\overrightarrow{\text{rot}}$ , tel qu'appliqué à  $\vec{u}$  on obtienne le champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \leftarrow \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \vec{k}$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = \int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}(\vec{r}(t))) \cdot \vec{n} ds$$

où  $\vec{n}$  est la normale (sortante ou entrante selon le sens de parcours de  $C$ ) à la surface  $S$  s'appuyant sur le chemin  $C$ . Par conséquent le vecteur rotationnel de  $\vec{F}(\vec{r})$  est nul :

$$\text{travail indépendant du trajet} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}(\vec{r}(t))) = \vec{0}$$

Nous avons ici besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant :

### **Théorème 3.5 : Rotationnel du gradient**

*Pour toute fonction scalaire  $\phi$  de dérivées partielles secondes continues (pour pouvoir intervertir les dérivées partielles), le rotationnel du gradient de la fonction  $\phi$  est nul :*

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) &= \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_x \phi \\ \partial_y & \partial_y \phi \\ \partial_z & \partial_z \phi \end{vmatrix} = (\partial_y \partial_z \phi - \partial_z \partial_y \phi) \vec{i} + (\partial_z \partial_x \phi - \partial_x \partial_z \phi) \vec{j} + (\partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi) \vec{k} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Pour que son rotationnel soit nul, le modèle de force doit dériver d'une énergie potentielle :

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p(\vec{r}(t))) \quad \square$$

- Cas d'un modèle de force dépendant explicitement du temps  $\vec{F}(\vec{r}(t), t)$

La dte de l'énergie potentielle s'écrit

$$dE_p(x, y, z, t) = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz + \frac{\partial E_p}{\partial t} dt$$

si bien que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(E_p(\vec{r}(t), t)) \cdot d\vec{r} &= dE_p - \frac{\partial E_p}{\partial t} dt \\ \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p(\vec{r}(t), t)) \cdot d\vec{r} &= -\int_A^B dE_p + \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial E_p}{\partial t} dt \\ &= -[E_p]_A^B + \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial E_p}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Le travail du modèle de force peut dépendre du chemin suivi à cause du second terme du membre de droite de l'égalité. Autrement dit, le travail ne dépend pas du chemin géométrique (courbe dans l'espace) mais dépend du chemin cinématique (courbe dans l'espace et le temps), c.-à-d. de la loi horaire  $\vec{r}(t)$ .

La relation (3.18) page 40 devient

$$E_{p_A} - E_{p_B} \Rightarrow E_{c_B} - E_{c_A} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

La variation d'énergie potentielle provoque la variation de vitesse du système. En effet, d'après le principe d'inertie celle-ci doit rester constante en l'absence d'action extérieure au système. Réorganisons les termes :

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \quad (3.23)$$

Le symbole = indique que la relation de causalité est perdue.

### Définition 3.21 : Énergie mécanique

L'énergie mécanique  $E_m$  est définie par :

$$E_m \Leftarrow E_c + E_p$$

Le choix du signe négatif de la définition de l'énergie potentielle (3.20) page 44 se retrouve ici. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Si nous avons choisi un signe positif, l'énergie potentielle serait l'opposée de la convention choisie en physique, et l'énergie mécanique serait la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Il ne s'agit là que d'une convention de définition, écrire  $a + b$  ou écrire  $a - (-b)$ .

Avec cette nouvelle définition, la relation (3.23) de la présente page devient :

$$E_{m_A} = E_{m_B} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

### Théorème 3.6 : Conservation de l'énergie mécanique

*Lorsque le modèle de force dérive d'une énergie potentielle scalaire qui ne dépend pas explicitement du temps, et lorsque la masse se conserve, l'énergie mécanique se conserve le long de tout trajet pour un observateur galiléen :*

$$E_m \cong c^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Lorsque les conditions sont réunies, l'énergie mécanique est la même en tout point du trajet, donc aussi à tout instant. Elle ne dépend donc pas du temps et le système est dit *conservatif*. Les forces extérieures dérivant d'un potentiel scalaire, appelé énergie potentielle, qui ne dépend pas explicitement du temps sont dites *conservatives*, dans le sens où cela implique la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique est alors une constante du mouvement, appelée aussi intégrale première du mouvement.

### Exemple 3.14

Un corps de poids  $\vec{P}$  tombe dans un champ gravitationnel  $\vec{g}$ . En négligeant les forces de

frottement de l'air, (3.18) page 40 donne :

$$\int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} \Rightarrow E_{c_B} - E_{c_A}$$

Le poids du corps  $\vec{P} \leftarrow m\vec{g}$  est un modèle de la force d'interaction gravitationnelle entre le corps et la Terre lorsque  $\vec{g}$  peut être supposé constant. Il dérive de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  telle que :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \\ -mg\vec{k} &= -\frac{dE_{pp}}{dz} \vec{k} \\ E_{pp} &= mgz + C^{ste/z} \end{aligned}$$

Fixer la valeur de la constante  $C^{ste/z}$  revient à fixer le zéro de l'énergie potentielle de pesanteur pour une valeur de  $z$  donnée. Nous pouvons choisir librement ce zéro car seule une différence d'énergie potentielle n'a de sens physique. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \cdot d\vec{r} &\Rightarrow E_{c_B} - E_{c_A} \\ E_{pp}(A) - E_{pp}(B) &\Rightarrow E_{c_B} - E_{c_A} \\ E_{m_A} &= E_{m_B} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique se conserve. On remarque que l'énergie potentielle de pesanteur dépend implicitement du temps par l'intermédiaire de la coordonnée  $z$ ,  $E_{pp} = mgz(t) + C^{ste/z}$ . Elle est fonction de la position verticale, elle-même fonction du temps :

$$\begin{aligned} dE_{pp}(z) &= \frac{\partial E_{pp}}{\partial z} dz \\ \frac{dE_{pp}(z)}{dt} &= \frac{\partial E_{pp}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= mg\dot{z} \end{aligned}$$

Pour autant l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = 0$$

Prenons maintenant en compte les frottements de l'air lors de la chute du corps :

$$\begin{aligned} E_{c_B} - E_{c_A} &\Rightarrow \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ E_{c_B} - E_{c_A} &\Rightarrow E_{pp}(A) - E_{pp}(B) + \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ E_{m_B} - E_{m_A} &= \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique perdue entre les points  $A$  et  $B$  est égale à l'intégrale de la force de frottement le long du trajet du corps. Cette énergie d'abord sous forme d'agitation thermique du milieu et du corps, se dissipe ensuite par rayonnement, principalement infrarouge.

L'axiome 3.5 page 31 de la RFD, est une équation vectorielle qui est l'écriture condensée de trois équations scalaires, une pour chaque coordonnée d'espace. Lorsque toutes les forces sont conservatives, elle est remplacée par la seule équation scalaire du théorème 3.6 page 48 de conservation de l'énergie mécanique. Cela n'est pas toujours possible car toutes les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle. Par exemple il est clair que les forces de frottement dépendent du trajet suivi entre  $A$  et  $B$ . Les forces non conservatives, comme les forces de frottement, sont dit *dissipatives*. La perte d'énergie mécanique est donc égale au travail des forces dissipatives.

**Exemple 3.15**

On considère la collision de deux mobiles de masse  $M_1$  et  $M_2$ . Appelons  $x$  l'axe  $M_1 - M_2$  avant la collision, dans l'hypothèse d'un choc parfaitement frontal on suppose que les mobiles restent sur l'axe  $x$  après la collision. Plaçons-nous dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de repos de la masse  $M_2$  avant la collision ( $\vec{v}_2 = 0$ ) :



FIG. 3.4 – Avant impact



FIG. 3.5 – Après impact pour  $M_2 = 2M_1$

La conservation de la quantité de mouvement donne une seule équation (selon la direction du choc) pour deux inconnues  $v'_1$  et  $v'_2$  :

$$M_1 \vec{v}'_1 + M_2 \vec{v}'_2 = M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2$$

$$M_1 v'_{1x} + M_2 v'_{2x} = M_1 v_{1x}$$

La seconde équation est la conservation de l'énergie. Supposons qu'il n'y ait pas « dégagement de chaleur » lors de la collision, le choc est élastique et l'énergie cinétique se conserve :

$$\frac{1}{2} M_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} M_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} M_1 v^2_1 + \frac{1}{2} M_2 v^2_2$$

$$M_1 v'^2_1 + M_2 v'^2_2 = M_1 v^2_1$$

**Remarque 3.9**

On distingue  $v'_{1x}$  de  $v'_1$ . La composante en  $x$  de  $\vec{v}'_1$ , notée  $v'_{1x}$ , est algébrique, elle peut prendre des valeurs négatives. En revanche, la norme de  $\vec{v}'_1$ , notée  $v'_1$ , est positive ou nulle. On peut cependant interchanger  $\vec{v}'_1$  et  $\vec{v}'_{1x}$ .

Notons les paramètres en majuscules  $M_1, M_2, V_{1x}$ , et les variables en minuscules  $v'_{1x}$  et  $v'_{2x}$ . Soit donc le système à résoudre :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v'_{1x} = V_{1x} - \frac{M_2}{M_1} v'_{2x} \\ v_1'^2 + \frac{M_2}{M_1} v_2'^2 = V_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_{1x} = V_{1x} - \frac{M_2}{M_1} v'_{2x} \\ \left( V_{1x} - \frac{M_2}{M_1} v'_{2x} \right)^2 + \frac{M_2}{M_1} v_2'^2 = V_1^2 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} v'_{1x} = V_{1x} - \frac{M_2}{M_1} v'_{2x} \\ V_{1x}^2 - \frac{2M_2 V_{1x}}{M_1} v'_{2x} + \frac{M_2^2}{M_1^2} v_2'^2 + \frac{M_2}{M_1} v_2'^2 = V_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_{1x} = V_{1x} - \frac{M_2}{M_1} v'_{2x} \\ \left( \frac{M_2^2}{M_1^2} + \frac{M_2}{M_1} \right) v_2'^2 = \frac{2M_2 V_{1x}}{M_1} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} v'_{1x} = V_{1x} - \frac{M_2}{M_1} v'_{2x} \\ \left( \frac{M_2(M_2 + M_1)}{M_1^2} \right) v_2'^2 = \frac{2M_2 V_{1x}}{M_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_{1x} = V_{1x} - \frac{2M_2 V_{1x}}{M_1 + M_2} \\ v'_{2x} = \frac{2M_1 V_{1x}}{M_1 + M_2} \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} v'_{1x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_{1x} \\ v'_{2x} = \frac{2M_1}{M_1 + M_2} V_{1x} \end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple pour  $M_1 = 1, M_2 = 2$  et  $V_{1x} = 3$  on a

$$v'_{1x} = -1, \quad v'_{2x} = 2$$

Par exemple pour  $M_1 = M_2$  on a un carreau

$$v'_{1x} = 0, \quad v'_{2x} = V_{1x}$$

**Exemple 3.16**

Si les deux mobiles restent liées après la collision il ne reste que la seule inconnue  $v'$ .



FIG. 3.6 – Avant impact

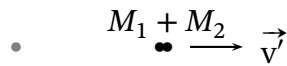


FIG. 3.7 – Après impact pour  $M_2 = 2M_1$

Seule est nécessaire l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} M_1 \vec{v}' + M_2 \vec{v}' &= M_1 \vec{V}_1 \\ M_1 v'_x + M_2 v'_x &= M_1 V_{1x} \\ v'_x &= \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_{1x} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer la « chaleur » (l'énergie d'agitation thermique) créée lors du choc. L'énergie cinétique finale a pour expression :

$$\begin{aligned} E'_c &= \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v'^2 \\ &= \frac{1}{2} (M_1 + M_2) \frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} V_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} V_1^2 \end{aligned}$$

La « chaleur produite » dans le système lors de la collision est égale à la perte d'énergie cinétique totale du système :

$$\begin{aligned} Q &= E_c - E'_c \\ &= \frac{1}{2} M_1 V_1^2 - \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} V_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_1^2 \end{aligned}$$

Calculons le pourcentage d'énergie cinétique transformé en énergie d'agitation thermique :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{E'_c}{E_c} &= 1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2} \\ &= \frac{M_2}{M_1 + M_2} \end{aligned}$$

Par exemple pour  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 2$  et  $V_{1x} = 6$  on a

$$v'_x = 2, \quad E_c = 18, \quad E'_c = 6, \quad Q = 12$$

### Exemple 3.17

On considère la collision de deux mobiles de masse  $M_1$  et  $M_2$ , d'angles de diffusion  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de repos du mobile de masse  $M_2$  avant la collision :



FIG. 3.8 – Dans  $\mathcal{R}$  avant impact

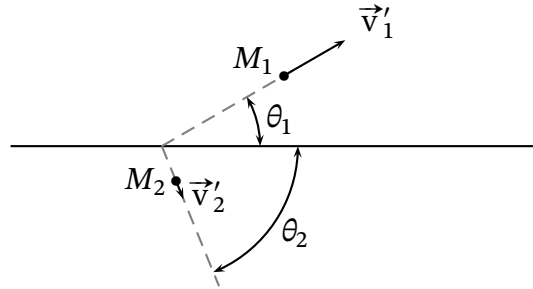


FIG. 3.9 – Dans  $\mathcal{R}$  après impact pour  $M_2 = 2M_1$

Supposons donnés les masses  $M_1$  et  $M_2$ , l'angle  $\theta_1$ , ainsi que les vitesses initiales  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2 = \vec{0}$ . Cherchons les trois inconnues  $v'_1$ ,  $v'_2$  et  $\theta_2$ . Dans  $\mathcal{R}$ , la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$M_1 \vec{v}'_1 + M_2 \vec{v}'_2 = M_1 \vec{V}_1$$

Soient  $x$  l'axe de collision et  $y$  un axe perpendiculaire à  $x$ . En projetant sur  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} M_1 v'_1 \cos(\theta_1) + M_2 v'_2 \cos(\theta_2) = M_1 V_{1x} \\ M_1 v'_1 \sin(\theta_1) + M_2 v'_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

La conservation de l'énergie totale sans « production de chaleur » entraîne la conservation de l'énergie cinétique. Dans  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2$$

Soit donc à résoudre le système de trois équations à trois inconnues, où les paramètres sont en majuscules et les variables en minuscules :

$$\begin{cases} M_1 v'_1 \cos(\theta_1) + M_2 v'_2 \cos(\theta_2) = M_1 V_{1x} \\ M_1 v'_1 \sin(\theta_1) + M_2 v'_2 \sin(\theta_2) = 0 \\ M_1 v_1'^2 + M_2 v_2'^2 = M_1 V_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2^2 v_2'^2 \cos^2(\theta_2) = M_1^2 V_{1x}^2 + M_1^2 v_1'^2 \cos^2(\theta_1) - 2M_1^2 V_{1x} v'_1 \cos(\theta_1) & (1)^2 \\ M_2^2 v_2'^2 \sin^2(\theta_2) = M_1^2 v_1'^2 \sin^2(\theta_1) & (2)^2 \\ M_1 M_2 v_1'^2 + M_2^2 v_2'^2 = M_1 M_2 V_1^2 & (3) \times M_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2^2 v_2'^2 = M_1^2 V_{1x}^2 + M_1^2 v_1'^2 - 2M_1^2 V_{1x} v'_1 \cos(\theta_1) & (1) + (2) \\ M_2^2 v_2'^2 \sin^2(\theta_2) = M_1^2 v_1'^2 \sin^2(\theta_1) \\ M_2^2 v_2'^2 = M_1 M_2 V_1^2 - M_1 M_2 v_1'^2 \end{cases}$$

(1) et (3) donnent

$$(M_1 M_2 - M_1^2) V_1^2 = (M_1^2 + M_1 M_2) v_1'^2 - 2M_1^2 V_{1x} \cos(\Theta_1) v_1'$$

C'est un polynôme du second degré en  $v_1'$ , de coefficients :

$$a = M_1^2 + M_1 M_2, \quad b' = -M_1^2 V_{1x} \cos(\Theta_1), \quad c = (M_1^2 - M_1 M_2) V_1^2$$

Le discriminant réduit s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac \\ &= M_1^4 V_{1x}^2 \cos^2(\Theta_1) - (M_1^2 + M_1 M_2)(M_1^2 - M_1 M_2) V_1^2 \\ &= M_1^4 V_{1x}^2 \cos^2(\Theta_1) - (M_1^4 - M_1^2 M_2^2) V_1^2 \\ &= -M_1^4 V_1^2 \sin^2(\Theta_1) + M_1^2 M_2^2 V_1^2 \\ &= M_1^2 V_1^2 [M_2^2 - M_1^2 \sin^2(\Theta_1)] \end{aligned}$$

Pour  $\Delta' = 0$

$$\begin{aligned} M_2^2 - M_1^2 \sin^2(\Theta_1) &= 0 \\ \sin(\Theta_1) &= \pm \frac{M_2}{M_1} \end{aligned}$$

nous avons une racine double :

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{-b'}{a} \\ &= \frac{M_1^2 V_{1x} \cos(\Theta_1)}{M_1^2 + M_1 M_2} \end{aligned}$$

Pour  $\Delta' > 0$

$$\begin{aligned} M_2^2 - M_1^2 \sin^2(\Theta_1) &> 0 \\ \frac{M_2^2}{M_1^2} &> \sin^2(\Theta_1) \\ \frac{M_2}{M_1} &> \sin(\Theta_1) > -\frac{M_2}{M_1} \end{aligned}$$

nous avons deux racines :

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \\ &= \frac{M_1^2 V_{1x} \cos(\Theta_1) \pm M_1 V_1 \sqrt{M_2^2 - M_1^2 \sin^2(\Theta_1)}}{M_1^2 + M_1 M_2} \end{aligned}$$

On suppose  $V_{1x} > 0$  et l'on a alors  $V_{1x} = V_1$  :

$$v_1' = \frac{M_1 \cos(\Theta_1) \pm \sqrt{M_2^2 - M_1^2 \sin^2(\Theta_1)}}{M_1 + M_2} V_1$$

La conservation de l'énergie cinétique donne :

$$M_1 v_1'^2 + M_2 v_2'^2 = M_1 V_1^2$$

$$v_2'^2 = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} (V_1^2 - v_1'^2)$$

Pour  $\Theta_1 = 0$  :

$$v_1' = \frac{M_1 \pm M_2}{M_1 + M_2} V_1$$

Si l'on prend un signe positif  $v_1' = V_1$  or on sait que ces vitesses sont différentes, donc on conserve le signe négatif :

$$v_1' = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_1$$

La norme  $v_1'$  est positive ou nulle donc  $\Theta_1 = 0$  n'est possible que si  $M_1 > M_2$ .

Pour  $\Theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$

$$v_1' = \frac{\pm \sqrt{M_2^2 - M_1^2}}{M_1 + M_2} V_1$$

$v_1'$  étant une norme, on ne conserve que le signe positif :

$$v_1' = \frac{\sqrt{M_2^2 - M_1^2}}{M_1 + M_2} V_1$$

Donc  $\Theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$  n'est possible que pour :

$$M_2^2 - M_1^2 > 0$$

$$M_2 > M_1$$

Pour  $\Theta_1 = \pi$  :

$$v_1' = \frac{-M_1 \pm M_2}{M_1 + M_2} V_1$$

$v_1' \neq -V_1$  donc on conserve le signe positif :

$$v_1' = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} V_1$$

$v_1' \geq 0$  donc  $\Theta_1 = \pi$  n'est possible que si  $M_1 < M_2$ .

Pour  $\Theta_1 = 0$  ou  $\Theta_1 = \pi$ , on déduit  $v_2'$  de la conservation de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} v_2'^2 &= \frac{M_1}{M_2} (V_1^2 - v_1'^2) \\ &= \frac{M_1}{M_2} \left[ V_1^2 - \left( \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \right)^2 V_1^2 \right] \\ &= \frac{M_1}{M_2} V_1^2 \frac{(M_1 + M_2)^2 - (M_2 - M_1)^2}{(M_1 + M_2)^2} \\ &= \frac{4M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} V_1^2 \\ v_2' &= \frac{2M_1}{M_1 + M_2} V_1 \end{aligned}$$

Pour trouver  $\theta_2$  la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\begin{cases} M_2 v_2' \cos(\theta_2) = M_1 V_1 - M_1 v_1' \cos(\Theta_1) \\ M_2 v_2' \sin(\theta_2) = -M_1 v_1' \sin(\Theta_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2) &= \frac{v_1' \sin(\Theta_1)}{v_1' \cos(\Theta_1) - V_1} \\ \theta_2 &= \arctan\left(\frac{v_1' \sin(\Theta_1)}{v_1' \cos(\Theta_1) - V_1}\right) \end{aligned}$$

Pour  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 2$ ,  $V_1 = 1$  et  $\Theta_1 = 30^\circ$  on obtient pour les vitesses finales :

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{4 - \frac{1}{4}} \right) & v_2' &= \sqrt{\frac{1}{2} (1 - 0,934^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{6} & &= 0,252 \\ &= 0,934 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \arctan\left(\frac{0,934/2}{0,934\sqrt{3}/2 - 1}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{0,934}{0,934\sqrt{3} - 2}\right) \\ &= -67,76^\circ \end{aligned}$$

### Exemple 3.18

Soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2 = \vec{0}$  les vitesses initiales des mobiles dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  dans lequel  $M_2$  est au repos. Plaçons-nous dans le référentiel  $\mathcal{R}_{c.i.}$  du centre d'inertie du système  $M_1 - M_2$ . D'après (3.8) page 23, le centre d'inertie du système  $M_1 - M_2$  a pour vitesse dans  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{V}_{c.i.} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad V_{c.i.x} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_{1x}$$

Soient  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  les vitesses initiales des mobiles dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  :

$$\begin{cases} \vec{u}_1 + \vec{V}_{c.i.} = \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 + \vec{V}_{c.i.} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1x} = v_{1x} - V_{c.i.x} \\ u_{2x} = -V_{c.i.x} \end{cases}$$

Par définition (d'un référentiel d'inertie), la quantité de mouvement totale est nulle dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$ . Soit  $x$  l'axe de collision :

$$\begin{aligned} M_1 \vec{u}_1 + M_2 \vec{u}_2 &= \vec{0} \\ M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} &= 0 \\ u_{2x} &= -\frac{M_1}{M_2} u_{1x} \end{aligned}$$

### Remarque 3.10

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{c.i.} &= \frac{M_1}{M_1 + M_2} (\vec{u}_1 + \vec{V}_{c.i.}) \\ \vec{V}_{c.i.} \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) &= \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{u}_1 \\ \vec{V}_{c.i.} &= \frac{M_1}{M_2} \vec{u}_1 \\ V_{c.i.x} &= \frac{M_1}{M_2} u_{1x} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u_{2x} = -\frac{M_1}{M_2} u_{1x}$$



FIG. 3.10 – Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  avant impact

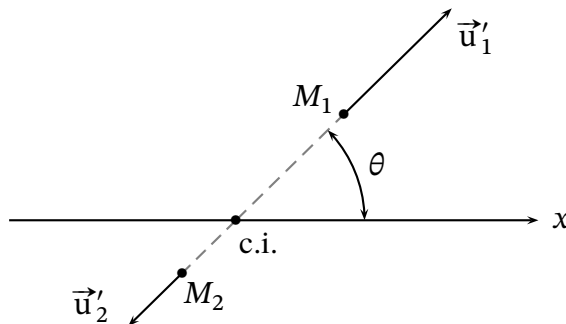


FIG. 3.11 – Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  après impact pour  $M_2 = 2M_1$

Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  les angles de diffusion  $\theta_{1c.i.}$  et  $\theta_{2c.i.}$  sont opposés puisque la somme des quantités

de mouvement est nulle (avant, pendant et après la collision) dans ce référentiel :

$$\begin{aligned}\theta_{1c.i.} &= \pi - \theta_{2c.i.} \\ &= \theta\end{aligned}$$

Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$ , toutes les valeurs de  $\theta$  sont permises, ce qui n'est pas le cas pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans  $\mathcal{R}$ . Soient  $\vec{u}'_1$  et  $\vec{u}'_2$  les vitesses finales des mobiles dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  :

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \vec{u}'_1 + \vec{V}_{c.i.} \\ \vec{v}'_2 = \vec{u}'_2 + \vec{V}_{c.i.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_1 \cos(\theta_1) = u'_1 \cos(\theta) + V_{xc.i.} \\ v'_1 \sin(\theta_1) = u'_1 \sin(\theta) \\ v'_2 \cos(\theta_2) = u'_2 \cos(\pi - \theta) + V_{xc.i.} \\ v'_2 \sin(\theta_2) = u'_2 \sin(\pi - \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_1 \cos(\theta_1) = u'_1 \cos(\theta) + V_{xc.i.} \\ v'_1 \sin(\theta_1) = u'_1 \sin(\theta) \\ v'_2 \cos(\theta_2) = -u'_2 \cos(\theta) + V_{xc.i.} \\ v'_2 \sin(\theta_2) = -u'_2 \sin(\theta) \end{cases}$$

Dans tout référentiel galiléen la quantité de mouvement se conserve. Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  :

$$\begin{aligned}M_1 \vec{u}'_1 + M_2 \vec{u}'_2 &= M_1 \vec{u}_1 + M_2 \vec{u}_2 \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

En projetant sur l'axe  $\theta$  de diffusion :

$$\begin{aligned}M_1 u'_1 - M_2 u'_2 &= 0 \\ u'_2 &= \frac{M_1}{M_2} u'_1\end{aligned}$$

Supposons qu'il n'y ait pas « production de chaleur » lors de la collision, le choc est alors élastique et l'énergie cinétique se conserve. Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  :

$$\begin{aligned}M_1 u_1'^2 + M_2 u_2'^2 &= M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 \\ M_1 u_1'^2 + M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} u_1'^2 &= M_1 u_1^2 + M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} u_1^2 \\ \frac{M_1 M_2 + M_1^2}{M_2} u_1'^2 &= \frac{M_1 M_2 + M_1^2}{M_2} u_1^2 \\ u_1' &= u_1\end{aligned}$$

De même  $u'_2 = u_2$ . On note que les normes des vitesses  $u'_1$  et  $u'_2$  ne sont pas fonction de  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1) &= \frac{v'_1 \sin(\theta_1)}{v'_1 \cos(\theta_1)} & \tan(\theta_2) &= \frac{v'_2 \sin(\theta_2)}{v'_2 \cos(\theta_2)} \\ &= \frac{u'_1 \sin(\theta)}{u'_1 \cos(\theta) + V_{xc.i.}} & &= \frac{-u'_2 \sin(\theta)}{-u'_2 \cos(\theta) + V_{xc.i.}} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{V_{xc.i.}}{u'_1}} & &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - \frac{V_{xc.i.}}{u'_2}} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{M_1}{M_2}} & &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1} \end{aligned}$$

Réciproquement

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{u'_1 \sin(\theta)}{u'_1 \cos(\theta)} & \tan(\theta) &= \frac{u'_2 \sin(\theta)}{u'_2 \cos(\theta)} \\ &= \frac{v'_1 \sin(\theta_1)}{v'_1 \cos(\theta_1) - V_{xc.i.}} & &= \frac{v'_2 \sin(\theta_2)}{v'_2 \cos(\theta_2) + V_{xc.i.}} \end{aligned}$$

Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  dans lequel le mobile de masse  $M_2$  est au repos, si l'on a  $M_1 = 1, M_2 = 2, v_{1x} = 1, v_{2x} = 0$ , alors le centre d'inertie a pour vitesse

$$V_{xc.i.} = \frac{1}{3}$$

Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  :

$$u_{1x} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad u'_1 = \frac{2}{3}, \quad u_{2x} = -\frac{1}{3}, \quad u'_2 = \frac{1}{3}$$

Supposons  $\theta = 44,48^\circ$  alors :

$$\begin{aligned} \tan(\theta_1) &= \frac{\sin(44,48)}{\cos(44,48) + \frac{1}{2}} & \tan(\theta_2) &= \frac{\sin(44,48)}{\cos(44,48) - 1} \\ \theta_1 &= 30^\circ & \theta_2 &= -67,76^\circ \end{aligned}$$

Pour les vitesses finales :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{u'_1 \sin(\theta)}{\sin(\theta_1)} & v'_2 &= \frac{-u'_2 \sin(\theta)}{\sin(\theta_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \sin(44,48)}{\sin(30)} & &= \frac{-\frac{1}{3} \sin(44,48)}{-\sin(67,76)} \\ &= 0,934 & &= 0,252 \end{aligned}$$

Quelles sont les valeurs maximales que peut prendre l'angle  $\theta_1$  en fonction des masses  $M_1$  et  $M_2$ ? Quelles que soient les masses  $M_1$  et  $M_2$ , la valeur  $\theta_1 = 0$  est permise, lorsque le mobile

de masse  $M_1$  effleure celui de masse  $M_2$ . Soit la fonction

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{M_1}{M_2}}$$

$$f'(\theta) = \frac{\cos(\theta) \left( \cos(\theta) + \frac{M_1}{M_2} \right) + \sin^2(\theta)}{\left( \cos(\theta) + \frac{M_1}{M_2} \right)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{M_1}{M_2} \cos(\theta)}{\left( \cos(\theta) + \frac{M_1}{M_2} \right)^2}$$

La dérivée est nulle pour l'angle  $\theta_0$  tel que :

$$1 + \frac{M_1}{M_2} \cos(\theta_0) = 0$$

$$\cos(\theta_0) = -\frac{M_2}{M_1}$$

- Si  $M_1 \geq M_2$  :

$$\theta_0 = \arccos\left(-\frac{M_2}{M_1}\right)$$

$f(\theta_0)$  est finie et :

$$\tan(\theta_1) = f(\theta)$$

$$\tan(\theta_1)_{max} = f(\theta_0)$$

$$(\theta_1)_{max} = \arctan[f(\theta_0)]$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq (\theta_1)_{max} \leq \frac{\pi}{2}$$

- Si  $M_2 > M_1$  la fonction  $f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{M_1}{M_2}}$  est strictement croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ , sa dérivée ne s'annule pas. Il n'y a pas d'angle  $\theta$  maximal, donc pas d'angle  $\theta_1$  maximal. Pour  $\cos(\theta) = -\frac{M_1}{M_2}$  on a  $\tan(\theta_1) = \pm\infty$  soit  $\theta_1 = \pm\pi/2$ , mais ce n'est pas un angle maximal.

## Chapitre 4

# MOUVEMENT DE ROTATION

Le principe d'inertie 3.1 page 16 est un principe d'inertie du mouvement rectiligne, nous allons voir qu'il existe aussi un principe d'inertie en rotation.

---

### 4.1 Inertie en rotation

#### Observation 4.1

Par inertie en rotation, la Terre tourne sur elle-même depuis plus de 4 milliards d'années soit plus de 1000 milliards de tours.

Un système a deux façons de tourner, en changeant de direction, ou en tournant sur lui-même sans changer de direction (c'est pour cette raison que dans la déf. 2.4 page 6 d'un référentiel galiléen nous avons précisé que le mouvement est à la fois en translation et rectiligne).

- Par « rotation propre » on entend une rotation du mobile sur lui-même, ou rotation intrinsèque, c.-à-d. autour d'un axe passant par le centre de gravité du mobile. Dans ce cas la rotation existe et se maintient sans interaction avec l'extérieur. Le système change continuellement d'*orientation* mais n'a pas de mouvement d'ensemble
- Par « rotation non-propre » on entend une rotation autour d'un axe (instantané de rotation) ne passant pas par le centre de gravité du mobile. Dans ce cas le mobile change de *direction* et la rotation est due à l'interaction du système avec l'extérieur. Le système a un mouvement d'ensemble, sa trajectoire est curviligne

Le système peut à la fois tourner sur lui-même et changer de direction. Le principe d'inertie en rotation sera donc appliqué deux fois. On note qu'un mouvement rectiligne n'est jamais qu'un mouvement de rotation autour d'un axe à l'infini. Par conséquent, s'il existe un principe d'inertie en rotation il devra redonner le principe d'inertie du mouvement rectiligne lorsque la distance de l'axe de rotation au système tendra vers l'infini. Le principe d'inertie en rotation généralisera celui rectiligne.

#### Observation 4.2

Le système quasi-isolé Terre-Soleil est en rotation autour de son centre de gravité, situé dans le Soleil, depuis plus de 4 milliards d'années. Ce système tourne sur lui-même. Si l'on

prend comme système la Terre seule, elle tourne autour du centre de gravité commun avec le Soleil. La révolution terrestre définit le plan de l'écliptique dont l'orientation est stable par rapport au reste de l'univers si l'on néglige l'influence des autres planètes, en particulier celle de Jupiter. De même, les plans de révolution de la Lune autour de la Terre, des planètes autour du Soleil et des satellites en général, sont stables en première approximation.

Nous définissons le plan de révolution d'un satellite orbitant autour d'un astre grâce à un pseudovecteur perpendiculaire à ce plan, confondu avec l'axe de révolution du système satellite-astre. On construit ce pseudovecteur en prenant le produit vectoriel de deux vecteurs situés dans le plan de révolution, le rayon vecteur du satellite (vecteur reliant le centre de gravité du système satellite-astre au satellite), et la vitesse du satellite sur son orbite :

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

Ce produit vectoriel est constant en direction et en sens (lié au sens de révolution des satellites). Il permet de définir le pseudovecteur vitesse angulaire (mesurée en radians par seconde) qui est indépendant de la distance à l'axe :

$$v = r\omega$$

donc

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

#### Axiome 4.1 : Principe d'inertie en rotation

Tout système isolé tourne autour d'un axe passant par son centre de gravité à vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  constante ou nulle pour un observateur galiléen :

$$\vec{\omega}_{\text{système isolé}} = \vec{C}_{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Par analogie avec le mouvement rectiligne, cherchons si une quantité se conserve en rotation dans un système isolé, une sorte de « quantité de mouvement en rotation ». Dans un système isolé constitué de deux corps en interaction, de la quantité de mouvement en rotation serait transférée d'un corps à l'autre. Pour que ce principe redonne le principe d'inertie rectiligne, nous devons donc prendre en compte la masse inerte des deux corps en interaction.

## 4.2 Moment cinétique

### Expérience 4.1

Dans un référentiel galiléen, soit  $\vec{r}_j$  le vecteur position d'un corps  $j$  avant interaction, et soit  $\vec{r}_j^\dagger$  son vecteur position après interaction. L'expérience montre que lorsque deux corps formant un système isolé sont en interaction, nous avons :

$$\vec{r}_1^\dagger \times \vec{p}_1^\dagger + \vec{r}_2^\dagger \times \vec{p}_2^\dagger \cong \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \quad (4.1)$$

**Définition 4.1 : Moment cinétique**

On appelle moment cinétique (ou moment angulaire, ou moment de la quantité de mouvement) par rapport à un point  $O$  immobile ou de vecteur vitesse constant dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , d'un corps de centre de gravité  $G$ , le produit vectoriel du vecteur position  $\overrightarrow{OG} = \vec{r}$  par la quantité de mouvement  $\vec{p}$  de ce corps dans  $\mathcal{R}$  :

$$\overset{\curvearrowright}{L}_{/O} \Leftarrow \vec{r} \times \vec{p}$$

La relation (4.1) page ci-contre devient :

$$\overset{\curvearrowright}{L}_{1/O} + \overset{\curvearrowright}{L}_{2/O} \cong \overset{\curvearrowright}{L}_{1/O} + \overset{\curvearrowright}{L}_{2/O} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

La somme des moments cinétiques du système isolé formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps lorsque mesurée dans un référentiel galiléen, elle est identique avant, pendant et après l'interaction des deux corps. La conservation du moment cinétique total lors d'une interaction est mise en évidence dans un référentiel galiléen quelconque, elle ne dépend donc pas de la position du point de référence  $O$  pris dans ce référentiel (ni de sa vitesse si celle-ci est constante). Nous pouvons le démontrer :

*Démonstration.* Soit  $\vec{r}$  un vecteur constant dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . En partant de la conservation de la quantité de mouvement dans  $\mathcal{R}$ , (3.6) page 21 :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^\dagger + \vec{p}_2^\dagger &\cong \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{r} \times (\vec{p}_1^\dagger + \vec{p}_2^\dagger) &\cong \vec{r} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ \vec{r} \times \vec{p}_1^\dagger + \vec{r} \times \vec{p}_2^\dagger &\cong \vec{r} \times \vec{p}_1 + \vec{r} \times \vec{p}_2 \end{aligned}$$

En additionnant à (4.1) page ci-contre

$$(\vec{r}_1^\dagger + \vec{r}) \times \vec{p}_1^\dagger + (\vec{r}_2^\dagger + \vec{r}) \times \vec{p}_2^\dagger \cong (\vec{r}_1 + \vec{r}) \times \vec{p}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}) \times \vec{p}_2$$

qui est la conservation du moment cinétique par rapport à un nouveau point de référence  $O'$  fixe dans  $\mathcal{R}$ , et tel que  $\overrightarrow{O'O} = \vec{r}$ . □

Le moment cinétique d'un système se conserve également lorsque calculé par rapport à un point de référence qui se déplace à vitesse constante dans un référentiel galiléen. Il suffit en effet de changer de référentiel galiléen, et d'en choisir un dans lequel le point de référence est fixe. En effet, la relation suivante est vraie à chaque instant  $t$  :

$$(\vec{r}_1^\dagger + \vec{v}t) \times \vec{p}_1^\dagger + (\vec{r}_2^\dagger + \vec{v}t) \times \vec{p}_2^\dagger \cong (\vec{r}_1 + \vec{v}t) \times \vec{p}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{v}t) \times \vec{p}_2$$

En généralisant à un système isolé constitué d'un nombre quelconque de corps, on énonce l'axiome suivant :

**Axiome 4.2 : Conservation du moment cinétique total**

*Le moment cinétique total par rapport à un point  $O$  de vecteur vitesse nul ou constant dans un référentiel galiléen, d'un système isolé se conserve au cours du temps :*

$$\forall O, \quad \overset{\curvearrowright}{L}_{/O}^{\text{système isolé}} \cong \vec{C}^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions entre les corps constituant le système isolé.

D'après la définition 4.1 page précédente du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{dL_{/O}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$

Donc l'axiome 4.2 page précédente s'écrit aussi :

$$\forall O, \quad \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cong \vec{0} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Lorsque le point de référence  $O$  des vecteurs position est envoyé à l'infini les vecteurs position deviennent tous égaux et (4.1) page 62 devient :

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{p}_1^\dagger + \vec{r} \times \vec{p}_2^\dagger &\cong \vec{r} \times \vec{p}_1 + \vec{r} \times \vec{p}_2 \\ \vec{r} \times (\vec{p}_1^\dagger + \vec{p}_2^\dagger) &\cong \vec{r} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ \vec{p}_1^\dagger + \vec{p}_2^\dagger &\cong \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

L'axiome 4.2 de conservation du moment cinétique total inclut l'axiome 3.3 page 23 de conservation de la quantité de mouvement totale. La conservation de la quantité de mouvement est un cas particulier de conservation du moment cinétique. Si B est un cas particulier de A alors B ne peut impliquer A. Il est donc impossible de démontrer l'axiome 4.2 de conservation du moment cinétique total d'un système isolé à partir de l'axiome 3.3 page 23 de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé. Autrement dit, lors d'une interaction entre deux corps, nous ne pouvons passer de façon purement théorique de (4.2) à (4.1) page 62. Il faut nécessairement s'appuyer sur une nouvelle expérience.

Considérons un système isolé constitué de deux sous-systèmes. Pour le système global, la conservation de la quantité de mouvement,

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{système}} &\cong \vec{C}^{ste} \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &\cong \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

signifie que la quantité de mouvement du système se conserve, y compris lorsqu'il y a des interactions entre les deux sous-systèmes constituant le système. On en déduit que

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{p}_{\text{système}} &\cong \vec{r} \times \vec{C}^{ste} \\ \vec{r} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) &\cong \vec{C}^{ste} \\ \vec{r} \times \vec{p}_1 + \vec{r} \times \vec{p}_2 &\cong \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

et le moment cinétique du système global se conserve lors d'une interaction pour un point pris à l'infini (car ici  $\vec{r}$  est le même pour les deux sous-systèmes). Mais cette relation ne dit pas que l'on a

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \cong \vec{C}^{ste}$$

lors d'une interaction, pour un point qui n'est pas à l'infini.

### Remarque 4.1

Pour prétendument démontrer la conservation du moment cinétique lors d'une interaction entre deux sous-systèmes, on lit souvent ceci :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{0} \\ &= \underbrace{0} \\ \vec{r} \times \vec{p} &= \underbrace{C}_{ste}\end{aligned}$$

Cela démontre seulement que le moment cinétique d'un système dans lequel il ne se passe rien (un corps unique par exemple) se conserve. Par le même raisonnement, nous pouvons obtenir plein de relations inutiles, par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{p}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{p} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{p})}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m^2\vec{v}) &= \vec{v} \times m^2\vec{v} + \vec{r} \times \vec{0} \\ &= \underbrace{0} \\ \vec{r} \times m\vec{p} &= \underbrace{C}_{ste}\end{aligned}$$

Effectivement, tout se conserve dans un système dans lequel il ne se passe rien, mais cette relation est fautive lorsqu'on l'applique à l'interaction entre deux systèmes.

Prenons un contre-exemple pour démontrer que ce raisonnement n'est pas applicable au cas d'une interaction entre deux systèmes. Le principe d'inertie nous dit que la vitesse d'un système isolé se conserve, donc aussi son énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{C}_{ste} \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= c^{ste} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= c^{ste} \\ E_c &= c^{ste}\end{aligned}$$

Supposons que le système isolé soit constitué de deux corps en interaction, d'après le raisonnement précédent l'énergie cinétique totale se conserve :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

Or cette relation est en générale fautive lorsqu'il y a interaction entre les deux corps, car une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie d'agitation thermique et en rayonnement. Ce qui nous intéresse c'est précisément ce qui se conserve lors d'une interaction, car bien évidemment, tout se conserve lorsqu'il ne se passe rien.

## 4.3 Moment de force

### Définition 4.2 : Moment d'une force

On appelle moment par rapport au point  $O$  d'une force  $\vec{f}$  s'exerçant en un point  $A$ , le produit vectoriel du vecteur position  $\vec{OA}$  avec cette force :

$$\vec{M}_{/O}(\vec{f}) \leftarrow \vec{OA} \times \vec{f}$$

D'après la déf. 3.11 page 29 d'une force sur un corps isolé :

$$\begin{aligned}\vec{f} &\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{OA} \times \vec{f} &\Rightarrow \vec{OA} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{f}) &\Rightarrow \frac{d\overset{\curvearrowright}{L}_{/O}}{dt}\end{aligned}$$

Nous avons vu que le moment cinétique total d'un système isolé se conserve. Lorsque le système n'est plus isolé et que nous le faisons tourner sur lui-même ou ralentissons sa rotation par une action extérieure, nous faisons varier son moment cinétique. Cette variation est due à un moment de force exercé sur le système. Nous pouvons poser la définition alternative suivante :

**Définition 4.3 : Moment d'une force exercé sur un corps isolé**

On appelle moment par rapport au point  $O$  d'une force s'exerçant sur un corps isolé, toute action faisant varier dans le temps le moment cinétique par rapport au même point  $O$ , de ce corps isolé.

Les moments sont des pseudovecteurs, ils s'additionnent. Lorsque le moment de force par rapport à  $O$  s'exerce sur un système constitué de plusieurs corps, il peut s'exercer sur n'importe lequel de ces corps, faisant varier le moment cinétique total du système :

$$\sum_j \overset{\curvearrowright}{M}_{j/O}(\vec{f}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \overset{\curvearrowright}{L}_{i/O} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

À partir de l'axiome 4.2 page 63 de la conservation du moment cinétique d'un système isolé, nous pouvons énoncer un théorème sur les moments des forces intérieures, analogue à la loi de l'action-réaction :

**Théorème 4.1**

*La somme des moments des forces intérieures à tout système est nulle.*

**Définition 4.4 : Modèle de moment de force**

On appelle modèle du moment par rapport au point  $O$  d'une force, la représentation théorique du moment par rapport au point  $O$  de la force physique réelle.

En se servant de la déf. 3.10 page 27 du modèle de force, le moment par rapport au point  $O$  du modèle d'une force s'exerçant sur un corps situé en  $A$ , est le produit vectoriel du vecteur position  $\vec{OA}$  par le modèle de force  $\vec{F}$  :

$$\overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{F}) \Leftarrow \vec{OA} \times \vec{F}$$

## 4.4 Axiome du moment cinétique

La déf. 4.3 page ci-contre devient une équation du mouvement dont on peut chercher une solution lorsque l'on écrit que le moment du modèle de force de la force réelle exercée sur le système, provoque une variation dans le temps du moment cinétique du système.

### Axiome 4.3 : Axiome du moment cinétique

*La somme des moments par rapport au point O des modèles des forces extérieures à un système provoque la variation dans le temps du moment cinétique total du système par rapport au même point O :*

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{F}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \overset{\curvearrowright}{L}_{/O} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

L'axiome du moment cinétique est écrit comme une relation de causalité entre des modèles de moments de forces et une variation du moment cinétique. Il faut garder à l'esprit que ces termes ne sont qu'approximativement égaux. Ce nouvel axiome inclut l'axiome 4.2 page 63 de la conservation du moment cinétique total d'un système isolé : lorsqu'aucun moment de force n'est exercé sur un système  $\sum \overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{F}) = \overset{\curvearrowright}{0}$ , son moment cinétique total se conserve dans tout référentiel galiléen.

### Remarque 4.2

L'axiome du moment cinétique est en fait la relation fondamentale de la dynamique pour la rotation.

Montrons que l'axiome 4.3 de la présente page appelé « théorème du moment cinétique » inclut l'axiome 3.5 page 31 de la RFD.

*Démonstration.* En explicitant ce théorème, pour  $m$  moments de force et pour un système de  $n$  corps :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \vec{r}_j \times \vec{F}_j &\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m \vec{v}_i \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m \vec{v}_i) \right] \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left( \vec{v}_i \times m \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \end{aligned}$$

Lorsque le point de référence des vecteurs position est envoyé à l'infini, les vecteurs position

deviennent tous égaux, et l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \vec{r} \times \vec{F}_j &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{r} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \vec{r} \times \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\Rightarrow \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \end{aligned}$$

qui est la RFD. □

Pour trouver les équations du mouvement d'un corps, nous pouvons appliquer deux fois l'axiome du moment cinétique 4.3 page précédente. Une première fois par rapport à un point à distance finie pour son mouvement de rotation, une seconde fois par rapport à un point à distance infinie pour son mouvement rectiligne. En réalité, le second point n'a pas nécessité à être à l'infini.

## 4.5 Un seul axiome pour la mécanique

Montrons qu'en appliquant deux fois l'axiome 4.2 page 63 de la conservation du moment cinétique total, par rapport à deux points distincts à distances finies, on retrouve l'axiome 3.3 page 23 de conservation de la quantité de mouvement totale.

*Démonstration.* Nous avons les deux hypothèses :

$$\sum_{j=1}^n (\vec{OA}_j \times m_j \vec{v}_i) \cong \vec{C}_1^{ste} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n (\vec{O'A}_j \times m_j \vec{v}_i) \cong \vec{C}_2^{ste}$$

En soustrayant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\vec{OA}_j \times m_j \vec{v}_i) - \sum_{j=1}^n (\vec{O'A}_j \times m_j \vec{v}_i) &\cong \vec{C}_3^{ste} \\ \sum_{j=1}^n (\vec{OA}_j \times m_j \vec{v}_i - \vec{O'A}_j \times m_j \vec{v}_i) &\cong \vec{C}_3^{ste} \\ \sum_{j=1}^n (\vec{OO'} \times m_j \vec{v}_i) &\cong \vec{C}_3^{ste} \\ \vec{OO'} \times \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_i &\cong \vec{C}_3^{ste} \\ \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_i &\cong \vec{C}^{ste} \end{aligned} \quad \square$$

Montrons maintenant qu'en appliquant deux fois l'axiome du moment cinétique 4.3 page précédente par rapport à deux points distincts à distance finie, on retrouve l'axiome 3.5 page 31 de la RFD.

*Démonstration.* Nous avons les deux hypothèses :

$$\sum_{j=1}^m \overrightarrow{OA_j} \times \vec{F}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m \overrightarrow{O'A_j} \times \vec{F}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{O'A_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

En soustrayant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{O'A_j}) \times \vec{F}_j &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{O'A_i}) \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \sum_{j=1}^m \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}_j &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OO'} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \overrightarrow{OO'} \times \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\Rightarrow \overrightarrow{OO'} \times \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \square \end{aligned}$$

Par conséquent, toute la mécanique générale peut être établie par la double application de l'axiome du moment cinétique 4.3 page 67. Cet axiome, fâcheusement appelé « théorème du moment cinétique », peut alors servir d'unique axiome de départ pour la mécanique.



## Chapitre 5

# LOI DE CONSERVATION

### 5.1 Opérateur divergence

#### Définition 5.1 : Opérateur divergence d'un champ de vecteurs

Dans le repère naturel orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associé au système de coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ , soit un champ de vecteurs  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ . On appelle divergence l'opérateur différentiel  $\text{div}$ , tel qu'appliqué à  $\vec{u}$  on ait le scalaire :

$$\text{div}(\vec{u}) \leftarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

#### Notation 5.1

En notation indicielle, la divergence du vecteur  $\vec{u}$  s'écrit :

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i}$$

#### Théorème 5.1 : Théorème de la divergence

Soit  $\vec{u}$  un champ de vecteurs quelconques. Pour tout volume  $V$  de surface  $S$  et de normale sortante  $\vec{n}$  :

$$\oiint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div}(\vec{u}) \, dV$$

*Démonstration.* Soit un espace ponctuel euclidien  $E_3$  de système de coordonnées rectangulaire  $(x^i)$ . Soit  $(\vec{e}_i)$  la base naturelle orthonormée de l'espace vectoriel euclidien associé. Soit  $S$  une surface fermée telle que toute droite parallèle aux axes de coordonnées coupe cette surface en au

plus deux points (par exemple un ballon de baudruche suffisamment gonflé). Alors :

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_S (u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2 + u^3 \vec{e}_3) \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \iint_S u^1 \vec{e}_1 \cdot \vec{n} \, ds + \iint_S u^2 \vec{e}_2 \cdot \vec{n} \, ds + \iint_S u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

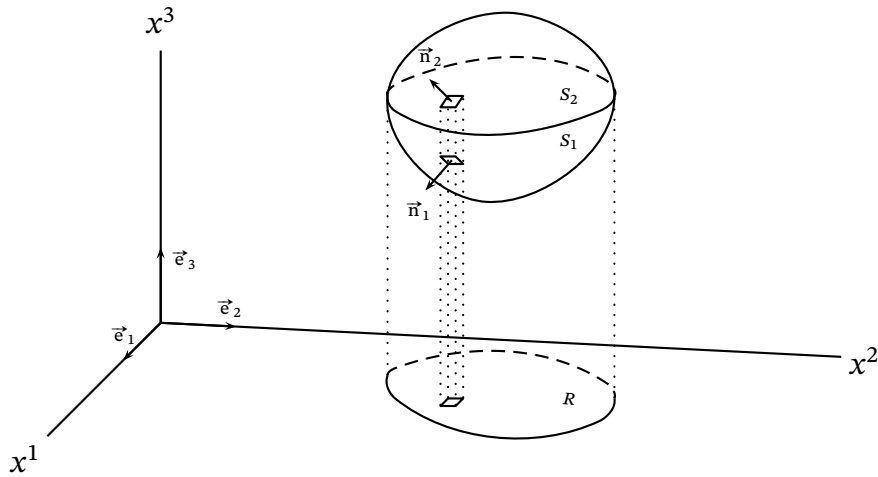


FIG. 5.1 – Volume de surface  $S$

Calculons le dernier terme du membre de droite. Imaginons un plan  $(x^1, x^2)$  horizontal coupant la surface fermée  $S$  en deux, de sorte que la ligne d'intersection soit la plus longue possible. Nous intégrons maintenant sur les deux surfaces  $S_1$  en bas et  $S_2$  en haut, non fermées, de normales sortantes respectives  $\vec{n}_1$  vers le bas et  $\vec{n}_2$  vers le haut

$$\iint_S u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S_1} u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_1 \, ds_1 + \iint_{S_2} u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_2 \, ds_2$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_1 \, ds_1 = -dx^1 dx^2 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_2 \, ds_2 = dx^1 dx^2 \end{cases}$$

Les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  ont pour équation respective :

$$\begin{cases} S_1 : x^3 = x_1^3(x^1, x^2) \\ S_2 : x^3 = x_2^3(x^1, x^2) \end{cases}$$

Soit  $R$  le domaine d'intégration en  $x^1, x^2$  :

$$\begin{aligned} \iint_S u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_R u^3(x^1, x^2, x_2^3) \, dx^1 dx^2 - \iint_R u^3(x^1, x^2, x_1^3) \, dx^1 dx^2 \\ &= \iint_R [u^3(x^1, x^2, x_2^3) - u^3(x^1, x^2, x_1^3)] \, dx^1 dx^2 \\ &= \iint_R \left( \int_{x_1^3}^{x_2^3} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \, dx^3 \right) \, dx^1 dx^2 \\ &= \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \, dV \end{aligned}$$

Nous obtenons un résultat similaire pour les coordonnées  $x^1$  et  $x^2$ , si bien que :

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \iiint_V \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \, dV + \iiint_V \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \, dV + \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \, dV \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right) \, dV \end{aligned}$$

Les coordonnées étant rectangulaires, on utilise la déf. 5.1 page 71 de l'opérateur différentiel divergence en coordonnées rectilignes :

$$\oiint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{u}) \, dV$$

Le théorème peut s'étendre aux surfaces qui ne satisfont pas la condition que des droites parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires les coupent en au plus deux points. Pour établir cette généralisation, subdiviser le domaine  $S$  en sous-domaines dont les surfaces satisfont la condition.  $\square$

## 5.2 Théorème de Gauss

### Théorème 5.2 : Théorème de Gauss

Soit  $S$  une surface fermée quelconque, de normale sortante  $\vec{n}$ . Soit  $\vec{r} = r \vec{e}_r$  un champ de vecteurs d'origine  $O$  :

$$\text{Si } O \text{ est extérieur à } S, \quad \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

$$\text{Si } O \text{ est intérieur à } S, \quad \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds = 4\pi$$

*Démonstration.* À partir du théorème de la divergence 5.1 page 71 avec  $\vec{u} = \frac{\vec{e}_r}{r^2}$  :

$$\oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) \, dV$$

- supposons  $O$  extérieur à  $S$ . Dans ce cas  $r$  ne peut pas être nul dans le volume d'intégration de la divergence ( $r \neq 0$  dans  $V$ ) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) &= \operatorname{div} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \frac{x^1}{r^3} \vec{e}_1 + \frac{x^2}{r^3} \vec{e}_2 + \frac{x^3}{r^3} \vec{e}_3 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{x^1}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{x^2}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{x^3}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Pour le premier membre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{x^1}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \frac{x^1}{[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{r^3 - x^1 \times 2x^1 \times \frac{3}{2} r}{r^6} \\ &= \frac{r^3 - 3r(x^1)^2}{r^6} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) &= \frac{3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)}{r^6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- supposons maintenant  $O$  intérieur à  $S$ . Entourons  $O$  d'une petite sphère  $s$  de rayon  $a$  et de volume  $V$ . Soit  $\mathcal{V}$  le volume intérieur à  $S$  et extérieur à  $s$ , et soient  $\vec{n}_S$  et  $\vec{n}_s$  les normales sortantes respectives des surfaces  $S$  et  $s$  :

$$\begin{aligned} \oiint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_S}{r^2} ds - \oiint_s \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_s}{r^2} ds &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) dV - \iiint_v \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) dV \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $O$  est extérieur à  $\mathcal{V}$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \oiint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_S}{r^2} ds &= \oiint_s \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_s}{r^2} ds \\ &= \frac{1}{a^2} \oiint_s ds \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

□

## 5.3 Hypothèse d'un milieu continu

### 5.3.1 Nombre volumique

On considère un grand nombre d'éléments distincts identiques répartis dans l'espace, ayant chacun leur propre vitesse. À l'instant  $t$ , centré en un point de vecteur position  $\vec{r}(x, y, z)$  d'un référentiel quelconque  $R$ , prenons un volume parallélépipédique rectangle  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$  contenant  $n(t, \vec{r})$  de ces éléments. Posons :

**Définition 5.2 : Nombre volumique d'éléments**

$$\rho_n(t, \vec{r}) = \frac{n(t, \vec{r})}{V(\vec{r})}$$

$\rho_n(t, \vec{r})$  est le nombre volumique d'éléments, à l'instant  $t$  dans le volume  $V$  en  $\vec{r}$ .

**Remarque 5.1**

On parle de *nombre* volumique pour insister sur le fait qu'il s'agit d'un nombre entier d'éléments.

**Remarque 5.2**

Nous employons nombre volumique et non densité numérique car on peut avoir une densité numérique d'éléments sur une droite, sur une surface ou dans un volume.

Lorsque le coefficient associé à l'élément est très petit, par exemple sa masse  $m$  ou sa charge électrique  $q$ , on fait l'approximation d'un *milieu continu*, ce qui permet d'utiliser le calcul différentiel et intégral.

**Exemple 5.1**

La densité (ou masse volumique) et la densité de charges électriques sont définies localement en un point et à un instant donné, dans un volume infinitésimal :

$$\rho_m(t, \vec{r}) = \frac{mn(t, \vec{r})}{V} \quad \longrightarrow \quad \rho_m(t, \vec{r}) = \frac{dM(t, \vec{r})}{dV}$$

$$\rho_q(t, \vec{r}) = \frac{qn(t, \vec{r})}{V} \quad \longrightarrow \quad \rho_q(t, \vec{r}) = \frac{dQ(t, \vec{r})}{dV}$$

où  $M$  est la masse totale du volume  $V$ , et  $Q$  est sa charge totale :

$$M(t, \vec{r}) = \iiint_V \rho_m(t, \vec{r}) dV \quad \text{et} \quad Q(t, \vec{r}) = \iiint_V \rho_q(t, \vec{r}) dV$$

**5.3.2 Courant - débit**

Un courant moyen ou un débit moyen est un nombre entier  $n$  d'éléments divisé par un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$I_n = \frac{n}{\Delta t}$$

On ne peut faire tendre  $\Delta t$  vers zéro pour obtenir un courant instantané car  $n$  deviendrait nul. Nous faisons donc l'hypothèse d'un milieu continu :

$$I_n = \frac{dn}{dt}$$

### Exemple 5.2

En faisant l'hypothèse d'un milieu continu, nous avons :

- le débit instantané de matière :  $I_M = \frac{dM}{dt}$  en kg/s
- le courant électrique instantané :  $I_q = \frac{dQ}{dt}$  en coulomb/s

### Remarque 5.3

Ce peut être un débit de matière, un courant électrique mais aussi un courant d'énergie, un débit de quantité de mouvement, etc.

Un débit massique est la quantité de matière (i.e. la masse) qui passe par unité de temps dans un conduit de section donnée. De même, un courant électrique est la quantité de charges électriques qui passe par unité de temps dans un câble électrique de section donnée. Intéressons-nous à la quantité de matière ou de charges électriques qui passe dans ce conduit ou ce câble par unité de temps *et par unité de surface*.

Dans un référentiel quelconque  $R$ , soit  $\vec{v}(t, \vec{r})$  le champ des vecteurs vitesse du milieu continu. Dans ce milieu continu, soit  $d^2s$  une surface infinitésimale d'ordre deux. On considère le volume infinitésimal d'ordre <sup>1</sup> trois  $d^3V$  qui passe à travers  $d^2s$  en un temps  $dt$ . Soit  $\vec{n}$  la normale à la surface  $d^2s$  :

$$\begin{aligned} d^3n &= \rho_n d^3V \\ d^2I_n dt &= \rho_n \vec{v} dt \cdot \vec{n} d^2s \\ I_n &= \iint_s \rho_n \vec{v} \cdot \vec{n} d^2s \end{aligned}$$

On pose  $\vec{j} = \rho_n \vec{v}$  le champ de vecteurs densité surfacique de courant dans  $\mathcal{R}$  (et non densité de courant surfacique) :

$$I_n = \iint_s \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s$$

### Remarque 5.4

Si la surface à travers laquelle passe le milieu continu est fixe dans le référentiel de l'observateur, la valeur du courant est fonction de  $\vec{v}$  qui dépend elle-même du choix du référentiel.

### 5.3.3 Équation de conservation

Nos hypothèses sont les suivantes :

- existence d'un milieu continu
- existence d'une quantité conservative de densité  $\rho$ , liée à ce milieu continu

Cette quantité (la masse, la charge, l'énergie ...) se conserve dans le temps, elle ne peut être ni créée ni détruite. Nous nous plaçons dans un référentiel quelconque  $R$  dans lequel on mesure le champ des vecteurs vitesse  $\vec{v}(t, \vec{r})$  du milieu continu. La variation entre deux instants donnés de cette quantité conservative dans le volume  $V$  ne peut être due qu'à un flux entrant ou sortant

1.  $dx \times dy \times dz$  est un exemple de volume infinitésimal d'ordre trois,  $dx \times dy \times z$  est un exemple de volume infinitésimal d'ordre deux, et  $dx \times y \times z$  est un exemple de volume infinitésimal d'ordre un.

de cette quantité conservative à travers la surface fermée  $S$  délimitant  $V$ , entre les deux mêmes instants.

Par convention, l'orientation de la surface fermée est choisie positive vers l'extérieur. En notant  $\vec{n}$  le vecteur normal unitaire sortante de la surface, autrement dit pointant hors du volume considéré :

$$\vec{S} = S\vec{n}$$

À partir des deux hypothèses de départ, par exemple pour la masse :

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$d^3M = \rho d^3V$$

On considère un élément infinitésimal du deuxième ordre  $d^2s$  appartenant à la surface  $S$  entourant le volume  $V$ . Dans le volume  $V$  et proche de cette surface  $d^2s$ , on considère l'élément infinitésimal d'ordre trois de matière  $d^3M$  qui va sortir par cette surface  $d^2s$  en un temps  $dt$ . Cette matière a une vitesse  $\vec{v}$ , si bien que quand  $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$ , la matière sort du volume et  $d^3M$  est négatif :

$$d^3M = -\rho \vec{v} dt \cdot \vec{n} d^2s$$

$$\frac{dM}{dt} = -\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d^2s$$

L'élément de matière  $dM$  est ici proche de la surface  $S$  mais c'est bien la masse totale qui varie, on peut donc remplacer  $M$  par  $\iiint_V \rho d^3V$ . On obtient l'équation de conservation sous sa forme intégrale, valable dans tout référentiel :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3V + \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s = 0$$

### Remarque 5.1

- $\vec{v}$  est la vitesse du milieu continu au point où se trouve l'élément de surface  $d^2s$
- l'équation de conservation est également appelée équation de transport car une quantité qui se conserve ne peut qu'être transportée d'un endroit à un autre

- si  $\partial_t \rho > 0$  le flux est entrant et  $\vec{j} \cdot \vec{n} < 0$
- si  $\partial_t \rho < 0$  le flux est sortant et  $\vec{j} \cdot \vec{n} > 0$

### Remarque 5.5

Si par convention l'orientation de la surface est choisie positive vers l'intérieur, l'équation de conservation s'écrit :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3V - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence 5.1 page 71, on écrit l'équation de conservation sous sa forme différentielle, appelée forme locale :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div}(\vec{j}) dV = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0}$$

### Exemple 5.3

Équation de conservation de la masse (mécanique classique) :

- $\rho$  est la masse volumique du fluide
- $\vec{j} = \rho_M \vec{v} = \frac{\vec{p}}{v}$  est le vecteur densité volumique de quantité de mouvement du fluide

Équation de conservation de la charge (mécanique classique et relativiste) :

- $\rho$  est la densité de charge
- $\vec{j} = \rho_q \vec{v} = \frac{d^3Q}{d^3V} \frac{dl}{dt} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{d^2I}{d^2s} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  est le vecteur densité surfacique de courant électrique

Équation de conservation de l'énergie (mécanique classique) :

- $\rho$  est la densité d'énergie
- $\vec{j} = \rho_e \vec{v} = \frac{d^3E}{d^3V} \frac{dl}{dt} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{d^3E}{d^2s dt} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  est le vecteur flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps

Pour les quantités non conservatives, l'équation s'appelle *équation de continuité* :

- s'il existe une *source* d'éléments dans  $V$  :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s > 0$$

- s'il existe un *puits* d'éléments dans  $V$  :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s < 0$$

## 5.4 Opérateur nabla

### Définition 5.3 : Opérateur symbolique nabla

Soit le repère naturel orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associé au système de coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ . On appelle nabla<sup>a</sup> l'opérateur vectoriel différentiel symbolique tel que :

$$\vec{\nabla} \Leftarrow \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

a. Nabla est le nom hébraïque d'un instrument de musique égyptien, une sorte de harpe qui avait la forme d'un delta inversé.

Ce 3-opérateur permet de définir les opérateurs gradient, divergence et rotationnel.

- La multiplication de  $\vec{\nabla}$  par le champ de scalaires  $f(x, y, z)$  donne le champ de vecteurs  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) \end{aligned}$$

Le gradient prend en entrée un champ de scalaires et donne en sortie un champ de vecteurs.

- Le produit scalaire euclidien de  $\vec{\nabla}$  par le champ de vecteurs  $\vec{u}$  donne le champ de scalaires  $\text{div}(\vec{u})$  :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(u_x, u_y, u_z) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \text{div}(\vec{u})\end{aligned}$$

La divergence prend en entrée un champ de vecteurs et donne en sortie un champ de scalaires.

- Le produit vectoriel de  $\vec{\nabla}$  par le champ de vecteurs  $\vec{u}$  donne le champ de vecteurs  $\vec{\text{rot}}(\vec{u})$  :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{u}(u_x, u_y, u_z) &= \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \vec{\text{rot}}(\vec{u})\end{aligned}$$

Le rotationnel prend en entrée un champ de vecteurs et donne en sortie un champ de vecteurs.

### Remarque 5.6

L'opérateur nabla est symbolique, toutes les règles du calcul vectoriel ne s'appliquent pas à cet opérateur. En particulier, on a la relation *fausse* suivante (en utilisant le théorème d'analyse vectorielle 11.2 page 154) :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{u} \times \vec{v}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\vec{v} \\ &= \text{div}(\vec{v})\vec{u} - \text{div}(\vec{u})\vec{v}\end{aligned}$$

### Définition 5.4 : Opérateur laplacien

Soit le repère naturel orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associé au système de coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ . On appelle laplacien d'un champ de scalaires  $f(x, y, z)$ , l'opérateur différentiel  $\Delta$ , tel que :

$$\begin{aligned}\Delta(f) &\Leftarrow \text{div}(\vec{\text{grad}} f) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Le laplacien prend en entrée un champ de scalaires et donne en sortie un champ de scalaires. En utilisant l'opérateur nabla :

$$\begin{aligned}\nabla^2(f) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) \\ &= \Delta(f)\end{aligned}$$

### Définition 5.5 : Opérateur laplacien vectoriel

Soit le repère naturel orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associé au système de coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ . On appelle laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs  $\vec{u}$ , l'opérateur différentiel  $\vec{\Delta}$ ,

tel que :

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}(\vec{u}) &\Leftarrow \vec{\text{grad}} \text{div}(\vec{u}) - \vec{\text{rot}}[\vec{\text{rot}}(\vec{u})] \\ &= \Delta u_x \vec{i} + \Delta u_y \vec{j} + \Delta u_z \vec{k}\end{aligned}$$

Le laplacien vectoriel prend en entrée un champ de vecteurs et donne en sortie un champ de vecteurs.

## Chapitre 6

### GRAVITATION NEWTONIENNE

#### 6.1 Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire

Dans la théorie newtonienne de la gravitation, le modèle de Hooke de la force de gravitation est en inverse du carré de la distance entre les corps. L'interaction gravitationnelle entre un corps de masse  $M$  sur un corps de masse  $m$  est modélisée par le vecteur suivant

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{\|\vec{r}_m - \vec{r}_M\|^3} (\vec{r}_m - \vec{r}_M)$$

où la constante de proportionnalité  $\mathcal{G}$  est appelée *constante d'attraction gravitationnelle*. Dans la RFD 3.5 page 31, le membre de droite  $\vec{F}^{ext}$  est un modèle de force qu'il faut remplacer par

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \vec{e}_r \quad (6.1)$$

où  $r$  est la distance entre les deux masses,  $\vec{e}_r$  est un vecteur unitaire dirigé de  $M$  vers  $m$ ,  $r\vec{e}_r$  est le rayon vecteur de  $M$  à  $m$ . Le signe négatif indique que la force de gravitation est attractive, puisque celle exercée par  $M$  sur  $m$  est dirigée de  $m$  vers  $M$ .

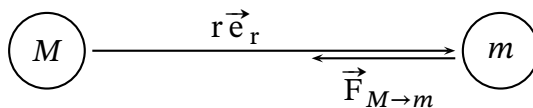


FIG. 6.1 – Signe de la force de gravitation

#### Définition 6.1 : Force gravitationnelle

Le vecteur force qui modélise l'interaction gravitationnelle entre les masses  $M$  et  $m$  s'appelle

force gravitationnelle.

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

### Remarque 6.1

La loi d'action-réaction 3.1 page 30 appliquée à la force gravitationnelle donne :

$$\vec{F}_{m \rightarrow M} = -\vec{F}_{M \rightarrow m}$$

Nous pouvons également modéliser l'interaction gravitationnelle par un champ de vecteurs en tout point de l'espace plutôt que par une force en un seul point. L'influence gravitationnelle due à la masse  $M$  est alors modélisée par un champ de vecteurs indépendant de  $m$ .

### Définition 6.2 : Champ gravitationnel

Le champ de vecteurs qui modélise l'influence gravitationnelle due à la masse  $M$  à une distance  $r$  s'appelle *champ gravitationnel*.

$$\vec{g}_M = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

On a alors :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \vec{g}_M(r) \quad (6.2)$$

### Définition 6.3 : Potentiel scalaire d'un champ vectoriel

La fonction scalaire  $f$  est dite potentielle du champ vectoriel  $\vec{A}$  ssi :

$$\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Réciproquement, le champ vectoriel  $\vec{A}$  dérive du champ de scalaires  $f$ .

Un champ de vecteurs est *conservatif* s'il dérive d'un potentiel scalaire ne dépendant pas explicitement du temps (Cf. th. 3.6 page 48).

### Définition 6.4 : Potentiel du champ gravitationnel

$\phi$  est le potentiel scalaire du vecteur champ gravitationnel  $\vec{g}$  ssi

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$$

Réciproquement, le champ gravitationnel  $\vec{g}$  dérive du potentiel de champ  $\phi$  appelé *potentiel newtonien*.

Cherchons l'expression du potentiel scalaire  $\phi$ . La symétrie sphérique du problème suggère de se placer en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} g \vec{e}_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r \\ g &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \int_A^B g dr &= -(\phi_B - \phi_A) \end{aligned}$$

Avec la déf. 6.2 page précédente du champ gravitationnel créé par une masse  $M$  :

$$-(\phi_B - \phi_A) = - \int_A^B \frac{\mathcal{G}M}{r^2} dr$$

$$\phi_A - \phi_B = \left[ \frac{\mathcal{G}M}{r} \right]_A^B$$

$$\boxed{\phi = -\frac{\mathcal{G}M}{r}} \quad (6.3)$$

$\phi$  est ici le potentiel newtonien de la masse  $M$ .

**Définition 6.5 : Potentiel de la force gravitationnelle**

$E_p$  est le potentiel scalaire du vecteur force gravitationnelle  $\vec{F}$  ssi

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

Réciproquement, la force de gravitation  $\vec{F}$  dérive du potentiel de force  $E_p$ , appelé *énergie potentielle de gravitation*.

$E_p$  est un modèle de la réalité. Toutes les forces réelles ne peuvent pas être modélisées par une énergie potentielle, mais dans le cas de l'interaction gravitationnelle newtonienne, le modèle de force (6.1) page 81 le permet.

En partant de la définition précédente, en coordonnées sphériques :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

$$F \vec{e}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$F = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

Avec la déf. 6.1 page 81 de la force gravitationnelle :

$$E_p = - \int F dr$$

$$= - \int -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} dr$$

On obtient l'expression du modèle d'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}}$$

Le potentiel de force et le potentiel de champ sont bien sûr liés par la même relation (6.2) page ci-contre qui lie force et champ :

$$E_p = m\phi$$

## 6.2 Champ gravitationnel créé par une sphère homogène

Soit une masse uniformément répartie sur la surface d'une sphère creuse de rayon  $a$ . Calculons l'intensité du champ gravitationnel en un point  $P$  extérieur à la sphère. Découpons la sphère en bandes circulaires de rayon  $a \sin(\theta)$  et de largeur  $a d\theta$  où  $\theta$  est la latitude.

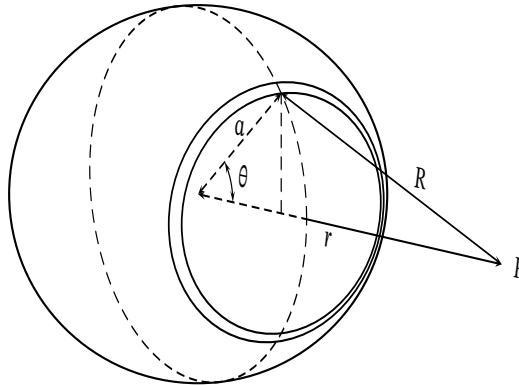


FIG. 6.2 – Champ de gravitation en  $P$

L'aire infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned} ds &= 2\pi a \sin(\theta) \times a d\theta \\ &= 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Soit  $m$  la masse de la sphère et  $\rho$  sa densité. La masse infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned} dm &= \rho ds \\ &= \frac{m}{4\pi a^2} \times 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} m \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Soit  $R$  la distance du point  $P$  à la bande. La déf. 6.2 page 82 donne le champ gravitationnel infinitésimal produit par cette bande en un point  $P$  :

$$\begin{aligned} d\vec{g}_m &= -\frac{\mathcal{G} dm}{R^2} \vec{e}_r \\ &= -\frac{\mathcal{G} m \sin(\theta) d\theta}{2R^2} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Plutôt que d'effectuer la difficile intégration du champ vectoriel de gravitation ci-dessus, nous allons intégrer le champ scalaire du potentiel de gravitation grâce à (6.3) page précédente :

$$\begin{aligned} d\phi &= -\frac{\mathcal{G} dm}{R} \\ &= -\frac{\mathcal{G} m \sin(\theta) d\theta}{2R} \end{aligned}$$

Soit  $r$  la distance du point  $P$  au centre de la sphère. Dérivons la loi des cosinus : par rapport à la variable  $\theta$  :

$$\begin{aligned} R^2(\theta) &= a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta) \\ \frac{dR^2}{d\theta} &= 2ar \sin(\theta) \\ 2RdR &= 2ar \sin(\theta)d\theta \\ \frac{dR}{2ar} &= \frac{\sin(\theta)d\theta}{2R} \end{aligned}$$

Si bien que

$$d\phi = -\frac{\mathcal{G}m dR}{2ar}$$

Intégrons sur la surface totale de la sphère :

- quand  $P$  est à l'extérieur de la sphère  $r > a$  et  $R$  varie de  $r - a$  à  $r + a$  :

$$\begin{aligned} \phi_{ext} &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar} 2a \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{r} \end{aligned}$$

À l'extérieur de la sphère, le champ gravitationnel s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{g}_{ext} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{r^2} \vec{e}_r \quad r > a \end{aligned}$$

Le champ gravitationnel en un point extérieur à la sphère est identique au champ gravitationnel que l'on aurait si la masse de la sphère était toute entière au centre de la sphère.

- quand  $P$  est à l'intérieur de la sphère  $r < a$  et  $R$  varie de  $a - r$  à  $a + r$  :

$$\begin{aligned} \phi_{int} &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar} \int_{a-r}^{a+r} dR \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar} 2r \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{a} \end{aligned}$$

En tout point intérieur à une sphère le potentiel du champ gravitationnel est constant, le champ gravitationnel est donc nul :

$$\vec{g}_{int} = \vec{0} \quad r < a$$

### 6.3 Champ gravitationnel créé par une boule homogène

La boule est un ensemble de sphères concentriques homogènes. On applique le résultat précédent pour chaque sphère.

- En un point extérieur d'une boule de masse  $M$  et de rayon  $a$ , le potentiel newtonien et son champ gravitationnel associés sont identiques au potentiel newtonien et au champ gravitationnel que l'on aurait si la masse de la boule était toute entière au centre de la boule :

$$\phi_{ext} = -\frac{\mathcal{G}M}{r} \quad \text{et} \quad \vec{g}_{ext} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2} \vec{e}_r \quad r > a$$

- En un point  $P$  intérieur à la boule, toutes les sphères de rayon supérieur à  $r$  ne contribuent pas au champ en  $P$  car on est à l'intérieur des sphères les plus grandes. Soit  $M'$  la masse de la boule de rayon  $r < a$ . Les masses sont dans le rapport des volumes :

$$\begin{aligned} M' &= M \times \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} \\ &= \frac{Mr^3}{a^3} \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} \vec{g}_{int} &= -\frac{\mathcal{G}M'}{r^2} \vec{e}_r \\ &= -\frac{\mathcal{G}Mr}{a^3} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Calculons le potentiel newtonien de ce champ :

$$\begin{aligned} \phi_{int} &= -\int \vec{g} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\mathcal{G}M}{a^3} \int r dr \\ &= \frac{\mathcal{G}M}{2a^3} r^2 + c^{ste} \end{aligned}$$

Pour calculer la constante on raccorde en  $r = a$  avec le potentiel newtonien extérieur :

$$\begin{aligned} \phi_{ext}(r = a) &= -\frac{\mathcal{G}M}{a} \\ \Rightarrow \phi_{int}(r = a) &= -\frac{\mathcal{G}M}{a} \\ \frac{\mathcal{G}M}{2a^3} a^2 + c^{ste} &= -\frac{\mathcal{G}M}{a} \\ c^{ste} &= -\frac{\mathcal{G}M}{2a} - \frac{\mathcal{G}M}{a} \\ &= -\frac{3\mathcal{G}M}{2a} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\phi_{int} &= \frac{\mathcal{G}M}{2a^3} r^2 - \frac{3\mathcal{G}M}{2a} \\ &= \frac{\mathcal{G}M}{2a^3} (r^2 - 3a^2)\end{aligned}$$

Au centre d'une boule le champ gravitationnel est nul (par symétrie sphérique), puis sa norme croît linéairement avec la distance au centre jusqu'à la surface de la boule, puis sa norme décroît jusqu'à l'infini en fonction du carré de la distance au centre de la boule.

## 6.4 Équations de Poisson et de Laplace

Un champ de vecteurs occupant un volume  $V$  de l'espace est de divergence nulle s'il ne diverge pas, ni ne converge, autrement dit s'il n'y a ni source ni puit dans ce volume  $V$ . Si donc dans un volume  $V$  un champ de vecteurs est de divergence nulle, alors ce champ est à flux conservatif à travers la surface  $S$  fermée définissant  $V$ . Cela signifie qu'à chaque instant la même quantité entre et sort de la surface  $S$  entourant  $V$ . Il y a conservation du champ dans le volume  $V$ . Réciproquement, si un champ de vecteurs est à flux conservatif à travers une patatoïde  $S$  fermée, alors sa divergence est nulle dans le volume défini par cette patatoïde.

### 6.4.1 Loi de Gauss pour la gravitation

#### Théorème 6.1 : Loi de Gauss sous forme intégrale

Le flux d'un champ gravitationnel à travers une surface fermée est proportionnel à la somme des masses intérieures à cette surface :

$$\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

Le signe négatif indique que le flux positif entre dans la surface.

*Démonstration.* Deux cas :

- pour le « cas intérieur », remplaçons le champ gravitationnel par son modèle donné par la déf. 6.2 page 82, et intégrons sur une surface fermée autour de la masse :

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds &= \oiint_S -\frac{\mathcal{G}M_{int}}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} \, ds \\ &= -\mathcal{G}M_{int} \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de Gauss 5.2 page 73 :

$$\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

La masse intérieure à la surface est la source du champ gravitationnel, ce champ est dirigé vers la masse (signe négatif car  $\vec{g}_{M_{int}}$  est entrant alors que la normale  $\vec{n}$  est sortante).

- pour le « cas extérieur » nous pouvons poser  $M_{int} = 0$ , ou bien appliquer le théorème de Gauss 5.2 page 73 sur une surface fermée ne contenant pas de masse :

$$\oiint_S \vec{g}_M \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Le flux du champ de vecteurs  $\vec{g}_M$  issu de  $M$  est nul à travers une surface ne contenant pas  $M$ . Il n'y a ni source ni puit dans le volume défini par cette surface, et le flux entrant est égal au flux sortant.

□

### Théorème 6.2 : Loi de Gauss sous forme différentielle

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = -4\pi\mathcal{G}\rho_{int}$$

*Démonstration.* À partir du théorème de la divergence 5.1 page 71 et de la loi de Gauss sous forme intégrale 6.1 page précédente :

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(\vec{g}_{M_{int}}) \, dV &= \oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds \\ &= -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\ &= -4\pi\mathcal{G} \iiint_V \rho_{int} \, dV \\ \operatorname{div}(\vec{g}_{M_{int}}) &= -4\pi\mathcal{G}\rho_{int} \end{aligned}$$

□

### Théorème 6.3 : Équation de Poisson (cas « intérieur »)

Soit  $\phi$  le potentiel d'un champ gravitationnel. À l'intérieur d'une surface fermée contenant une distribution de masse de densité volumique  $\rho$  :

$$\Delta(\phi_{int}) = 4\pi\rho\mathcal{G}$$

*Démonstration.* À partir de la loi de Gauss sous forme différentielle 6.2 de la présente page :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{g}) &= -4\pi\rho\mathcal{G} \\ -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi) &= -4\pi\rho\mathcal{G} \\ \Delta(\phi) &= 4\pi\rho\mathcal{G} \end{aligned}$$

□

### Remarque 6.2

L'équation de Poisson est linéaire. En effet, considérons deux distributions de masse de densité volumique  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , alors :

$$\begin{cases} \Delta(\phi_1) - 4\pi\rho_1\mathcal{G} = 0 \\ \Delta(\phi_2) - 4\pi\rho_2\mathcal{G} = 0 \end{cases}$$

Additionnons membre à membre :

$$\Delta(\phi_1 + \phi_2) - 4\pi(\rho_1 + \rho_2)\mathcal{G} = 0$$

En posant  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  et  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  :

$$\Delta(\phi) - 4\pi\rho\mathcal{G} = 0$$

Donc si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont solutions de l'équation de Poisson pour les distributions  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , alors leur somme est solution pour la distribution  $\rho_1 + \rho_2$ , et l'équation de Poisson est linéaire.

**Théorème 6.4 : Équation de Laplace (cas « extérieur »)**

En posant  $\rho = 0$  dans l'équation de Poisson, nous retrouvons le cas « extérieur » :

$$\Delta(\phi_{ext}) = 0$$



## Chapitre 7

# LES FORCES FICTIVES

Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des forces dites *fictives* car elles ne créent pas le mouvement. Elles ne sont dues qu'au mouvement de l'observateur, on peut les annuler en changeant de référentiel (de ce point de vue, la gravitation est une force fictive). Dans les référentiels non galiléens, nous pouvons utiliser la mécanique développée dans les référentiels galiléens (RFD et théorème du moment cinétique) à la condition d'ajouter ces forces. C'est là leur utilité.

### 7.1 Loi de composition des vitesses

#### Définition 7.1 : Vecteur position d'un mobile dans un référentiel

Soit un mobile de centre d'inertie  $M$ . Son vecteur position a pour expression :

- Dans un référentiel  $R$  quelconque de repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- Dans un référentiel  $R'$  quelconque de repère  $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Dans le domaine non relativiste le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels, galiléens ou non, par exemple dans les deux référentiels quelconques  $R$  et  $R'$ ,

$$t = t'$$

de sorte que les dérivations par rapport à  $t$  et  $t'$  sont équivalentes.

#### Notation 7.1

On note  $d_t^R$  la dérivée par rapport au temps pour un observateur fixe dans  $R$

**Théorème 7.1 : Loi de composition des vitesses**

Par changement de référentiel quelconque, les vecteurs vitesse du mobile sont liés par la loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \overset{\curvearrowright}{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}$$

dans laquelle :

- $\vec{v}(t)$  la vitesse d'un mobile dans R et  $\vec{v}'(t)$  sa vitesse dans R'
- $\vec{V}(t)$  la vitesse du référentiel R' dans R
- $\overset{\curvearrowright}{\omega}(t)$  est la vitesse angulaire de rotation sur lui-même de R' dans R

**Remarque 7.1**

On vérifie que si  $\vec{v}'(t) = \vec{0}$  et  $\overset{\curvearrowright}{\omega}(t) = \vec{0}$  alors on a bien  $\vec{v}(t) = \vec{V}(t)$ .

*Démonstration.* Dérivons dans R par rapport à  $t$  la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t) \\ d_t^R \overrightarrow{OM} &= d_t^R \overrightarrow{OO'} + d_t^R \overrightarrow{O'M} \end{aligned} \tag{7.1}$$

**Définition 7.2 : Vitesse absolue d'un mobile dans un référentiel**

La vitesse d'un mobile dans le référentiel R d'un observateur, appelée vitesse absolue, a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= d_t^R \overrightarrow{OM} \\ &= d_t^R (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

**Définition 7.3 : Vitesse relative de deux référentiels**

- La vitesse relative de R' dans R a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= d_t^R \overrightarrow{OO'} \\ &= d_t^R (x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k}) \\ &= \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j} + \dot{z}_{O'}\vec{k} \end{aligned}$$

- La vitesse relative de R dans R' a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{V}'(t) &= d_t^{R'} \overrightarrow{O'O} \\ &= d_t^{R'} (x'_O\vec{i}' + y'_O\vec{j}' + z'_O\vec{k}') \\ &= \dot{x}'_O\vec{i}' + \dot{y}'_O\vec{j}' + \dot{z}'_O\vec{k}' \end{aligned}$$

**Remarque 7.2**

Supposons que vu de R, le référentiel R' ne fasse que tourner sur lui-même. Alors, vu de R', le référentiel R décrit un cercle autour de R'. Les vitesses relatives respectives  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$  sont donc en général très différentes.

En se servant des définitions (7.2) et (7.3) page précédente, (7.1) page ci-contre devient :

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + d_t^R \overrightarrow{O'M} \tag{7.2}$$

**Définition 7.4 : Vitesse relative d'un mobile dans un référentiel en mouvement**

La vitesse d'un mobile dans R' pour un observateur dans R, appelée vitesse relative, a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t) &= d_t^{R'} \overrightarrow{O'M} \\ &= d_t^{R'} (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') \\ &= \dot{x}' \vec{i}' + \dot{y}' \vec{j}' + \dot{z}' \vec{k}' \end{aligned}$$

Vu de R, les vecteurs de base de R' varient dans le temps, par conséquent :

$$\begin{aligned} d_t^R \overrightarrow{O'M} &= d_t^R (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') \\ &= \dot{x}' \vec{i}' + \dot{y}' \vec{j}' + \dot{z}' \vec{k}' + x' d_t^R \vec{i}' + y' d_t^R \vec{j}' + z' d_t^R \vec{k}' \\ &= \vec{v}' + x' d_t^R \vec{i}' + y' d_t^R \vec{j}' + z' d_t^R \vec{k}' \end{aligned} \tag{7.3}$$

On suppose que les axes Oz et O'z' ont même direction et même sens, de sorte que  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  soient équipollents. Appelons  $\alpha(t)$  l'angle orienté de R vers R', qui est l'angle de rotation de R' dans R à l'instant t.

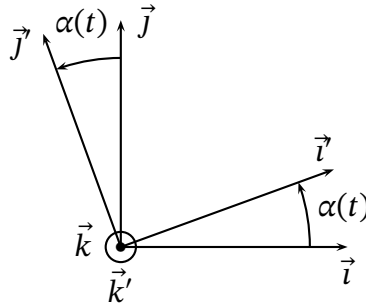


FIG. 7.1 – Rotation de R' dans R

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_t^R \vec{i}' = -\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{i} + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{j} \\ d_t^R \vec{j}' = -\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{i} - \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{C}^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_t^R \vec{i}' = \dot{\alpha} \vec{j} \\ d_t^R \vec{j}' = -\dot{\alpha} \vec{i} \\ d_t^R \vec{k}' = \vec{0} \end{cases}$$

Par conséquent (7.3) de la présente page s'écrit :

$$\begin{aligned} d_t^R \overrightarrow{O'M} &= \vec{v}' + x' \dot{\alpha} \vec{j} - y' \dot{\alpha} \vec{i} \\ &= \vec{v}' + \dot{\alpha} (x' \vec{j} - y' \vec{i}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

**Définition 7.5 : Pseudovecteur vitesse angulaire relative de deux référentiels**

Le pseudovecteur vitesse angulaire de  $R'$  dans  $R$  a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t) &= (d_t^R \alpha) \vec{k} \\ &= \dot{\alpha} \vec{k}\end{aligned}$$

Appelons  $\alpha'(t)$  l'angle orienté de  $R'$  vers  $R$ , qui est l'angle de rotation de  $R$  dans  $R'$  à l'instant  $t$ , et tel que  $\alpha' = -\alpha$ . Le pseudovecteur vitesse angulaire de  $R$  dans  $R'$  a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'(t) &= (d_t^{R'} \alpha') \vec{k}' \\ &= \dot{\alpha}' \vec{k}' \\ &= -\dot{\alpha} \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{\omega}'(t) = -\vec{\omega}(t)$$

Le second terme du membre de droite de (7.4) page précédente est un produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} y' \\ \dot{\alpha} x' \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\alpha} (x' \vec{j}' - y' \vec{i}')\end{aligned}$$

si bien que (7.4) page précédente devient :

$$d_t^R \overrightarrow{O'M} = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) \quad (7.5)$$

Avec ce résultat, la loi de composition des vitesses (7.2) page précédente s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) \quad \square$$

La relation (7.3) page précédente devient :

$$d_t^R \overrightarrow{O'M} = d_t^{R'} \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \quad (7.6)$$

**Remarque 7.3**

On peut obtenir ce résultat en utilisant une démonstration purement algébrique :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 1 \\ d_t^R(\vec{i}' \cdot \vec{i}') &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^R \vec{i}' + d_t^R \vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 0 \\ 2(\vec{i}' \cdot d_t^R \vec{i}') &= 0 \\ d_t^R \vec{i}' &\perp \vec{i}' \\ d_t^R \vec{i}' &= \vec{\omega} \times \vec{i}'\end{aligned}$$

où  $\vec{\omega}$  est pour l'instant un vecteur indéterminé.

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{j}' &= 0 \\ d_t^R(\vec{i}' \cdot \vec{j}') &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^R \vec{j}' + \vec{j}' \cdot d_t^R \vec{i}' &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^R \vec{j}' &= -\vec{j}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{i}')\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 11.1 page 153 donné en annexe :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot d_t^R \vec{j}' &= -\vec{i}' \cdot (\vec{j}' \times \vec{\omega}) \\ &= \vec{i}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{j}') \\ d_t^R \vec{j}' &= \vec{\omega} \times \vec{j}'\end{aligned}$$

De même pour le vecteur  $\vec{k}$  :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{k}' &= 0 \\ d_t^R \vec{k}' &= \vec{\omega} \times \vec{k}'\end{aligned}$$

En posant  $\vec{k}'$  comme axe de rotation,

$$\begin{aligned}d_t^R \vec{k}' &= \vec{0} \\ \vec{\omega} \times \vec{k}' &= \vec{0}\end{aligned}$$

soit,

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}'$$

En appliquant ces résultats à (7.3) page 93 puis à (7.2) page 93, nous obtenons la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}' + x'(\vec{\omega} \times \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \times \vec{j}') \\ &= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times x' \vec{i}' + \vec{\omega} \times y' \vec{j}' \\ &= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\end{aligned}$$

### Définition 7.6 : Vitesse d'entraînement d'un mobile

La vitesse d'entraînement d'un mobile à  $t_0$  est la vitesse du point  $P$  fixe dans le référentiel  $R'$ , coïncidant avec le point  $M$  à  $t_0$  :

$$\begin{aligned}\vec{v}_e(t_0) &= \vec{V}(t_0) + \vec{v}'_p + \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ &= \vec{V}(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0)\end{aligned}$$

Les points  $P$  et  $M$  étant superposés à  $t_0$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'M}(t_0) &= \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{V}(t_0) + \vec{v}'(t_0) + \overset{\curvearrowright}{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \vec{V}(t_0) + \vec{v}'(t_0) + \overset{\curvearrowright}{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0)\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v}(t_0) = \vec{v}'(t_0) + \vec{v}_e(t_0)}$$

Les trajectoires de  $P$  et  $M$  étant différentes sauf si le mobile est fixe dans  $R'$ , en général :

$$\begin{aligned}d_t^R(\overrightarrow{O'M}) &\neq d_t^R(\overrightarrow{O'P}) \\ d_t^R(\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &\neq d_t^R(\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) \\ d_t^R(\vec{V} + \vec{v}' + \overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &\neq d_t^R(\vec{V} + \vec{v}' + \overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{O'P})\end{aligned}$$

$$\boxed{d_t^R \vec{v} \neq d_t^R(\vec{v}' + \vec{v}_e)}$$

## 7.2 Loi de composition des accélérations

### **Théorème 7.2 : Loi de composition des accélérations**

*Par changement de référentiel, les vecteurs accélération d'un mobile sont liés par la loi de composition des accélérations*

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

dans laquelle :

- $\vec{a}$  est l'accélération du mobile dans  $R$  et  $\vec{a}'$  est son accélération dans  $R'$
- $\vec{a}_e$  est son accélération d'entraînement
- $\vec{a}_c$  son accélération de Coriolis

*Démonstration.* Dérivons dans  $R$  par rapport à  $t$ , la loi de composition des vitesses du théorème 7.1 page 92 :

$$\begin{aligned}d_t^R \vec{v} &= d_t^R \vec{V} + d_t^R \vec{v}' + d_t^R \left( \overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \right) \\ &= d_t^R \vec{V} + d_t^R \vec{v}' + d_t^R \overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \overset{\curvearrowright}{\omega} \times d_t^R \overrightarrow{O'M}\end{aligned}$$

### **Définition 7.7 : Accélération absolue d'un mobile dans un référentiel**

L'accélération d'un mobile dans le référentiel  $R$  d'un observateur, appelée accélération absolue, a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= d_t^R (d_t^R \overrightarrow{OM}) \\ &= d_t^R \vec{v}\end{aligned}$$

**Définition 7.8 : Accélération relative de deux référentiels**

L'accélération relative de R' dans R a pour expression :

$$\vec{A} = d_t^R \vec{V}$$

Avec ces définitions :

$$\vec{a} = \vec{A} + d_t^R \vec{v}' + \dot{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \omega \times d_t^R \overrightarrow{O'M}$$

En utilisant (7.5) page 94, nous avons :

$$\vec{a} = \vec{A} + d_t^R \vec{v}' + \dot{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \omega \times (\vec{v}' + \omega \times \overrightarrow{O'M}) \quad (7.7)$$

La relation (7.6) page 94 s'applique à tout vecteur exprimé dans R' et dérivé dans R. Appliquée au vecteur  $\vec{v}'$ , elle donne :

$$d_t^R \vec{v}' = d_t^{R'} \vec{v}' + \omega \times \vec{v}'$$

**Définition 7.9 : Accélération relative d'un mobile dans un référentiel en mouvement**

L'accélération d'un mobile dans R' pour un observateur dans R, appelée accélération relative, est l'accélération du mobile dans le référentiel R' :

$$\vec{a}' = d_t^{R'} \vec{v}'$$

La relation (7.7) devient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{A} + d_t^{R'} \vec{v}' + \omega \times \vec{v}' + \dot{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \omega \times (\vec{v}' + \omega \times \overrightarrow{O'M}) \\ &= \vec{A} + \vec{a}' + \dot{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \omega \times (\omega \times \overrightarrow{O'M}) + 2\omega \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (7.8)$$

Soit H la projection orthogonale du point M sur l'axe de rotation O'z' du repère R'.

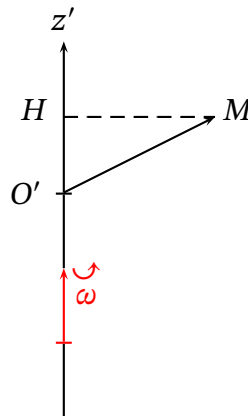


FIG. 7.2 – Projection du point M sur l'axe de rotation

En utilisant le théorème 11.2 page 154 donné en annexe, l'avant dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\omega} \times (\dot{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &= \dot{\omega} (\dot{\omega} \cdot \overrightarrow{O'M}) - \overrightarrow{O'M} (\dot{\omega} \cdot \dot{\omega}) \\ &= \dot{\omega} (\omega O'H) - \overrightarrow{O'M} \omega^2 \\ &= \overrightarrow{O'H} \omega^2 - \overrightarrow{O'M} \omega^2 \\ &= \overrightarrow{MH} \omega^2 \end{aligned}$$

Ce terme est dit « centripète » car toujours dirigé vers le centre de rotation instantané.

**Définition 7.10 : Accélération centripète d'un mobile**

Le terme  $\overrightarrow{MH} \omega^2$  s'appelle accélération centripète du mobile.

La relation (7.8) page précédente s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \dot{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{MH} \omega^2 + 2\dot{\omega} \times \vec{v}' \quad (7.9)$$

**Définition 7.11 : Accélération d'entraînement d'un mobile**

L'accélération d'entraînement d'un mobile à  $t_0$  est l'accélération du point  $P$  fixe dans le référentiel mobile ( $\vec{v}'_p = \vec{0}$  et  $\vec{a}'_p = \vec{0}$ ), coïncidant avec le centre d'inertie  $M$  du mobile à  $t_0$  :

$$\vec{a}_e(t_0) = \vec{A}(t_0) + \dot{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)$$

L'accélération d'entraînement contient donc :

- l'accélération relative des référentiels
- l'accélération de la vitesse angulaire
- l'accélération centripète

À l'instant  $t_0$ , les points  $P$  et  $M$  étant superposés, nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{A}(t_0) + \dot{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0) &= \vec{A}(t_0) + \dot{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_e(t_0) = \vec{A}(t_0) + \dot{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)$$

**Définition 7.12 : Accélération de Coriolis**

L'accélération de Coriolis a pour expression

$$\vec{a}_c = 2\dot{\omega} \times \vec{v}'$$

Avec les définitions 7.11 et 7.12, la relation (7.9) de la présente page s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad \square$$

### Remarque 7.4

La dérivée dans  $R$  de la vitesse d'entraînement donne l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned} d_t^R \vec{v}_e &= d_t^R \vec{V} + d_t^R (\vec{\omega} \times \vec{O'P}) \\ &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{O'P} + \vec{\omega} \times d_t^R \vec{O'P} \end{aligned}$$

En utilisant (7.6) page 94 puis le théorème 11.2 page 154 donné en annexes :

$$\begin{aligned} d_t^R \vec{v}_e &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P}) \\ &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{O'P} + \overline{MH} \omega^2 \\ &= \vec{a}_e \end{aligned}$$

## 7.3 Forces dans un référentiel non galiléen

### Théorème 7.3 : RFD dans un référentiel non galiléen

Soient  $\sum \vec{F}^{\text{ext}}$  la somme des modèles des forces extérieures réelles s'exerçant sur un système. La RFD dans le référentiel non galiléen  $R'$  s'écrit,

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = \frac{d\vec{p}'}{dt}$$

et, lorsque la masse du système est constante :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m \vec{a}'$$

*Démonstration.* La RFD dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse  $m$  du système étant supposée constante :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m \vec{a}$$

Avec le théorème 7.2 page 96 nous avons :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{\text{ext}} &= m (\vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c) \\ &= m \vec{a}' + m \vec{a}_e + m \vec{a}_c \end{aligned}$$

### Définition 7.13 : Force d'inertie d'entraînement

La force d'inertie d'entraînement a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m \vec{a}_e \\ &= -m \left[ \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \vec{O'P}(t_0) + \vec{MH}(t_0) \omega^2(t_0) \right]\end{aligned}$$

**Définition 7.14 : Force de Coriolis**

La force de Coriolis a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{F}_c &= -m \vec{a}_c \\ &= -2m \vec{\omega} \times \vec{v}'\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m \vec{a}'$$

Dans le référentiel non galiléen  $R'$ , il faut ajouter aux modèles des forces extérieures réelles  $\vec{F}^{\text{ext}}$  s'exerçant sur le système, les forces fictives d'entraînement  $\vec{F}_e$  et de Coriolis  $\vec{F}_c$ . □

**7.4 Exemple de force fictive : la force centrifuge**

Le système étudié est un corps de centre d'inerte  $M$  et de masse  $m$ , tenu par un câble et tournant avec la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}$  autour de l'axe  $Oz$  d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . On considère le référentiel non galiléen  $R'$  de même centre  $O$  que  $\mathcal{R}$ , dont l'axe  $Oz'$  est confondu avec l'axe  $Oz$ . Ce référentiel tourne autour de cet axe à la même vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  que le corps, de sorte que celui-ci soit immobile dans  $R'$  et soit toujours sur son axe  $Ox'$  :  $\vec{OM} = x' \vec{i}'$

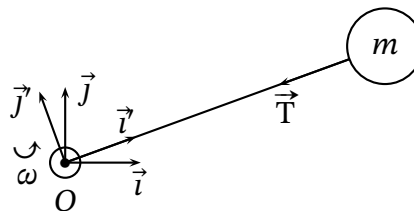


FIG. 7.3 – Rotation du mobile vue de dessus

- Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$

Le corps étant fixe dans  $R'$ , sa vitesse  $\vec{v}'$  et son accélération  $\vec{a}'$  sont nulles. D'après la déf. 7.12 page 98, l'accélération de Coriolis est nulle,  $\vec{a}_c = \vec{0}$ . L'accélération relative des référentiels est nulle par hypothèse,  $\vec{A} = \vec{0}$ . La variation de la vitesse angulaire est

également nulle,  $\dot{\omega} = 0$ . Dans (7.9) page 98 il ne reste que l'accélération centripète :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overline{MO} \omega^2 \\ &= -\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

où  $r \vec{e}_r$  est le vecteur position  $\overline{OM}$  en coordonnées polaires. La RFD donne la tension du câble :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{\text{ext}} &= m \vec{a} \\ \vec{T} &= -m\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

- Dans le référentiel non galiléen  $R'$

Écrivons la RFD pour un observateur dans le référentiel  $R'$  :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m \vec{a}'$$

L'accélération de Coriolis étant nulle, d'après la déf. 7.14 page ci-contre la force de Coriolis est nulle :

$$\vec{F}_c = \vec{0}$$

L'accélération relative des référentiels étant nulle et la vitesse angulaire constante, il ne reste que l'accélération centripète. D'après la déf. 7.13 page 99 la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m \vec{a}_e \\ &= m\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + m\omega^2 r \vec{e}_r = m \vec{a}'$$

#### Définition 7.15 : Force centrifuge

La force centrifuge a pour expression :

$$\vec{F}_n = m\omega^2 r \vec{e}_r$$

Le corps étant immobile dans  $R'$ , son accélération est nulle :

$$\vec{T} + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Pour un observateur dans  $R'$ , la force centrifuge s'exerce sur tous les corps immobiles dans  $R'$  en plus des forces réelles (la tension du câble). Elles permettent à l'observateur dans  $R'$  d'appliquer la RFD, la somme des forces réelles et fictives étant nulle pour les objets immobiles.



## Chapitre 8

### LE PENDULE BALISTIQUE

#### 8.1 Description

Le pendule balistique permet de mesurer la vitesse d'un projectile. Un sac de sable est relié par l'intermédiaire d'une tige rigide au bras horizontal ( $Oz$ ) d'une potence, autour duquel il peut tourner librement et sans frottement (fig. 8.1 de la présente page).

À l'instant  $t_0$  le sac est au repos dans le référentiel terrestre ( $O, x, y, z$ ) supposé galiléen.

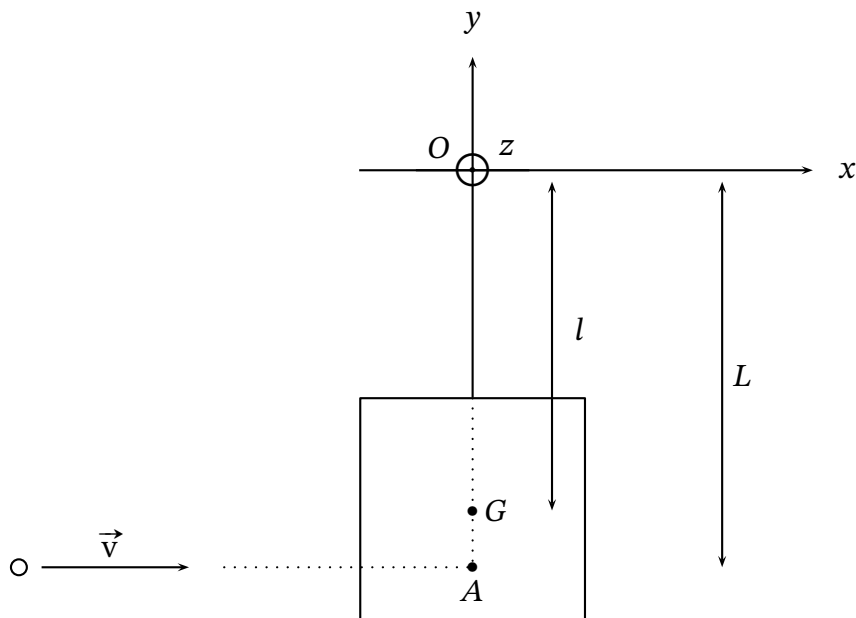


FIG. 8.1 – Pendule balistique avant impact

Soient

- $M$  la masse du sac
- $G$  son centre de gravité

- $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation c.-à-d. la répartition de sa masse en fonction du carré de la distance à l'axe de rotation ( $Oz$ )

On note  $l$  la distance  $OG$ .

### Remarque 8.1

L'utilisation d'une corde au lieu d'une tige rigide autoriserait une rotation du sac de sable autour de son point d'attache avec la corde, ce qui compliquerait la résolution de ce problème.

À l'instant  $t_0$ , un projectile ( $p$ ) de masse  $m$ , de vecteur position  $\vec{\rho}(t)$  et de dimensions négligeables, pénètre le sac de sable avec un vecteur vitesse purement horizontal  $\vec{v}(t_0)$ , donc au sommet de sa trajectoire, et s'arrête au point  $A$  à l'instant  $t_1$ . Nous supposons que  $A$  est situé sur la droite verticale ( $OG$ ). On note  $L$  la distance  $OA$ .

La durée  $t_1 - t_0$  de l'impact, le sac et le projectile prennent la vitesse angulaire  $\overset{\curvearrowright}{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$  autour de l'axe de rotation ( $Oz$ ). Le mouvement du sac étant un mouvement de rotation, nous devons utiliser le « théorème » du moment cinétique.

## 8.2 Théorème du moment cinétique

- 1) Première méthode : le système étudié est le sac de sable et le projectile, noté ( $s + p$ ).

Avant l'impact, les forces extérieures exercées sur le système sont le poids du projectile  $\vec{P}_p$ , le poids du sac  $\vec{P}_s$  et la tension dans la tige  $\vec{T}$  avec :

$$\vec{P}_s = -\vec{T}$$

Cette relation n'est plus vraie après l'impact.

### Remarque 8.2

Les poids du sac et du projectile sont des forces extérieures au système. Elles sont dues à la présence de la Terre.

Le pseudovecteur moment cinétique est noté  $\overset{\curvearrowright}{\sigma}$ . Le théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque  $q$  fixe (ou à vecteur vitesse constant) dans ( $O, x, y, z$ ) s'écrit :

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_q(\vec{F}^{\text{ext}}) = \frac{d}{dt} \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{q(s+p)}$$

$$\overset{\curvearrowright}{M}_q(\vec{P}_s) + \overset{\curvearrowright}{M}_q(\vec{P}_p) + \overset{\curvearrowright}{M}_q(\vec{T}) = \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{q(s+p)}(t_1) - \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{q(s+p)}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

### Remarque 8.3

Les forces intenses et de courte durée qui apparaissent lors d'un choc sont appelées *percussions*. On considère qu'un solide ne bouge presque pas lorsqu'il subit une percussion, seule sa vitesse varie. C'est le cas par exemple du rebond d'une balle contre un mur.

En acquérant en très peu de temps une vitesse de rotation  $\omega$  autour du bras horizontal, le sac de sable exerce soudainement une force centrifuge  $\vec{F}_c = -M\omega^2\vec{l}$  sur la tige. La tension dans la tige augmente brutalement pendant le choc alors que le sac de sable ne bouge presque pas. Cette percussion tend à casser la tige et le bras de la potence, la tension est égale et opposée à la réaction  $\mathbf{R}$  de l'axe de rotation.

Prenons  $q$  confondu avec  $O$  car en ce point les moments de force sont identiquement nuls, le temps de l'impact les forces passent toutes approximativement par  $O$  :

$$\overset{\curvearrowright}{M}_o(\vec{P}_s) + \overset{\curvearrowright}{M}_o(\vec{P}_p) + \overset{\curvearrowright}{M}_o(\vec{T}) = \overset{\curvearrowright}{0}$$

#### Remarque 8.4

En toute rigueur le point  $O$  n'est pas fixe dans un référentiel galiléen car la Terre se met à tourner lors de l'impact dans le sac. Pour s'en rendre compte il suffit d'imaginer la même expérience avec une masse terrestre beaucoup plus faible. La masse de la Terre étant très grande par rapport aux masses du projectile et du sac,  $O$  est approximativement fixe dans un référentiel galiléen. Cette approximation permet de ne pas prendre comme système un système isolé.

En effet, si l'on remplaçait la Terre par une boule de quelques kilos, il faudrait choisir le système isolé constitué du projectile, du sac, de la tige, de la potence et de la boule. L'interaction gravitationnelle serait alors négligeable.

La variation dans le temps du moment cinétique du système ( $s + p$ ) par rapport à  $O$  est nulle, il se conserve :

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{o(s+p)}(t_1) &= \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{o(s+p)}(t_0) \\ J\omega\vec{k} + \vec{\rho}(t_1) \times m\vec{v}(t_1) &= \vec{\rho}(t_0) \times m\vec{v}(t_0) \\ J\omega\vec{k} + \vec{\rho}(t_1) \times m[\vec{\omega} \times \vec{\rho}(t_1)] &= \vec{\rho}(t_0) \times m\vec{v} \\ J\omega\vec{k} + mL^2\omega\vec{k} &= mLv\vec{k} \\ (J + mL^2)\omega &= mLv \end{aligned} \tag{8.1}$$

$$\omega = \frac{mLv}{J + mL^2} \tag{8.2}$$

#### Remarque 8.5

Une réécriture de (8.1) met en évidence le transfert de moment cinétique entre le projectile et le sac :

$$J\omega = mL(v - L\omega)$$

Lorsque la masse du projectile est négligeable devant celle du sac de sable  $m \ll M$  :

$$\omega \approx \frac{mLv}{J}$$

#### Remarque 8.6

À partir de (8.1) de la présente page, cherchons quelles sont les approximations qui donnent la conservation de la quantité de mouvement. Si la dimension verticale du sac est petite devant  $l$  et/ou si la dimension verticale du sac est petite par rapport à ses dimensions horizontales alors  $J \approx ML^2$  et  $L \approx l$ , et (8.1) devient :

$$\begin{aligned} (ML^2 + ml^2)\omega &\approx mlv \\ (M + m)V &\approx mv \end{aligned}$$

où  $V = l\omega$  est la vitesse horizontale du sac et du projectile après le choc. Par conséquent, si au moins l'une des deux conditions précédentes est respectée, nous pouvons écrire la conservation de la quantité de mouvement lors de l'impact plutôt que la conservation du moment cinétique.

2) Seconde méthode : le système étudié est le sac de sable seul, noté (s).

Le système est à masse variable, sa masse passe de  $M$  à  $M + m$ . Avant l'impact, les forces extérieures exercées sur le système sont le poids du sac  $\vec{P}_s$  et la tension dans la tige  $\vec{T}$ . Le moment cinétique du sac de sable est nul car il n'a pas de vitesse de rotation. Pendant l'impact apparaissent la force  $\vec{f}_p$  du projectile sur le sac et le poids du projectile  $\vec{P}_p$  lorsque la masse du système passe de  $M$  à  $M + m$ .

Le théorème du moment cinétique par rapport au point O s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{F}^{\text{ext}}) &= \frac{d}{dt} \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)} & (8.3) \\ \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{P}_{(s+p)}) + \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{T}) + \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{f}_p) &= \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_1) - \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_0)}{t_1 - t_0} \\ \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{f}_p) &= \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_1)}{t_1 - t_0} \end{aligned}$$

La RFD donne l'expression du premier membre :

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{f}_p) &= -L\vec{j} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{i} \\ &= mL \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{k} \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} mL \frac{v-0}{t_1-t_0} \vec{k} &= \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_1)}{t_1-t_0} \\ mLv &= J\omega + mL^2\omega \end{aligned}$$

Nous retrouvons (8.1) page précédente.

### 8.3 Conservation de l'énergie mécanique après l'impact

La conservation de l'énergie mécanique après l'impact, donc après dissipation thermique, permet de trouver l'expression de la vitesse du projectile avant l'impact. Prenons la position initiale du centre de gravité du système sac-projectile comme origine de l'énergie potentielle. Au temps  $t_1$ , juste après la fin de l'impact, l'énergie potentielle du système sac-projectile est nulle et l'énergie cinétique est maximale :

$$E_c(t_1) = \frac{1}{2} (J + mL^2) \omega^2$$

Avec l'expression de omega (8.2) page précédente :

$$\begin{aligned} E_c(t_1) &= \frac{1}{2} (J + mL^2) \left( \frac{mLv}{J + mL^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{mL^2}{J + mL^2} \right) v^2 \\ &\approx \frac{1}{2} m \left( \frac{mL^2}{J} \right) v^2 \quad m \ll M \end{aligned}$$

On note ici que pour  $m \ll M$  cette énergie cinétique est très petite devant celle du projectile. Nous verrons au § 8.4 que l'énergie cinétique du projectile est en grande partie transformée en énergie thermique.

On mesure l'angle maximal  $\theta_{max}$  atteint par le système sac-projectile à  $t_2$ . L'énergie cinétique est alors nulle et l'énergie potentielle de pesanteur maximale :

$$\begin{aligned} E_{pp}(t_2) &= Mgl[1 - \cos(\theta_{max})] + mgL[1 - \cos(\theta_{max})] \\ &= (Ml + mL)g[1 - \cos(\theta_{max})] \end{aligned}$$

Lorsque la masse du projectile est négligeable devant celle du sac de sable, en appelant  $h_{max}$  la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité du sac de sable :

$$\begin{aligned} E_{pp}(t_2) &\approx Mgl[1 - \cos(\theta_{max})] \quad m \ll M \\ &\approx Mgh_{max} \quad m \ll M \end{aligned}$$

En négligeant les frottements de l'air et les frottements au niveau de l'axe, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_m(t_1) &= E_m(t_2) \\ E_c(t_1) + E_{pp}(t_1) &= E_c(t_2) + E_{pp}(t_2) \\ \frac{m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 &= (Ml + mL)g[1 - \cos(\theta_{max})] \\ v &= \frac{1}{mL} \sqrt{2(J + mL^2)(Ml + mL)g[1 - \cos(\theta_{max})]} \\ &\approx \frac{1}{mL} \sqrt{2JMgh_{max}} \quad m \ll M \end{aligned}$$

Avec  $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2(\theta/2)$ , c.-à-d.  $\sqrt{2[1 - \cos(\theta)]} = 2 \sin(\theta/2)$  :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{(J + mL^2)(Ml + mL)g} \\ &\approx \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{JMgl} \quad m \ll M \end{aligned} \tag{8.4}$$

## 8.4 Conservation de l'énergie totale

On peut à présent calculer le transfert de chaleur  $Q$  du projectile au sac de sable lors de l'impact. On écrit la conservation de l'énergie totale lors du transfert d'énergie cinétique au moment de l'impact, lorsque l'énergie potentielle est encore nulle :

$$\begin{aligned} Q &= E_c(t_0) - E_c(t_1) \\ &= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 \\ &= \frac{m(J + mL^2) - m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{J}{J + mL^2} \right) v^2 \\ &\approx \frac{1}{2} mv^2 \quad m \ll M \end{aligned} \tag{8.5}$$

La quasi totalité de l'énergie cinétique du projectile est transformée en énergie thermique, une faible partie est transformée en énergie cinétique du sac et du projectile. Par conséquent il faut choisir un sac de faible masse, mais capable d'arrêter le projectile.

## 8.5 Condition pour annuler la percussion

Le théorème du moment cinétique et la relation fondamentale de la dynamique permettent de trouver la hauteur d'impact  $h$  qui annule une partie de la percussion sur l'axe. Une partie seulement car la percussion due à la force centrifuge de mise en rotation du sac de sable ne peut être annulée.

Soit  $\vec{f}$  la force exercée par le projectile sur le sac, le théorème du moment cinétique (8.3) page 106 se réécrit :

$$-h\vec{j} \times \vec{f} = \frac{d}{dt} (J\omega + mh^2\omega) \vec{k}$$

$$h \approx \frac{J\dot{\omega}}{f}$$

La percussion sur  $(Oz)$  est nulle si  $f$  sert intégralement à accélérer le sac de sable (et n'est donc pas transmise à l'axe  $(Oz)$ ). Dans ce cas, la RFD donne :

$$f = \frac{d}{dt}(Ml\omega)$$

$$= Ml\dot{\omega}$$

Nous avons donc :

$$h = \frac{J}{Ml} \tag{8.6}$$

Cette hauteur est particulière. En effet, la période du pendule pesant de moment d'inertie  $J$ , de masse  $M$  et de longueur  $l$  s'écrit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{gMl}}$$

Celle du pendule simple de longueur  $h$  s'écrit :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Si on égale ces deux périodes on retrouve (8.6). Il faut donc que le projectile percute le sac de sable à la distance  $h$  de l'axe de rotation, égale à la longueur du pendule simple synchrones avec le pendule balistique. En effet, lorsque le projectile percute le centre de gravité du sac de sable, celui-ci prend un mouvement de translation rectiligne seul. Or il doit aussi avoir un mouvement de rotation. L'impact doit donc se trouver sous le centre de gravité pour correspondre au mouvement naturel du sac de sable autour de l'axe  $(Oz)$ .

En remplaçant  $J$  par  $Lml$  dans (8.4) page précédente, nous obtenons pour la vitesse :

$$v = \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{g(Lml + mL^2)(Ml + mL)}$$

$$v = \frac{2(Ml + mL)}{m} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{\frac{g}{L}}$$

En remplaçant  $J$  par  $LMI$  dans (8.5) page 107, nous avons :

$$Q = \frac{1}{2} m \left( \frac{Ml}{Ml + mL} \right) v^2$$



## Chapitre 9

### LE PROBLÈME DE KEPLER

Il s'agit de déterminer l'équation de l'orbite d'une planète à partir de la mécanique de Newton, en ne considérant que la seule force de gravitation, en négligeant l'interaction gravitationnelle des planètes entre elles, et en supposant les astres ponctuels. Ce problème est aussi connu sous le nom de « problème des deux corps ».

---

#### 9.1 Coordonnées polaires

Étant donné que l'on traite ici de la révolution d'une planète autour du Soleil, il est avantageux de passer en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Les axes des  $z$  en coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$  et en cylindriques sont supposés confondus. Nous nous intéressons ici aux coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  prises dans le plan  $(x, y)$ .

---

##### 9.1.1 Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée

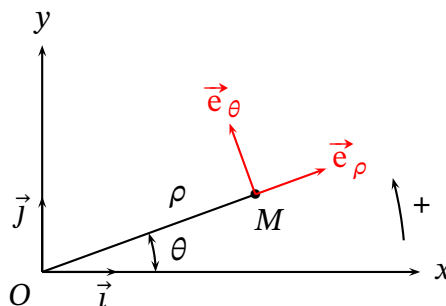


FIG. 9.1 – Vecteurs de la base polaire orthonormée

##### 1) Première méthode

En se servant de la figure 9.1, exprimons les vecteurs unitaires de base  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$  en fonction

de ceux de la base rectangulaire normée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

## 2) Deuxième méthode

Soit  $M$  un point de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  et de coordonnées rectangulaires  $(x, y)$ . Le changement de coordonnées de polaires vers rectangulaires s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Déterminons les vecteurs unitaires de base  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$  en différentiant le rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  exprimé en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  dans la base rectangulaire normée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ d\vec{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right)_\theta d\rho + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)_\rho d\theta \\ &= [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] d\rho + \rho [-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}] d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r}(\rho, \theta) = \vec{e}_\rho d\rho + \rho \vec{e}_\theta d\theta$$

### 9.1.2 Expression du vecteur position

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  dans la base polaire orthonormée  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$  :

$$\begin{aligned} \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ &= \rho [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] \\ &= \rho \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

### 9.1.3 Dérivée des vecteurs de base

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} - \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \end{cases}$$

### 9.1.4 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) \\
 &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho
 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (9.1)$$

### 9.1.5 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\
 &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \\
 &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho - \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho
 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \quad (9.2)$$

## 9.2 Force centrale - Cas général

### 9.2.1 Centre d'inertie

Soient  $M_1$  et  $M_2$  les masses de deux astres situés respectivement aux points  $A$  et  $B$ . D'après l'ex. 3.2 page 24, le centre d'inertie  $G$  est tel que

$$M_1 \vec{GA} + M_2 \vec{GB} = \vec{0}$$

Le système binaire formé des deux astres est supposé isolé, son centre d'inertie  $G$  a un mouvement inertiel. Soit  $\mathcal{R}_{c.i.}$  le référentiel galiléen de centre  $G$ . Notons  $\vec{r}_1 = \vec{GA}$  et  $\vec{r}_2 = \vec{GB}$  les rayons vecteurs des astres dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  :

$$\begin{aligned}
 M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 &= \vec{0} \\
 \vec{r}_2 &= -\frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1
 \end{aligned} \quad (9.3)$$

### 9.2.2 Masse réduite

Déterminons les rayons vecteur des astres en fonction des données du problème, c.-à-d. en fonction du vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$  reliant les deux astres :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}\end{aligned}$$

Avec (9.3) page précédente :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{et} & & \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_1 + \frac{M_1}{M_2} \vec{r}_1 & & & &= -\frac{M_2}{M_1} \vec{r}_2 - \vec{r}_2 \\ &= \frac{M_1 + M_2}{M_2} \vec{r}_1 & & & &= -\frac{M_1 + M_2}{M_1} \vec{r}_2\end{aligned}$$

et l'on a :

$$\vec{r}_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{r} \quad (9.4a)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{-M_1}{M_1 + M_2} \vec{r} \quad (9.4b)$$

Le centre d'inertie se trouve sur le segment de droite  $[AB]$  qui relie les deux astres.

#### Remarque 9.1

Le signe dans les expressions de  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  dépend de la convention choisie pour définir  $\vec{r}$ , c.-à-d.  $\vec{r} = \pm(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \pm\overrightarrow{BA}$ .

Nous pouvons à tout moment passer des rayons vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  au rayon vecteur  $\vec{r}$  à condition de passer des masses  $M_1$  et  $M_2$  à la masse réduite  $\mu$ , et vice versa. Si la trajectoire est établie pour le rayon vecteur  $\vec{r}$ , les trajectoires  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  seront obtenues grâce aux relations (9.4) de la présente page.

### 9.2.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Le système binaire est isolé, la somme des forces se réduit à la seule force d'interaction gravitationnelle entre les deux astres. Écrivons la RFD dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  pour chacun de deux sous-systèmes constitués d'un astre. La force est ici extérieure aux sous-systèmes mais intérieure au système binaire :

$$\vec{F}_1^{\text{ext}} = M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2^{\text{ext}} = M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

#### Remarque 9.2

$$\begin{aligned}\vec{F}_1^{\text{ext}} &= \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} & \text{et} & & \vec{F}_2^{\text{ext}} &= \frac{-M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ &= \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} & & & &= -\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

où  $\mu$  est la appelée *masse réduite*. La loi de l'action-réaction

$$\vec{F}_2^{\text{ext}} = -\vec{F}_1^{\text{ext}}$$

implique que les deux astres sont gouvernés, au signe près (qui dépend de la définition prise pour  $\vec{r}$ ), par la même équation :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Cette équation coïncide formellement avec celle d'un point matériel de masse  $\mu$  et de vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$ , en mouvement sous l'effet de la force extérieure  $\vec{F}^{\text{ext}}$  dirigée vers le centre d'inertie  $G$  du système binaire.

Toute force dirigée vers un point fixe dans un référentiel galiléen est dite *centrale*. En coordonnées polaires :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = F \vec{e}_\rho$$

Par symétrie du problème et isotropie de l'espace, chaque force attractive exercée par un astre sur l'autre est dirigée suivant la droite passant par les deux astres. Dans  $\mathcal{R}_{c.i.}$  les forces n'ont de composante que selon le vecteur  $\vec{e}_\rho$ , et le mouvement est donc plan (aucune force ne permet la sortie de ce plan). En écrivant ceci on fait l'hypothèse implicite que le moment cinétique de chaque astre se conserve, comme nous allons le voir. On pose (on omet l'indice pour alléger l'écriture) :

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$$

En utilisant l'accélération en coordonnées polaires (9.2) page 113, la RFD s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{ext}} &= M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ F \vec{e}_\rho &= M \frac{d^2(\rho \vec{e}_\rho)}{dt^2} \\ &= M(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + M(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

- la RFD selon  $\vec{e}_\rho$  donne la première relation

$$\begin{aligned} M(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) &= F \\ M\ddot{\rho} &= M\rho \dot{\theta}^2 + F \end{aligned} \tag{9.5}$$

où  $M\rho \dot{\theta}^2$  est la force d'inertie centrifuge.

- la RFD selon  $\vec{e}_\theta$  donne la seconde relation :

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} &= 0 \\ 2\rho\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

### Théorème 9.1 : Loi des aires

La relation

$$\rho^2 \dot{\theta} = C$$

est appelée loi des aires.  $C$  est la constante des aires (de l'astre en question), de dimensions le carré d'une longueur divisé par un temps  $L^2T^{-1}$ .

La loi des aires s'applique à chaque astre du système binaire. Elle ne dépend pas du modèle de force, elle est donc valable pour toute force centrale et pas seulement pour la force gravitationnelle.

Nous verrons que selon la *première loi de Kepler*, l'orbite des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est le centre de gravité  $G$  du système planète-Soleil. La constante des aires est alors simplement le double de l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur de la planète, ce qui justifie son nom.

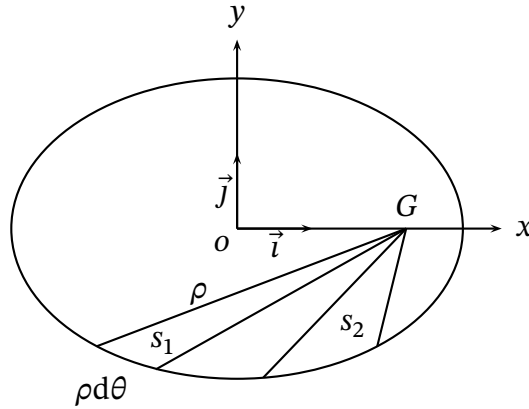


FIG. 9.2 – Aires balayées en des temps égaux

Soit  $d\mathcal{A}$  l'aire infinitésimale balayée par le rayon vecteur  $\rho$  d'un astre en un intervalle de temps infinitésimal  $dt$ . Cette aire est égale au demi-rectangle de côtés  $\rho$  et  $\rho d\theta$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \rho \times \rho d\theta \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} \\ d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C dt \\ \int_0^s d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C \int_0^\tau dt \\ \boxed{s} &= \frac{1}{2} C \tau \end{aligned}$$

Les aires  $s_1$  et  $s_2$  de la figure 9.2 balayées en des temps égaux sont égales. Nous énonçons la

**Axiome 9.1 : Deuxième loi de Kepler**

*Le rayon vecteur d'un astre balaye des surfaces d'aires égales en des temps égaux.*

En une période  $T$ , le rayon vecteur parcourt la surface totale de l'ellipse, d'aire  $\pi ab$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi ab} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C \int_0^T dt \\ \boxed{C} &= \frac{2\pi ab}{T} \end{aligned} \tag{9.6}$$

En introduisant la pulsation  $\omega$ , telle que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$C = \omega ab$$

### 9.2.4 Conservation du moment cinétique

En utilisant la vitesse en coordonnées polaires (9.1) page 113, le vecteur moment cinétique  $\vec{L}$  de la masse  $m$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times M\vec{v} \\ &= \rho \vec{e}_\rho \times M(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times M \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= M\rho^2 \dot{\theta} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces extérieures :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \rho \vec{e}_\rho \times F \vec{e}_\rho \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Le moment cinétique est donc constant :

$$\vec{L} = C_{ste}$$

$$\begin{aligned}L &= M\rho^2 \dot{\theta} \\ &= MC\end{aligned}\tag{9.7}$$

La loi des aires et la deuxième loi de Kepler ne sont autre que la conservation du module du moment cinétique lorsque la force est centrale. Le théorème de conservation du moment cinétique est plus puissant puisqu'il implique la conservation vectorielle du moment cinétique, pas seulement sa norme. La trajectoire de chaque astre doit alors être une courbe plane, dont le plan orbital est perpendiculaire au vecteur moment cinétique constant de l'astre, ce plan contenant les vecteurs  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$ .

Servons-nous du module du moment cinétique pour réécrire la RFD (9.5) page 115 selon  $\vec{e}_\rho$  :

$$M\ddot{\rho} = \frac{L^2}{M\rho^3} + F$$

### 9.2.5 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique

Supposons le modèle de force  $F_1$  conservatif, il dérive par rapport à  $\rho$  d'une énergie potentielle  $E_{p1}$ . Par symétrie du problème, l'énergie potentielle ne dépend explicitement que du rayon vecteur reliant les deux astres. La RFD selon  $\vec{e}_\rho$  s'écrit :

$$M\ddot{\rho} = \frac{L^2}{M\rho^3} - \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \quad (9.8)$$

La seule force présente étant conservative, l'énergie mécanique  $E_m$  se conserve. Le carré de la vitesse (9.1) page 113 permet d'écrire l'énergie cinétique de la masse  $m$  :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}Mv^2 \\ &= \frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

On en déduit l'énergie mécanique de la masse  $M$  :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}M(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + E_p(\rho) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2M\rho^2} + E_p(\rho) \end{aligned} \quad (9.9)$$

#### Remarque 9.3

L'équation différentielle (9.9) de la présente page est la relation (9.8) de la présente page intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, dérivons-la par rapport au temps :

$$\begin{aligned} M\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{L^2\dot{\rho}}{M\rho^3} + \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{dE_m}{dt} \\ M\dot{\rho} - \frac{L^2}{M\rho^3} + \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} &= 0 \end{aligned}$$

(9.9) est une intégrale première de la RFD selon  $\vec{e}_\rho$  (9.8) de la présente page.

### 9.2.6 Intégration de l'équation différentielle du mouvement

(9.9) de la présente page s'intègre par séparation des variables et donne la solution générale au problème sous la forme  $t = t(\rho)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M\dot{\rho}^2 &= E_m - E_p(\rho) - \frac{1}{2}M\rho^2\dot{\theta}^2 \\ \frac{d\rho}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \rho^2\dot{\theta}^2} \end{aligned}$$

Avec le module du moment cinétique, (9.7) page précédente :

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{M^2\rho^2}} \quad (9.10)$$

a) lorsque  $\rho$  est croissant,  $\rho(t_0) < \rho(t)$  et  $d\rho/dt \geq 0$ . Or  $dt > 0$  donc  $d\rho \geq 0$ .

$$\begin{aligned} d\rho &= \sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{M^2 \rho^2}} dt \\ t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{M^2 \rho^2}}} \end{aligned} \quad (9.11)$$

b) lorsque  $\rho$  est décroissant,  $\rho(t_0) > \rho(t)$  et  $d\rho/dt \leq 0$ . Or  $dt > 0$  donc  $d\rho \leq 0$ .

$$\begin{aligned} d\rho &= -\sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{M^2 \rho^2}} dt \\ t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{M^2 \rho^2}}} \end{aligned}$$

Cette relation donne de façon implicite le rayon vecteur en fonction du temps. Pour obtenir l'équation de la trajectoire  $\theta = \theta(\rho)$ , reprenons le module du moment cinétique, (9.7) page 117 :

$$d\theta = \frac{L}{M\rho^2} dt$$

On pose  $\theta(t = t_0) = \theta_0$ .

a) lorsque  $\rho$  est croissant, en remplaçant  $dt$  par  $d\rho$  grâce à (9.10) :

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}} \quad (9.12)$$

b) lorsque  $\rho$  est décroissant

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{-\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{\frac{2}{M} [E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

### 9.2.7 Potentiel effectif

La RFD selon  $\vec{e}_\rho$  (9.8) page ci-contre s'écrit :

$$M\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{L^2}{2M\rho^2} + E_p(\rho) \right]$$

Le mouvement radial est similaire à un mouvement à une dimension (avec  $\rho > 0$ ) dans un potentiel dit effectif (ou efficace).

**Définition 9.1 : Potentiel effectif**

On appelle potentiel effectif, le potentiel :

$$V_{eff}(\rho) \leftarrow \frac{L^2}{2M\rho^2} + E_p(\rho)$$

où  $\frac{L^2}{2M\rho^2}$  est appelé *énergie centrifuge*. La RFD selon de ce mouvement linéaire s'écrit

$$M\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$$

et l'énergie mécanique du mouvement à une dimension a pour expression :

$$E_m = \frac{1}{2}M\dot{\rho}^2 + V_{eff}$$

**9.2.8 Étude de la trajectoire**

Lorsque les limites du domaine du mouvement sont atteintes, l'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie potentielle effective est donc maximale. Toute l'énergie mécanique du mouvement linéaire est sous forme potentielle :

$$\frac{L^2}{2M\rho^2} + E_p(\rho) = E_m$$

La vitesse radiale  $\dot{\rho}$  est alors nulle mais pas la vitesse angulaire  $\rho\dot{\theta}$ , et la distance radiale  $\rho$  est extrémale. En ces points de rebroussement appelés apsides, périapside pour le point de la trajectoire le plus proche de l'autre astre, et apoapside pour celui le plus loin, la fonction  $\rho(t)$  de croissante devient décroissante ou inversement.

Si le domaine de variation de  $\rho$  n'a qu'une limite inférieure,  $\rho \geq \rho_{min}$ , la trajectoire commence à l'infini et finit à l'infini. Si le domaine admet deux limites,  $\rho_{max} \geq \rho \geq \rho_{min}$ , le mouvement est fini et compris entre les cercles  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . Cependant cela ne signifie pas que la trajectoire est fermée, elle ne repasse pas forcément exactement par les mêmes points avec le même vecteur vitesse au bout d'un temps fini. Entre deux passages par  $\rho_{max}$  en passant par  $\rho_{min}$ , le rayon vecteur a tourné d'un angle

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2M[E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

Pour que la trajectoire soit fermée cet angle doit être une fraction rationnelle de  $2\pi$ , de la forme :

$$\Delta\theta = \frac{m}{n} 2\pi$$

avec  $m$  et  $n$  entiers. Ainsi après  $n$  période de temps (par exemple  $n$  passages en  $\rho_{max}$ ), l'angle aura tourné de  $m$  fois  $2\pi$ , et la trajectoire se refermera. En général, pour une forme quelconque de l'énergie potentielle  $E_p$ , l'angle n'est pas une fraction rationnelle de  $2\pi$  et la trajectoire n'est

pas fermée. Elle remplit tout l'anneau compris entre  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . Il n'existe que deux types de champs centraux pour lesquels les trajectoires sont fermées, les champs en  $1/\rho$  et en  $\rho^2$ . En général donc, la trajectoire a la forme suivante :

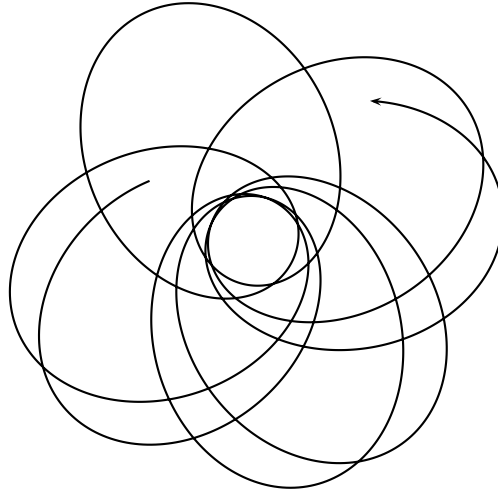


FIG. 9.3 – Trajectoire dans un champ central quelconque

Le champ en  $1/\rho$  est celui de la gravitation non relativiste et celui en  $\rho^2$  est celui de l'oscillateur spatial.

Si l'on prend  $\theta = \theta_0$  aux apsides, les segments de trajectoire adjacents de chaque côté de ces points ne diffèrent que par le signe de  $\theta$  :

$$\theta_{min} - \theta_{max} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2M[E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

et

$$\theta_{max} - \theta_{min} = \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{-\sqrt{2M[E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

$$\theta_{min} - \theta_{max} = - \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2M[E_m - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

La trajectoire est donc symétrique de part et d'autre de  $\theta = \theta_0$ . Par conséquent toute la trajectoire est symétrique par répétition de l'arc de trajectoire de  $\rho_{min}$  à  $\rho_{max}$ , puis de  $\rho_{max}$  à  $\rho_{min}$ , puis de  $\rho_{min}$  à  $\rho_{max}$ , etc. Cela concerne également les trajectoires infinies formées de deux branches symétriques, allant de l'infini à  $\rho_{min}$  puis de  $\rho_{min}$  à l'infini.

### 9.2.9 Cas où le rayon vecteur tend vers zéro

Dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique (9.9) page 118, l'énergie cinétique étant toujours positive :

$$0 < E_m - \frac{L^2}{2M\rho^2} - E_p(\rho)$$

$$\rho^2 E_p(\rho) < \rho^2 E_m - \frac{L^2}{2M}$$

Pour  $L \neq 0$ , c.-à-d. pour une trajectoire qui n'est pas rectiligne dirigée vers le centre de gravité commun, cette dernière relation est toujours vraie, en particulier pour un rayon vecteur tendant vers zéro. L'énergie mécanique étant constante, le terme associé tend vers zéro :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^2 E_p(\rho)] < \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 E_m - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L^2}{2M}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^2 E_p(\rho)] < -\frac{L^2}{2M}$$

Le terme de droite est constant et négatif, par conséquent celui de gauche ne peut tendre vers zéro. Donc  $\rho$  ne peut tendre vers zéro que si  $E_p(\rho)$  tend vers  $-\infty$  plus vite de  $\rho^2$  vers zéro. Deux possibilités :

- soit  $E_p(\rho) = \frac{-\alpha}{\rho^2}$  avec  $\alpha > \frac{L^2}{2M}$
- soit  $E_p(\rho) = \frac{-A}{r^n}$  avec  $A$  une constante positive quelconque et  $n > 2$

En général donc, l'existence d'une énergie centrifuge empêche les corps de rejoindre le centre de gravité commun.

## 9.3 Force de gravitation

### 9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique

Reprenons la RFD selon le rayon vecteur (9.5) page 115 et la loi des aires (9.1) page 115 valables pour tout modèle de force centrale. Le modèle de Hooke pour la force de gravitation est en raison inverse du carré de la distance des deux astres (qui varie dans le temps). Notons  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation de dimensions  $L^3 T^{-2} M^{-1}$ . La RFD donne les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} M_1 (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = -\mathcal{G} \frac{M_1 M_2}{\rho^2} \\ \rho^2 \dot{\theta} = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 \ddot{\rho} - \rho^4 \dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} M \rho \\ \rho^4 \dot{\theta}^2 = C^2 \end{cases}$$

$$\rho^3 \ddot{\rho} + \mathcal{G} M \rho - C^2 = 0$$

En raisonnant sur l'énergie plutôt que sur les forces, nous obtiendrons la même équation différentielle intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, la RFD est équivalente à la

conservation de l'énergie mécanique lorsque les forces dérivent d'un potentiel. Le théorème de l'énergie cinétique permet de travailler sur la vitesse par l'intermédiaire de l'énergie cinétique, plutôt que sur l'accélération.

### 9.3.2 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique

Cherchons le potentiel de la force gravitationnelle exercée sur un astre, autrement dit l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(\rho)$  de cet astre dans le champ de gravitation de l'autre astre :

$$\begin{aligned} -\mathcal{G} \frac{M_1 M_2}{\rho^2} \vec{e}_\rho &= -\overrightarrow{\text{grad}} E_{pp}(\rho) \\ &= -\frac{\partial E_{pp}(\rho)}{\partial \rho} \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

On pose  $\alpha = \mathcal{G}M_1M_2$  constante toujours positive :

$$\frac{\alpha}{\rho^2} = \frac{dE_{pp}(\rho)}{d\rho}$$

Seule une différence d'énergie potentielle intervient si bien qu'elle est toujours définie à une constante additive près. Ajuster la valeur de cette constante nous permet de définir le zéro de l'énergie potentielle où cela nous convient le mieux.

- en fixant les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} dE_{pp} &= \frac{\alpha}{\rho^2} d\rho \\ \int_{\rho=+\infty}^{\rho} dE_{pp} &= \alpha \int_{\rho=+\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} \\ [E_{pp}]_{\rho=+\infty}^{\rho} &= -\alpha \left[ \frac{1}{\rho} \right]_{\rho=+\infty}^{\rho} \\ E_{pp}(\rho) &= -\frac{\alpha}{\rho} \end{aligned}$$

- en raisonnant sur la constante d'intégration :

$$\begin{aligned} \int dE_{pp} &= \alpha \int \frac{d\rho}{\rho^2} \\ E_{pp} &= -\frac{\alpha}{\rho} + c^{ste} \end{aligned}$$

Prendre une constante nulle revient à poser  $E_{pp} = 0$  en  $\rho = +\infty$ .

#### Remarque 9.4

Le potentiel effectif a pour expression

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2M\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$$

où  $L^2 = L^2(M)$

Avec ce modèle d'énergie potentielle, le cas général (9.9) page 118 devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2M\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} &= E_m \\ M^2 \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2M\alpha}{\rho} &= 2E_m M \end{aligned} \quad (9.13)$$

D'après (9.11) page 119, l'équation  $t = t(\rho)$  a pour expression :

$$t - t_0 = \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm d\rho}{\sqrt{\frac{2}{M} \left( E_m + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{M^2 \rho^2}}}$$

D'après (9.12) page 119, l'équation du mouvement  $\rho = \rho(\theta)$  a pour expression :

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{\pm \frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2M \left( E_m + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

Nous pouvons chercher à résoudre cette intégrale ou travailler directement sur l'équation différentielle.

### 9.3.3 Intégration de l'équation différentielle du mouvement

Pour intégrer l'équation différentielle et obtenir l'équation de la trajectoire de la forme  $\rho = \rho(\theta)$ , nous supprimons le temps grâce à (9.7) page 117 :

$$\begin{aligned} L &= M\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \\ dt &= \frac{M\rho^2 d\theta}{L} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Le premier terme de l'équation différentielle (9.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 &= \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{L^2}{M^2} \left( \frac{d\rho}{\rho^2 d\theta} \right)^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d\rho^{-1}}{d\theta} = -\rho^{-2} \frac{d\rho}{d\theta}$$

donc,

$$M^2 \dot{\rho}^2 = L^2 \left( \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \right)^2$$

L'équation différentielle (9.13) de la présente page devient :

$$\begin{aligned} L^2 \left( \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2M\alpha}{\rho} &= 2E_m M \\ L^2 \left( \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{L}{\rho} - \frac{M\alpha}{L} \right)^2 - \left( \frac{M\alpha}{L} \right)^2 &= 2E_m M \end{aligned}$$

Nous n'avons plus que des termes en  $\rho^{-1}$ . Effectuons un premier changement de variable

$$r = L\rho^{-1}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(r - \frac{M\alpha}{L}\right)^2 = 2E_m M + \left(\frac{M\alpha}{L}\right)^2$$

Posons la constante  $A = 2E_m M + \left(\frac{M\alpha}{L}\right)^2$  et effectuons un deuxième changement de variable :

$$r = r - \frac{M\alpha}{L}$$

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 &= A \\ \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\right)\right]^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{A}}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Effectuons un troisième et dernier changement de variable

$$r = \frac{r}{\sqrt{A}}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = 1$$

1) Première méthode de résolution

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \pm (1 - r^2)^{1/2} \\ d\theta &= \pm \frac{dr}{(1 - r^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Si le signe est positif cette équation s'intègre en arc cosinus plus un angle constant  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos(r) + \phi \\ r &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Si le signe est négatif cette équation s'intègre en arcsinus plus un angle constant  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin(r) + \beta \\ r &= \sin(\theta - \beta) \end{aligned}$$

Pour  $\beta = \phi - \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} r &= \sin(\theta - \phi + \pi/2) \\ &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Les solutions étant identiques, on conserve  $r = \cos(\theta - \phi)$ .

2) Deuxième méthode de résolution

Dérivons par rapport à  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[ \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] &= 0 \\ 2 \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2r}{d\theta^2} + 2r \frac{dr}{d\theta} &= 0 \\ \frac{d^2r}{d\theta^2} + r &= 0 \\ r &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Revenons à la variable  $\rho$  :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \\ r &= \frac{M\alpha}{L} + \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{L}{\rho} &= \frac{M\alpha}{L} \left[ 1 + \frac{L}{M\alpha} \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \right] \\ \rho &= \frac{L^2}{M\alpha} \left[ 1 + \frac{L}{M\alpha} \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \right]^{-1} \end{aligned}$$

On pose la constante

$$p = \frac{L^2}{M\alpha} \tag{9.15}$$

et l'on reconnaît une section conique (section d'un cône par un plan) de *paramètre*  $p$ , d'équation polaire ayant son foyer à l'origine des coordonnées

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \tag{9.16}$$

et d'*excentricité*

$$\begin{aligned} e &= \frac{L}{M\alpha} \sqrt{2EM + \left( \frac{M\alpha}{L} \right)^2} \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{M\alpha^2}} \end{aligned}$$

## 9.4 Étude de la trajectoire

### 9.4.1 L'excentricité $e$

Elle est positive ou nulle, sans dimension, et elle définit la forme de l'orbite :

- Si  $E_m = \frac{-M\alpha^2}{2L^2}$  alors  $e = 0$  et  $\rho = p$ , l'orbite est un cercle, la trajectoire est fermée. Nous voyons que  $p$  est le paramètre de taille de l'orbite
- Si  $\frac{-M\alpha^2}{2L^2} < E_m < 0$  alors  $0 < e < 1$ , l'orbite est une ellipse, la trajectoire est fermée
- Si  $E_m = 0$  alors  $e = 1$ , la trajectoire est une parabole
- Si  $E_m > 0$  alors  $e > 1$ , la trajectoire est une hyperbole

**Remarque 9.5**

Pour un champ de répulsion la trajectoire est toujours hyperbolique.

Notons également la relation

$$e^2 - 1 = \frac{2E_m L^2}{M\alpha^2}$$

$$1 - e^2 = \frac{-2E_m L^2}{M\alpha^2}$$

et puisque l'énergie mécanique est strictement négative pour une orbite elliptique :

$$1 - e^2 = \frac{2|E_m|L^2}{M\alpha^2} \tag{9.17}$$

**9.4.2 L'ellipse**

Pour  $0 < e < 1$  (donc pour  $E_m < 0$ ) et pour  $\phi = 0$ , (9.16) page précédente est une ellipse centrée sur  $o(-c, 0)$  dans le repère  $(F, x, y)$ , où  $F$  et  $F'$  sont les foyers de l'ellipse.

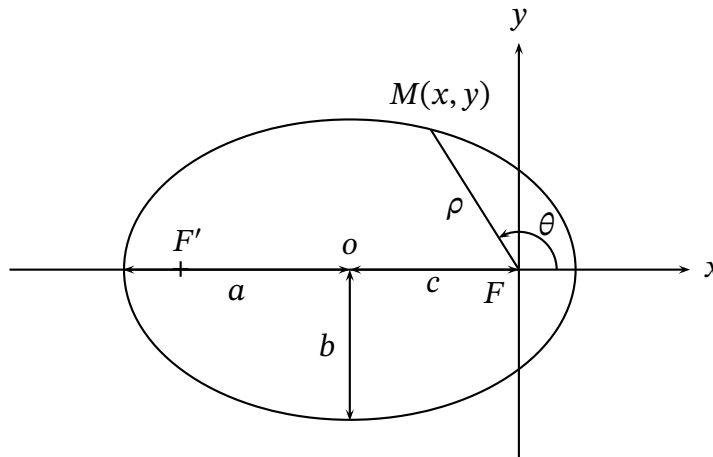


FIG. 9.4 – Orbite elliptique

L'angle  $\theta$  est appelé *anomalie vraie*. Nous pouvons énoncer la

**Axiome 9.2 : Première loi de Kepler**

*Les planètes décrivent des ellipses dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe*

*l'un des foyers.*

### Remarque 9.6

Le Soleil décrit également une ellipse dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe l'un des foyers. À l'exception de Jupiter le centre de gravité du système planète-Soleil est dans le Soleil.

Le couple  $(p, e)$  définit une ellipse de manière unique, sa taille et sa forme. En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une ellipse dont le grand axe est sur l'axe des abscisses, s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le couple formé du demi-grand axe  $a$  et du demi-petit axe  $b$  permet donc aussi de définir parfaitement une ellipse. En étudiant le passage des coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  vers les coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  de l'équation d'une même ellipse, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{a} \\ e &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \end{aligned} \tag{9.18a}$$

### 9.4.3 Orientation de l'ellipse

À partir de l'équation polaire d'une conique (9.16) page 126, pour  $\theta = \phi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \theta - \phi &= 2k\pi \\ \cos(\theta - \phi) &= \cos(2k\pi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 + e} \\ &= \rho_{min} \end{aligned}$$

Nous sommes au *périhélie*, point de l'orbite le plus proche du Soleil. Le grand axe de l'ellipse fait donc un angle  $\phi$  avec l'axe des abscisses.

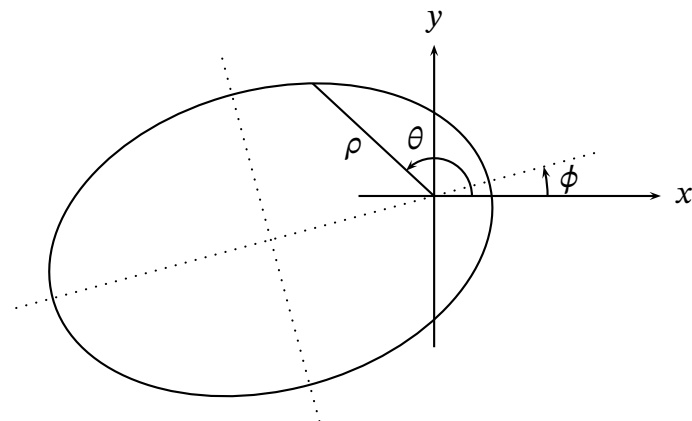


FIG. 9.5 – Orientation de l'ellipse

Pour  $\theta = \phi + (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  nous avons :

$$\begin{aligned}\theta - \phi &= \pi + 2k\pi \\ \cos(\theta - \phi) &= -1 \\ \rho &= \frac{p}{1 - e} \\ &= \rho_{max}\end{aligned}$$

Nous sommes à l'*aphélie*, point de l'orbite le plus éloigné du Soleil.

L'orbite de la Terre autour du Soleil est dans un plan appelé *plan de l'écliptique*, qui contient à chaque instant la Terre et le Soleil. La révolution terrestre donne lieu au mouvement apparent annuel du Soleil à travers les constellations du zodiaque. Le plan de l'écliptique fait un angle de  $23^{\circ}26'$  avec le plan de l'équateur terrestre, et leur intersection forme une droite dans l'espace. Chaque année vers le 21 septembre, le Soleil passe à travers le plan de l'équateur terrestre en allant du Nord au Sud. On pose  $\theta = 0^{\circ}$  à ce moment précis appelé *équinoxe d'automne* (EA), en retour cela fixe la valeur  $\phi \approx 103^{\circ}$ . Sur la figure 9.6 page suivante, l'axe des abscisses est confondu avec la droite d'intersection des deux plans. Dans l'hémisphère Nord, le Soleil de midi monte de moins en moins haut dans le ciel et en  $\theta = \pi/2$  vers le 21 décembre il atteint son point le plus bas dans le ciel, au *solstice d'hiver* (SH). Le Soleil de midi remonte alors dans le ciel et en  $\theta = \pi$  vers le 21 mars il passe à nouveau à travers le plan de l'équateur terrestre, cette fois en allant du Sud au Nord, à l'*équinoxe de printemps* (EP). La droite passant par les équinoxes est donc la droite d'intersection des deux plans. Le Soleil de midi continue de monter et en  $\theta = 3\pi/2$  vers le 21 juin il atteint son point le plus haut dans le ciel, au *solstice d'été* (SE).

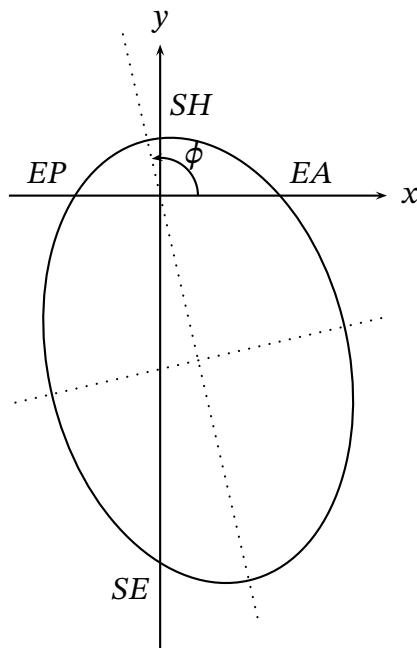


FIG. 9.6 – Orientation de l'ellipse terrestre

#### 9.4.4 Demi-grand axe $a$

Soit  $2a$  la longueur du grand axe de l'ellipse :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\rho_{min} + \rho_{max}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) \\ &= \frac{p}{1-e^2} \end{aligned}$$

Avec les expressions du paramètre (9.15) page 126 et de l'excentricité (9.17) page 127 :

$$\begin{aligned} a &= \frac{L^2}{M\alpha} \times \frac{M\alpha^2}{2|E_m|L^2} \\ &= \frac{\alpha}{2|E_m|} \end{aligned} \tag{9.19}$$

On note également la relation

$$p = a(1 - e^2) \tag{9.20}$$

Exprimons le rayon minimum en fonction du demi-grand axe :

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= \frac{p}{1+e} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1+e} \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$

De même pour le rayon maximum :

$$\begin{aligned}\rho_{max} &= \frac{p}{1-e} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1-e} \\ &= a(1+e)\end{aligned}$$

#### 9.4.5 Demi-petit axe $b$

En reprenant l'excentricité en fonction de  $a$  et  $b$ , (9.18a) page 128, et l'expression de l'excentricité (9.17) page 127

$$\begin{aligned}e^2 - 1 &= -\frac{b^2}{a^2} \\ b^2 &= a^2(1 - e^2) \\ &= a^2 \times \frac{2|E_m|L^2}{M\alpha^2} \\ &= \frac{aL^2}{M\alpha}\end{aligned}\tag{9.21}$$

Avec l'expression du demi-grand axe (9.19) page ci-contre :

$$\begin{aligned}b^2 &= \frac{\alpha}{2|E_m|} \times \frac{L^2}{M\alpha} \\ b &= \frac{L}{\sqrt{2|E_m|M}}\end{aligned}$$

#### 9.4.6 Période de révolution $T$

À partir du carré de (9.6) page 116 et de  $b$  en fonction de  $a$ , (9.21) de la présente page, nous évaluons la période de révolution en fonction du demi-grand axe  $a$  :

$$\begin{aligned}T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} \\ &= \frac{4\pi^2 a^3 L^2 M^2}{L^2 M \alpha}\end{aligned}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 M}{\alpha}\tag{9.22}$$

Ceci constitue la :

#### **Axiome 9.3 : Troisième loi de Kepler**

*Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.*

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi abM}{L} \\
 &= \frac{2\pi M}{L} \times \frac{\alpha}{2|E_m|} \times \frac{L}{\sqrt{2|E_m|M}} \\
 &= \pi\alpha \sqrt{\frac{M}{2|E_m|^3}}
 \end{aligned}$$

La période ne dépend donc que de l'énergie lorsque les masses sont fixées.

## 9.5 Equations paramétriques

### 9.5.1 Angle en fonction du temps

Les équations paramétriques du temps vont nous permettre de connaître la position de la planète en fonction du temps.

Cherchons tout d'abord  $\theta = \theta(t)$ . En utilisant la loi des aires (9.14) page 124 et l'équation de l'orbite (9.16) page 126 :

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{\rho^2}{C} d\theta \\
 dt &= \frac{p^2 d\theta}{C[1 + e \cos(\theta - \phi)]^2} \\
 \int_0^\tau dt &= \frac{p^2}{C} \int_\phi^\vartheta \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \phi)]^2}
 \end{aligned}$$

où l'on a pris comme condition initiale que la planète est au périhélie, c.-à-d.  $\theta = \phi$  à  $t = 0$ . Le membre de droite s'intègre en termes de fonctions élémentaires. Le résultat est trouvé grâce au logiciel de calcul formel Maxima. Pour une trajectoire elliptique,  $0 < e < 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \left\{ \frac{(1 - e) \sin(\vartheta - \phi)}{\sqrt{1 - e^2} [\cos(\vartheta - \phi) + 1]} \right\} \\
 &\quad - \frac{2e \sin(\vartheta - \phi)}{\frac{(e^3 - e^2 - e + 1) \sin^2(\vartheta - \phi)}{[\cos(\vartheta - \phi) + 1]} - (e^3 + e^2 - e - 1) [\cos(\vartheta - \phi) + 1]}
 \end{aligned}$$

Cette relation est trop complexe pour que son inversion  $\theta = \theta(t)$ , ne soit possible analytiquement.

### 9.5.2 Rayon en fonction du temps

D'après (9.11) page 119, l'équation  $t = t(\rho)$  a pour expression :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm d\rho}{\sqrt{\frac{2}{M} \left( E_m + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{M^2 \rho^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{M}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{E_m \rho^2 + \alpha \rho - \frac{2L^2}{M}}} \\ &= \sqrt{\frac{M}{2|E_m|}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha \rho}{|E_m|} - \frac{L^2}{2M|E_m|}}} \end{aligned}$$

car  $E_m$  étant négative,  $E_m/|E_m| = -1$ . Remplaçons les constantes  $E_m$  et  $L$  par les constantes  $a$  et  $e$ . À partir des expressions du paramètre (9.15) page 126 et (9.20) page 130 :

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{M\alpha} &= p \\ L^2 &= M\alpha(1 - e^2) \end{aligned}$$

Avec (9.19) page 130 :

$$\begin{aligned} |E_m| &= \frac{\alpha}{2a} \\ \sqrt{\frac{M}{2|E_m|}} &= \sqrt{\frac{Ma}{\alpha}} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2M|E_m|} &= \frac{M\alpha(1 - e^2) 2a}{2M\alpha} \\ &= a^2(1 - e^2) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{Ma}{\alpha}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{Ma}{\alpha}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - \rho)^2}} \end{aligned}$$

Nous avons vu au § 9.4.4 page 130 que le rayon vecteur varie entre  $a - ae$  et  $a + ae$ . Cela suggère d'effectuer le changement de variable :

$$\rho = a - ae \cos(\psi), \quad \psi \in [0, \pi] \quad (9.23)$$

L'angle  $\psi$ , appelé *anomalie excentrique* remplace le rayon vecteur. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\psi} &= ae \sin(\psi) \\ d\rho &= ae \sin(\psi) d\psi\end{aligned}$$

On suppose de nouveau qu'à l'instant initial la planète est au périhélie, donc à l'instant initial  $\rho = \rho_{min} \Leftrightarrow \psi = 0$  et  $\theta = \phi$ .

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \sqrt{\frac{Ma}{\alpha}} \int_0^\psi \frac{[a - ae \cos(\psi)] ae \sin(\psi)}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2(\psi)}} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{Ma}{\alpha}} \int_0^\psi \frac{[a - ae \cos(\psi)] ae \sin(\psi)}{ae \sin(\psi)} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{Ma^3}{\alpha}} \int_0^\psi [1 - e \cos(\psi)] d\psi \\ &= \sqrt{\frac{Ma^3}{\alpha}} [\psi - e \sin(\psi)]_0^\psi \\ &= \sqrt{\frac{Ma^3}{\alpha}} [\psi - e \sin(\psi)]\end{aligned}\tag{9.24}$$

La planète effectue une demi-période  $T/2$  quand  $\rho$  varie de  $\rho_{min}$  à  $\rho_{max}$ , c.-à-d. quand  $\psi$  varie de 0 à  $\pi$  :

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} &= \sqrt{\frac{Ma^3}{\alpha}} [\pi - e \sin(\pi)] \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{Ma^3}{\alpha}}\end{aligned}$$

On retrouve bien la période de révolution (9.22) page 131.

En introduisant la période  $T$  puis la pulsation  $\omega$  dans (9.24), la solution de l'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \frac{T}{2\pi} [\psi - e \sin(\psi)] \\ \omega(t - t_0) &= \psi - e \sin(\psi)\end{aligned}\tag{9.25}$$

appelée *équation de Kepler*. L'angle  $\omega(t - t_0)$  s'appelle *anomalie moyenne*.

Revenons à la variable  $\rho$  en inversant le changement de variable (9.23) page précédente. Dans la pratique cela n'est jamais fait, nous allons voir pourquoi.

$$\begin{aligned}\rho &= a - ae \cos(\psi) \\ \frac{a - \rho}{ae} &= \cos(\psi) \\ \psi &= \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega(t - t_0) = \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right) - e \sin \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right)\tag{9.26}$$

On fixe  $\rho$  pour obtenir  $t - t_0$ . Pour la détermination de l'angle  $\theta$  à partir d'un rayon  $\rho$  fixé, nous utilisons l'équation de l'orbite (9.16) page 126 :

$$\begin{aligned}\rho + \rho e \cos(\theta - \phi) &= p \\ \cos(\theta - \phi) &= \frac{p - \rho}{\rho e} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{p - \rho}{\rho e}\right) + \phi\end{aligned}$$

Cette méthode n'est pas optimale pour un calcul sur ordinateur, avec un sinus d'arccosinus dans l'expression (9.26). Il est préférable de fixer  $\psi$  pour trouver la durée  $t - t_0$  grâce à l'équation de Kepler (9.25), puis de trouver la distance au Soleil  $\rho$  en utilisant le changement de variable (9.23) page 133. Enfin, nous pouvons trouver la valeur correspondante de l'angle  $\theta$  en utilisant l'équation de l'orbite (9.16) page 126 et le changement de variable (9.23) qui donne chacun le rayon  $\rho$  :

$$\begin{aligned}a - ae \cos(\psi) &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \\ 1 + e \cos(\theta - \phi) &= \frac{a(1 - e^2)}{a[1 - e \cos(\psi)]} \\ e \cos(\theta - \phi) &= \frac{1 - e^2 - [1 - e \cos(\psi)]}{1 - e \cos(\psi)} \\ \cos(\theta - \phi) &= \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)}\right) + \phi\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser une forme alternative pour exprimer  $\theta$  en fonction de  $\psi$  :

$$\begin{aligned}1 - \cos(\theta - \phi) &= 1 - \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ 2 \sin^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \frac{1 - e \cos(\psi) - \cos(\psi) + e}{1 - e \cos(\psi)} \\ &= \frac{(1 + e)[1 - \cos(\psi)]}{1 - e \cos(\psi)}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}1 + \cos(\theta - \phi) &= 1 + \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ 2 \cos^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \frac{1 - e \cos(\psi) + \cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ &= \frac{(1 - e)[1 + \cos(\psi)]}{1 - e \cos(\psi)}\end{aligned}$$

en faisant le rapport :

$$\tan^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) = \frac{(1 + e)[1 - \cos(\psi)]}{(1 - e)[1 + \cos(\psi)]}$$

$$\tan\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\theta = 2 \arctan\left[\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] + \phi$$

## Chapitre 10

### LE TENSEUR D'INERTIE

Le tenseur d'inertie calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie d'un solide est une caractéristique intrinsèque de ce solide. Il apparaît naturellement dans l'expression du moment d'inertie (répartition de la masse autour d'un axe de rotation) qui est nécessaire pour le calcul du moment cinétique d'un solide, et de son énergie cinétique de rotation.

#### 10.1 Moment d'inertie

Soit un solide  $S$  et soit  $\Delta$  un axe quelconque ne passant pas nécessairement par  $S$ , de direction fixe dans le repère  $\mathcal{R}$ .

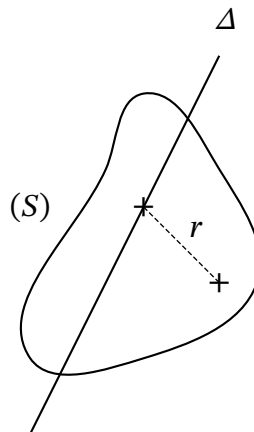


FIG. 10.1 – Solide et axe de rotation quelconques

Le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$  est un scalaire qui caractérise l'inertie en rotation du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ .

#### **Définition 10.1 : Moment d'inertie**

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe  $\Delta$ , est la somme des masses de ce

système, pondérées par leurs distances à l'axe au carré :

$$I_{\Delta} \Leftarrow \sum_i m_i r_i^2$$

Pour un système continu :

**Définition 10.2 : Moment d'inertie**

Le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$ , d'un solide  $S$  de volume  $V$  et de masse volumique  $\rho$ , a pour expression :

$$I_{\Delta} \Leftarrow \iiint_V \rho r^2 d^3V$$

Le moment d'inertie est fonction de  $r^2$ , il dépend donc du choix de l'axe  $\Delta$ , mais pas du choix du repère  $\mathcal{R}$ , car seule la distance à l'axe intervient.

**Remarque 10.1**

Lorsque le solide est homogène, sa densité est constante dans l'espace et l'on peut sortir  $\rho$  de l'intégrale de volume.

## 10.2 Tenseur d'inertie

Cherchons l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque  $\Delta$ , en fonction du tenseur d'inertie. Considérons un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  dont le centre  $O$  est sur l'axe  $\Delta$ . Soit un élément de volume du solide  $S$ , de masse  $dm$ , situé au point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM}(x_1, x_2, x_3)$ , et soit  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  un vecteur unitaire porté par l'axe  $\Delta$ . On appelle  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur l'axe  $\Delta$ , tel que  $r = MH$ .

En appliquant le théorème de pythagore dans le triangle  $OMH$  rectangle en  $H$  :

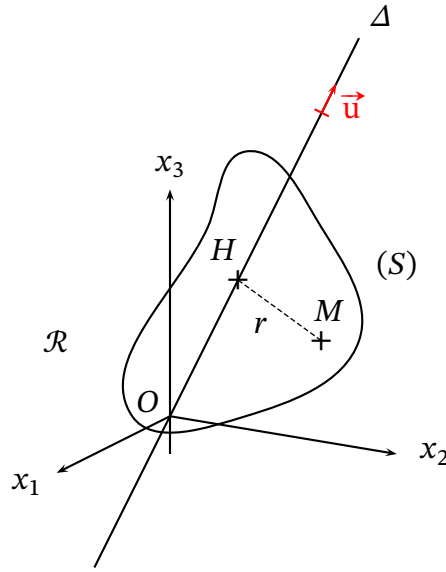
$$\begin{aligned} MH^2 &= OM^2 - OH^2 \\ &= OM^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u})^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3)^2 \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{u}$  étant unitaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} MH^2 &= [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] - (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2 \\ &= [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \\ &\quad - [u_1^2 x_1^2 + u_2^2 x_2^2 + u_3^2 x_3^2 + 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 - 2u_1 u_3 x_1 x_3] \\ &= u_1^2 (x_2^2 + x_3^2) + u_2^2 (x_1^2 + x_3^2) + u_3^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 - 2u_1 u_3 x_1 x_3 \end{aligned}$$



Ecrivons le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \iiint_V \rho MH^2 dV \\
 &= u_1^2 \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V + u_2^2 \int_V \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V + u_3^2 \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \\
 &\quad - u_1 u_2 \int_V \rho 2x_1 x_2 d^3V - u_2 u_3 \int_V \rho 2x_2 x_3 d^3V - u_1 u_3 \int_V \rho 2x_1 x_3 d^3V \quad (10.1)
 \end{aligned}$$

Nous avons alors le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \begin{pmatrix} u_1 \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V - u_2 \int \rho x_1 x_2 d^3V - u_3 \int \rho x_1 x_3 d^3V \\ -u_1 \int \rho x_1 x_2 d^3V + u_2 \int \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V - u_3 \int \rho x_2 x_3 d^3V \\ -u_1 \int \rho x_1 x_3 d^3V - u_2 \int \rho x_2 x_3 d^3V + u_3 \int \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & - \int \rho x_1 x_2 d^3V & - \int \rho x_1 x_3 d^3V \\ - \int \rho x_1 x_2 d^3V & \int \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & - \int \rho x_2 x_3 d^3V \\ - \int \rho x_1 x_3 d^3V & - \int \rho x_2 x_3 d^3V & \int \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_{\Delta} = [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (10.2)$$

où  $[I]_O$  est le tenseur d'inertie du solide  $S$  calculé au centre  $O$  du repère  $\mathcal{R}$ . L'opération  $[I]_O \vec{u}$  est la multiplication de la matrice  $[I]_O$  par le vecteur  $\vec{u}$ , elle donne un vecteur. L'opération suivante est le produit scalaire de deux vecteurs et l'on a :

$$[I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot [I]_O \vec{u}$$

Les composantes du tenseur d'inertie sont des fonctions de  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , il dépend donc du choix du repère  $\mathcal{R}$  (position du centre  $O$  et orientation des axes). En revanche il ne dépend pas de l'axe  $\Delta$ . La dépendance de  $I_{\Delta}$  à l'axe  $\Delta$  se fait uniquement par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  porté par l'axe  $\Delta$ .

Dans l'expression du premier terme,  $x_2^2 + x_3^2$  est la distance au carré à l'axe  $x_1$ . Les termes diagonaux sont par conséquent les moments d'inertie par rapport aux axes  $x_1, x_2, x_3$  du repère  $\mathcal{R}$ .

Montrons-le pour un axe de rotation  $\Delta$  confondu avec l'axe  $x_3$ , donc portant le vecteur unitaire  $\vec{k}$ . Supposons la masse volumique  $\rho$  constante :

$$\begin{aligned} I_3 &= [I]_O \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= \rho \begin{bmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int x_1 x_2 d^3V & -\int x_1 x_3 d^3V \\ -\int x_1 x_2 d^3V & \int (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int x_2 x_3 d^3V \\ -\int x_1 x_3 d^3V & -\int x_2 x_3 d^3V & \int (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \rho \begin{pmatrix} -\iiint x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint x_2 x_3 d^3V \\ \iiint (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \rho \iiint (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{aligned}$$

qui est le moment d'inertie par rapport à l'axe  $x_3$ . Les opposés des termes non diagonaux sont appelés *produits d'inertie*.

**Définition 10.3 : Tenseur d'inertie**

Le tenseur d'inertie d'un solide de volume  $V$  et de masse volumique  $\rho$ , calculé au centre  $O$  d'un repère  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$[I]_O \Leftarrow \begin{bmatrix} \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix}$$

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

où la convention de signe permet d'avoir des produits d'inertie positif.

**Notation 10.1**

Le tenseur  $[I]$  est aussi noté  $\overset{\Rightarrow}{I}$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{I}$ ,  $\overset{\leftarrow}{I}$ ,  $\hat{I}$ ,  $\underset{=}{I}$ ,  $\underset{\approx}{I}$ , et en notation indicielle  $I_{ij}$  :

$$I_\Delta = I_{ij} u^i u^j$$

avec une sommation sur les indices répétés. À partir du tenseur d'inertie en un point  $O$ , on trouve le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe passant par  $O$ . Le tenseur d'inertie prend en entrée deux vecteurs (deux fois le vecteur unité porté par l'axe de rotation), et donne en sortie un scalaire (le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation). C'est donc une forme bilinéaire, appelée tenseur deux fois covariant.

Deux indices permettent de repérer ses éléments, c'est donc un tenseur d'ordre deux. Il est

covariant, les indices seront en bas par convention. Il est symétrique :

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Les indices pouvant prendre trois valeurs, il appartient à un espace vectoriel de dimension 3. La dimension de l'espace puissance l'ordre du tenseur donne le nombre de composantes du tenseur, soit  $3^2 = 9$  composantes.

### 10.3 Repère principal d'inertie

Comme tout tenseur symétrique d'ordre deux, le tenseur d'inertie en tout point  $O$  peut être diagonalisé. Il existe donc un *repère principal d'inertie*  $(O, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$ , composé de trois axes *principaux d'inertie* passant par  $O$ , dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal. Plaçons-nous dans un repère  $\mathcal{R}$  de centre  $O$  et cherchons l'expression des *vecteurs propres*  $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ , et des *valeurs propres*  $I_1, I_2, I_3$  solutions des trois équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} [I]_O \vec{P}^1 &= I_1 \vec{P}^1 \\ [I]_O \vec{P}^2 &= I_2 \vec{P}^2 \\ [I]_O \vec{P}^3 &= I_3 \vec{P}^3 \end{aligned}$$

#### 10.3.1 Moments principaux d'inertie

Soient  $I$  un scalaire et  $\vec{P}(p_1, p_2, p_3)$  un vecteur non nuls tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} [I]_O \vec{P} &= I \vec{P} \\ \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} I - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Ce système admet des solutions non triviales (différentes de zéro) si le déterminant de la matrice des coefficients est nul,

$$\begin{vmatrix} I - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I - I_{33} \end{vmatrix} = 0$$

qui donne l'équation caractéristique :

$$(I - I_{11})[(I - I_{22})(I - I_{33}) - I_{32}I_{23}] - I_{21}[I_{12}(I - I_{33}) - I_{32}I_{13}] + I_{31}[I_{12}I_{23} - (I - I_{22})I_{13}] = 0$$

Ce polynôme  $Q$  est du troisième degré en  $I$

$$Q = I^3 + a_1I^2 + a_2I + a_3$$

qui admet trois racines  $I_1, I_2, I_3$ . Ces trois solutions de l'équation  $Q = 0$  sont les valeurs propres du tenseur d'inertie, aussi appelées *moments principaux d'inertie* au point  $O$ . Pour le premier vecteur propre  $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$  de valeur propre  $I_1$  nous avons :

$$[I]_O \vec{P}^1 = I_1 \vec{P}^1$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix}$$

### 10.3.2 Axes principaux d'inertie

Résolvons le système (10.3) page précédente avec les différentes valeurs possibles de  $I$ . Pour la valeur propre  $I_1$  associée au vecteur propre  $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$  :

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

$$\begin{cases} (I_1 - I_{11})p_1^1 + I_{12}p_2^1 + I_{13}p_3^1 = 0 \\ I_{21}p_1^1 + (I_1 - I_{22})p_2^1 + I_{23}p_3^1 = 0 \\ I_{31}p_1^1 + I_{32}p_2^1 + (I_1 - I_{33})p_3^1 = 0 \end{cases}$$

Nous n'avons pas besoin de résoudre ce système car nous n'avons besoin que de la direction du vecteur  $\vec{P}^1$ . En effet si  $\vec{P}^1$  est solution alors si  $\alpha$  est un scalaire  $\alpha \vec{P}^1$  est aussi solution :

$$\alpha \begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha p_1^1 \\ \alpha p_2^1 \\ \alpha p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le module  $\|\vec{P}^1\|$  étant quelconque nous pouvons fixer la valeur de la première composante,  $p_1^1 = 1$  :

$$\begin{cases} I_{12}p_2^1 + I_{13}p_3^1 = I_{11} - I_1 \\ (I_1 - I_{22})p_2^1 + I_{23}p_3^1 = -I_{21} \\ I_{32}p_2^1 + (I_1 - I_{33})p_3^1 = -I_{31} \end{cases}$$

Deux équations parmi ces trois suffisent à trouver  $p_2^1$  et  $p_3^1$ , c.-à-d. la direction dans  $\mathcal{R}$  du premier axe principal d'inertie :

$$\begin{bmatrix} I_{12} & I_{13} \\ (I_1 - I_{22}) & I_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} - I_1 \\ -I_{21} \end{pmatrix}$$

Soit  $D$  le déterminant de la matrice carrée, résolvons par la méthode de Cramer :

$$p_2^1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{11} - I_1 & I_{13} \\ -I_{21} & I_{23} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad p_3^1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{12} & I_{11} - I_1 \\ (I_1 - I_{22}) & -I_{21} \end{vmatrix}$$

Nous avons l'expression du premier vecteur propre  $\vec{P}^1 (P_1^1, P_2^1, P_3^1)$ . Nous procédons de même avec  $\vec{P}^2$  et  $\vec{P}^3$ , les deux autres vecteurs propres portés par les axes principaux d'inertie. Ainsi il existe un repère principal d'inertie en tout point  $O$ .

Montrons que les directions principales sont orthogonales. Désignons les directions des axes principaux d'inertie par les vecteurs unitaires  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ , et faisons apparaître leurs produits scalaires. Pour  $\vec{n}_1(n_1^1, n_2^1, n_3^1)$  et le scalaire  $I_1$ , (10.4) page ci-contre s'écrit :

$$I_1 \vec{n}_1 = [I] \vec{n}_1$$

De même pour  $\vec{n}_2(n_1^2, n_2^2, n_3^2)$  :

$$I_2 \vec{n}_2 = [I] \vec{n}_2$$

Effectuons le produit scalaire

$$\begin{aligned} [I] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_2^1 \\ n_3^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}n_1^1 - I_{12}n_2^1 - I_{13}n_3^1 \\ -I_{21}n_1^1 + I_{22}n_2^1 - I_{23}n_3^1 \\ -I_{31}n_1^1 - I_{32}n_2^1 + I_{33}n_3^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} \\ &= I_{11}n_1^1n_1^2 - I_{12}n_1^2n_2^1 - I_{13}n_1^3n_2^1 \\ &\quad - I_{21}n_1^1n_2^2 + I_{22}n_1^2n_2^2 - I_{23}n_1^3n_2^2 \\ &\quad - I_{31}n_1^1n_2^3 - I_{32}n_1^2n_2^3 + I_{33}n_1^3n_2^3 \end{aligned}$$

Par symétrie du tenseur d'inertie, échangeons  $I_{ij}$  par  $I_{ji}$

$$\begin{aligned}
 [I] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= I_{11} n_1^1 n_2^1 - I_{21} n_1^2 n_2^1 - I_{31} n_1^3 n_2^1 \\
 &\quad - I_{12} n_1^1 n_2^2 + I_{22} n_1^2 n_2^2 - I_{32} n_1^3 n_2^2 \\
 &\quad - I_{13} n_1^1 n_2^3 - I_{23} n_1^2 n_2^3 + I_{33} n_1^3 n_2^3 \\
 &= I_{11} n_2^1 n_1^1 - I_{12} n_2^2 n_1^1 - I_{13} n_2^3 n_1^1 \\
 &\quad - I_{21} n_2^1 n_1^2 + I_{22} n_2^2 n_1^2 - I_{23} n_2^3 n_1^2 \\
 &\quad - I_{31} n_2^1 n_1^3 - I_{32} n_2^2 n_1^3 + I_{33} n_2^3 n_1^3 \\
 &= \begin{pmatrix} I_{11} n_2^1 - I_{12} n_2^2 - I_{13} n_2^3 \\ -I_{21} n_2^1 + I_{22} n_2^2 - I_{23} n_2^3 \\ -I_{31} n_2^1 - I_{32} n_2^2 + I_{33} n_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \\
 &= [I] \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 I_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= I_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \\
 (I_1 - I_2) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Si  $I_1 \neq I_2$  alors  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$  et les axes principaux d'inertie sont orthogonaux deux à deux.

Cherchons l'expression du tenseur d'inertie dans le repère principal d'inertie  $(O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ .

Soit  $\vec{\omega}$  un vecteur porté par un axe de rotation quelconque  $\Delta$  :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3$$

Soit  $\vec{L}$  un vecteur tel que :

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= [I]_O \vec{\omega} \\
 L_1 \vec{n}_1 + L_2 \vec{n}_2 + L_3 \vec{n}_3 &= [I]_O (\omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3) \\
 &= \omega_1 [I]_O \vec{n}_1 + \omega_2 [I]_O \vec{n}_2 + \omega_3 [I]_O \vec{n}_3 \\
 &= \omega_1 I_1 \vec{n}_1 + \omega_2 I_2 \vec{n}_2 + \omega_3 I_3 \vec{n}_3
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_3 = I_3 \omega_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

d'où l'expression du *tenseur principal d'inertie* au point  $O$  :

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Il dépend du choix du point  $O$ . En revanche le tenseur principal d'inertie  $[I]_G$  calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie  $G$  du système, est une caractéristique intrinsèque de ce système (elle ne dépend que du système), comme le sont sa masse, son volume ou sa charge électrique. On l'appelle *tenseur central principal d'inertie*. C'est la répartition des masses du solide  $S$ , pondérée par la distance au centre d'inertie au carré.

### 10.3.3 Ellipsoïde d'inertie

Soit un solide  $S$ , et soit un repère  $\mathcal{R}$  de centre  $O$ . Le tenseur d'inertie  $[I]_O$  est donc fixé. Soit  $\Delta$  un axe de rotation quelconque, de vecteur unitaire  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  :

$$\begin{aligned} I_\Delta &= [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}u_1 - I_{12}u_2 - I_{13}u_3 \\ -I_{12}u_1 + I_{22}u_2 - I_{23}u_3 \\ -I_{13}u_1 - I_{23}u_2 + I_{33}u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$I_\Delta = I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2 - 2I_{12}u_2u_1 - 2I_{13}u_3u_1 - 2I_{23}u_2u_3$$

on retrouve (10.1) page 139. C'est l'équation d'un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde d'inertie*, dans laquelle les composantes  $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}, I_{23}$  du tenseur d'inertie sont des paramètres.

Pour chaque axe  $\Delta$  de direction  $\vec{u}$ , donc pour chaque ensemble de valeurs  $(u_1, u_2, u_3)$ , l'équation donne une valeur pour le moment d'inertie  $I_\Delta$  du solide  $S$ . De même qu'un vecteur peut être représenté par une flèche, un tenseur symétrique d'ordre deux peut être représenté par un ellipsoïde.

### 10.3.4 Théorème de Huygens

#### Théorème 10.1 : Théorème de Huygens

Soit  $\Delta_G$  un axe parallèle à l'axe  $\Delta$  et passant par le centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  de

masse  $m$ . Soit  $a = KH$  la distance entre ces deux axes, où  $K \in \Delta_G$  et  $H \in \Delta$ , alors :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \rho \iiint (MH)^2 d^3V \\ &= \iiint \rho (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH}) \cdot (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH}) d^3V \\ &= \iiint \rho (MK)^2 d^3V + \iiint \rho (KH)^2 d^3V + 2 \iiint \rho \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KH} d^3V \\ &= I_{\Delta_G} + a^2 m + 2 \iiint \rho (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{KH} d^3V \end{aligned}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{KH}$  étant constant :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m + 2\overrightarrow{KH} \cdot \iiint \rho \overrightarrow{MG} d^3V + 2 \iiint \rho \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{KH} d^3V$$

Par définition du centre d'inertie,

$$\iiint \rho \overrightarrow{MG} d^3V = 0$$

De plus,  $\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{KH}$ , d'où :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

□

## 10.4 Moment cinétique

### Définition 10.4 : Moment cinétique

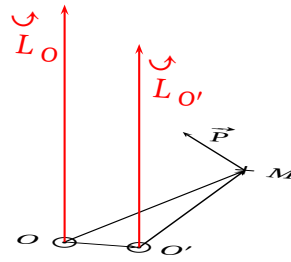
On appelle moment cinétique (ou moment angulaire ou moment de la quantité de mouvement) par rapport à un point  $O$  fixe dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  quelconque, d'un corps de centre de gravité  $G$ , le produit vectoriel du vecteur position  $\overrightarrow{OG} = \vec{r}$  par la quantité de mouvement  $\vec{p}$  de ce corps dans  $\mathcal{R}$  :

$$\overset{\curvearrowright}{L}_{/O} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

### 10.4.1 Moment cinétique par rapport à un point

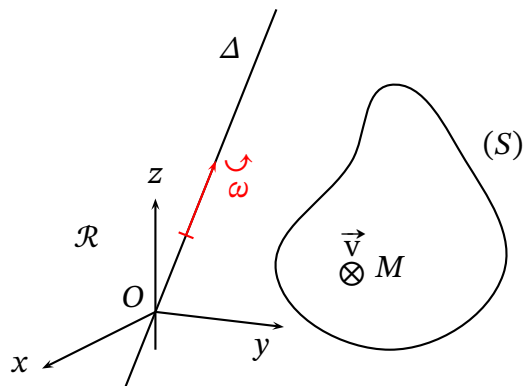
Soient  $O$  et  $O'$  deux points distincts d'un repère  $\mathcal{R}$ , le moment cinétique par rapport au point  $O'$  d'un point massique  $M$  de quantité de mouvement  $\vec{p}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{L}_{O'}(M) &= \overrightarrow{O'M} \times \vec{p} \\ &= (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \times \vec{p} \\ &= \overrightarrow{O'O} \times \vec{p} + \overrightarrow{OM} \times \vec{p} \\ &= \overrightarrow{O'O} \times \vec{p} + \overset{\curvearrowright}{L}_O(M) \end{aligned}$$



Le moment cinétique d'un solide ou d'un système dépend du point par rapport auquel il est calculé. Le terme  $\vec{O'O} \times \vec{p}$  permet de passer du moment cinétique au point O à celui au point O'.

Soit un solide S de masse volumique  $\rho$ , tournant avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  autour d'un axe  $\Delta$  de direction fixe dans  $\mathcal{R}$ . Si le solide S est libre alors l'axe de rotation passe obligatoirement par son centre d'inertie, mais l'on envisage ici le cas plus général de la rotation d'un solide autour d'un axe quelconque. Calculons le moment cinétique par rapport au centre du référentiel O situé sur l'axe  $\Delta$ .



Considérons un élément de volume du solide S, de masse  $dm$ , de volume  $d^3V$ , de vitesse  $\vec{v}$ , situé au point M. Son moment cinétique dans  $\mathcal{R}$  par rapport au point O s'écrit :

$$dL_O^{\mathcal{R}}(M) = \vec{OM} \times \vec{v} dm$$

L'axe de rotation  $\Delta$  passant par le point O, la vitesse du point M s'écrit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

si bien que

$$\begin{aligned} dL_O^{\mathcal{R}}(M) &= \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) dm \\ &= \rho \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) d^3V \end{aligned}$$

Le moment cinétique total du solide  $S$  s'obtient par intégration sur son volume total :

$$\overset{\mathcal{R}}{L}_O(S) = \iiint \rho \overrightarrow{OM} \times (\overset{\mathcal{R}}{\omega} \times \overrightarrow{OM}) d^3V$$

Développons le double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \times (\overset{\mathcal{R}}{\omega} \times \overrightarrow{OM}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega^2 x_3 - \omega^3 x_2 \\ \omega^3 x_1 - \omega^1 x_3 \\ \omega^1 x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 x_2^2 - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 + \omega^1 x_3^2 \\ \omega^2 x_3^2 - \omega^3 x_2 x_3 - \omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 x_1^2 \\ \omega^3 x_1^2 - \omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 \\ -\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3 \\ -\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression du moment cinétique de  $S$  par rapport à  $O$ , calculé dans  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{R}}{L}_O(S) &= \begin{pmatrix} \iiint \rho [\omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3] d^3V \\ \iiint \rho [-\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3] d^3V \\ \iiint \rho [-\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2)] d^3V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V - \omega^2 \iiint \rho x_1 x_2 d^3V - \omega^3 \iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\omega^1 \iiint \rho x_1 x_2 d^3V + \omega^2 \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V - \omega^3 \iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\omega^1 \iiint \rho x_1 x_3 d^3V - \omega^2 \iiint \rho x_2 x_3 d^3V + \omega^3 \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overset{\mathcal{R}}{L}_O(S) = [I]_O \overset{\mathcal{R}}{\omega}}$$

où  $[I]_O$  est le tenseur d'inertie du solide  $S$ , au point  $O$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

### 10.4.2 Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation  $\Delta$  :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}$$

et soit  $L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S)$  la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation  $\Delta$ . Soit  $MH$  la distance du point  $M$  à l'axe de rotation. En utilisant le théorème 11.2 page 154 de l'analyse vectorielle donné en annexe, on a :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) &= L_O^{\mathcal{R}}(S) \cdot \vec{u} \\ &= \iiint \rho \overrightarrow{OM} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) d^3V \cdot \vec{u} \\ &= \iiint \rho \left[ \vec{\omega} (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\omega}) \right] d^3V \cdot \vec{u} \\ &= \omega \iiint \rho \left[ \vec{u} \cdot \vec{u} (OM)^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}) (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}) \right] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho [(OM)^2 - (OH)^2] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho (MH)^2 d^3V \end{aligned}$$

$$L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) = I_{\Delta} \omega \quad (10.5)$$

où le scalaire  $I_{\Delta}$  est le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$ .

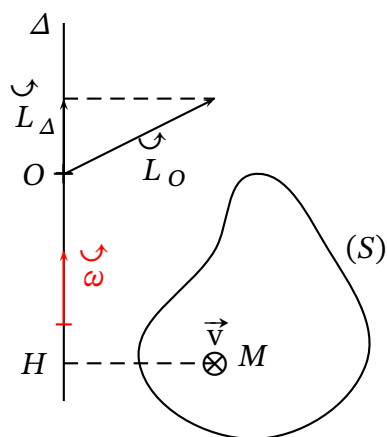


FIG. 10.2 – Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

### 10.4.3 Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation  $\Delta$ . Alors :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) &= \overset{\curvearrowright}{L}_O(S) \cdot \vec{u} \\ &= [I]_O \overset{\curvearrowright}{\omega} \cdot \vec{u} \\ &= [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \omega \end{aligned}$$

Par conséquent, avec (10.5) page précédente :

$$I_{\Delta} = [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Nous retrouvons (10.2) page 139.

## 10.5 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Soit  $S$  un solide de masse  $m$ , de volume  $V$ , de masse volumique  $\rho$ , en rotation avec une vitesse angulaire  $\overset{\curvearrowright}{\omega}$  autour du centre  $O$  d'un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . On considère un élément du solide, de masse  $dm$ , de volume  $d^3V$  situé au point  $M$ . Son énergie cinétique  $dT$  s'écrit :

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} v^2 dm \\ &= \frac{\rho}{2} v^2 d^3V \\ &= \frac{\rho}{2} (\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{OM})^2 d^3V \end{aligned}$$

L'énergie cinétique totale  $T$  s'obtient par intégration sur le volume total du solide  $S$  :

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint (\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{OM})^2 d^3V$$

Grâce au théorème 11.4 page 155 de l'analyse vectorielle donné en annexe :

$$\begin{aligned} (\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{OM})^2 &= \omega^2 (OM)^2 - (\overset{\curvearrowright}{\omega} \cdot \overrightarrow{OM})^2 \\ &= \left[ (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] - (\omega^1 x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3)^2 \\ &= \left[ (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \\ &\quad - \left[ (\omega^1)^2 x_1^2 + (\omega^2)^2 x_2^2 + (\omega^3)^2 x_3^2 + 2(\omega^1 x_1 \omega^2 x_2 + \omega^1 x_1 \omega^3 x_3 + \omega^2 x_2 \omega^3 x_3) \right] \\ &= (\omega^1)^2 (x_2^2 + x_3^2) + (\omega^2)^2 (x_1^2 + x_3^2) + (\omega^3)^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - 2(\omega^1 x_1 \omega^2 x_2 + \omega^1 x_1 \omega^3 x_3 + \omega^2 x_2 \omega^3 x_3) \end{aligned}$$

Ce scalaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{OM})^2 &= \begin{pmatrix} \omega^1(x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 \\ -\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2(x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3 \\ -\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression du dernier terme :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int \rho(x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_1 x_2 d^3V & -\int \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_2 d^3V & \int \rho(x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_3 d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V & \int \rho(x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$$

En ajoutant l'énergie cinétique en translation rectiligne du solide  $S$ , l'énergie cinétique  $T$  s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} [I]_O \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

où  $[I]_O$  est le tenseur d'inertie du solide  $S$ , au point  $O$ .



## Chapitre 11

### ANNEXES

#### 11.1 Premier théorème d'analyse vectorielle

##### Théorème 11.1

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \\ &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) \\ &\quad + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= C_x (A_y B_z - A_z B_y) \\ &\quad + C_y (A_z B_x - A_x B_z) \\ &\quad + C_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\end{aligned}$$

□

## 11.2 Deuxième théorème d'analyse vectorielle

### Théorème 11.2

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z) \\ A_z (B_y C_z - B_z C_y) - A_x (B_x C_y - B_y C_x) \\ A_x (B_z C_x - B_x C_z) - A_y (B_y C_z - B_z C_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z \\ A_z B_y C_z - A_z B_z C_y - A_x B_x C_y + A_x B_y C_x \\ A_x B_z C_x - A_x B_x C_z - A_y B_y C_z + A_y B_z C_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} &\vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &= \vec{B} (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \vec{C} (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &= \begin{pmatrix} B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ B_y (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_y (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ B_z (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_z (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_x A_y C_y + B_x A_z C_z - C_x A_y B_y - C_x A_z B_z \\ B_y A_x C_x + B_y A_z C_z - C_y A_x B_x - C_y A_z B_z \\ B_z A_x C_x + B_z A_y C_y - C_z A_x B_x - C_z A_y B_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

### Application 11.1

Pour  $\vec{A} = \vec{C} = \vec{OM}$  et  $\vec{B} = \vec{\omega}$ , on a :

$$\vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) = \vec{\omega} (\vec{OM} \cdot \vec{OM}) - \vec{OM} (\vec{OM} \cdot \vec{\omega})$$

### 11.3 Troisième théorème d'analyse vectorielle

#### Théorème 11.3

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

*Démonstration.*

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$$

et avec le théorème 11.2 page ci-contre, en remplaçant  $\vec{A}$  par  $\vec{C}$ ,  $\vec{B}$  par  $\vec{A}$ , et  $\vec{C}$  par  $\vec{B}$ ,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= -[\vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})] \\ &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

□

#### Théorème 11.4

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

*Démonstration.* D'après le théorème 11.1 :

$$\vec{X} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{X} \times \vec{C}) \cdot \vec{D}$$

On pose  $\vec{X} = \vec{A} \times \vec{B}$ , alors

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}] \cdot \vec{D}$$

et avec le théorème 11.3 :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= [\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})] \cdot \vec{D} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

□

#### Application 11.2

Pour  $\vec{A} = \vec{C} = \vec{\omega}$  et  $\vec{B} = \vec{D} = \vec{GM}$ , on a :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{GM})^2 &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{GM} \cdot \vec{GM}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{GM})(\vec{GM} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \omega^2(GM)^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{GM})^2 \end{aligned}$$



# Index

- Axiome
  - de relativité
    - généralisé, 11
  - du moment cinétique, 67
- Axiomes de caractérisation égalitaire, 8
- Centrale inertielle, 6
- Champ
  - gravitationnel, 82
- Conservation
  - de l'énergie mécanique, 48
  - de l'énergie totale, 107
  - de la quantité de mouvement, 23
  - du moment cinétique total, 63
- Courbure
  - de la lumière, 11
- Divergence
  - nulle, 87
- Divergence d'un champ de vecteurs, 71
- Équation(s)
  - de conservation, 77
  - de continuité, 78
  - de la dynamique
    - classique, 31
  - de Laplace, 89
  - de Poisson, 88
- Force
  - gravitationnelle, 81
- fusée, 11, 22, 24
- Géodésique(s)
  - trajectoire définition, 7
- Gravitation
  - newtonienne, 81
- Laplacien
  - d'un champ de scalaires, 79
- Laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs, 79
- Loi
  - de Gauss
    - forme différentielle, 88
    - forme intégrale, 87
    - pour la gravitation, 87
  - de l'action-réaction, 30
  - des cosinus, 85
- Mach Principe de, 12
- Masse
  - grave, 32
  - inerte, 18
- Moment
  - cinétique, 11, 31, 63, 104
  - d'inertie, 104
  - de force, 66
- Mouvement inertiel, 11
- nabla, 78
- Opérateur
  - divergence, 71
  - laplacien, 79
  - laplacien vectoriel, 79
  - nabla, 78
  - rotationnel, 46
- Potentiel
  - de la force gravitationnelle, 83
  - du champ gravitationnel, 82
  - scalaire, 81
  - scalaire d'un champ vectoriel, 82
- Principe
  - d'équivalence, 10
    - entre masse inerte et masse grave, 34
  - de Mach, 12
  - de relativité, 7

## INDEX

- Rayon
  - vecteur, 81
- Référentiel(s)
  - définition, 5
  - équivalents, 8
  - inertiel, 11
  - propre, 6
- Relation
  - d'égalité, 8
  - d'équivalence, 8
  - fondamentale de la dynamique, 31
- Rotationnel d'un champ de vecteurs, 46
- Théorème
  - de Gauss, 73
  - de la divergence, 71, 73, 88
- Trivecteur
  - nabla, 78