

o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

Physique Vol. 5

Relativité restreinte

Olivier Castéra

Le 14 février 2026

Table des matières

1 L'espace-temps	1
1.1 Référentiels et principe de relativité	1
1.2 Transformation de Galilée des coordonnées	4
1.3 Quadridistance spatio-temporelle - Intervalle d'univers	5
1.4 Vitesse de la lumière et vitesse limite	8
1.5 Invariants relativistes - Sphère de lumière	9
1.6 Convention de genre temps	10
1.7 Espace homogène et isotrope, temps homogène	11
1.8 Loi de composition interne	11
1.9 Intervalle infinitésimal d'univers	12
1.10 Métrique de Minkowski	13
1.11 Géodésique de l'espace-temps de Minkowski	17
2 La transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées	19
2.1 La sphère de lumière	19
2.2 Transformation spéciale de Lorentz	20
2.3 Symétrie de la transformation spéciale de Lorentz	22
2.4 Écriture matricielle de la transformation spéciale de Lorentz	22
2.5 Transformation spéciale de Lorentz inverse	23
2.6 Linéarité de la transformation spéciale de Lorentz	24
2.7 Système d'unités géométriques	24
2.8 Transformation spéciale de Lorentz en notation indicielle	25
2.9 Transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque	25
3 Conséquences sur l'espace et le temps	27
3.1 Temps propre - Durée propre	27
3.2 Jumeaux de Langevin	31
3.3 Longueur propre	32
3.4 Longueur d'une courbe de l'espace-temps	33
4 Les différents diagrammes	37
4.1 Diagramme d'espace-temps en cinématique classique	37
4.1.1 Diagramme spatial	37
4.1.2 Diagramme spatial et temporel	38
4.2 Diagramme d'espace-temps de Minkowski	40
4.2.1 Approximation de la transformation spéciale de Lorentz	42
4.2.2 Hyper-cône de lumière	43
4.2.3 Hyperboles invariantes	44

4.2.4 Causalité	47
4.3 Diagramme d'espace-temps de Poincaré	49
5 Cinématique relativiste	53
5.1 Changement de référentiel	53
5.1.1 Comparaison des cinématiques newtonienne et relativiste	53
5.2 Quadrivecteurs	54
5.3 Trivecteur position relativiste	55
5.4 Quadrivecteur position	56
5.4.1 Quadrinorme du quadrivecteur position temps-espace	57
5.4.2 Transformation des composantes contravariantes de la 4-position	58
5.4.3 Transformation des composantes covariantes de la 4-position	59
5.4.4 Transformation spéciale des composantes d'un quadritenseur	60
5.5 Quadriproduit scalaire	60
5.5.1 Invariance du quadriproduit scalaire	62
5.6 Trivecteur vitesse relativiste	62
5.6.1 Transformation spéciale de la vitesse	63
5.6.2 Loi de composition des vitesses	65
5.6.3 Autre écriture vectorielle de la vitesse	65
5.7 Trivecteur vitesse propre relativiste	66
5.7.1 Transformation spéciale de la vitesse propre	67
5.7.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse propre	68
5.8 Quadrivecteur vitesse	69
5.8.1 Quadrinorme de la quadrivitesse	70
5.8.2 Quadriproduit scalaire de la quadrivitesse avec la quadriposition	71
5.8.3 Transformation spéciale des composantes de la quadrivitesse	71
5.9 Trivecteur-accélération relativiste	72
5.9.1 Transformation spéciale des composantes de la tri-accélération	72
5.9.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la tri-accélération	74
5.9.3 Autre écriture vectorielle de la tri-accélération	76
5.10 Trivecteur-accélération propre relativiste	76
5.10.1 Lien entre accélération propre et tri-accélération	77
5.10.2 Transformation spéciale des composantes de l'accélération propre	78
5.11 Quadrivecteur accélération	79
5.11.1 Quadrinorme de la quadri-accélération	81
5.11.2 Quadriproduit scalaire avec la quadrivitesse	81
5.11.3 Quadriproduit scalaire avec la quadriposition	82
5.11.4 Transformation spéciale des composantes de la quadri-accélération	82
5.12 Quadrivecteur d'onde	86
5.12.1 Équation de propagation d'une onde	86
5.12.2 Onde sinusoïdale	87
5.12.3 Équation d'onde en k et ω	88
5.12.4 Période spatiale	88
5.12.5 Période temporelle	89
5.12.6 Équation d'onde en λ et T	90
5.12.7 Équation d'onde en σ et ν	90
5.12.8 L'onde plane harmonique	91
5.12.9 Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$	92

5.12.10	Invariance de la phase de l'onde plane sinusoïdale	92
5.12.11	Quadrinorme du quadrivecteur d'onde	94
5.12.12	Transformation spéciale des composantes du quadrivecteur d'onde . .	94
5.13	Quadrivecteur densité numérique-flux	95
6	Dynamique relativiste	97
6.1	Masse inerte	97
6.2	Quadrivecteur impulsion	98
6.3	Énergie relativiste	99
6.3.1	Quadrinorme de la quadri-impulsion	101
6.3.2	Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadriposition . . .	102
6.3.3	Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadrivitesse . . .	102
6.3.4	Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadri-accélération	102
6.3.5	Particules de masse nulle - Cas des photons	102
6.3.6	Transformation spéciale des composantes de la quadri-impulsion	103
6.3.7	Conservation de la quadri-impulsion	104
6.4	Quadrivecteur force	106
6.4.1	Transformation spéciale des composantes de la quadriforce	107
6.5	Quadri-opérateur nabla	108
6.6	Quadrigradient	109
6.6.1	Quadrinorme du quadrigradient	109
6.7	Équation de conservation	110
7	Calcul tensoriel en relativité restreinte	111
7.1	Quadritenseurs	111
7.1.1	Poussière	111
7.1.2	Densité d'énergie	112
7.1.3	Quadritenseur énergie-impulsion	112
7.1.4	Produit extérieur	113
7.1.5	Quadritenseur moment cinétique	114
7.1.6	Transformation des composantes d'un quadritenseur	115
7.2	Principe d'inertie	119
8	Principe de moindre action en relativité restreinte	121
8.1	Trajectoire d'un système libre	123
8.2	Impulsion relativiste	124
8.3	Énergie relativiste	125
8.4	Quadritenseur moment cinétique	125
8.5	Équation de Hamilton-Jacobi relativiste pour un mobile libre	127

Chapitre 1

L'ESPACE-TEMPS

Sommaire

1.1 Référentiels et principe de relativité	1
1.2 Transformation de Galilée des coordonnées	4
1.3 Quadridistance spatio-temporelle - Intervalle d'univers	5
1.4 Vitesse de la lumière et vitesse limite	8
1.5 Invariants relativistes - Sphère de lumière	9
1.6 Convention de genre temps	10
1.7 Espace homogène et isotrope, temps homogène	11
1.8 Loi de composition interne	11
1.9 Intervalle infinitésimal d'univers	12
1.10 Métrique de Minkowski	13
1.11 Géodésique de l'espace-temps de Minkowski	17

L'espace-temps de la relativité restreinte est l'exemple prototypique d'espace mathématique *pseudo-euclidien*. Les espaces pré-euclidiens regroupent les espaces euclidiens (aussi appelés proprement euclidiens) et les espaces pseudo-euclidiens.

En physique relativiste, le temps et l'espace n'ont pas d'existence intrinsèque, ils dépendent du mouvement relatif entre observateur et système observé. Il existe autant d'espaces et de temps qu'il y a d'observateurs en mouvement relatif. Les référentiels ne se déplacent pas dans un espace ou dans un temps qui préexisteraient mais dans un espace-temps qui préexiste, ils « emportent » avec eux leur propre espace et leur propre temps.

1.1 Référentiels et principe de relativité

Pour définir un référentiel en relativité nous devons préciser que l'on parle d'« un » espace et non de l'espace, et d'« un » temps et non du temps, car l'espace et le temps ne sont pas absolus comme en mécanique classique, mais dépendent de l'état de mouvement relatif des référentiels en question. Seul l'espace-temps est absolu. On précise donc la définition donnée en mécanique classique :

Définition 1.1.1 : Référentiel, cas relativiste

Un référentiel est un espace muni d'un système de coordonnées, et un temps mesuré par des horloges fixes dans cet espace.

Reprenons la définition d'un référentiel galiléen en mécanique classique (Cf. Vol. 2 Mécanique classique). Un mouvement en translation signifie sans rotation sur soi-même, rectiligne signifie sans accélération normale au mouvement, et uniforme signifie sans accélération tangentielle au mouvement. Par transitivité, les référentiels galiléens se déplacent d'un mouvement en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. On donne alors la définition alternative suivante sans faire appel aux étoiles lointaines :

Définition 1.1.2 : Référentiels galiléens

Les référentiels équivalents sont appelés galiléens ssi ils se distinguent les uns des autres à la fois par :

- leur position relative
- leur origine temporelle
- leur orientation relative
- un mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme

Le mouvement relatif de ces référentiels est à l'origine du nom donné au principe de relativité. Dans cette définition des référentiels galiléens, l'équivalence quelle que soit

- leur position, suppose implicitement l'homogénéité de l'espace
- leur origine temporelle, suppose implicitement l'homogénéité du temps
- leur orientation (et leur direction prise en translation rectiligne), suppose implicitement l'isotropie de l'espace

Définition 1.1.3 : Coordonnées galiléennes

Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires dans l'espace d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et soit t son temps propre (mesuré dans le référentiel). Les coordonnées rectangulaires (pseudo-cartésiennes normales) spatio-temporelles (t, x, y, z) , où l'axe de la coordonnée temporelle est représenté normal aux axes des coordonnées spatiales, sont appelées coordonnées galiléennes de $\mathcal{R}$.

Définition 1.1.4 : Coordonnées galiléennes réduites

Les coordonnées (ct, x, y, z) sont appelées coordonnées galiléennes réduites.

Remarque 1.1.1

Les coordonnées galiléennes réduites ont toutes la dimension d'une longueur.

Notation 1.1.1

Par convention nous indiquons la coordonnée temporelle avant les coordonnées spatiales, (t, x, y, z) ou (ct, x, y, z) . Cette notation permet d'ajouter ou d'enlever une ou plusieurs coordonnées spatiales.

Nous prenons la notation suivante :

Notation 1.1.2 : Notation indicielle

Les coordonnées galiléennes réduites sont notées x^α avec $\alpha = 0, \dots, 3$:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

L'indice zéro met en évidence le caractère particulier du temps par rapport aux coordonnées spatiales.

Définition 1.1.5 : Configuration standard

Deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en configuration standard ssi :

- les centres de ces référentiels se croisent et se superposent à l'instant $t_0 = t'_0 = 0$
- on utilise les coordonnées galiléennes ou galiléennes réduites
- les repères naturels associés aux coordonnées galiléennes sont orthonormés directs
- le mouvement rectiligne n'a lieu que selon les axes Ox et $O'x'$ parallèles et de même sens (confondus quand les centres se superposent)
- le mouvement de translation est tel que les axes Oy et $O'y'$ sont parallèles, donc aussi les axes Oz et $O'z'$: pas de rotation statique
- le mouvement relatif uniforme de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ est dans le sens des x croissants

Si l'on note $\mathbf{v}_e$ le 3-vecteur vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, on en déduit que ce vecteur est selon l'axe Ox : $\|\mathbf{v}_e\| = v_{ex} = v_e > 0$ et $v_{ey} = v_{ez} = 0$.

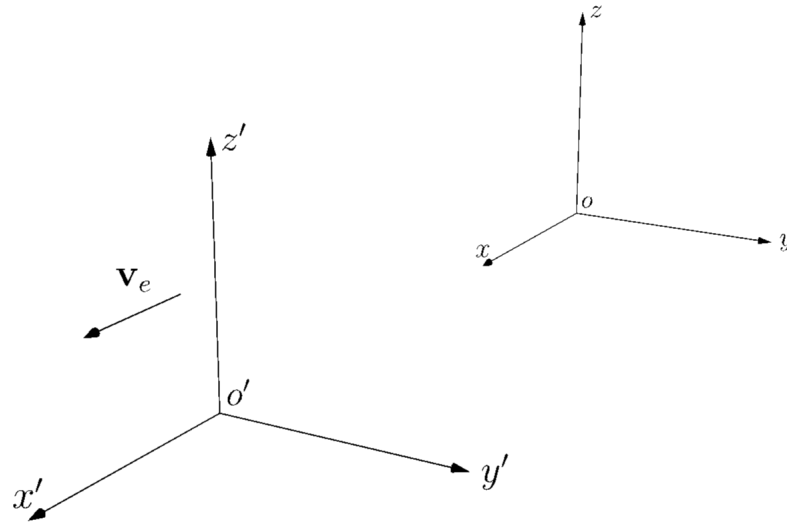


FIG. 1.1 – Référentiels en configuration standard

Remarque 1.1.2

On précise ici que $\mathbf{v}_e$ est le 3-vecteur vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ tel que mesuré par un observateur dans $\mathcal{R}$. Autrement dit l'espace parcouru par $\mathcal{R}'$ est mesuré dans $\mathcal{R}$, il est divisé par le temps mesuré dans $\mathcal{R}$ également. Par symétrie des rôles de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et par isotropie supposée de l'espace, le 3-vecteur vitesse d'entraînement $\mathbf{v}'_e$ de $\mathcal{R}$ mesuré par un observateur dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\mathbf{v}'_e = -\mathbf{v}_e$$

1.2 Transformation de Galilée des coordonnées

Définition 1.2.1 : Transformation des coordonnées

On appelle transformation de coordonnées un changement de système de coordonnées par changement de référentiel.

On exclue donc les changements de coordonnées comme le passage d'un système de coordonnées rectangulaire à un système de coordonnées sphériques.

En physique newtonienne, pour passer des coordonnées spatiales et temporelle d'un point dans un référentiel galiléen aux coordonnées du même point dans un autre référentiel galiléen, c.-à-d. pour effectuer un changement de référentiel galiléen de l'observateur, nous utilisons la transformation de coordonnées suivante :

Définition 1.2.2 : Transformation de Galilée

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels en configuration standard (déf. 1.1.5 page précédente). La transformation $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ est appelée transformation de Galilée (directe) :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Cette transformation linéaire est une transvection (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous obtenons la transformation de Galilée inverse $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$, soit en inversant les relations précédentes, soit en changeant v_e en $-v_e$ et en permutant les coordonnées de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + v_e t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.2.3 : Invariant

En mécanique classique, un invariant est une quantité physique qui reste identique à elle-même par changement de référentiel galiléen par la transformation de coordonnées de Galilée.

Exemple 1.2.1

Le temps, la distance spatiale entre deux points de l'espace, la masse sont des exemples d'invariants de la mécanique classique.

Remarque 1.2.1

Le vecteur vitesse d'un mobile ou le vecteur champ électrique sont des vecteurs mathématiques, mais ne sont pas des vecteurs physiques (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) car ils ne sont pas invariants par changement de référentiel galiléen. La norme de la vitesse d'un mobile ou son énergie cinétique sont des scalaires mathématiques, mais ne sont pas des scalaires physiques car ils ne sont pas invariants par changement de référentiel galiléen.

1.3 Quadridistance spatio-temporelle - Intervalle d'univers

En relativité restreinte, l'espace et le temps sont liés par la constante c homogène à une vitesse (un espace divisé par un temps). Ils forment *l'espace-temps* ou *univers*, dans lequel c est une vitesse limite pour la matière, l'énergie, les interactions et l'information. c est aussi appelée *constante de structure de l'espace-temps* ou *constante chronogéométrique*.

En multipliant la coordonnée temporelle par cette constante c nous obtenons la coordonnée ct homogène à une longueur ou une distance. On mesure alors le temps en mètres, ou l'espace en secondes, ce qui ne pose pas de problème puisque l'on connaît la valeur de la constante de passage c . Cette coordonnée n'a pas le même statut que les coordonnées spatiales x, y, z mais permet de définir une distance dans l'espace-temps. L'espace-temps devient *de facto* un espace métrique à quatre dimensions, et l'on cherche à y définir une distance entre deux événements qui soit invariante par changement de référentiel. À un changement de référentiel correspond un changement de temps et d'espace, c.-à-d. un changement de coordonnées, qui s'effectue par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cette quadridistance est appelée *intervalle d'univers*, sous-entendu entre deux points ayant chacun quatre coordonnées. Un espace dans lequel on peut définir une distance est dit *métrique*¹, sinon il est dit *affine*. Ainsi, l'espace et le temps de la physique non relativiste sont deux espaces métriques distincts, et leur « réunion » n'est pas un espace métrique, alors que l'espace-temps de la relativité est un espace métrique.



FIG. 1.2 – Exemple d'espace affine (à gauche sur le schéma) et d'espace métrique (à droite)

Figure 1.2 les coordonnées y et z ne sont pas représentées. On note que :

- en coordonnées galiléennes (t, x, y, z) , la longueur d'un segment n'a pas de sens précis, les coordonnées n'ont pas la même dimension, l'espace n'est pas métrique

1. du grec $\mu\epsilon\tau\rho\omicron\upsilon$, mesure

- en coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2, la longueur d'un segment existe et on peut la mesurer. Les coordonnées ont même dimension, celle d'une longueur ou distance, et définissent un espace métrique. Sur l'axe des ordonnées les durées sont transformées en distances, avec $1\text{ s} = 299\,792\,458\text{ m}$ et $1\text{ m} \approx 3,34\text{ ns}$.

Figure 1.2 dessin de droite, les échelles de distance ne sont pas les mêmes, des mètres en abscisse et des « trois centaines de milliers de kilomètres » en ordonnée.

Remarque 1.3.1

Un cas similaire existe en mécanique classique. Dans l'aviation on mesure les altitudes en centaines de pieds ou flight level (FL) et les distances sol en milles marins ou nautical miles (NM). Difficile dans ces conditions de mesurer une distance autre qu'une différence d'altitude ou qu'une distance sol.



FIG. 1.3 – Unités d'un espace métrique

Pour cette raison nous redéfinissons le mètre et/ou la seconde pour avoir la même unité en abscisse et en ordonnée, ce qui revient à poser

$$c = 1$$

Remarque 1.3.2

Le mètre et la seconde, comme toutes les unités de la physique, sont arbitraires.

Définition 1.3.1 : Système d'unités géométriques

Le système d'unité dans lequel on pose la vitesse limite $c = 1$ sans dimension, et la constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 1$ sans dimension, est appelé système d'unités géométriques.

Dans le système d'unités géométriques il n'y a plus lieu de distinguer l'unité de temps de l'unité de distance. Les vitesses n'ont alors plus de dimension.

Remarque 1.3.3

En principe on ne devrait pas simplifier les unités. Par exemple, si l'on dit qu'un projet prend un mois de retard tous les vingt-quatre mois, on ne peut simplifier par « mois ». De même, la vitesse d'un cours d'eau augmente à mesure que l'on s'éloigne de la berge et que l'on se rapproche du centre, cette variation de vitesse se mesure en (m/s)/m. Si l'on simplifie les unités on obtient des Hertz pour cette variation de vitesse.

L'espace et le temps ne sont plus absolus puisqu'ils se combinent l'un dans l'autre, mais l'espace-temps prend un caractère *absolu*. Il est modélisé par un espace métrique mathématique de dimension quatre appelé *espace de Poincaré-Minkowski* ou *espace-temps de Minkowski*, de système de coordonnées (t, x, y, z) où $c = 1$.

Notation 1.3.1

L'espace de Poincaré-Minkowski est noté $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{M}$.

Tout comme l'espace est constitué de l'ensemble des points de cet espace, l'espace-temps est constitué de l'ensemble des *événements* ou *points d'univers*.

Définition 1.3.2 : Évènement ou point d'univers

Un événement est quelque chose qui a lieu quelque part à un instant donné.

On ne se soucie pas de la nature de ce qui arrive mais uniquement du lieu et de l'instant.

Notation 1.3.2

On note un événement $E(t, x, y, z)$ en coordonnées galiléennes et $E(ct, x, y, z)$ en coordonnées galiléennes réduites.

En relativité, les événements héritent du caractère absolu de l'espace-temps. Ce sont des invariants relativistes.

Remarque 1.3.4

Le terme « événement » existe aussi en mécanique classique où il a aussi pour coordonnées (t, x, y, z) , mais où le temps est universel.

L'espace-temps est absolu signifie que les événements sont absolus, ils existent en eux-mêmes indépendamment de tout référentiel ou de tout observateur. Le choix d'un référentiel (avec son espace, son temps, son système de coordonnées et son horloge) pour localiser un événement est arbitraire, par conséquent les coordonnées spatio-temporelles des événements ont le même arbitraire.

Nous cherchons à généraliser la distance spatiale entre deux points de l'espace physique tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Galilée, à une distance spatio-temporelle entre deux événements de l'espace-temps quadridimensionnel $\mathbb{R}^4$, invariante par changement de référentiel galiléen par une transformation qui laisse invariante c . Cette transformation des coordonnées que l'on cherche à établir porte le nom de ses découvreurs, c'est la transformation de Lorentz et Poincaré.

De même qu'en mathématique la distance entre deux points d'un espace est invariante par changement de coordonnées, en relativité la distance spatio-temporelle entre deux événements de l'espace-temps est invariante par changement de coordonnées spatio-temporelle, c'est-à-dire par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Le tableau suivant donne les équivalences de vocabulaire selon que l'on met en avant l'aspect mathématique ou physique :

Mathématique	Physique relativiste
point	évènement
vecteur	4-vecteur
métrique	distance de Minkowski, 4-distance, intervalle
pseudo-norme	4-norme
système de coordonnées, repère	référentiel
chgt de coordonnées, chgt de base	chgt de référentiel, transformation de Lorentz
espace euclidien	espace newtonien
espace pré-euclidien	espace plat (newtonien ou de la relativité restreinte)
espace non euclidien	espace courbe
espace pseudo-euclidien	espace-temps, 4-espace, espace de Minkowski, univers
variété, espace riemannien, espace	espace courbe ou plat
espace pseudo-riemannien	espace-temps de la relativité générale

1.4 Vitesse de la lumière et vitesse limite

On suppose l'existence d'une vitesse limite. Il est impossible de prouver expérimentalement que la lumière se propage à la vitesse limite. La seule chose que pourrait montrer une expérience serait que la lumière ne va pas à la vitesse limite.

Exemple 1.4.1

Lorsqu'une balance indique zéro on ne peut pas conclure, car soit la balance n'est pas assez précise soit l'objet pesé a effectivement un poids nul.

Par analogie, une expérience qui n'indique pas de différence entre la vitesse de la lumière et la vitesse limite ne permet pas de conclure. Quant à la théorie, elle ne peut pas se prononcer sur ce qui se mesure, sauf à utiliser d'autres valeurs mesurées.

Définition 1.4.1 : Loi covariante

Une loi physique est dite covariante ssi elle est invariante de forme fonctionnelle dans tous les référentiels équivalents, c'est-à-dire, si elle s'écrit sous la même forme mathématique pour tous les observateurs équivalents.

Les quatre équations de Maxwell permettent d'établir l'équation d'une onde dont la vitesse de propagation est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide. Cette vitesse est celle du champ électromagnétique sur tout son spectre de fréquence, donc aussi celle de la lumière. Les équations

de Maxwell ne sont pas covariantes par la transformation de Galilée mais le sont par celle de Lorentz-Poincaré. Cela indique que la vitesse de la lumière est très proche, sinon confondue, avec la vitesse limite.

La transformation de Lorentz-Poincaré fait intervenir la vitesse limite, alors que les équations de Maxwell font intervenir la vitesse de la lumière. Si l'on trouvait une masse (pour les anglophones une masse au repos) aux photons, la lumière n'irait pas à la vitesse limite et les équations de Maxwell ne seraient plus covariantes. Il faudrait les réécrire².

1.5 Invariants relativistes - Sphère de lumière

Revenons sur l'hypothèse de l'existence d'une vitesse limite.

Remarque 1.5.1

La transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées spatiales et de la coordonnée temporelle peuvent être démontrées à partir d'hypothèses très générales sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace, sur l'homogénéité du temps, sur le fait que la transformation de Lorentz-Poincaré doit former un groupe (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) et sur le respect de la causalité. L'existence d'une vitesse limite est une conséquence de ces hypothèses et elle est alors démontrée et non postulée.

La vitesse limite est invariante par changement de référentiel galiléen, elle a même valeur pour tous les observateurs galiléens sinon nous pourrions la dépasser par changement de référentiel galiléens. C'est notre premier exemple d'*invariant relativiste*.

Définition 1.5.1 : Invariant relativiste

On appelle invariant relativiste, invariant de Lorentz, scalaire de Lorentz ou 4-scalaire, une quantité physique qui reste identique à elle-même par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz des coordonnées.

Remarque 1.5.2

En unifiant le temps et l'espace avec la constante chronogéométrique c pour former l'espace-temps, nous perdons deux invariants de la mécanique classique, le temps universel et la distance entre deux points, mais nous obtenons un nouvel invariant, c elle-même. Nous avons bon espoir de trouver un deuxième invariant relativiste à partir du temps et de l'espace, en particulier une 4-distance entre deux événements de l'espace-temps.

À partir de la vitesse limite, cherchons un deuxième invariant relativiste qui fasse intervenir les coordonnées spatio-temporelles. Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). Nous supposons que la lumière se propage à la vitesse limite, mais cette hypothèse n'a aucune nécessité, elle permet de mieux se représenter l'expérience de pensée qui suit. Imaginons qu'à l'instant initial $t_0 = t'_0 = 0$, à l'origine spatiale de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ se produise un flash isotrope. Un observateur dans $\mathcal{R}$ verra une sphère de lumière de centre O s'étendre dans l'espace, d'équation dans $\mathcal{R}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (1.3)$$

ct est le rayon de la sphère dans $\mathcal{R}$ à l'instant t .

En mécanique classique, la transformation de Galilée inverses (1.2) page 4 permettent de savoir ce que voit un observateur dans $\mathcal{R}'$:

$$(x' + v_e t')^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

2. Voir les travaux d'Alexandru Proca

C'est l'équation d'une sphère de lumière de centre O et de rayon ct' à l'instant t' . Dans $\mathcal{R}'$ la lumière va à $c + v_e$ selon l'axe $-x'$ et à $c - v_e$ selon l'axe x' .

En relativité restreinte comme en physique non relativiste, un observateur dans $\mathcal{R}'$ verra aussi une sphère de lumière s'étendre dans l'espace. S'il voyait un ellipsoïde de révolution la vitesse de la lumière ne serait pas isotrope, c.-à-d. la même dans toutes les directions. Cependant, par invariance de c par changement de référentiel galiléen, la sphère n'a pas pour centre O mais O' , et a donc pour équation dans $\mathcal{R}'$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

Par comparaison avec (1.3), nous voyons que l'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiels galiléens. C'est un invariant relativiste.

Remarque 1.5.3

Notez que l'équation de la sphère de lumière n'est pas invariante par changement de référentiels non galiléens.

Si le flash n'a pas pour origine le centre O de $\mathcal{R}$ à l'instant $t = 0$ mais le point de coordonnées quelconques (t_0, x_0, y_0, z_0) , alors l'équation de la sphère de lumière de centre ce point s'écrit dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= [c(t - t_0)]^2 \\ \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 &= c^2 \Delta t^2 \end{aligned}$$

Et dans $\mathcal{R}'$:

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = c^2 \Delta t'^2$$

1.6 Convention de genre temps

L'équation de la sphère de lumière étant la même dans tous les référentiels galiléens, cela suggère de poser au choix

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \quad \text{convention de genre temps} \quad (1.4)$$

ou

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \quad \text{convention de genre espace}$$

En convention de genre temps, Δs^2 est positif lorsque la partie temporelle est prépondérante sur la partie spatiale.

Remarque 1.6.1

Cette expression rappelle le carré de la distance euclidienne en trois dimensions d'espace, le théorème de Pythagore. Dans tout triangle rectangle de côtés a, b, c et d'hypothénus c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ce qui implique

$$c < a + b$$

En revanche ici, en posant $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \\ c^2 \Delta t^2 &= \Delta s^2 + \Delta r^2 \\ c \Delta t &< \Delta s + \Delta r \\ \Delta s &> c \Delta t - \Delta r\end{aligned}$$

Quelle que soit la convention choisie, si s^2 est nul dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors il est nul dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, autrement dit s et s' sont proportionnels :

$$s = \alpha s'$$

1.7 Espace homogène et isotrope, temps homogène

Reprenons la déf. 1.1.2 page 2 d'un référentiel galiléen et ses implications :

- l'espace étant supposé homogène (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'endroit où on la réalise), le facteur de proportionnalité α ne peut être fonction des coordonnées spatiales
- le temps étant également supposé homogène (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'époque à laquelle elle est réalisée), α ne peut être fonction de la coordonnée temporelle
- l'espace étant supposé isotrope (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'orientation choisie dans l'espace), α ne peut être fonction de la direction de la vitesse relative des référentiels

α n'est donc fonction que de la norme de la vitesse relative des référentiels :

$$s = \alpha(v_e) s'$$

1.8 Loi de composition interne

Si l'on considère trois référentiels galiléens nous avons

$$\begin{cases} s_1 = \alpha(v_{12}) s_2 \\ s_2 = \alpha(v_{23}) s_3 \\ s_1 = \alpha(v_{13}) s_3 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{aligned}s_1 &= \alpha(v_{12}) \alpha(v_{23}) s_3 \\ \alpha(v_{13}) &= \alpha(v_{12}) \alpha(v_{23})\end{aligned}$$

Or v_{13} dépend non seulement des valeurs v_{12} et v_{23} , mais aussi de l'angle entre les vecteurs $\mathbf{v}_{12}$ et $\mathbf{v}_{23}$. Par conséquent α est une constante :

$$\alpha = \alpha^2$$

Cela laisse deux possibilités, $\alpha = 0$ qui donne $s = s' = 0$, et $\alpha = 1$ qui donne $s = s'$. Dans les deux cas

$$s = s' \quad (1.5)$$

s est donc un invariant de Lorentz. Nous aurons $s = s' = 0$ pour toute propagation à la vitesse limite, la partie temporelle et la partie spatiale s'annulant. En trois dimensions d'espace on retrouve l'équation de la sphère de lumière. Pour la lumière, à supposer qu'elle se propage à la vitesse limite, dans tout référentiel galiléen :

$$s = 0$$

1.9 Intervalle infinitésimal d'univers

Soient deux évènements $E_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$, nous définissons le carré de l'*intervalle d'univers* entre ces deux évènements par :

$$\begin{aligned} \text{Intervalle}^2(E_1, E_2) &\stackrel{\text{déf}}{=} c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \end{aligned}$$

L'invariance de l'équation de la sphère de lumière du § 1.5 page 9 nous assure que l'intervalle d'univers est bien invariant par changement de référentiel galiléen. L'intervalle d'univers va donc nous servir de *distance spatio-temporelle*, $d(E_1, E_2)$.

Remarque 1.9.1

En convention de genre espace :

$$\text{Intervalle}^2(E_1, E_2) \stackrel{\text{déf}}{=} (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

Cette distance dans l'espace-temps est aussi appelée *distance d'univers*, *intervalle d'univers*, *intervalle d'espace-temps* ou *pseudo-métrique de l'espace-temps*. Elle a même valeur dans tout référentiel galiléen.

Définition 1.9.1 : Intervalle infinitésimal d'univers

En convention de genre temps, le carré de l'intervalle infinitésimal d'univers entre deux évènements infiniment proches (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ s'écrit :

$$ds^2 \stackrel{\text{déf}}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Si les deux évènements appartiennent à une trajectoire décrite avec une vitesse $v(t)$,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2(t) dt^2$$

si bien que

$$ds^2 = [c^2 - v^2(t)] dt^2 \quad (1.6)$$

Si $v(t) < c$ alors :

- ds^2 est positif et s est réel en convention de genre temps

- ds^2 est négatif et s est imaginaire en convention de genre espace

ce qui justifie notre choix de la convention de genre temps (1.4) page 10 : s réel pour une trajectoire réelle. Il faut ici faire le rapprochement avec la conclusion du § sur la sphère dans le Vol. 1 Notion d'espace, à propos du plongement de la sphère.

Remarque 1.9.2

Pour un déplacement à la vitesse limite, l'intervalle d'univers Δs est nul.

Nous sommes ainsi conduits, en relativité restreinte, à douer la variété d'univers V_4 de la pseudo-métrique définie par la forme quadratique différentielle indéfinie (Cf. Vol. 1 Notion d'espace),

$$Q(t, x, y, z) = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

de rang 4 et de signature (1, 3) en convention de genre temps, appelée *métrique de Minkowski*. Cette pseudo-métrique étant à coefficients constants elle définit V_4 comme un espace pseudo-euclidien : le « pseudo » vient du fait que la métrique n'a pas que des signes positifs ou que des signes négatifs, le « euclidien » vient des coefficients constants.

Remarque 1.9.3

Nous verrons que l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte est un espace osculateur (tangent à l'ordre deux) à l'espace courbe pseudo-riemannien de la relativité générale.

1.10 Métrique de Minkowski

1.10.0.1 En convention de genre temps

Substituons au système de coordonnées galiléennes (t, x, y, z) , le système de coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2 (ct, x, y, z) , et prenons la notation indicielle (1.1.2) page 3 (x^0, x^1, x^2, x^3) . En convention de genre temps (1.4) page 10, la pseudo-métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= \begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice 4×4 appelée matrice de Minkowski, représente le tenseur métrique qui structure l'espace-temps de la relativité restreinte (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique).

Notons $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base (pseudo-orthonormale) de l'espace-temps, avec $\mathbf{e}_0$ le vecteur de

base de la coordonnée temporelle :

$$\begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

En convention de genre temps :

$$\begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Notation 1.10.1

Le tenseur métrique de l'espace de Poincaré-Minkowski est noté $\eta_{\alpha\beta}$, la matrice de Minkowski est notée $[\eta_{\alpha\beta}]$.

$$[\eta_{\alpha\beta}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (1.7)$$

Les termes carrés valent ± 1 et les termes rectangles (non diagonaux) sont nuls.

Le déterminant de la matrice de Minkowski est négatif :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 \times -1 \times -1 \times -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dans un espace pseudo-euclidien, le déterminant de la matrice représentative du tenseur métrique peut être négatif. Le tenseur métrique a pour signature $(+ - - -)$.

Pour les composantes contravariantes x^α (avec $t = t$, c.-à-d. $c = 1$) :

$$x^0 = t \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z$$

Le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Pour les composantes covariantes, $x_\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha$, nous avons :

$$x_0 = t \quad ; \quad x_1 = -x \quad ; \quad x_2 = -y \quad ; \quad x_3 = -z$$

Ainsi, en convention de genre temps nous avons le changement de variance suivant :

$$x_0 = x^0 \quad ; \quad x_1 = -x^1 \quad ; \quad x_2 = -x^2 \quad ; \quad x_3 = -x^3$$

En coordonnées rectangulaires et pseudo-rectangulaires les termes rectangles sont nuls, autrement dit $\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$. Le carré de l'intervalle entre deux évènements se note alors :

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \\ &= \eta_{\alpha\alpha} x^\alpha x^\alpha \\ &= x_\alpha x^\alpha \end{aligned}$$

Il peut prendre des valeurs positives, négatives ou nulle, selon la distance et le temps lumière qui séparent ces deux évènements. Enfin, d'après le Vol. 4 Tenseur métrique, le tenseur de Minkowski est égal à son dual :

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$$

1.10.0.2 En convention de genre espace

En convention de genre espace, le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

Notation 1.10.2

En convention de genre espace les termes carrés valent aussi ± 1 et les termes rectangles (non diagonaux) sont nuls.

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Le déterminant de la matrice de Minkowski est également négatif, $\eta = -1$. Le tenseur métrique a pour signature $(-+++)$ et les composantes contravariantes s'écrivent à nouveau :

$$x^0 = t \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z$$

Pour les composantes covariantes :

$$x_0 = -t \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z$$

Ainsi, en convention de genre espace nous avons le changement de variance suivant :

$$x_0 = -x^0 \quad ; \quad x_1 = x^1 \quad ; \quad x_2 = x^2 \quad ; \quad x_3 = x^3 \quad (1.8)$$

Pour insister sur le choix d'une signature, la notation $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{M}$ de l'espace-temps 1.3.1 page 6, est remplacée par celle-ci :

Notation 1.10.3

En convention de genre temps, l'espace-temps de Minkowski est noté $\mathbb{R}^{1,3}$. On a alors

$$\mathbb{R}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta_{\alpha\beta})$$

où $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

L'espace-temps de Minkowski est noté $\mathbb{R}^{3,1}$ en convention de genre espace.

En notation tensorielle en coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2 avec la notation indicielle 1.1.2 page 3, quelle que soit la convention de genre temps ou espace, la pseudo-métrique de Minkowski s'écrit :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.9)$$

1.10.0.3 Métrique d'apparence euclidienne

Le carré de l'intervalle élémentaire peut aussi s'écrire

$$s^2 = (it)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{ou} \quad s^2 = t^2 + (ix)^2 + (iy)^2 + (iz)^2$$

La matrice de Minkowski devient :

$$[\eta_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les indices latins varient de 1 à 4. La métrique a une apparence euclidienne, de signature (+ + ++). Les composantes covariantes et contravariantes sont confondues. On adopte au choix une notation avec pour quatrième coordonnée une coordonnée temporelle imaginaire (la coordonnée est imaginaire, le temps reste réel) :

$$x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z \quad ; \quad x^4 = it$$

ou une notation avec des coordonnées spatiales imaginaires :

$$x^1 = ix \quad ; \quad x^2 = iy \quad ; \quad x^3 = iz \quad ; \quad x^4 = t$$

Dans ces deux cas, le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$$

Le plan de coordonnées (x, it) ne doit pas être confondu avec le plan complexe (x, t) . Dans le premier cas le carré de la pseudo-norme d'un vecteur s'écrit $x^2 - t^2$ et il peut être positif, négatif ou nul, alors que dans le second cas le carré de la norme d'un vecteur s'écrit $x^2 + t^2$.

$\mathbb{M}$ peut bien entendu être rapporté à un système de coordonnées curvilignes (y^α) quelconque et sa pseudo-métrique s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta$$

Les composantes du tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ sont ici fonction des coordonnées curvilignes. D'après la loi d'inertie de Sylvester (Cf. Vol. 1 Notion d'espace), le déterminant η est négatif également en coordonnées curvilignes.

1.11 Géodésique de l'espace-temps de Minkowski

Appliquons la définition d'une géodésique (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) à l'espace-temps de Minkowski.

Définition 1.11.1 : Géodésique

Une trajectoire joignant deux événements E_a et E_b de $\mathbb{M}$ est une géodésique ssi sa longueur est extrémale.

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} ds = 0$$

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2, avec la notation indicielle 1.1.2 page 3 et la convention de sommation :

$$\begin{aligned} \delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} &= 0 \\ \delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{\frac{c^2 dt^2}{dp^2} - \left(\frac{dx^2}{dp^2} + \frac{dy^2}{dp^2} + \frac{dz^2}{dp^2} \right)} dp &= 0 \\ \delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{\eta_{\alpha\alpha} \left(\frac{dx^\alpha}{dp} \right)^2} dp &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec $\eta_{00} = 1$, et $\forall \alpha = 1, 2, 3, \eta_{\alpha\alpha} = -1$.

Théorème 1.11.1 : Géodésique

Dans $\mathbb{M}$, un mobile a une 4-accélération nulle ssi il décrit une géodésique.

Démonstration. Dans (1.10) de la présente page, posons le lagrangien

$$\mathcal{L} = \eta_{\alpha\alpha} (x'^\alpha)^2$$

Or,

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{\mathcal{L}} dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int_{E_a}^{E_b} \mathcal{L} dp = 0$$

en conservant la condition $\mathcal{L} \geq 0$. Nous obtenons le système de quatre équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} &= 0 \\ \frac{d}{dp} (2\eta_{\alpha\alpha} x'^\alpha) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [\eta_{\alpha\alpha} (x'^\alpha)^2] &= 0 \\ 2\eta_{\alpha\alpha} x''^\alpha + 2 \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dp} (x'^\alpha)^2 - \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha} (x'^\alpha)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Les coefficients $\eta_{\alpha\alpha}$ ne sont pas fonction des coordonnées x^α :

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad x''^\alpha = 0$$

Ce système de n équations différentielles ordinaires du second ordre, pour les quatre coordonnées galiléennes réduites $x^\alpha(p)$ fonction du paramètre quelconque p , donne une géodésique de $\mathbb{M}$. Contrairement au cas de la mécanique classique, la coordonnée temporelle x^0 est une fonction linéaire du paramètre p , et réciproquement le paramètre est une fonction linéaire de la coordonnée temporelle.

Chapitre 2

LA TRANSFORMATION DE LORENTZ-POINCARÉ DES COORDONNÉES

Sommaire

2.1 La sphère de lumière	19
2.2 Transformation spéciale de Lorentz	20
2.3 Symétrie de la transformation spéciale de Lorentz	22
2.4 Écriture matricielle de la transformation spéciale de Lorentz	22
2.5 Transformation spéciale de Lorentz inverse	23
2.6 Linéarité de la transformation spéciale de Lorentz	24
2.7 Système d'unités géométriques	24
2.8 Transformation spéciale de Lorentz en notation indicielle	25
2.9 Transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque	25

2.1 La sphère de lumière

Nous cherchons à établir la transformation de coordonnées dite de Lorentz-Poincaré, qui permet le changement de référentiel dans le cadre relativiste, c.-à-d. en maintenant invariant c . Chaque référentiel a *a priori* son propre système de coordonnées spatio-temporelles. À tout changement de référentiel galiléen correspond une transformation des coordonnées spatio-temporelles. La transformation de coordonnées que l'on cherche est donc une transformation des coordonnées spatio-temporelles qui laisse invariante c . Appliquons la transformation de Galilée à l'équation de la sphère de lumière dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\(x - v_e t)^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\x^2 - 2xv_e t + v_e^2 t^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ce n'est pas une sphère de centre O dans $\mathcal{R}$ à cause des termes supplémentaires $-2xv_e t$ et $v_e^2 t^2$.

2.2 Transformation spéciale de Lorentz

Au § 1.6 page 10, nous avons vu que l'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiel (changement de coordonnées spatio-temporelles). Pour obtenir une sphère à partir de (2.1), nous ne pouvons pas garder $t' = t$ si nous voulons éliminer le terme croisé $-2xv_e t$. On essaye alors la transformation la plus simple envisageable,

$$\begin{cases} t' = t + Kx \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

où K est une constante homogène à l'inverse d'une vitesse, qu'il faut déterminer. Appliquons cette transformation de coordonnées à l'équation de la sphère de lumière dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ x^2 - 2xv_e t + v_e^2 t^2 + y^2 + z^2 &= c^2 (t + Kx)^2 \\ &= c^2 t^2 + 2c^2 Kxt + c^2 K^2 x^2 \\ x^2 (1 - c^2 K^2) - 2xt(v_e + c^2 K) + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme en xt on pose

$$\begin{aligned} v_e + c^2 K &= 0 \\ K &= -\frac{v_e}{c^2} \end{aligned}$$

La transformation de coordonnées devient

$$\begin{cases} t' = t - \frac{v_e x}{c^2} \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

et l'équation dans $\mathcal{R}$ devient :

$$x^2 \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)$$

Pour obtenir une sphère dans $\mathcal{R}$ nous devons diviser x' et t' par le terme $\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}$.

Définition 2.2.1 : Facteur relativiste

On définit le facteur relativiste par :

$$\gamma(v_e) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}}$$

Le facteur relativiste est aussi appelé facteur de Lorentz ou coefficient de parallaxe spatio-temporelle.

Notation 2.2.1

$\gamma(v_e)$ est noté simplement γ_e

Ce facteur est sans dimension. Pour toute vitesse relative, c.-à-d. pour tout couple de référentiels ou d'observateurs, il existe un facteur relativiste. Lorsque il y a plusieurs vitesses relatives il faut préciser de quel facteur relativiste il s'agit. On aura donc les écritures suivantes :

$$\gamma_e, \gamma_v, \gamma_{v'}, \dots$$

Sa valeur est toujours supérieure ou égale à un :

$$0 \leq v_e \leq c \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_e \geq 1 \quad (2.2)$$

Nous obtenons la transformation de coordonnées suivante :

Définition 2.2.2 : Transformation spéciale de Lorentz

Pour deux référentiels en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3), la transformation (changement de système de coordonnées par changement de référentiel galiléen)

$$\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - \frac{v_e x}{c^2} \right) \\ x' = \gamma_e (x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

est appelée transformation spéciale de Lorentz.

La vitesse d'entraînement relative v_e des référentiels est le paramètre du groupe de la transformation de Lorentz. La transformation est dite « spéciale » en ce qu'elle n'inclue pas les rotations statiques ordinaires de l'espace, autrement dit le mouvement relatif a lieu selon les axes x et x' confondus. Elle est obtenue ici grâce à l'hypothèse de l'invariance de c (qui entraîne celle de l'équation de la sphère de lumière) et en partant de la transformation de Galilée en considérant un mouvement de $\mathcal{R}'$ dans le sens des x croissants de $\mathcal{R}$.

2.3 Symétrie de la transformation spéciale de Lorentz

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2, la transformation spéciale de Lorentz est symétrique en x et ct :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - \frac{v_e x}{c^2} \right) \\ x' = \gamma_e (x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma_e \left(ct - \frac{xv_e}{c} \right) \\ x' = \gamma_e \left(x - \frac{ctv_e}{c} \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

En posant

$$\beta_e = \frac{v_e}{c}$$

nous voyons clairement la symétrie entre les coordonnées ct et x :

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e (ct - \beta_e x) \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$\begin{cases} x' = \gamma_e (x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.4b)$$

2.4 Écriture matricielle de la transformation spéciale de Lorentz

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition 2.4.1 : Matrice de Lorentz

La matrice changement relativiste de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz des coordonnées est appelée matrice de Lorentz :

$$\Lambda \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notation 2.4.1

La matrice de Lorentz est habituellement notée avec la lettre L majuscule ou avec la lettre grecque lambda majuscule en l'honneur d'Hendrik Lorentz.

2.5 Transformation spéciale de Lorentz inverse

Nous obtenons la transformation spéciale de Lorentz inverse $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$, soit en inversant les relations précédentes, soit en changeant v_e en $-v_e$ et en permutant les coordonnées de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} t = \gamma_e \left(t' + \frac{v_e x'}{c^2} \right) \\ x = \gamma_e (x' + v_e t') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Remarque 2.5.1

Quel que soit le problème à résoudre, nous avons toujours le choix entre la transformation de Lorentz directe ou inverse. La résolution est plus ou moins simple selon ce choix.

La matrice de Lorentz inverse s'écrit :

$$\bar{\Lambda} \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.6 Linéarité de la transformation spéciale de Lorentz

La transformation spéciale de Lorentz prend en entrée un vecteur de l'espace-temps et donne en sortie un vecteur de l'espace-temps tout en étant linéaire, c'est donc un endomorphisme de l'espace-temps (Cf. Vol. 1 Notion d'espace). Chaque coordonnée d'un évènement E exprimée dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est une fonction linéaire de l'ensemble des coordonnées de ce même évènement E exprimées dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} t &= f(t', x') \\ x &= g(t', x') \end{aligned}$$

où les fonctions f et g sont linéaires. La transformation spéciale de Lorentz est donc une application linéaire. Soit $O(0, 0, 0, 0)$ l'évènement origine d'un référentiel galiléen, et soient $E_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ deux autres évènements :

$$\Lambda(\lambda \mathbf{OE}_1 + \mathbf{OE}_2) = \lambda \Lambda \mathbf{OE}_1 + \Lambda \mathbf{OE}_2$$

2.7 Système d'unités géométriques

Dans (2.4) page 22, remplaçons toutes les vitesses v par $\beta = v/c$, y compris c , ce qui revient à poser $c = 1$ et donc $\beta = v$:

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{c=1} \begin{cases} t' = \gamma_e(t - v_e x) \\ x' = \gamma_e(x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour passer de $c = 299\,792\,458$ m/s à $c = 1$, on utilisera le passage :

$$\begin{cases} ct \rightarrow t \\ ct' \rightarrow t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \rightarrow t/c \\ t' \rightarrow t'/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt \rightarrow dt/c \\ dt' \rightarrow dt'/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt^2 \rightarrow dt^2/c^2 \\ dt'^2 \rightarrow dt'^2/c^2 \end{cases}$$

Appliquons ces relations pour la vitesse,

$$\begin{cases} dr/dt \rightarrow c \, dr/dt \\ dr'/dt \rightarrow c \, dr'/dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \rightarrow cv \\ v' \rightarrow cv' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v/c \rightarrow v \\ v'/c \rightarrow v' \end{cases}$$

et pour l'accélération :

$$\begin{cases} d^2r/dt^2 \rightarrow c^2 d^2r/dt^2 \\ d^2r'/dt^2 \rightarrow c^2 d^2r'/dt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow c^2 a \\ a' \rightarrow c^2 a' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a/c^2 \rightarrow a \\ a'/c^2 \rightarrow a' \end{cases}$$

Si l'on souhaite revenir à $c = 299\,792\,458$ m/s on utilisera le passage :

$$\begin{cases} t \rightarrow ct \\ t' \rightarrow ct' \end{cases} \quad \begin{cases} v \rightarrow v/c \\ v' \rightarrow v'/c \end{cases}$$

2.8 Transformation spéciale de Lorentz en notation indicielle

Notation 2.8.1

En notation indicielle et matricielle, la transformation spéciale de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notation 2.8.2

En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad x^{\mu'} = \Lambda_0^{\mu'} x^0 + \Lambda_1^{\mu'} x^1 + \Lambda_2^{\mu'} x^2 + \Lambda_3^{\mu'} x^3$$

Notation 2.8.3

En notation indicielle avec la convention de sommation :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}$$

2.9 Transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque

Dans le cas de la transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque, les origines des référentiels se croisent à $t = t' = 0$, leurs axes sont parallèles mais leur vitesse relative n'est pas selon l'axe des x .

Soit M un évènement, on pose $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ le vecteur position de M dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{O'M} = \mathbf{r}'$ son vecteur position dans $\mathcal{R}'$. On note $\mathbf{r}_{||}$ le vecteur position parallèle à $\mathbf{v}_e$ et $\mathbf{r}_{\perp}$ le vecteur position perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$, de sorte que :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{||} + \mathbf{r}'_{\perp}$$

La transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (2.6) page ci-contre donne directement :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_e (t - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}'_{||} &= \gamma_e (\mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}_e t) \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned}$$

D'où la relation entre $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \gamma_e(\mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}_e t) + \mathbf{r}_{\perp} \\ &= \mathbf{r} + (\gamma_e - 1)\mathbf{r}_{||} - \gamma_e \mathbf{v}_e t\end{aligned}$$

Or nous avons aussi,

$$\mathbf{r}_{||} = \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e$$

donc en unités géométriques,

$$\begin{cases} t' = \gamma_e (t - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e t \end{cases} \quad (2.7a)$$

$$(2.7b)$$

On obtient la transformation inverse en permutant $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$, t et t' , et en changeant $\mathbf{v}_e$ en $-\mathbf{v}_e$:

$$\begin{cases} t = \gamma_e (t' + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}') \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}'}{v_e^2} \mathbf{v}_e + \gamma_e \mathbf{v}_e t' \end{cases}$$

Chapitre 3

CONSÉQUENCES SUR L'ESPACE ET LE TEMPS

Sommaire

3.1 Temps propre - Durée propre	27
3.2 Jumeaux de Langevin	31
3.3 Longueur propre	32
3.4 Longueur d'une courbe de l'espace-temps	33

3.1 Temps propre - Durée propre

Définition 3.1.1 : Temps propre

Le temps indiqué par une horloge fixe dans un référentiel est appelé temps propre de ce référentiel, quel que soit le mouvement de ce référentiel.

Par exemple, le temps propre à bord d'un avion est indiqué par une horloge embarquée. À chaque observateur ou référentiel son temps propre. C'est le temps du référentiel propre (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) lorsque celui-ci est défini.

Notation 3.1.1

Le temps propre est habituellement noté τ ou t_0 .

Un temps qui n'est pas un temps propre est appelé *temps impropre* ou *temps coordonnée*. Il n'est qu'une coordonnée au même titre que les coordonnées spatiales, et a le même arbitraire. Il dépend de notre choix de référentiel.

La notion de temps n'a que peu d'intérêt car on ne mesure jamais que des durées.

Définition 3.1.2 : Durée propre

La durée séparant deux événements qui ont lieu au même endroit ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$) dans un référentiel, par exemple en son point origine, est appelée durée propre ou intervalle

de temps propre.

Une durée propre est toujours lue sur une seule et même horloge. En convention de genre temps, l'intervalle infinitésimal d'univers déf. 1.9.1 page 12 est un réel positif ou négatif :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 \\ ds &= \pm c d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

où la vitesse limite c est positive.

Remarque 3.1.1

En convention de genre espace le ds est un imaginaire pur :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 \\ ds &= \pm ic d\tau \end{aligned}$$

Définition 3.1.3 : Ligne d'univers

On appelle ligne d'univers ou ligne d'espace-temps, la trajectoire d'un mobile dans l'espace-temps.

ds peut être vu comme l'intervalle infinitésimal entre deux évènements infiniment proches le long d'une ligne d'univers. On choisit ds de même signe que $d\tau$, le sens de parcours de la ligne d'univers a lieu dans le sens de l'écoulement du temps :

$$ds = c d\tau \quad (3.2)$$

Une ligne d'univers a pour équation les quatre coordonnées d'espace-temps en fonction d'un paramètre p quelconque :

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad x^\alpha = x^\alpha(p)$$

Si le mouvement est en cours, le paramètre est le temps, propre ou impropre.

Par deux évènements E_1 et E_2 il passe une infinité de lignes d'univers. Dans l'espace-temps plat de la relativité restreinte une seule est une géodésique, sa 4-distance dans l'espace-temps est extrémale. Autrement dit, parmi l'infinité de référentiels ayant leur point origine passant par deux évènements, un seul est galiléen. Nous verrons que la durée propre mesurée dans ce référentiel entre ces deux évènements est supérieure aux durées propres mesurées dans des référentiels non galiléens (accélérés) passant par ces deux mêmes évènements. L'intervalle fini de temps propre entre deux évènements est l'intégrale curviligne du temps propre infinitésimal selon la ligne d'univers passant par les deux évènements :

$$\Delta\tau = \int_{E_1(\tau_1)}^{E_2(\tau_2)} d\tau$$

L'intervalle de temps propre dépend de la ligne d'univers parcourue. En revanche l'intervalle de temps propre dans un référentiel galiléen est absolu, tous les observateurs s'accordent sur sa valeur. Il n'est pas invariant par changement de référentiel puisqu'il n'est défini que dans un seul référentiel, celui galiléen. D'après (3.2), l'intervalle s est égal au temps propre au facteur

c près, autrement dit le temps propre d'un mobile est la distance d'univers qu'il parcourt dans l'espace-temps au facteur c près :

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{E_1(s_1)}^{E_2(s_2)} ds \quad (3.3)$$

ds est un élément de longueur de la ligne d'univers passant par les deux évènements.

Remarque 3.1.2

Ce n'est pas parce qu'un observateur mesure une durée entre deux évènements avec sa montre qu'il va obtenir une durée propre. Encore faut-il qu'il soit présent à l'endroit même de chaque évènement. Ne pas confondre temps propre (d'un observateur) et durée propre (entre deux évènements).

Les relations (1.6) page 12 et (3.1) page précédente donnent le lien entre le temps coordonné t et le temps propre τ ,

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= (c^2 - v^2) dt^2 \\ d\tau &= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \\ dt &= \gamma_v d\tau \quad \gamma_v \geq 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

où l'on s'est servi de la déf. 2.2.1 page 21 du facteur relativiste γ . Ce facteur est aussi appelé *facteur de dilatation temporelle*.

Lorsque $\beta_e \ll 1$ plutôt que d'approximer le facteur de Lorentz par un et retrouver $dt' = dt$, nous pouvons utiliser l'approximation :

$$\gamma_e \approx 1 + \frac{\beta_e^2}{2}$$

Nous obtenons alors :

$$dt' \approx dt + \frac{\beta_e^2}{2} dt$$

Définition 3.1.4 : Durée impropre

La durée mesurée dans un référentiel, séparant deux évènements qui ont lieu en deux endroits distincts de ce référentiel est appelée durée impropre ou intervalle de temps impropre.

La durée impropre est la différence d'indication de deux horloges préalablement synchronisées, une horloge située en chaque évènement. Elle dépend d'un choix arbitraire de référentiel (de son vecteur vitesse), elle a donc le même arbitraire.

Remarque 3.1.3

La synchronisation de deux horloges fixes dans un même référentiel peut se faire par émission de signaux. Avec des signaux lumineux, on mesure le temps de parcours de la lumière d'une horloge à l'autre comme étant la moitié du temps qu'elle met lorsqu'elle est émise de la première horloge et se reflète sur un miroir au niveau de la seconde horloge. N'importe quel signal fait l'affaire, par exemple un signal électrique. On peut également synchroniser les horloges au même endroit, déplacer l'une d'elles jusqu'au point voulu puis la ramener pour mesurer le déphasage lors du trajet aller-retour. Puis refaire l'aller simple et tenir compte du déphasage.

Dans la suite de ce document nous noterons $\mathcal{R}$ le référentiel de l'observatrice Anna et t son temps propre, $\mathcal{R}'$ le référentiel de l'observateur Robert, alias Bob, et t' son temps propre. Nous supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ne sont pas confondus, qu'Anna et Bob ont chacun une montre au

poignet et plusieurs horloges synchronisées placées en différents endroits de leur référentiel. Nous précisons s'ils sont galiléens ou non.

Supposons Anna et Bob galiléens. L'affichage midi et l'affichage 13h sur la montre d'Anna sont deux événements qui ont lieu au même endroit dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna, la durée Δt d'une heure les séparant lue par Anna est une durée propre, on la note $\Delta\tau$. En revanche, ces événements ont lieu en deux endroits distincts dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob, deux endroits où Bob a placé des horloges.

Différentions la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (2.6) page 24 entre les observateurs galiléens Anna et Bob :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e dt - \gamma_e v_e dx \\ dx' = \gamma_e dx - \gamma_e v_e dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.5a) \\ (3.5b) \end{matrix}$$

Pour la transformation inverse :

$$\begin{cases} dt = \gamma_e dt' + \gamma_e v_e dx' \\ dx = \gamma_e dx' + \gamma_e v_e dt' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases}$$

Ces transformations permettent de calculer la durée $\Delta t'$ que doit mesurer Bob par soustraction de l'indication de deux de ses horloges situées sur le trajet d'Anna. Dans le référentiel d'Anna, la montre d'Anna ne bouge pas, à chaque instant $dr = 0$:

$$dx = dy = dz = 0$$

t devient un temps propre et avec (3.5a) de la présente page :

$$dt' = \gamma_e d\tau \quad (3.7)$$

En intégrant :

$$\Delta t' = \int_{\text{midi}}^{13\text{h}} \gamma_e d\tau$$

D'après (2.2) page 21, $\gamma_e \geq 1$, la *durée impropre* $\Delta t'$ mesurée par Bob entre les deux événements est plus longue que la durée propre affichée par la montre d'Anna. Bob mesure par exemple une durée d'une heure et dix minutes. L'intervalle de temps propre d'un objet mobile est toujours inférieur à l'intervalle de temps impropre mesuré dans le référentiel dans lequel l'objet est mobile.

Sans passer par la transformation de Lorentz des coordonnées, nous obtenons les mêmes résultats en nous servant de l'invariance de l'intervalle d'univers (1.5) page 12 et de sa déf. 1.9.1 page 12 :

$$c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt'^2 - dr'^2$$

En posant $dr = 0$, le temps t devient un temps propre τ :

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt'^2 (1 - v_e^2) \\ d\tau^2 &= dt'^2 (1 - \beta_e^2) \\ d\tau &= \frac{dt'}{\gamma_e} \end{aligned}$$

Si l'on connaît la durée mesurée par Bob on peut en déduire celle lue par Anna :

$$\Delta\tau = \int_{\text{midi}}^{13\text{h}10\text{mn}} \frac{1}{\gamma_e} dt'$$

Remarques 3.1.1

- (3.5b) page ci-contre donne :

$$\begin{aligned} dx' &= -\gamma_e v_e dt \\ &= -v_e dt' \\ dx'/dt' &= -v_e \end{aligned}$$

On retrouve le fait que v_e est la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et $-v_e$ celle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$.

- On vérifie la cohérence de la transformation spéciale de Lorentz. Supposons que les deux événements aient lieu au même endroit dans le référentiel de Bob. Dans ce cas Bob lit un temps propre sur sa montre. Injectons $dx' = 0$ dans (3.5a) et (3.5b) page précédente :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e dt - \gamma_e v_e dx \\ dx = v_e dt \end{cases} \Rightarrow dt' = \gamma_e (1 - v_e^2) dt \Rightarrow dt = \gamma_e d\tau$$

- Le temps de la mécanique classique n'est ni le temps propre ni le temps impropre, c'est leur ancêtre commun mais ce n'est ni l'un ni l'autre. Ce modèle de la réalité n'est valable qu'à faible vitesse devant c . Chaque notion de mécanique classique faisant intervenir le temps (la vitesse, l'accélération, la quantité de mouvement, la force), fait émerger deux notions en mécanique relativiste, l'une avec le temps propre, l'autre avec le temps impropre.

Le temps propre mesuré dans un référentiel galiléen n'est pas invariant par changement de référentiel puisqu'il n'est défini que dans ce référentiel, mais il a un caractère *absolu* puisque tous les observateurs s'accordent sur le temps que mesure Anna dans son référentiel galiléen entre deux événements ayant lieu au même endroit pour elle.

3.2 Jumeaux de Langevin

Imaginons qu'Anna et Bob soient jumeaux, ils ont le même âge à quelques minutes près. Alors qu'Anna reste sur Terre, Bob part en fusée pour un voyage interstellaire jusqu'à l'étoile la plus proche de la Terre après le Soleil, Proxima du Centaure, puis revient sur Terre. Pendant ce voyage il atteint par exemple une vitesse relative à la Terre de $90\% c$. Les jumeaux mesurent tous les deux une durée propre, ils sont présents aux événements départ et retour de Bob. Chacun voyant l'autre avec une vitesse relative pense que son jumeau sera plus jeune. En réalité la situation n'est pas symétrique et Bob vieillit moins qu'Anna. Pour l'aller, Bob est présent aux deux événements, départ de la Terre et arrivée à Proxima, il mesure une durée propre $\Delta\tau$. Au retour Bob est aussi présent aux deux événements, départ de Proxima et arrivée sur Terre. Par symétrie, il mesure également une durée propre $\Delta\tau$ pour le retour. Anna mesure deux fois une durée impropre Δt , elle n'est pas présente sur Proxima. La relation (3.4) page 29 donne la durée impropre mesurée par Anna pour l'aller comme pour le retour :

$$\Delta t = \gamma_v \Delta\tau \quad \gamma_v \geq 1$$

Anna mesure une durée plus longue que Bob, il a donc moins vieilli qu'Anna, il arrive en quelque sorte dans le futur d'Anna.

La dissymétrie semble venir du fait que Bob subit au moins une phase de décélération suivie d'une accélération pour revenir sur Terre, et par conséquent ne soit plus galiléen pendant cette

phase. Cependant cette phase peut avoir une durée aussi courte que l'on veut sans que cela ne change beaucoup le résultat, et on voit mal comment cette petite partie du trajet pourrait influencer sur un résultat qui concerne tout le trajet. De plus on peut rendre Anna non galiléenne en imaginant qu'elle fasse une accélération suivie d'une décélération équivalentes à celle de Bob.

Supposons que Bob se serve du champ gravitationnel de Proxima pour faire son demi-tour, il n'est plus galiléen mais il reste inertiel (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), ce qui est autrement plus important. La solution demanderait l'utilisation de la relativité générale pour la phase de demi-tour, mais là encore on voit mal comment cette phase seule pourrait influencer sur un résultat qui concerne tout un trajet.

Pour éviter toute phase d'accélération et rester dans l'espace-temps plat de la relativité restreinte, imaginons que l'espace-temps soit cylindrique. Cet espace euclidien n'a pas de courbure intrinsèque mais une courbure extrinsèque. Au moment du départ, Bob croise Anna en étant déjà à vitesse constante (départ lancé), puis en continuant tout droit croise à nouveau Anna à vitesse constante. Les référentiels d'Anna et Bob sont galiléens, ils sont sur des géodésiques du cylindre. L'analyse montrent¹ que si Anna reste sur une génératrice du cylindre et Bob fait le tour du cylindre (indice « d'enroulement » de 1) alors Bob vieillit moins vite qu'Anna. Ce ne sont donc pas les phases d'accélération qui sont responsables de ce résultat mais la longueur de la ligne d'univers de chacun des jumeaux. À partir de (3.3) page 29, le temps écoulé indiqué par une horloge est l'intégrale de la ligne d'univers de cette horloge au facteur c près. Par exemple pour l'aller, en appelant $\mathcal{R}'$ le référentiel du voyageur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{\odot}^{Proxima} ds' &= \frac{1}{c} \int_{\odot}^{Proxima} ds \\ \Delta\tau &= \frac{1}{c} \int_{\odot}^{Proxima} \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2} \\ &= \int_{\odot}^{Proxima} \sqrt{1 - \beta^2} dt \\ &= \frac{\Delta t}{\gamma_e} \end{aligned}$$

La durée est maximale pour une horloge fixe, celle d'Anna, dont la trajectoire dans l'espace est la plus courte. Ce résultat est dû au caractère hyperbolique de l'espace-temps de la relativité restreinte.

3.3 Longueur propre

Nous parlons de longueur pour un objet et de distance pour un trajet.

Définition 3.3.1 : Longueur propre et distance propre

La longueur propre d'un objet physique est la longueur de cet objet lorsqu'il est immobile, c.-à-d. la longueur mesurée dans le référentiel propre de cet objet. La distance propre entre deux événements est la distance mesurée dans le référentiel dans lequel les deux événements sont simultanés.

1. Jean-Philippe Uzan, Jean-Pierre Luminet, *Twin paradox and space topology*.

Notation 3.3.1

La longueur propre et la distance propre sont habituellement notées σ .

- a) Si l'objet est immobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ de Bob alors $\Delta x'$ est sa longueur propre. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de Anna nous devons avoir $\Delta t = 0$, c.-à-d. $t_1 = t_2$. Les horloges devant lesquelles passent l'avant et l'arrière de l'objet doivent indiquer le même temps. La transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (2.6) page 24 s'écrit avec $\Delta t = 0$:

$$\begin{cases} \Delta t' = -\gamma_e v_e \Delta x \\ \Delta x' = \gamma_e \Delta x \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

$$\Delta x = \Delta \sigma / \gamma_e$$

Comme $\gamma_e > 1$, la *longueur impropre* Δx mesurée par Anna est plus courte que la longueur propre mesurée par Bob.

- b) Si l'objet est immobile dans $\mathcal{R}$ alors Δx est sa longueur propre. Dans $\mathcal{R}'$ nous devons avoir $\Delta t' = 0$:

$$\begin{cases} \Delta t = v_e \Delta x \\ \Delta x' = \gamma_e (\Delta x - v_e \Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases} \Rightarrow \Delta x' = \gamma_e (1 - v_e^2) \Delta x \Rightarrow \Delta x' = \Delta \sigma / \gamma_e$$

Remarque 3.3.1

Il n'y a pas de contraction réelle des distances ou des longueurs dans le sens du mouvement, cette contraction est observationnelle et réciproque. Si la contraction était réelle, du gaz dans un récipient serait comprimé et deviendrait liquide pour un observateur en mouvement relatif mais pas pour un observateur dans le référentiel propre du gaz.

3.4 Longueur d'une courbe de l'espace-temps

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites (x^α) de $\mathbb{M}$ (déf. 1.1.4 page 2 avec la notation indicielle 1.1.2 page 3), la longueur d'une courbe de paramètre p

$$\mathcal{C}(p) : \forall \alpha \quad x^\alpha = x^\alpha(p)$$

et d'abscisse curviligne $s(p)$ a pour expression :

$$\Gamma = \int_{s_0}^{s_1} ds$$

avec $s_0 = s(p = 0)$ et $s_1 = s(p = 1)$. (1.9) page 16 donne l'expression de la pseudo-métrique :

$$\Gamma = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{|\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|}$$

Définition 3.4.1 : Fonction indicatrice ε

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{si } \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \geq 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \int_{p=0}^{p=1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp}} dp \\ &= \int_{p=0}^{p=1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} dp \\ &= \int_{p=0}^{p=1} \|[4u](p)\| dp \end{aligned}$$

où $\|[4u](p)\|$ est la quadrinorme du 4-vecteur $[4u](p)$.

Dans l'espace-temps, $[4r](x^\alpha)$ est le quadrivecteur position à 4 composantes d'un évènement de la ligne d'univers $\mathcal{C}$. Les quadrivecteurs $[4u](p)$ forment un champ de vecteurs tangents en tout évènement de la ligne d'univers $\mathcal{C}(p)$. Si le paramètre est le temps propre τ du mobile (temps affiché par une horloge liée au mobile) qui suit cette ligne d'univers $\mathcal{C}(\tau)$, alors $[4u](\tau)$ est la *quadrivitesse* de ce mobile, de composantes :

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad u^\alpha(\tau) = \frac{dx^\alpha(\tau)}{d\tau}$$

La métrique de l'espace de la cinématique classique est définie positive. Une courbe paramétrique est de longueur nulle lorsque l'abscisse curviligne est nulle quelle que soit la valeur du paramètre. En revanche, la métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est indéfinie. Une courbe a une longueur nulle lorsque sa partie temporelle et sa partie spatiale sont égales.

Exemple 3.4.1 : Courbe de longueur nulle en relativité restreinte

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites (x^α) de $\mathbb{M}$, considérons la courbe $\mathcal{C}$ de paramètre p :

$$\mathcal{C}(p) : \begin{cases} x^0(p) = 5p \\ x^1(p) = 3 \sin(p) \\ x^2(p) = 3 \cos(p) \\ x^3(p) = 4p \end{cases} \Rightarrow [4u](d_p x^\alpha) : \begin{cases} u^0 = 5 \\ u^1(p) = 3 \cos(p) \\ u^2(p) = -3 \sin(p) \\ u^3 = 4 \end{cases}$$

Le quadrivecteur tangent à $\mathcal{C}(p)$ a pour expression

$$[4u](p) = [4u](5, 3 \cos(p), -3 \sin(p), 4)$$

En convention de genre temps, la diagonale principale du tenseur métrique s'écrit :

$$\text{diag}(\eta_{\alpha\beta}) = (1, -1, -1, -1)$$

La longueur de $\mathcal{C}(p)$ est nulle (quelle que soit la convention) :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \, dp \\ &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\varepsilon \{5^2 - [3 \cos(p)]^2 - [-3 \sin(p)]^2 - 4^2\}} \, dp \\ &= 0\end{aligned}$$

Chapitre 4

LES DIFFÉRENTS DIAGRAMMES

Sommaire

4.1 Diagramme d'espace-temps en cinématique classique	37
4.2 Diagramme d'espace-temps de Minkowski	40
4.3 Diagramme d'espace-temps de Poincaré	49

4.1 Diagramme d'espace-temps en cinématique classique

4.1.1 Diagramme spatial

En cinématique classique, le passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ (changement de référentiel galiléen) correspond à un changement d'origine du système de coordonnées spatiales. La coordonnée temporelle étant la même dans tous les référentiels galiléens, on ne la représente pas mais on représente deux, ou trois, des trois coordonnées spatiales à un instant donné. Les référentiels sont habituellement en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). La figure 4.1 représente l'instant initial $t_0 = t'_0$ où les référentiels se croisent.

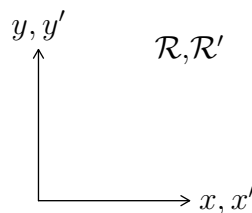


FIG. 4.1 – Représentation spatiale des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à l'instant $t_0 = t'_0$

Le vecteur vitesse d'entraînement (constant) des référentiels est selon les axes x et x' confondus. La figure 4.2 représente les référentiels à un instant t_1 quelconque.

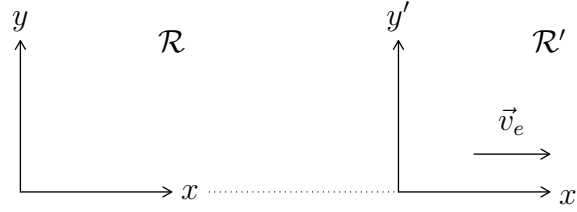


FIG. 4.2 – Représentation spatiale des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, à l'instant t_1

La trajectoire relative est représentée en pointillés. La représentation du vecteur $\mathbf{v}_e$ attaché à $\mathcal{R}'$ implique que l'observateur (nous) se situe dans $\mathcal{R}$. Par convention nous sommes toujours *a priori* au repos dans $\mathcal{R}$. Nous sommes immobiles dans $\mathcal{R}$ et nous observons $\mathcal{R}'$ s'éloigner de nous à la vitesse $\mathbf{v}_e$. Il est tout aussi vrai de dire que $\mathcal{R}$ s'éloigne de $\mathcal{R}'$ à la vitesse $-\mathbf{v}_e$.

4.1.2 Diagramme spatial et temporel

Pour faire le lien avec la représentation de l'espace-temps de la relativité restreinte, représentons l'axe temporel et un (ou deux) axe spatial sur une feuille de papier. Les axes portant des quantités de nature différente, l'espace mathématique (x, t) est affine, on ne peut y définir de distance ou d'angle. Le plan (x, t) n'est pas euclidien et les axes x et t n'ont pas de raison d'être orthogonaux. Ces axes ne se croisent que parce qu'on les représente sur un même plan, celui de la feuille de papier qui est un plan euclidien. Par convention ils se croisent sur la feuille de papier au point $o(0, 0, 0, 0)$.

Pour dessiner les axes de coordonnées x' et t' dans le système de coordonnées (x, t) sur la même feuille de papier, reprenons la transformation de Galilée (déf. 1.2.2 page 4) pour deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3) :

$$\begin{cases} x' = x - v_e t \\ t' = t \end{cases}$$

L'axe x' est l'ensemble des événements pour lesquels $t' = 0$. Il a pour équation dans le système de coordonnées (x, t) , à la fois $t = 0$ et $x' = x$. Par conséquent les axes x' et x sont confondus.

De même que l'axe de coordonnée t est l'ensemble des événements ayant lieu en $x = 0$, c.-à-d. à l'origine de $\mathcal{R}$, l'axe de coordonnée t' est l'ensemble des événements ayant lieu en $x' = 0$, c.-à-d. à l'origine de $\mathcal{R}'$. L'axe t' a donc pour équation dans le système de coordonnées (x, t) :

$$\begin{aligned} 0 &= x - v_e t \\ t &= \frac{x}{v_e} \end{aligned}$$

C'est une droite passant par l'origine et de pente $1/v_e$ dans le plan (x, t) . Si l'on pose $\tan \alpha = 1/v_e$ alors l'angle α est l'angle entre x' et t' mesuré dans le plan (x, t) . La feuille de papier sur laquelle est tracé le diagramme affine de la figure 4.3 page suivante est un plan spatial euclidien à deux dimensions, sur lequel les distances et les angles sont définis. Si l'on représente l'axe t perpendiculairement à l'axe x alors α est aussi l'angle mesuré sur la feuille de papier. La transformation de Galilée est alors un « cisaillement ». Plus la vitesse relative est grande et plus l'axe t' se rapproche de l'horizontale. À l'instant t_0 où les référentiels se croisent nous avons la représentation suivante :

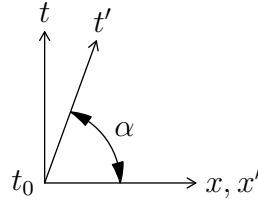


FIG. 4.3 – $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ pour un observateur au repos dans $\mathcal{R}$

À l'instant $t_1 = t'_1$ nous avons la représentation suivante, dans laquelle les observateurs se trouvent au croisement des axes temporel et spatial (Fig. 4.4) :

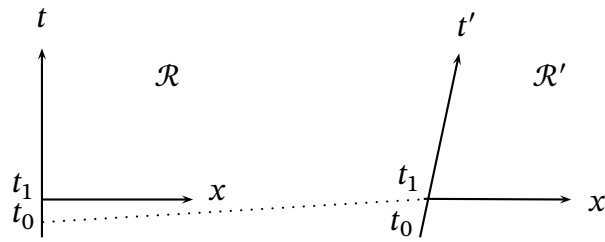


FIG. 4.4 – Référentiels à $t_1 = t'_1$

Ici, la représentation de la trajectoire indique que l'on se situe dans $\mathcal{R}$.

Se pose la question de savoir si les coordonnées (x', t') d'un point de ce diagramme s'obtiennent par projection parallèle ou par projection orthogonale aux axes. Un évènement sur l'axe t' a pour coordonnée $x' = 0$, et un évènement sur l'axe x' a pour coordonnée temporelle $t' = 0$, par conséquent les coordonnées s'obtiennent par projection parallèle aux axes.

Sur la feuille (figure 4.5) les évènements A et B sont simultanés dans $\mathcal{R}$ et donc aussi dans $\mathcal{R}'$ puisque le temps est universel. Les évènements simultanés forment des droites de simultanéité parallèles à l'axe $x = x'$.

Les distances sur la feuille, de l'origine au point t_A et de l'origine au point t'_A représentent la même durée. Les unités temporelles sur la feuille ne sont pas identiques.

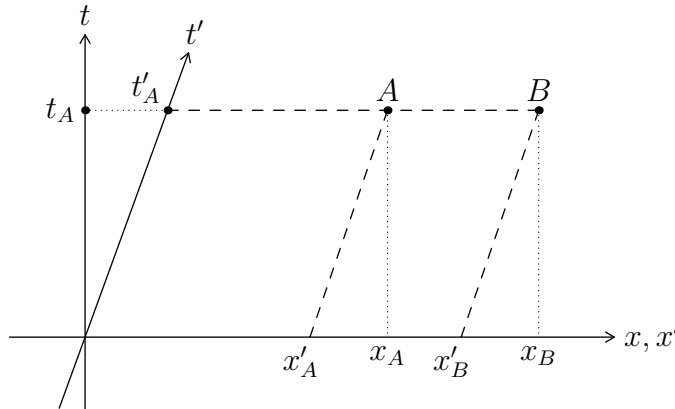


FIG. 4.5 – Coordonnées des évènements A et B dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

On remarque que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{t_A}{x_A - x'_A} \\ \frac{1}{v_e} &= \frac{t_A}{x_A - x'_A} \\ x_A - x'_A &= v_e t_A\end{aligned}$$

Les unités de distance x et x' sur la feuille de papier (figure 4.5) sont identiques.

La ligne d'univers du point A immobile dans $\mathcal{R}$ entre les instants $t = 0$ et $t = t_A$, c.-à-d. la trajectoire de A dans l'espace (x, t) entre ces instants, est représentée par le segment de droite en pointillés de x_A à A . La ligne d'univers de ce même point A dans $\mathcal{R}'$ entre les mêmes instants est représentée par le segment de droite discontinu de x'_A à A . Les lignes d'univers d'un même point ne sont pas confondus, on ne peut pas représenter sur ce diagramme différents instants.

4.2 Diagramme d'espace-temps de Minkowski

En relativité restreinte, à un changement de référentiel dans l'espace-temps correspond un changement d'origine du système de coordonnées spatiales, et un changement de la coordonnée temporelle et de la coordonnée spatiale dans l'axe du mouvement. Le temps et l'espace se « mélangent » lorsqu'on observe un référentiel autre que le sien propre.

Nous sommes dans $\mathcal{R}$ et nous observons le référentiel $\mathcal{R}'$ dont les axes de coordonnées spatio-temporelles sont obliques. En représentant les coordonnées (t, x) à l'instant t_1 on a la figure 4.6,

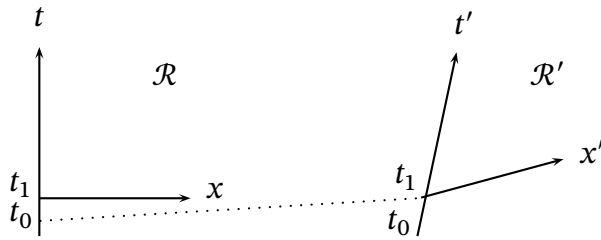


FIG. 4.6 – Référentiels à t_1 vus de $\mathcal{R}$

qui fait le lien avec la figure 4.4 de la cinématique classique. Dans la représentation relativiste de Minkowski-Poincaré on ne s'intéresse plus au déplacement dans l'espace comme en cinématique classique, mais on représente les coordonnées (t, x) des référentiels à l'instant t_0 où ils se croisent. En relativité restreinte le changement d'origine ayant peu d'importance, du changement de système de coordonnées on ne retient que le changement de coordonnées (on considère le changement de base et non le changement de repère). On note ici qu'en physique non relativiste c'est le contraire, du changement de système de coordonnées on ne retient que le changement d'origine, les coordonnées restant identiques au facteur additif $v_e t$ près. On ne s'intéresse donc pas au déplacement des référentiels dans l'espace comme en cinématique classique (fig. 4.2 page 38), mais aux axes de coordonnées (x, ct) et (x', ct') des référentiels galiléens à l'instant $t_0 = t'_0$ où ils se croisent (fig. 4.3 page précédente).

Nous pouvons trouver l'équation des axes ct' et x' de deux façons :

- le centre O' de $\mathcal{R}'$ se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse β_e , sa trajectoire a pour équation $x = \beta_e ct$. Or la trajectoire de O' c'est l'axe du temps ct' , qui a donc pour équation $ct = x/\beta_e$ dans le système de coordonnées (x, ct) . La trajectoire d'un photon se déplaçant à la vitesse limite a pour équation $ct = x$ et est une bissectrice du système de coordonnées (x, ct) , représentée en orange figure 4.7. Pour que cette vitesse soit aussi c dans le système de coordonnées (x', ct') , il faut que l'axe x' ait pour équation $ct = \beta_e x$ dans le système de coordonnées (x, ct) . La trajectoire d'un photon a alors pour équation $ct' = x'$ et est une bissectrice du système de coordonnées (x', ct') .
- en nous servant de la transformation spéciale de Lorentz (2.4) page 22. Sur l'axe ct' nous avons $x' = 0$ car tous les axes se croisent en un point pris pour origine $O'(0, 0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_e(x - \beta_e ct) \\ x &= \beta_e ct \end{aligned}$$

C'est l'équation de l'axe de coordonnée ct' dans le système de coordonnées (x, ct) . De même, sur l'axe x' nous avons $ct' = 0$, soit,

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ ct &= \beta_e x \end{aligned}$$

qui est l'équation de l'axe de coordonnée x' dans le système de coordonnées (x, ct) . La représentation de l'espace-temps (fig. 4.7) est appelée diagramme de Minkowski.

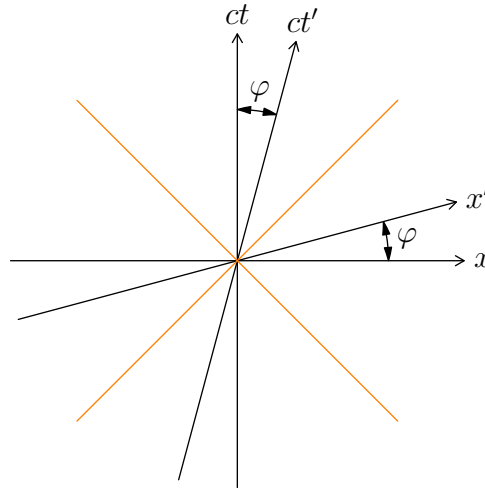


FIG. 4.7 – Diagramme de Minkowski

En posant

$$\beta_e = \tan(\varphi)$$

nous pouvons représenter l'angle φ sur la figure 4.7.

Lorsque $\beta_e = 1$ et $\varphi = \pi/4$, la vitesse d'entraînement est maximale et, vues du référentiel $\mathcal{R}$, les coordonnées spatiales et temporelle du référentiel $\mathcal{R}'$ se rejoignent sur la bissectrice.

L'ensemble de tous les évènements formant un intervalle nul avec l'évènement origine O ou O' est représenté par deux droites oranges sur la figure 4.7, se croisant à angle droit aux origines

communes O et O' . Ces droites ont un caractère absolu, elles ne dépendent pas de la vitesse relative β_e des référentiels, ce sont des rayons de lumière si celle-ci se déplace à la vitesse limite.

Plaçons nous dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et considérons un évènement A . Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ les coordonnées de l'évènement A s'obtiennent en projetant le point A parallèlement aux axes x' et ct' . L'axe x étant la droite d'équation $ct = 0$, les lignes de simultanéité dans $\mathcal{R}$ sont des droites parallèles à l'axe x . De même, l'axe x' étant la droite d'équation $ct' = 0$, les lignes de simultanéité dans $\mathcal{R}'$ sont des droites parallèles à l'axe x' . Les lignes de coordonnée x' constante sont parallèles à l'axe ct' (Fig. 4.8).

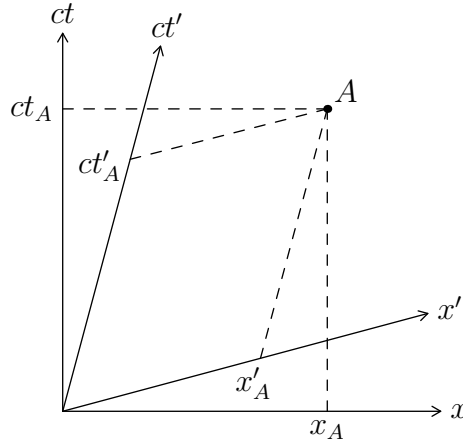


FIG. 4.8 – Coordonnées de l'évènement A

4.2.1 Approximation de la transformation spéciale de Lorentz

Pour une vitesse d'entraînement v_e très inférieure à c , c.-à-d. lorsque $\beta_e \ll 1$, nous devons retrouver la transformation de Galilée (déf. 1.2.2 page 4) à partir de celle de Lorentz. Or, lorsque $\beta_e \ll 1$ le facteur de Lorentz γ_e (déf. 2.2.1 page 21) tend vers un. À partir de (2.4b) page 22 on retrouve bien la transformation spatiale de Galilée :

$$x' = x - \beta_e ct$$

Pour retrouver la transformation temporelle de Galilée $t' = t$ à partir de (2.4a) il faut de toute évidence respecter la condition suivante sur les coordonnées de l'évènement quelconque A :

$$\beta_e x_A \ll ct_A$$

Pour comprendre la signification de cette relation, prenons les deux cas extrêmes pour l'évènement quelconque A par rapport à l'évènement origine :

- $x_A = 0$ et t_A quelconque. Dans ce cas on retrouve la transformation de Galilée $t' = t$
- x_A est très grand mais l'évènement A est dans le cône de lumière de l'évènement origine, sinon il n'existerait pas pour celui-ci. Sur le cône de lumière de sommet l'origine, $x_A = ct_A$:

$$\begin{aligned} \beta_e ct_A &\ll ct_A \\ \beta_e &\ll 1 \end{aligned}$$

C'est notre hypothèse de départ, autrement dit dans les deux cas on retrouve bien la transformation de Galilée lorsque v_e est très inférieure à la vitesse limite c . Pour tout changement de référentiel galiléen, on peut appliquer l'une des deux transformations de coordonnées suivantes :

- la transformation de Galilée si l'on est dans le domaine non relativiste
- la transformation de Lorentz-Poincaré si l'on est dans le domaine relativiste

4.2.2 Hyper-cône de lumière

D'après le § 1.6 page 10, une sphère de lumière se propageant à la vitesse limite dans l'espace correspond à un intervalle nul et a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

où t est un paramètre. En deux dimensions d'espace c'est un cercle de lumière de rayon ct et d'équation dans $\mathcal{R}$:

$$x^2 + y^2 = (ct)^2$$

Dans $\mathcal{R}'$ on observe aussi un cercle d'équation

$$x'^2 + y'^2 = (ct')^2$$

Ces cercles de rayon croissant forment dans l'espace-temps où t est une variable, un cône de sommet les origines communes O et O' :

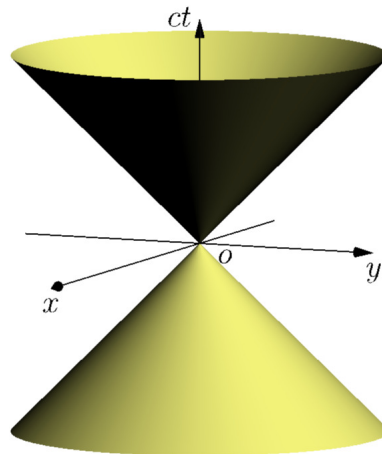


FIG. 4.9 – Cône de lumière invariant

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, pour un évènement origine donné, les intervalles nuls forment un hyper-cône appelé *hyper-cône de lumière*.

4.2.3 Hyperboles invariantes

Au § 1.8 page 11, nous avons vu que l'intervalle s entre deux événements est invariant par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cette distance spatio-temporelle est l'analogue de la distance purement spatiale de la physique non relativiste. En deux dimensions, intéressons-nous à l'ensemble des points à distance unité du point origine. Dans l'espace c 'est un cercle de rayon unité $r^2 = 1$, soit $r = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dans l'espace-temps c 'est l'ensemble des événements tels que $s^2 = 1$, soit $s = \pm 1$:

$$\begin{cases} (ct)^2 - x^2 = 1 \\ (ct)^2 - x^2 = -1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Chaque équation est une hyperbole à deux branches. Sur la figure 4.10, la première hyperbole pour $s = 1$ est représentée en bleu, la seconde pour $s = -1$ est représentée en vert. Ces hyperboles ont pour asymptotes communes les deux droites perpendiculaires représentées en orange :

$$ct = \pm x$$

Ces asymptotes sont possiblement les lignes d'univers des photons.

De même dans $\mathcal{R}'$ nous avons :

$$x'^2 - (ct')^2 = \pm 1$$

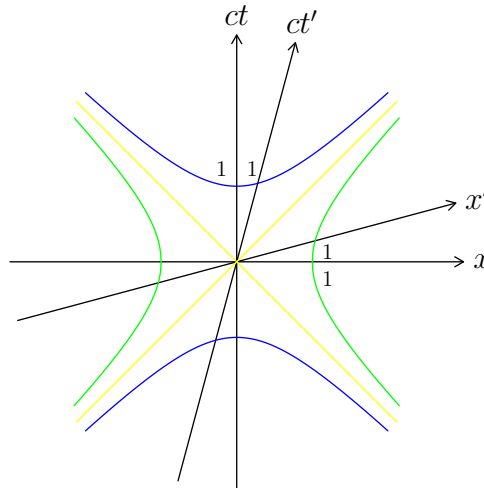


FIG. 4.10 – Hyperboles invariantes

L'intervalle permet d'indiquer les unités des différents axes. Fig. 4.10, sur l'hyperbole bleue

$$(ct)^2 - x^2 = 1 \quad \text{et} \quad (ct')^2 - x'^2 = 1$$

En $x = 0$ nous avons $ct = \pm 1$, et en $x' = 0$ nous avons $ct' = \pm 1$. Considérons un référentiel passant par l'évènement origine $O(0, 0, 0, 0)$, lorsque son temps propre vaudra l'unité ($c\tau = 1$) ce référentiel sera quelque part sur la branche d'hyperbole bleue supérieure.

Sur l'hyperbole verte :

$$(ct)^2 - x^2 = -1 \quad \text{et} \quad (ct')^2 - x'^2 = -1$$

En $ct = 0$ nous avons $x = \pm 1$, et en $ct' = 0$ nous avons $x' = \pm 1$.

Ces hyperboles sont *absolues* car elles ne dépendent pas de la vitesse relative β_e de l'observateur. Dans l'espace-temps de la relativité restreinte, en une dimension d'espace et une de temps, les points situés à une distance spatio-temporelle dont le carré s^2 est donné, forment deux hyperboles *invariantes* par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré. Pour chaque valeur fixée de l'intervalle entre l'origine et les autres événements, nous pouvons tracer une branche d'hyperbole invariante. Lorsque la valeur de l'intervalle tend vers zéro, les hyperboles tendent vers les deux droites oranges perpendiculaires. Lorsque la valeur de l'intervalle change de signe, on passe d'une hyperbole à l'autre.

Remarque 4.2.1

L'hyperbole est invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré, mais les événements formant l'hyperbole n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: ils « glissent » sur l'hyperbole lorsque l'on change continuellement de référentiel.

En deux dimensions d'espace et une de temps, les hyperboles invariantes bleues sur les figures précédentes forment un hyperboloïde à deux nappes :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 1$$

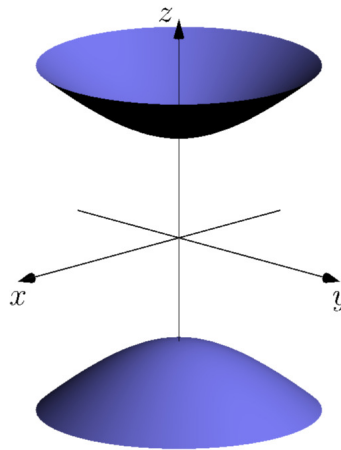


FIG. 4.11 – Hyperboloïde à deux nappes invariant

Les hyperboles invariantes vertes forment un hyperboloïde à une nappe :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = -1$$

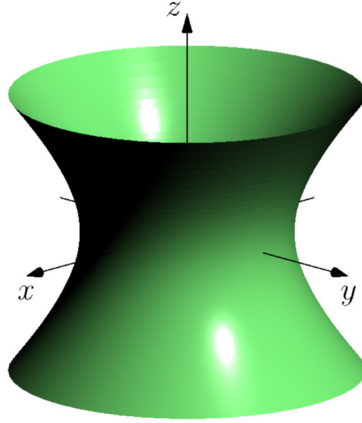


FIG. 4.12 – Hyperboloïde à une nappe invariant

Les deux droites perpendiculaires invariantes oranges forment un cône de révolution, appelé cône de lumière (fig. 4.9 page 43) d'équation :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 0$$

Les deux espaces hyperboliques à deux et à une nappe sont asymptotes au cône de lumière.

Dans la transformation de Lorentz-Poincaré (2.4) page 22, changeons le temps en durée et la position en distance. En effet, temps et position n'ont pas de sens tant que l'on n'a pas précisé une origine temporelle et spatiale. Ce n'est pas le cas pour les durées et les distances. Soient un premier évènement de coordonnées (t_a, x_a, y_a, z_a) , et un second de coordonnées (t_b, x_b, y_b, z_b) :

$$\begin{cases} ct'_a = \gamma_e(ct_a - \beta_e x_a) \\ x'_a = \gamma_e(x_a - \beta_e ct_a) \\ y'_a = y_a \\ z'_a = z_a \end{cases} \quad \begin{cases} ct'_b = \gamma_e(ct_b - \beta_e x_b) \\ x'_b = \gamma_e(x_b - \beta_e ct_b) \\ y'_b = y_b \\ z'_b = z_b \end{cases}$$

en soustrayant,

$$\begin{cases} ct'_b - ct'_a = \gamma_e(ct_b - \beta_e x_b) - \gamma_e(ct_a - \beta_e x_a) \\ x'_b - x'_a = \gamma_e(x_b - \beta_e ct_b) - \gamma_e(x_a - \beta_e ct_a) \\ y'_b - y'_a = y_b - y_a \\ z'_b - z'_a = z_b - z_a \end{cases} \quad \begin{cases} c\Delta t' = \gamma_e(c\Delta t - \beta_e \Delta x) \\ \Delta x' = \gamma_e(\Delta x - \beta_e c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Avec la convention de genre temps (1.4) page 10 qui donne une métrique de signature $(+ - - -)$, le carré de l'intervalle entre ces deux évènements s'écrit :

$$\begin{aligned} s^2 &= (ct_b - ct_a)^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \end{aligned}$$

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2$$

Sur la figure 4.9 page 43 représentant le cône de lumière issu de l'évènement O :

a) intervalle de genre lumière

Lorsque les parties temporelle et spatiale du carré de l'intervalle sont égales, celui-ci est nul, il est dit *isotrope* ou de *genre lumière*. Les évènements dont l'intervalle avec

l'évènement origine O est du genre lumière constituent les deux nappes du cône de lumière, l'une constituée des évènements pour lesquels $t > 0$ qui sont dans le futur (absolu) de O , l'autre constituée des évènements pour lesquels $t < 0$ qui sont dans le passé (absolu) de O . L'évènement origine ne peut interagir avec ces évènements qu'avec des signaux se déplaçant à la vitesse limite, venant du passé vers l'évènement origine, ou émis vers le futur à partir de l'évènement origine.

b) intervalle de genre temps

Lorsque la partie temporelle du carré de l'intervalle est supérieure à sa partie spatiale, l'intervalle est dit de genre temps. Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre temps sont dans le cône de lumière. L'intérieur de la nappe supérieure du cône de lumière est appelé *futur absolu* de l'évènement origine. L'évènement origine pourra éventuellement être la cause d'un ou plusieurs de ces évènements. L'intérieur de la nappe inférieure est appelé *passé absolu* de l'évènement origine. Certains de ces évènements peuvent éventuellement être la cause de l'évènement origine.

c) intervalle de genre espace

Lorsque la partie spatiale du carré de l'intervalle est supérieure à sa partie temporelle, l'intervalle est dit de genre espace.

Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre espace sont à l'extérieur du cône de lumière, cet endroit est appelé *ailleurs absolu* de l'évènement origine. L'évènement origine ne peut interagir d'aucune façon avec les évènements qui en font partie, il ne peut y avoir de relation causale entre l'évènement origine et ces évènements.

En un point (évènement) quelconque de la ligne d'univers d'un mobile, traçons un cône de lumière ayant ce point pour sommet. La ligne d'univers sera toujours à l'intérieur du cône de lumière car la vitesse de tout objet physique est toujours inférieure à c .

4.2.4 Causalité

Définition 4.2.1 : Causalité

Le futur causal d'un évènement E est l'ensemble de tous les évènements sur lesquels cet évènement E peut influencer. Le passé causal d'un évènement E est l'ensemble de tous les évènements qui peuvent influencer sur l'évènement E .

Dans l'espace-temps, soient P et Q deux évènements tels que Q soit dans le futur absolu de P . Il existe un référentiel galiléen dans lequel la coordonnée x_Q est supérieure à x_P , un référentiel galiléen dans lequel P et Q ont même coordonnée $x'_P = x'_Q$, et un référentiel galiléen dans lequel la coordonnée x''_Q est inférieure à x''_P .

Remarque 4.2.2

Si l'on considère que Q est dans le passé absolu de P , leurs rôles sont simplement inversés.

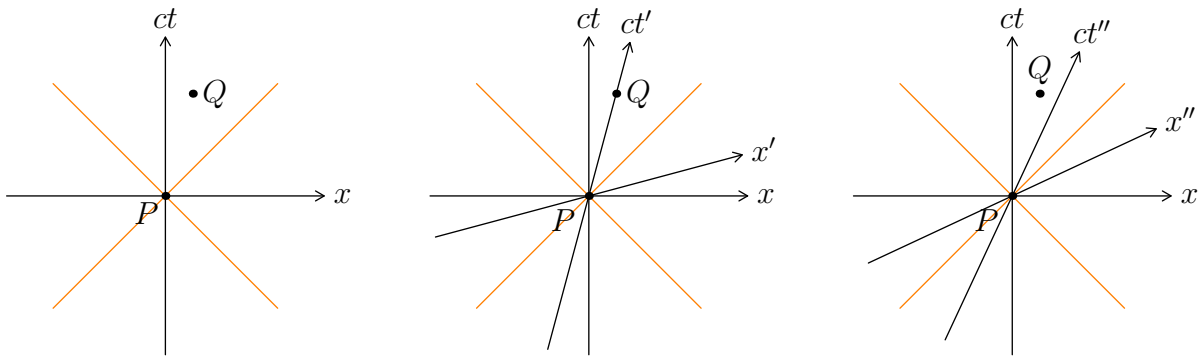


FIG. 4.13 – Évènement Q dans le futur absolu de P

Le cône de lumière s'applique aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. L'évènement Q reste donc toujours dans le futur absolu de P . Cela est dû à l'invariance de l'intervalle par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, le genre de l'intervalle est indépendant de tout référentiel. Ainsi la causalité est préservée : si P est la cause de Q , ce sera le cas dans tout référentiel galiléen.

Dans l'espace-temps, soient P et Q deux évènements tels que Q soit dans l'ailleurs absolu de P . Il existe alors un référentiel galiléen dans lequel Q est postérieur à P , un référentiel galiléen dans lequel P et Q sont simultanés, et un référentiel galiléen dans lequel Q est antérieur à P .

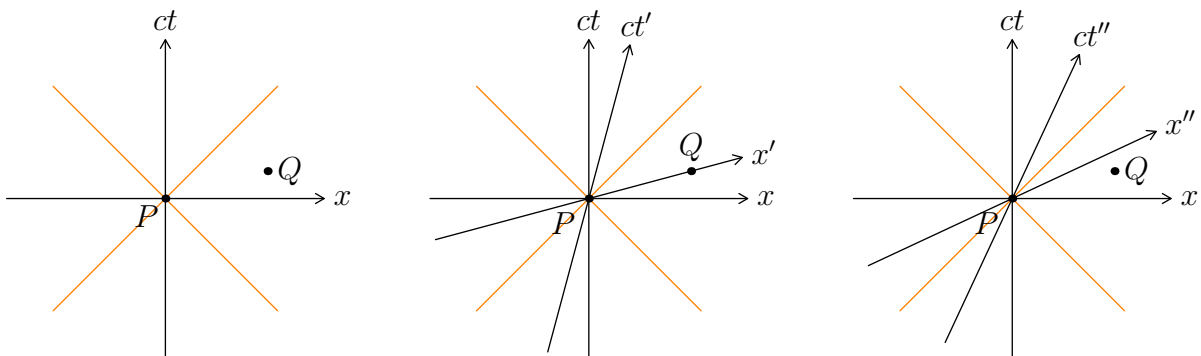


FIG. 4.14 – Évènement Q dans l'ailleurs absolu de P

Le cône de lumière s'applique aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. L'évènement Q reste donc toujours dans l'ailleurs absolu de P , autrement dit il ne peut jamais être la cause de P et P ne peut jamais être la cause de Q , même s'il existe des référentiels dans lesquels il est antérieur à P (antérieur mais trop loin).

4.3 Diagramme d'espace-temps de Poincaré

À partir des équations (4.1) page 44, nous pouvons obtenir un cercle plutôt que deux hyperboles. En unités géométriques, puis en posant $t = it$:

$$\begin{aligned}x^2 - t^2 &= \pm 1 \\x^2 + (it)^2 &= \pm 1 \\x^2 + t^2 &= \pm 1\end{aligned}$$

En prenant une coordonnée temporelle imaginaire l'espace-temps devient euclidien. Dans la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (2.6) page 24, multiplions la première relation par i et remplaçons $-t$ par $i^2 t$ dans la seconde :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e(t - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} it' = i\gamma_e t - i\gamma_e \beta_e x \\ x' = \gamma_e x + i^2 \gamma_e \beta_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \gamma_e t - i\gamma_e \beta_e x \\ x' = \gamma_e x + i\gamma_e \beta_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (4.2)$$

Cherchons l'équation de l'axe t' . Sur l'axe t' nous avons $x' = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \gamma_e x + i\gamma_e \beta_e t \\ x &= -i\gamma_e \beta_e t\end{aligned}$$

Dans le repère direct (t, x) , c'est l'équation d'une droite de coefficient directeur $-i\gamma_e \beta_e$. L'axe t' fait un angle α_e avec l'axe t tel que :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_e) &= \frac{x}{t} \\ &= -i\gamma_e \beta_e\end{aligned}$$

Dans le repère direct (x, t) l'axe t' fait un angle ψ_e avec l'axe t tel que :

$$\tan(\psi_e) = i\gamma_e \beta_e$$

De même, cherchons l'équation de l'axe x' dans le repère (t, x) . Sur l'axe x' nous avons $t' = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \gamma_e t - i\gamma_e \beta_e x \\ t &= i\gamma_e \beta_e x\end{aligned}$$

Dans le repère (x, t) , c'est l'équation d'une droite de coefficient directeur $i\gamma_e \beta_e$. L'axe x' fait un angle ψ_e avec l'axe x tel que :

$$\begin{aligned}\tan(\psi_e) &= \frac{t}{x} \\ &= i\gamma_e \beta_e\end{aligned}$$

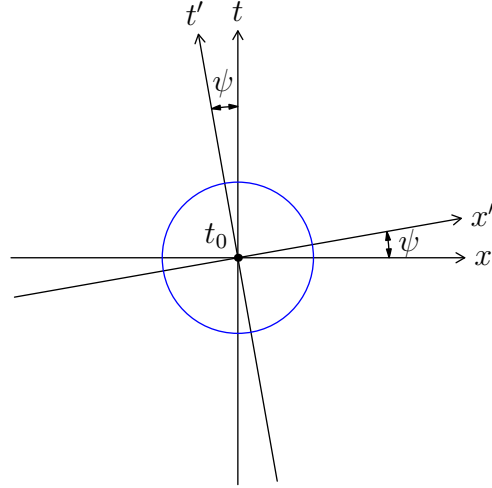


FIG. 4.15 – Diagramme de Poincaré

À toute vitesse v on associe un angle imaginaire ψ tel que :

$$\tan(\psi) \stackrel{\text{déf}}{=} iv \quad (4.3)$$

Remarque 4.3.1

Le cercle est bien invariant par rotation des axes, mais les événements formant le cercle n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Cette remarque rejoint la remarque 4.2.1 page 45.

La trigonométrie nous donne :

$$\begin{cases} \cos(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\psi)}} \\ \sin(\psi) = \frac{\tan(\psi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\psi)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\psi_e) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2}} \\ \sin(\psi_e) = \frac{iv_e}{\sqrt{1 - v_e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\psi_e) = \gamma_e \\ \sin(\psi_e) = iv_e \gamma_e \end{cases}$$

La transformation spéciale de Lorentz (4.2) page précédente devient :

$$\begin{cases} t' = -iv_e \gamma_e x + \gamma_e t \\ x' = \gamma_e x + iv_e \gamma_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = -x \sin(\psi_e) + t \cos(\psi_e) \\ x' = x \cos(\psi_e) + t \sin(\psi_e) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi_e) & \cos(\psi_e) & 0 & 0 \\ \cos(\psi_e) & \sin(\psi_e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La transformation spéciale de Lorentz est une rotation d'angle imaginaire ψ_e dans l'espace-temps de Poincaré (x, it) . Soit l'angle réel φ tel que :

$$\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} i\psi$$

Avec la déf 4.3 page ci-contre :

$$\begin{aligned} i v_e &\stackrel{\text{déf}}{=} \tan(\psi_e) \\ &= \tan(i \varphi_e) \\ &= i \tanh(\varphi_e) \\ v_e &= \tanh(\varphi_e) \end{aligned}$$

Définition 4.3.1 : Rapidité

À toute vitesse v on associe l'angle réel φ appelé rapidité, tel que :

$$\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} \arg \tanh(v) \quad (4.4)$$

Reprenons la formule de composition des vitesses selon l'axe x (5.6a) page 63 :

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x}$$

Remplaçons les vitesses par la tangente hyperbolique de la rapidité :

$$\begin{aligned} \tanh(\varphi') &= \frac{\tanh(\varphi) - \tanh(\varphi_e)}{1 - \tanh(\varphi_e) \tanh(\varphi)} \\ &= \tanh(\varphi + \varphi_e) \end{aligned}$$

Les rapidités s'additionnent comme le font les vitesses en relativité galiléenne :

$$\varphi' = \varphi + \varphi_e$$

La rapidité est le paramètre additif du groupe de transformation de Lorentz-Poincaré, c'est l'analogue de l'angle de rotation pour le groupe des rotations dans le plan. La rapidité étant additive, elle n'a pas de limite et peut donc tendre vers l'infini.

Remarques 4.3.1

- Un théorème de la théorie des groupes stipule que « tout groupe continu à un paramètre peut être paramétré de manière additive ». Le groupe des transformations de Lorentz étant continu à un paramètre (la vitesse d'entraînement v_e), nous connaissons grâce à ce théorème l'existence d'un paramètre additif (la rapidité φ) homogène à une vitesse, avant tout calcul.
- Notons que la notion de rapidité prime sur celle de vitesse. Un observateur isolé dans son propre référentiel sans indice extérieur ne peut mesurer la distance qu'il parcourt, de sorte que la définition galiléenne de la vitesse lui est inutile. En revanche il peut mesurer son accélération propre en fonction de son temps propre. Par intégration il obtient sa rapidité et non sa vitesse ((5.24) page 86).

Le passage du référentiel galiléen $\mathcal{R}$ au référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ puis au référentiel galiléen $\mathcal{R}''$ s'effectue par deux rotations successives dont la somme des angles est l'angle de rotation final. En multipliant par le nombre imaginaire i , on voit que ce résultat est aussi valable pour l'angle imaginaire ψ . Nous pouvons représenter plusieurs référentiels galiléens ayant des vitesses différentes sur un même diagramme de Poincaré :

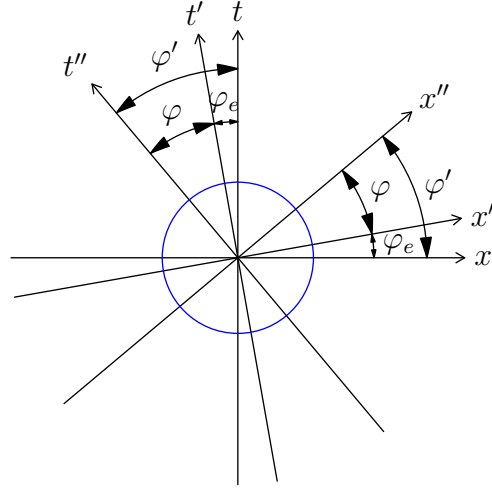


FIG. 4.16 – Diagramme de Poincaré - trois référentiels galiléens

Avec les coordonnées réelles (x, y, z, t) la géométrie est pseudo-euclidienne. Avec les coordonnées (x, y, z, it) la géométrie est euclidienne mais la coordonnée temporelle est imaginaire. À la rotation euclidienne d'angle imaginaire ψ correspond la rotation pseudo-euclidienne d'angle réel φ .

La trigonométrie hyperbolique nous donne :

$$\begin{cases} \cosh(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2(\varphi)}} \\ \sinh(\varphi) = \frac{\tanh(\varphi)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\varphi)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2}} \\ \sinh(\varphi) = \frac{v_e}{\sqrt{1 - v_e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh(\varphi) = \gamma_e \\ \sinh(\varphi) = v_e \gamma_e \end{cases} \quad (4.5)$$

La transformation spéciale de Lorentz (2.4) page 22 s'écrit :

$$\begin{cases} t' = -\gamma_e v_e x + \gamma_e t \\ x' = \gamma_e x - \gamma_e v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -x \sinh(\varphi) + t \cosh(\varphi) \\ x' = x \cosh(\varphi) - t \sinh(\varphi) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La transformation spéciale de Lorentz est une *rotation hyperbolique* d'angle φ dans l'espace-temps de Poincaré (x, it) .

Chapitre 5

CINÉMATIQUE RELATIVISTE

Sommaire

5.1 Changement de référentiel	53
5.2 Quadrivecteurs	54
5.3 Trivecteur position relativiste	55
5.4 Quadrivecteur position	56
5.5 Quadriproduit scalaire	60
5.6 Trivecteur vitesse relativiste	62
5.7 Trivecteur vitesse propre relativiste	66
5.8 Quadrivecteur vitesse	69
5.9 Trivecteur-accélération relativiste	72
5.10 Trivecteur-accélération propre relativiste	76
5.11 Quadrivecteur accélération	79
5.12 Quadrivecteur d'onde	86
5.13 Quadrivecteur densité numérique-flux	95

5.1 Changement de référentiel

5.1.1 Comparaison des cinématiques newtonienne et relativiste

En cinématique classique :

- l'espace physique a trois coordonnées d'espace, il est modélisé par un espace mathématique euclidien à trois dimensions. Les vecteurs ont donc trois composantes Le temps n'est pas une coordonnée c'est un paramètre, tout comme la vitesse relative des référentiels
- un changement de coordonnées est purement spatial, par exemple des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques
- un changement de référentiel implique une transformation de Galilée (déf. [1.2.2](#) page 4)

- les vecteurs champ électrique et champ magnétique dépendent de la vitesse relative, ils ne sont pas invariants par la transformation de Galilée
- les équations de l'électromagnétisme de Maxwell ne sont pas invariantes par la transformation de Galilée

En cinématique relativiste :

- l'espace-temps physique a trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps, il est modélisé par un espace mathématique à quatre dimensions. Les vecteurs ont donc quatre composantes
- un changement de coordonnées purement spatial est encore possible, par exemple des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques
- un changement de référentiel implique une transformation de coordonnées entre la coordonnée temporelle et au moins une coordonnée d'espace, appelée transformation de Lorentz-Poincaré (déf. 2.2.2 page 21)
- les vecteurs et tenseurs sont tous indépendants de la vitesse relative et sont invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré
- les vecteurs champ électrique et champ magnétique sont remplacés par le tenseur champ électromagnétique
- les équations de l'électromagnétisme de Maxwell sont invariantes par la transformation de Lorentz-Poincaré

5.2 Quadrivecteurs

Dotons l'espace-temps absolu et plat de la relativité restreinte d'un système de coordonnées rectangulaires, dont la base naturelle associée est pseudo-orthonormée. Les vecteurs sont des *objets géométriques*, ce qui signifie qu'ils sont indépendants du repère ou de la base dans lesquels on les exprime. Dans l'espace-temps de dimension quatre de la relativité restreinte nous allons construire des vecteurs de même dimension que cet espace, appelés *quadrivecteurs*, ou 4-vecteurs, ou encore *vecteurs d'univers*. Ce sont des vecteurs, ils sont donc invariants par changement de base. Or, en relativité, un changement de base est un changement de coordonnées spatio-temporelles. Et un changement de coordonnées spatio-temporelles est provoqué par un changement de référentiel. Les 4-vecteurs seront donc construits pour être invariants par changement de référentiel, c.-à-d. invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées.

Les 4-vecteurs ne sont rien d'autre que des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension quatre sur $\mathbb{R}$. Nous les notons $[_4q]$ pour les distinguer des 3-vecteurs purement spatiaux.

Dans un référentiel R, les composantes contravariantes du 4-vecteur $[_4q]$ s'écrivent :

$$[_4q] \begin{pmatrix} q^t \\ q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix} = [_4q] \begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$$

Remarque 5.2.1

En notation indicielle on note la composante temporelle avec l'indice zéro plutôt que quatre car elle met en avant le caractère particulier de cette composante, elle permet l'introduction éventuelle d'une autre coordonnée spatiale et permet le lien avec la notation habituelle en relativité générale.

Notation 5.2.1

- les composantes contravariantes du 4-vecteur $[_4q]$ se notent aussi en ligne :

$$[_4q](q^t, q^x, q^y, q^z) = [_4q](q^0, q^1, q^2, q^3)$$

- dans le référentiel R' , le même 4-vecteur s'écrit :

$$[_4q]'(q'^t, q'^x, q'^y, q'^z) = [_4q]'(q^{0'}, q^{1'}, q^{2'}, q^{3'})$$

où en suivant la notation du Vol. 1 Notion d'espace, le prime est sur l'indice.

- le prime sur le vecteur et sur les composantes n'a pas le même sens. Sur les composantes il indique que celles-ci sont différentes. Sur le vecteur il indique qu'il est exprimé dans une base primée, mais c'est le même vecteur
- la notation suivante met en évidence les parties temporelle et spatiale :

$$[_4q](q^t, \mathbf{q}) = [_4q](q^0, q^i) \quad i = 1, 2, 3$$

Remarque 5.2.2

La présence de virgules entre les composantes indique qu'il ne s'agit pas de la transposée d'une matrice unicolonne représentant un vecteur :

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \neq \mathbf{v} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^2 \end{pmatrix}$$

Nous utilisons la notation suivante pour la transposée d'un vecteur $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}^T \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^2 \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons la notation indicielle q^μ qui confond le vecteur avec ses composantes car :

- elle distingue le vecteur q^μ de son covecteur q_μ écrit en composantes covariantes
- elle permet une généralisation aux tenseurs
- elle permet le calcul indiciel
- l'indice grec unique variant de 0 à 3 indique qu'il s'agit d'un 4-vecteur

5.3 Trivecteur position relativiste

Définition 5.3.1 : Triposition relativiste

Dans un espace ponctuel euclidien de repère rectangulaire (O, x, y, z) , à tout point $P(P_x, P_y, P_z)$ on associe un 3-vecteur position relativiste $\mathbf{r}$ de l'espace vectoriel euclidien associé, de composantes contravariantes (P_x, P_y, P_z) , tel que

$$\mathbf{r} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{OP}$$

Notation 5.3.1

En notation indicielle le 3-vecteur position s'écrit $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ ou x^i .

Remarques 5.3.1

- L'existence d'un vecteur position n'est possible que dans un espace plat, euclidien ou pseudo-euclidien. À la surface d'une sphère de dimension deux, si l'on tentait de définir des vecteurs ayant deux composantes (par exemple (ρ, θ)), la somme vectorielle ne serait pas commutative. De façon générale, dans un espace courbe la somme de deux « vecteurs courbes » n'est pas commutative. Si l'on plonge un espace courbe dans un espace euclidien de dimension supérieure, la somme de deux « vecteurs » n'appartiendrait pas à l'espace courbe de départ mais à l'espace euclidien de plongement
- La 3-position relativiste est la partie spatiale du 4-vecteur position que nous allons voir. Elle ne se transforme pas par changement de référentiel galiléen comme la 3-position classique non relativiste. La première se transforme par la transformation de Lorentz des coordonnées, la seconde par la transformation de Galilée des coordonnées

5.4 Quadrivecteur position

Dans l'espace-temps relativiste, soit un évènement E (absolu) ayant des coordonnées spatio-temporelles dans un référentiel R . Dans la base naturelle associée au système de coordonnées de R on construit notre premier quadrivecteur, le 4-vecteur position dans l'espace-temps ou 4-position qui relie le centre du repère à cet évènement E . La base étant naturelle, les composantes contravariantes de la 4-position sont confondues avec les coordonnées de l'évènement.

Définition 5.4.1 : Quadriposition temps-espace

Dans un référentiel R de système de coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2 de centre l'évènement $O(0, 0, 0, 0)$, à tout évènement $E(ct, x, y, z)$ on associe un 4-vecteur position temps-espace $[_4x]$, tel que

$$[_4x] = [_4OE]$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites d'un référentiel R (déf. 1.1.4 page 2 avec la notation indicielle 1.1.2 page 3 : $ct = x^0$), les composantes de $[_4x]$ ont toutes la dimension d'une longueur. Les composantes contravariantes du 4-vecteur $[_4x]$ s'écrivent :

$$[_4x] \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [_4x] \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notation 5.4.1

En notation en ligne la 4-position s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} [_4x](ct, x, y, z) &= [_4x](x^0, x^1, x^2, x^3) \\ [_4x](ct, \mathbf{r}) &= [_4x](x^0, x^i) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

En unités géométriques déf. 1.3.1 page 6 les composantes ont même unité. En coordonnées

galiléennes réduite avec $c = 1$ sans dimension on retrouve :

$$[_4x](t, \mathbf{r})$$

Comme indiqué au § 5.2 page 54, on utilisera préférentiellement la notation indicielle x^μ .

Remarques 5.4.1

- le quadrivecteur position est aussi appelé vecteur d'univers, quadrirayon-vecteur, quadrivecteur espace-temps, ou ici quadrivecteur temps-espace. La 4-position généralise à l'espace-temps la 3-position purement spatial en lui ajoutant une composante temporelle (une « position » dans le temps)
- notre premier 4-vecteur relativiste est l'association d'un scalaire de la mécanique classique, le temps universel, qui en relativité n'est ni un scalaire ni universel, et d'un 3-vecteur de la mécanique classique, le vecteur position. Nous verrons que cela sera toujours le cas. De même, les 4-tenseurs (tenseur 4×4) relativistes seront toujours l'association d'un 3-vecteur classique et d'un 3-tenseur classique

Exemple 5.4.1 : Quadrivecteur position de Bob dans le référentiel d'Anna

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna de temps propre t , la 4-position de Bob, relie dans l'espace-temps le centre du référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna au centre du référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob de temps propre t' . Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites du référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna, elle a pour composantes contravariantes :

$$[_4x] = [_4x](ct, x, y, z)$$

Prenons le cas limite où Anna et Bob sont dans le même référentiel, $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$. Dans le référentiel propre de Bob, sa 4-position

$$[_4x]'(ct', \mathbf{0})$$

n'est nulle qu'à l'instant initial $t' = 0$.

Rien ne nous dit que la 4-position d'espace-temps est bien covariante (invariante de Lorentz). Pour cela, sa longueur (4-norme), sa direction et son sens doivent être invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées.

Les évènements $O(0, 0, 0, 0)$ et $E(ct, x, y, z)$ étant absolus, la direction et le sens de $[_4OE]$ le sont aussi. Il reste à définir la distance d'univers entre les deux, telle qu'elle soit invariante de Lorentz. Or la 4-norme de tout 4-vecteur doit être invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées. Cette distance d'univers sera donc la 4-norme de la 4-position, qu'il nous faut construire.

5.4.1 Quadrinorme du quadrivecteur position temps-espace

Prenons pour 4-norme de la 4-position de composantes (ct, x, y, z) , l'intervalle entre l'évènement origine $(0, 0, 0, 0)$ et l'évènement de coordonnées (ct, x, y, z) , c.-à-d. la métrique déf. 1.9.1 page 12, dont le carré s'écrit en convention de genre temps (1.4) page 10 :

$$\|[_4x]\|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (5.1)$$

D'après (1.5) page 12, la 4-norme de la 4-position est alors par construction invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Remarque 5.4.1

Les composantes (contravariantes ou covariantes) des vecteurs peuvent être vues comme des vases communicants. Par changement de référentiel, nous pouvons augmenter la valeur d'une composante à condition de diminuer celle d'une autre composante en maintenant la valeur de la norme du vecteur. En appliquant cela aux 4-vecteurs, il est toujours intéressant de mettre toute la 4-norme dans une seule composante en annulant les autres. Cela revient à se placer dans le référentiel propre.

5.4.2 Transformation des composantes contravariantes de la 4-position

On rappelle que les 4-vecteurs sont invariants par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ils ne se transforment donc pas mais leurs composantes changent. De plus, à tout point de l'espace-temps correspond un 4-vecteur ayant pour composantes contravariantes les coordonnées de ce point. La transformation spéciale de Lorentz des coordonnées est donc aussi la transformation des composantes de la 4-position par changement de référentiel :

$$[{}_4x]'\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [{}_4x]\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Remarque 5.4.2

$[{}_4x]'$ et $[{}_4x]$ sont deux notations pour le même vecteur, selon qu'on l'exprime dans $\mathcal{R}'$ ou dans $\mathcal{R}$. Il n'en va pas de même pour leurs composantes qui elles, sont différentes.

Notation 5.4.2

En notation indicielle :

$$[{}_4x]'\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = [{}_4x]\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x^{0'} = \gamma_e x^0 - \gamma_e v_e x^1 \\ x^{1'} = -\gamma_e v_e x^0 + \gamma_e x^1 \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases}$$

Notation 5.4.3

En notation indicielle et matricielle :

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e v_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e v_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notation 5.4.4

En notation indicielle avec la convention de sommation :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu} \quad (5.2)$$

Cette relation est la loi de transformation des composantes d'un 4-vecteur particulier (celui de position), mais s'applique aux composantes des 4-vecteurs en général, lors d'un changement de base (changement de référentiel galiléen par la transformation spéciale de Lorentz). Cette loi de transformation assure que le vecteur reste égal à lui-même lors du changement de référentiel.

Réciproquement, toute suite ordonnée de quatre nombres qui se transforme de la sorte par changement de référentiel galiléen constitue un 4-vecteur.

5.4.3 Transformation des composantes covariantes de la 4-position

Les composantes covariantes se transforment par changement de référentiel galiléen en utilisant la transposée de la matrice inverse de Lorentz déf. 2.4.1 page 23. La matrice de Lorentz étant symétrique, nous pouvons oublier la transposition. Calculons son déterminant :

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= \gamma_e^2 - \gamma_e^2 \beta_e^2 \\ &= \gamma_e^2 (1 - \beta_e^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Son inverse a pour expression :

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{0'} \\ x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_e x_0 + \gamma_e \beta_e x_1 \\ \gamma_e \beta_e x_0 + \gamma_e x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une seconde méthode consiste à utiliser les relations (5.5) page 61 entre composantes covariantes et contravariantes pour une signature (+ - - -) : $a_0 = a^0$ et $a_i = -a^i$. Avec la notation 5.4.2

page 58 :

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma_e x^0 - \gamma_e \beta_e x^1 \\ x^{1'} = -\gamma_e \beta_e x^0 + \gamma_e x^1 \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{0'} = \gamma_e x_0 + \gamma_e \beta_e x_1 \\ x_{1'} = \gamma_e \beta_e x_0 + \gamma_e x_1 \\ x_{2'} = x_2 \\ x_{3'} = x_3 \end{cases}$$

5.4.4 Transformation spéciale des composantes d'un quadritenseur

Écrivons l'invariance de s^2 (1.5) page 12 par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, puis utilisons (1.9) page 16, puis (5.2) page précédente :

$$\begin{aligned} s^2 &= s'^2 \\ \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta &= \eta_{\gamma'\delta'} x^{\gamma'} x^{\delta'} \\ &= \eta_{\gamma'\delta'} \Lambda_{\alpha}^{\gamma'} x^\alpha \Lambda_{\beta}^{\delta'} x^\beta \\ \eta_{\alpha\beta} &= \Lambda_{\alpha}^{\gamma'} \Lambda_{\beta}^{\delta'} \eta_{\gamma'\delta'} \end{aligned}$$

Cette relation est la loi de transformation des composantes deux fois contravariantes d'un 4-tenseur d'ordre deux (deux indices) particulier (le tenseur métrique de $\mathbb{M}$ § 1.10 page 13) donc aussi la loi de transformation des composantes deux fois contravariantes des tenseurs d'ordre deux en général, lors d'un changement de base (changement de référentiel galiléen par la transformation spéciale de Lorentz). Cette loi de transformation assure que le tenseur reste égal à lui-même lors du changement de référentiel. Réciproquement, toute suite ordonnée de seize nombres qui se transforme de la sorte par changement de référentiel galiléen constitue un 4-tenseur. Nous dirons que les vecteurs sont des tenseurs d'ordre un, et que les scalaires sont des tenseurs d'ordre zéro. La valeur d'un scalaire reste la même par changement de référentiel galiléen.

5.5 Quadriproduit scalaire

Nous cherchons à définir un produit scalaire dans l'espace-temps de la relativité restreinte. De façon générale, dans la base naturelle $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ pseudo-orthonormale de la relativité restreinte, le quadriproduit scalaire (ou produit scalaire de Minkowski) de deux 4-vecteurs $[{}_4a]$ et $[{}_4b]$ donne le scalaire (ou quadriscalaire) :

$$\begin{aligned} [{}_4a] \cdot [{}_4b] &= (a^0 \mathbf{e}_0 + a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3) \cdot (b^0 \mathbf{e}_0 + b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3) \\ &= a^0 b^0 \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 + a^1 b^1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a^2 b^2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a^3 b^3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= \eta_{00} a^0 b^0 + \eta_{11} a^1 b^1 + \eta_{22} a^2 b^2 + \eta_{33} a^3 b^3 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

En notation tensorielle :

$$[{}_4a] \cdot [{}_4b] = \eta_{\mu\nu} a^\nu b^\mu \quad (5.3)$$

Le 4-produit scalaire d'un 4-vecteur avec lui-même doit donner le carré de sa 4-norme. Or, pour le 4-vecteur position nous avons d'après (5.1) page 57 :

$$\begin{aligned} [{}_4x] \cdot [{}_4x] &= \|[{}_4x]\|^2 \\ &= \pm [(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2] \end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir le 4-produit scalaire relativiste de deux façons selon la convention de signe adoptée pour le carré de la distance d'univers s^2 :

- en convention de genre temps avec une métrique de signature $(+---)$, déf. 1.9.1 page 12 :

$$[{}_4a] \cdot [{}_4b] \stackrel{\text{déf}}{=} a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} a_0 = \eta_{00} a^0 \\ a_1 = \eta_{11} a^1 \\ a_2 = \eta_{22} a^2 \\ a_3 = \eta_{33} a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a^0 \\ a_1 = -a^1 \\ a_2 = -a^2 \\ a_3 = -a^3 \end{cases} \quad (5.5)$$

Exemple 5.5.1

En composantes covariantes la 4-position s'écrit

$$[{}_4x](t, -\mathbf{r})$$

où la 3-position $\mathbf{r}$ est écrite en composantes contravariantes.

- en convention de genre espace avec une métrique de signature $(-+++)$:

$$[{}_4a] \cdot [{}_4b] \stackrel{\text{déf}}{=} -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$\begin{cases} a_0 = \eta_{00} a^0 \\ a_1 = \eta_{11} a^1 \\ a_2 = \eta_{22} a^2 \\ a_3 = \eta_{33} a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -a^0 \\ a_1 = a^1 \\ a_2 = a^2 \\ a_3 = a^3 \end{cases}$$

Quelle que soit la signature choisie (convention de genre temps ou espace), avec (5.3) page précédente :

$$\begin{aligned} [{}_4a] \cdot [{}_4b] &= a^\mu b_\mu \\ &= a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 \\ &= a_\mu b^\mu \\ &= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \end{aligned}$$

Le carré de la 4-norme de la 4-position, (5.1) page 57, s'écrit :

$$\begin{aligned} \|[{}_4x]\|^2 &= [{}_4x] \cdot [{}_4x] \\ &= \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu \\ &= x_\mu x^\mu \end{aligned}$$

5.5.1 Invariance du quadripduit scalaire

La somme de deux 4-vecteurs étant un 4-vecteur, sa 4-norme est invariante ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[_4a] + [_4b]\|^2 &= ([_4a] + [_4b]) \cdot ([_4a] + [_4b]) \\ &= ([_4a] \cdot [_4a]) + ([_4b] \cdot [_4b]) + [_4a] \cdot [_4b] + [_4b] \cdot [_4a] \\ &= \|[_4a]\|^2 + \|[_4b]\|^2 + 2([_4a] \cdot [_4b])\end{aligned}$$

Les 4-normes $\|[_4a] + [_4b]\|$, $\|[_4a]\|$ et $\|[_4b]\|$ étant invariantes, le 4-produit scalaire de deux 4-vecteurs est un scalaire invariant par changement de référentiel.

5.6 Trivecteur vitesse relativiste

Définition 5.6.1 : Trivitesse relativiste

La 3-vitesse d'un mobile dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est le 3-vecteur dérivée de la 3-position relativiste $\mathbf{r}(t)$ du mobile dans $\mathcal{R}$ par le temps propre t de $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{v}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Notation 5.6.1

En notation indicielle la 3-vitesse s'écrit $\mathbf{v}(v^1, v^2, v^3)$ ou v^i .

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{v} = v \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Exemple 5.6.1 : Vitesse de Bob

La vitesse de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est le vecteur dérivée du rayon vecteur de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ mesuré par Anna par le temps propre d'Anna :

$$\mathbf{v}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Réciproquement, la vitesse d'Anna dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob est la dérivée du rayon vecteur reliant $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$ mesuré par Bob par le temps propre de Bob :

$$\mathbf{v}'(t') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'}$$

où $d\mathbf{r}' = -d\mathbf{r}$. Par symétrie, Anna et Bob mesurent la même vitesse relative $v = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{v}'(t')\|$:

$$\mathbf{v}'(t') = -\mathbf{v}(t)$$

5.6.1 Transformation spéciale de la vitesse

La 3-vitesse n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel ainsi que le 3-vecteur vitesse lui-même. Soit un mobile de vitesse $\mathbf{v}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna et de vitesse $\mathbf{v}'$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ de Bob. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). Différentions la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (2.6) page 24 entre les référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e (dt - v_e dx) \\ dx' = \gamma_e (dx - v_e dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

Remarque 5.6.1

dv_e n'apparaît pas car v_e n'est pas fonction du temps (c'est la vitesse relative de deux référentiels galiléens).

$$\begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x = \frac{dx - v_e dt}{dt - v_e dx} \\ v'_y = \frac{dy}{\gamma_e (dt - v_e dx)} \\ v'_z = \frac{dz}{\gamma_e (dt - v_e dx)} \end{cases}$$

En divisant par dt les numérateurs et dénominateurs, nous obtenons la transformation spéciale de Lorentz de la vitesse, qui permet de calculer la vitesse du mobile dans $\mathcal{R}'$ mesurée par Bob lorsque l'on connaît la vitesse du mobile dans $\mathcal{R}$ mesurée par Anna et la vitesse d'entraînement de Bob et Anna. En unités géométriques :

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} \end{cases} \quad (5.6a)$$

$$\begin{cases} v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \end{cases} \quad (5.6b)$$

C'est la loi de composition relativiste des vitesses. Elle remplace la loi de composition des vitesses de la cinématique classique que l'on retrouve en posant $v_e \ll c$:

$$\begin{cases} v'_x = v_x - v_e \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Remarque 5.6.2

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer v'_x , v_x et v_e respectivement par v'_x/c , v_x/c et v_e/c , puis simplifier.

- si le mobile est immobile dans le référentiel d'Anna $\mathbf{v}(0, 0, 0)$, sa vitesse dans le référentiel de Bob s'écrit $\mathbf{v}'(-v_e, 0, 0)$

- si le mobile atteint la vitesse limite selon l'axe des x dans le référentiel d'Anna $\mathbf{v}(1, 0, 0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\mathbf{v}'(1, 0, 0)$
- si le mobile atteint la vitesse limite selon l'axe des y dans le référentiel d'Anna $\mathbf{v}(0, 1, 0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\mathbf{v}'(-v_e, 1/\gamma_e, 0)$. Dans ce cas on peut vérifier que si $v_e = 0$ alors $\gamma_e = 1$ et on retrouve $\mathbf{v}'(0, 1, 0)$. De plus $\|\mathbf{v}'\|^2 = v_e^2 + 1/\gamma_e^2 = 1$
- si la vitesse d'entraînement entre Anna et Bob atteint la vitesse limite $v_e = 1$ alors $\gamma_e = +\infty$, et la vélocité $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ du mobile dans le référentiel d'Anna s'écrit $\mathbf{v}'(1, 0, 0)$ dans celui de Bob

On obtient la transformation inverse de deux façons.

- en inversant les relations :

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x (1 - v_e v_x) + v_e = v_x \\ v'_y \gamma_e (1 - v_e v_x) = v_y \\ v'_z \gamma_e (1 - v_e v_x) = v_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x - v_e v_x v'_x + v_e = v_x \\ v'_y \gamma_e - v'_y \gamma_e v_e v_x = v_y \\ v'_z \gamma_e - v'_z \gamma_e v_e v_x = v_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = v'_y \gamma_e (1 - v_e v'_x) \\ v_z = v'_z \gamma_e (1 - v_e v'_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = v'_y \gamma_e \left(1 - \frac{v_e (v'_x + v_e)}{1 + v_e v'_x} \right) \\ v_z = v'_z \gamma_e \left(1 - \frac{v_e (v'_x + v_e)}{1 + v_e v'_x} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma_e (1 + v_e v'_x)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma_e (1 + v_e v'_x)} \end{cases}$$

- en permutant les composantes entre référentiels et en changeant v_e en $-v_e$:

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y}{\gamma_e (1 + v_e v'_x)} \\ v_z = \frac{v'_z}{\gamma_e (1 + v_e v'_x)} \end{cases} \quad (5.7)$$

Le carré de la norme de la vélocité du mobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob s'écrit en unités géométriques :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'\|^2 &= v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \\ &= \frac{(v_x - v_e)^2 + (v_y^2 + v_z^2)/\gamma_e^2}{(1 - v_e v_x)^2} \end{aligned}$$

5.6.2 Loi de composition des vitesses

Nous établissons ici transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse, c.-à-d. la transformation générale de Lorentz et non plus spéciale. La 3-vitesse n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel ainsi que le 3-vecteur vitesse lui-même. Les relations (5.6) page 63 peuvent être mises sous forme vectorielle. Différentions la transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque en unités géométriques (2.7) page 26 dans laquelle le vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_e$ est constant :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e (dt - \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r}) \\ d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e dt \end{cases} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e dt}{\gamma_e (dt - \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r})}$$

En divisant par dt le numérateur et le dénominateur, en unités géométriques :

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + (\gamma_e - 1) \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2} \right) \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e}{\gamma_e (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)} \quad (5.8)$$

Remarque 5.6.3

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}_e$ respectivement par $\mathbf{v}'/c$, $\mathbf{v}/c$ et $\mathbf{v}_e/c$, puis simplifier.

Pour inverser la relation, permutons $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ et remplaçons $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + (\gamma_e - 1) \left(\frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2} \right) \mathbf{v}_e + \gamma_e \mathbf{v}_e}{\gamma_e (1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}_e)}$$

Nous voyons que les rôles de $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ ne sont pas symétriques, ils ne sont pas échangeables. Pour un observateur quelconque, en général il n'est pas équivalent d'observer un mobile de vitesse $\mathbf{v}'$ dans un référentiel de vitesse $\mathbf{v}_e$, et un mobile de vitesse $\mathbf{v}_e$ dans un référentiel de vitesse $\mathbf{v}'$. En général donc, la loi de composition des vitesses n'est pas commutative. Dans le cas particulier où $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ sont parallèles, la vitesse du mobile dans $\mathcal{R}'$ s'écrit $\mathbf{v}'(v', 0, 0)$ et donne avec (5.7) page précédente une loi de composition commutative :

$$\begin{cases} v_x = \frac{v' + v_e}{1 + v_e v'} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

5.6.3 Autre écriture vectorielle de la vitesse

Une autre forme vectorielle consiste à écrire le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ comme la somme d'un vecteur $\mathbf{v}_{||}$ parallèle à $\mathbf{v}_e$, et d'un vecteur $\mathbf{v}_{\perp}$ perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{||} + \mathbf{v}'_{\perp}$$

Les relations (5.6) page 63 s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}_e}{1 - v_e v_{\parallel}} \quad ; \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{\gamma_e (1 - v_e v_{\parallel})}$$

Lorsque $\mathbf{v}$ est colinéaire à (est un multiple de) $\mathbf{v}_e$, on a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel}$ et $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_e}{1 - v_e v} \quad ; \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{0}$$

Par symétrie, en échangeant les rôles de $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}$ et en remplaçant $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{v}_e}{1 + v_e v'} \quad ; \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{0}$$

C'est la loi de composition des vitesses.

Lorsque $\mathbf{v}$ est perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$, c.-à-d. lorsque $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp}$ et $\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = -\mathbf{v}_e \quad ; \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\mathbf{v}}{\gamma_e}$$

Remarque 5.6.4

Contrairement aux coordonnées perpendiculaires au mouvement qui restent identiques $y = y'$ et $z = z'$, les composantes de la vitesse perpendiculaires au mouvement sont divisées par le facteur relativiste γ_e . En mécanique classique nous avons :

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = -\mathbf{v}_e \quad ; \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{v}$$

Le carré de la norme de la vélocité dans $\mathcal{R}'$ s'écrit en unités géométriques :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'\|^2 &= v_{\parallel}'^2 + v_{\perp}'^2 \\ &= \frac{(\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}_e)^2 + v_{\perp}^2 / \gamma_e^2}{(1 - v_e v_{\parallel})^2} \end{aligned}$$

5.7 Trivecteur vitesse propre relativiste

On ne peut définir la vitesse propre comme étant la vitesse dans le référentiel propre, car bien évidemment elle serait nulle. On peut cependant se servir du temps propre.

Définition 5.7.1 : Trivitesse propre relativiste ou célérité

La 3-vitesse propre d'un mobile se déplaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est le 3-vecteur dérivée de la 3-position $\mathbf{r}(t)$ de ce mobile dans $\mathcal{R}$ par le temps propre t' du mobile :

$$\mathbf{u}(t') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (5.9)$$

Notation 5.7.1

En notation indicielle, la 3-vitesse propre s'écrit $\mathbf{u}(u^1, u^2, u^3)$ ou u^i .

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \left(\frac{dx}{dt'}, \frac{dy}{dt'}, \frac{dz}{dt'} \right)$$

Exemple 5.7.1 : Vitesse propre de Bob

La 3-vitesse propre de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est la dérivée du rayon vecteur de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ mesuré par Anna par le temps propre de Bob :

$$\mathbf{u}(t') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt'}$$

Nous faisons le lien avec la déf. 5.6.1 page 62 de la vitesse grâce au facteur de dilatation temporelle (3.7) page 30 :

$$\mathbf{u}(t') = \gamma_v \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

$$\mathbf{u}(t') = \gamma_v \mathbf{v}(t) \quad (5.10)$$

Remarque 5.7.1

La vitesse propre n'est pas limitée par une valeur maximale, elle peut tendre vers l'infini.

Remarque 5.7.2

En mécanique classique $\gamma_v = 1$, les 3-vecteurs célérité et vitesse sont confondus et appelés vecteur vitesse. La célérité et la vitesse ont un ancêtre commun, la vitesse, qui n'est ni la célérité ni la vitesse car en mécanique classique le temps n'est ni le temps propre ni le temps impropre. Ce sont des notions qui n'existent qu'en relativité.

5.7.1 Transformation spéciale de la vitesse propre

La 3-vitesse propre n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré ainsi que le 3-vecteur vitesse propre lui-même.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). Soit l'observateur Henri de temps propre τ , de vitesse propre $\mathbf{u}$ et de vitesse $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$, et de vitesse propre $\mathbf{u}'$ et de vitesse $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. Différentions la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (2.6) page 24 avec v_e constante :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e (dt - v_e dx) \\ dx' = \gamma_e (dx - v_e dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{d\tau} = \gamma_e \left(\frac{dx}{d\tau} - v_e \frac{dt}{d\tau} \right) \\ \frac{dy'}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{dz'}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_x = \gamma_e (u_x - v_e \gamma_v) \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad (5.11)$$

La transformation spéciale de Lorentz de la vitesse propre permet de calculer la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}'$ mesurée par Bob lorsque l'on connaît la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}$ mesurée par Anna et la vitesse d'entraînement de Bob et Anna.

Remarque 5.7.3

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer u'_x , u_x et v_e par u'_x/c , u_x/c et v_e/c , puis simplifier.

On a la transformation inverse en permutant les composantes et en remplaçant v_e par $-v_e$:

$$\begin{cases} u_x = \gamma_e (u'_x + v_e \gamma_v) \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases}$$

Le carré de la norme de la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|^2 &= u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z \\ &= \gamma_e^2 (u_x - v_e \gamma_v)^2 + u_y^2 + u_z^2 \end{aligned}$$

5.7.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse propre

Le 3-vecteur vitesse propre se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Pour établir la transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse propre d'Henri lors du passage du référentiel d'Anna à celui de Bob, différencions la transformation de Lorentz sous forme intrinsèque en unités géométriques (2.7b) page 26, dans laquelle le vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_e$ est constant :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}' &= d\mathbf{r} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e dt \\ \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \frac{dt}{d\tau} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \gamma_v$$

Pour inverser la relation permutons $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$, et remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}'}{v_e^2} \mathbf{v}_e + \gamma_e \mathbf{v}_e \gamma_v$$

5.8 Quadrivecteur vitesse

La 4-position déf. 5.4.1 page 56 de Bob dans $\mathcal{R}$ est invariant par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que sa forme infinitésimale $d[_4x](cdt, d\mathbf{r})$ comme différence de deux 4-vecteurs. La durée propre infinitésimale dt' mesurée par Bob dans $\mathcal{R}'$ étant absolue, nous posons la définition :

Définition 5.8.1 : Quadrivitesse

La 4-vitesse de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna, est la dérivée de la 4-position de Bob dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps propre de Bob :

$$[_4u] \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d[_4x]}{dt'}$$

Notation 5.8.1

En notation indicielle la 4-vitesse s'écrit en composantes contravariantes $[_4u](u^0, u^1, u^2, u^3)$ ou u^α .

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad u^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (5.12)$$

Remarque 5.8.1

La quadrivitesse est aussi appelée quadrivecteur vitesse d'univers, vitesse spatio-temporelle, vitesse quadridimensionnelle.

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} [_4u] &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d[_4x](ct, \mathbf{r})}{dt'} \\ &= [_4u] \left(\frac{cdt}{dt'}, \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right) \end{aligned}$$

Avec la relation (3.7) page 30 entre temps propre et temps impropre

$$\begin{aligned} [_4u] &= [_4u](c\gamma_v, \mathbf{u}) \\ &= [_4u](\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\mathbf{u}$ est la 3-vitesse propre de Bob dans $\mathcal{R}$, (5.9) page 66, et $\mathbf{v}$ sa vitesse (5.6.1) page 62.

La 4-vitesse généralise à l'espace-temps la 3-vitesse propre déjà relativiste mais purement spatiale, en lui ajoutant une composante temporelle (une vitesse de déplacement dans le temps) :

$$u_t = c\gamma_v \quad (5.14)$$

La trajectoire d'un mobile dans l'espace-temps, c.-à-d. sa ligne d'univers, ne sort jamais du cône de lumière d'un quelconque événement appartenant à cette ligne d'univers, sinon sa vitesse serait supérieure à c . Par conséquent sa 4-vitesse, tangente à sa ligne d'univers, est un vecteur à quatre dimensions de genre temps, dirigé vers le futur.

5.8.1 Quadrinorme de la quadrivitesse

Comme pour tout 4-vecteur, la 4-norme de la 4-vitesse est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré (cf. l'introduction du § 5.2 page 54) :

$$\begin{aligned}\|[_4u]\|^2 &= \gamma_V(c, \mathbf{v}) \cdot \gamma_V(c, \mathbf{v}) \\ &= \gamma_V^2 (c^2 - v^2) \\ &= \gamma_V^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 \\ &= c^2\end{aligned}\tag{5.15}$$

Remarque 5.8.2

En convention de genre espace le carré de la 4-norme de la 4-vitesse est négatif :

$$\|[_4u]\|^2 = -c^2$$

Nous pouvons également trouver ce résultat lorsque la vitesse entre Anna et Bob est nulle. Lorsque le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna et $\mathcal{R}'$ de Bob sont confondus, $\gamma_e = 1$ et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, et la 4-vitesse de Bob n'est pas nulle :

$$[_4u]'(c, \mathbf{0})$$

C'est la 4-vitesse de Bob, pour Bob. Sa vitesse spatiale est nulle mais sa vitesse temporelle (composante temporelle de sa 4-vitesse) est non nulle, il se déplace dans le temps vers le futur à la vitesse limite.

Remarque 5.8.3

En mécanique classique, l'écoulement du temps mesure la vitesse à laquelle nous nous déplaçons tous vers le futur. En ce sens, l'invariant non relativiste t est remplacé par l'invariant relativiste c .

La 4-norme de la 4-vitesse étant invariante :

$$\begin{aligned}\|[_4u]\| &= \|[_4u]'\| \\ &= c\end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites ($x^0 = ct$) de base naturelle pseudo-orthonormée, le carré de la 4-norme s'écrit :

$$\begin{aligned}\|[_4u]\|^2 &= [_4u] \cdot [_4u] \\ &= \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta\end{aligned}$$

En convention de genre temps (1.4) page 10 :

$$\begin{aligned}\|[_4u]\|^2 &= \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 \\ &= \frac{ds^2}{d\tau^2} \\ &= c^2\end{aligned}$$

En divisant la 4-vitesse par sa 4-norme c , ce qui revient à poser $c = 1$, avec (3.4) page 29 nous obtenons la *quadrivitesse unitaire* :

$$[{}_4u] = [{}_4u](\gamma_v, \gamma_v \beta)$$

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad u^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dx^\alpha}{ds}$$

5.8.2 Quadriproduit scalaire de la quadrivitesse avec la quadriposition

Le 4-produit scalaire de la 4-position de Bob dans $\mathcal{R}$ par sa 4-vitesse dans $\mathcal{R}$ est un invariant. Avec (2.7a) page 26 :

$$\begin{aligned} [{}_4x](ct, \mathbf{r}) \cdot [{}_4u](\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v}) &= \gamma_v c^2 t - \gamma_v \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ &= c^2 \gamma_v \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \\ &= c^2 t' \end{aligned}$$

où t' est le temps propre de Bob. Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de Bob nous avons directement

$$[{}_4x]'(ct', \mathbf{0}) \cdot [{}_4u]'(\gamma_{v'} c, \mathbf{0}) = c^2 t'$$

où $\gamma_{v'} = 1$ car $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, la vitesse de Bob dans son référentiel est nulle.

5.8.3 Transformation spéciale des composantes de la quadrivitesse

La 4-vitesse étant un 4-vecteur, elle est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré mais ses composantes se transforment. Le lien entre les composantes de la 4-vitesse dans deux référentiels est donné par la transformation spéciale de Lorentz des coordonnées galiléennes en unités géométriques (2.6) page 24.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). Soit l'observateur Henri de vitesse $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. La 4-vitesse d'Henri étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[{}_4u] \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = [{}_4u]' \begin{pmatrix} u'_t \\ u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u'_t = \gamma_e(u_t - v_e u_x) \\ u'_x = \gamma_e(u_x - v_e u_t) \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

En remplaçant u_t par γ_v ((5.14) page 69) on retrouve la transformation de la vitesse propre (5.11) page 68.

Notation 5.8.2

En notation indicielle avec la convention de sommation :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad u^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} u^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u^{0'} = \gamma_e u^0 - \gamma_e v_e u^1 \\ u^{1'} = -\gamma_e v_e u^0 + \gamma_e u^1 \\ u^{2'} = u^2 \\ u^{3'} = u^3 \end{cases}$$

5.9 Trivecteur-accélération relativiste

Remarque 5.9.1

La relativité restreinte traite les référentiels accélérés car le calcul différentiel-intégral y est encore valable. En revanche elle ne traite pas la gravitation car elle est modélisée par une force à distance instantanée. Elle permettrait la transmission d'information à distance plus vite que la vitesse limite.

Définition 5.9.1 : Tri-accélération relativiste

La 3-accélération relativiste d'un mobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est la dérivée de la 3-vélocité (5.6.1) page 62 de ce mobile dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps propre t d'Anna :

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

Notation 5.9.1

En notation indicielle, la 3-accélération relativiste s'écrit $\mathbf{a}(a^1, a^2, a^3)$ ou a^i .

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{a} \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a} \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

5.9.1 Transformation spéciale des composantes de la tri-accélération

La 3-accélération n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré ainsi que le 3-vecteur accélération lui-même.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3), et soit l'observateur Henri de vélocité $\mathbf{v}(t)$ dans $\mathcal{R}$ et de vélocité $\mathbf{v}'(t')$ dans $\mathcal{R}'$.

Pour la composante en x' de la 3-accélération d'Henri dans $\mathcal{R}'$, à partir de (5.6a) page 63, en

unités géométriques :

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{dv'_x}{dt'} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} \right) \times \frac{dt}{dt'} \end{aligned}$$

À partir de la transformation spéciale de Lorentz du temps en unités géométriques (2.6) page 24, nous avons :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e (t - v_e x) \\ t = \gamma_e (t' + v_e x') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dt'}{dt} = \gamma_e (1 - v_e v_x) \\ \frac{dt}{dt'} = \gamma_e (1 + v_e v'_x) \end{cases}$$

Utilisons l'inverse de la dérivée dt'/dt pour faire apparaître v_x :

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{a_x (1 - v_e v_x) - (v_x - v_e) (-v_e a_x)}{(1 - v_e v_x)^2} \times \frac{1}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \\ &= \frac{a_x (1 - v_e^2)}{\gamma_e (1 - v_e v_x)^3} \\ &= \frac{a_x}{\gamma_e^3 (1 - v_e v_x)^3} \end{aligned}$$

Pour la composante selon l'axe des y , à partir de (5.6b) page 63 :

$$\begin{aligned} a'_y &= \frac{dv'_y}{dt'} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{v_y}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \right] \times \frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{a_y \gamma_e (1 - v_e v_x) + v_y \gamma_e v_e a_x}{\gamma_e^2 (1 - v_e v_x)^2} \times \frac{1}{\gamma_e (1 - v_e v_x)} \\ &= \frac{a_y + v_e (a_x v_y - a_y v_x)}{\gamma_e^2 (1 - v_e v_x)^3} \end{aligned}$$

Nous raisonnons par symétrie pour l'axe des z . La transformation spéciale de Lorentz de la 3-accélération d'Henri s'écrit en unités géométriques :

$$\begin{cases} a'_x = \frac{a_x}{\gamma_e^3 (1 - v_e v_x)^3} \\ a'_y = \frac{a_y + v_e (a_x v_y - a_y v_x)}{\gamma_e^2 (1 - v_e v_x)^3} \\ a'_z = \frac{a_z + v_e (a_x v_z - a_z v_x)}{\gamma_e^2 (1 - v_e v_x)^3} \end{cases}$$

Elle permet de calculer les composantes de la 3-accélération $\mathbf{a}'$ d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob lorsque l'on connaît les composantes de la 3-accélération $\mathbf{a}$ d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna.

Remarque 5.9.2

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer $a'_x, a'_y, a'_z, a_x, a_y, a_z, v_x, v_y, v_z$ et v_e par $a'_x/c^2, a'_y/c^2, a'_z/c^2, a_x/c^2, a_y/c^2, a_z/c^2, v_x/c, v_y/c, v_z/c$ et v_e/c , puis simplifier.

On obtient la transformation inverse en permutant les composantes entre référentiels et en changeant v_e en $-v_e$:

$$\begin{cases} a_x = \frac{a'_x}{\gamma_e^3 (1 + v_e v'_x)^3} \\ a_y = \frac{a'_y - v_e (a'_x v'_y - a'_y v'_x)}{\gamma_e^2 (1 + v_e v'_x)^3} \\ a_z = \frac{a'_z - v_e (a'_x v'_z - a'_z v'_x)}{\gamma_e^2 (1 + v_e v'_x)^3} \end{cases}$$

5.9.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la tri-accélération

La 3-accélération n'étant pas un 4-vecteur, elle se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Dérivons par rapport au temps propre d'Anna la transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse en unités géométriques (5.8) page 65 :

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + (\gamma_e - 1) \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2} \right) \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e}{\gamma_e (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)}$$

Soient les fonctions vectorielles U et W telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{U}{W} \\ d\mathbf{v}' &= \frac{dUW - U dW}{W^2} \\ \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} &= \frac{dU}{W dt'} - \frac{U dW}{W^2 dt'} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} U = \mathbf{v} + (\gamma_e - 1) \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2} \right) \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \\ W = \gamma_e (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = d\mathbf{v} + (\gamma_e - 1) \left(\frac{d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2} \right) \mathbf{v}_e \\ dW = -\gamma_e (d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) \end{cases}$$

En différentiant (2.7a) page 26 ($c = 1$) :

$$dt' = \gamma_e (dt - \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r})$$

Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{W} &= \frac{d\mathbf{v}}{\gamma_e (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)} + \frac{(\gamma_e - 1)(d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)} \\ \frac{dU}{W dt'} &= \frac{d\mathbf{v}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) (dt - \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r})} + \frac{(\gamma_e - 1)(d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) (dt - \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2} + \frac{(\gamma_e - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2} \end{aligned}$$

Pour le second terme :

$$\begin{aligned}
 \frac{UdW}{W^2} &= \frac{-\left[\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e\right](d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)}{\gamma_e (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2} \\
 \frac{UdW}{W^2 dt'} &= \frac{-\left[\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e\right](d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2 (dt - \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{r})} \\
 &= \frac{-\left[\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e\right](\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} \\
 &= -\frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e\right](\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3}
 \end{aligned}$$

En soustrayant le second terme du premier :

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2} + \frac{(\gamma_e - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2} + \frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2}\right) - \gamma_e\right](\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3}$$

Les termes centraux donnent :

$$\begin{aligned}
 &\frac{(\gamma_e - 1)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} + \frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e}{v_e^2}\right) - \gamma_e\right]v_e^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} \\
 &= \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} \left[(\gamma_e - 1)(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) + (\gamma_e - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e) - \gamma_e v_e^2\right] \\
 &= \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} (\gamma_e - 1 - \gamma_e v_e^2) \\
 &= \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} [\gamma_e (1 - v_e^2) - 1] \\
 &= \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} \frac{(1 - \gamma_e)}{\gamma_e}
 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors la transformation de Lorentz-Poincaré de la 3-accélération en unités géométriques,

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^2} - \frac{(\gamma_e - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^3 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e)^3}$$

et la relation inverse en permutant $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ et en remplaçant $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}'}{\gamma_e^2 (1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}')^2} - \frac{(\gamma_e - 1)(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2 \gamma_e^3 (1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}')^3} - \frac{(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{v}_e)\mathbf{v}'}{\gamma_e^2 (1 + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}')^3}$$

5.9.3 Autre écriture vectorielle de la tri-accélération

Nous pouvons écrire la 3-accélération $\mathbf{a}$ comme la somme d'un vecteur $\mathbf{a}_{||}$ parallèle à $\mathbf{v}_e$, et d'un vecteur $\mathbf{a}_{\perp}$ perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{||} + \mathbf{a}_{\perp} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a}'_{||} + \mathbf{a}'_{\perp}$$

Les relations de transformation (5.16) page 73 deviennent ($c = 1$) :

$$\mathbf{a}'_{||} = \frac{\mathbf{a}_{||}}{\gamma_e^3 (1 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v})^3} \quad ; \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \frac{\mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{v}_e \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v})^3}$$

Lorsque $\mathbf{a}$ est colinéaire à $\mathbf{v}_e$, c.-à-d. lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{||}$ et $\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a}'_{||} = \frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^3 (1 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v})^3} \quad ; \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \frac{\mathbf{v}_e \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v})^3}$$

Lorsque $\mathbf{a}$ est perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$, c.-à-d. lorsque $\mathbf{a}_{||} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\perp}$:

$$\mathbf{a}'_{||} = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{a}'_{\perp} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{v}_e \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{\gamma_e^2 (1 - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v})^3}$$

5.10 Trivecteur-accélération propre relativiste

La 3-accélération propre de Bob est celle qu'il mesure avec son accéléromètre trois axes. Contrairement aux notions cinématiques que nous avons vu, celle-ci est liée à un unique instrument de mesure physique, ne faisant pas intervenir l'espace et le temps. L'accélération propre de Bob est nulle si Bob est galiléen. L'accélération propre n'est pas invariante par changement de référentiel puisqu'elle n'est définie que dans un seul référentiel, celui de l'accéléromètre. Elle est *absolue* car tous les observateurs s'accordent sur sa valeur, mesurée par Bob. Elle est donc primordiale, les autres notions s'en déduisent.

Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel propre de Bob, et soit t' son temps propre. Bob veut mesurer son accélération propre instantanée, c.-à-d. son accélération propre à un instant t' donné, $\mathbf{a}(t')$. Supposons qu'à l'instant t' , le référentiel de Bob croise le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna. Elle mesure la distance que Bob parcourt dans $\mathcal{R}$ en une durée dt' juste avant qu'ils ne se croisent, puis celle qu'il parcourt en une durée dt' juste après qu'ils se soient croisés. Bob en déduit sa variation de vitesse propre dans $\mathcal{R}$ en une durée dt' , c.-à-d. son accélération propre.

Définition 5.10.1 : Tri-accélération propre relativiste

La 3-accélération propre d'un mobile est la dérivée de sa 3-vitesse propre 5.9 page 66 dans

le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, par rapport à son temps propre :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t') &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{u}(t')}{dt'} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d(\gamma_v \mathbf{v}(t))}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d^2 \mathbf{r}(t')}{dt'^2}\end{aligned}$$

Notation 5.10.1

En notation indicielle l'accélération propre s'écrit $\mathbf{a}(a^1, a^2, a^3)$ ou a^i .

5.10.1 Lien entre accélération propre et tri-accélération

Faisons apparaître le 3-vecteur vitesse $\mathbf{v}(t)$ de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna, relation (5.10) page 67. L'accélération propre de Bob s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t') &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d(\gamma_v \mathbf{v})}{dt'} \\ &= \gamma_v \frac{d\mathbf{v}}{dt'} + \mathbf{v} \frac{d\gamma_v}{dt'} \\ &= \gamma_v \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{dt}{dt'} + \mathbf{v} \frac{d\gamma_v}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= \gamma_v^2 \mathbf{a} + \gamma_v \mathbf{v} \frac{d\gamma_v}{dt}\end{aligned}$$

Dérivons le facteur relativiste par rapport au temps t :

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_v}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \times \left(-\frac{1}{c^2} \frac{dv^2}{dt} \right) \\ &= \frac{\gamma_v^3}{2c^2} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &= \frac{\gamma_v^3}{2c^2} \left(2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right) \\ &= \frac{\gamma_v^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{\gamma_v^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}\tag{5.17}$$

$$\mathbf{a} = \gamma_v^2 \mathbf{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\tag{5.18}$$

Cette relation permet le calcul de l'accélération propre de Bob à partir de son 3-vecteur vitesse instantanée dans $\mathcal{R}$ et de sa 3-accélération dans $\mathcal{R}$.

Remarque 5.10.1

Si l'on prend $c = 1$ la relation (5.17) :

$$\frac{d\gamma_v}{dt} = \gamma_v^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$$

Pour retrouver la relation avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplaçons t par ct , $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}/c$ et $\mathbf{a}$ par $\mathbf{a}/c^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_v}{cdt} &= \gamma_v^3 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{a}}{c^2} \\ \frac{d\gamma_v}{dt} &= \frac{\gamma_v^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

Remarque 5.10.2

On fera attention à ce qui suit.

Nous avons d'une part,

$$\frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\| &= \|\mathbf{a}\| \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \left[\left(\frac{dv_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Par conséquent si l'on note $v = \|\mathbf{v}\|$ et $a = \|\mathbf{a}\|$ on a :

$$\frac{dv}{dt} \neq a$$

5.10.2 Transformation spéciale des composantes de l'accélération propre

Reprenons la transformation spéciale de Lorentz de la 3-accélération (5.16) page 73. Supposons qu'à l'instant $\tau_0 = t_0$, et seulement à cet instant, Henri ait même 3-vecteur vitesse qu'Anna dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob. Soit $\mathbf{v}'(t')$ la vitesse d'Henri dans $\mathcal{R}'$:

$$\mathbf{v}' \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_e = \gamma_{v'}$$

Soit $\mathbf{v}(t)$ la vitesse d'Henri dans $\mathcal{R}$, elle est momentanément nulle si bien que (5.16) page 73 donne :

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a'_x = \frac{a_x}{\gamma_{v'}^3} \\ a'_y = \frac{a_y}{\gamma_{v'}^2} \\ a'_z = \frac{a_z}{\gamma_{v'}^2} \end{cases}$$

Or, l'accélération propre d'Henri $\mathbf{a}$ est confondue avec sa 3-accélération $\mathbf{a}$ dans $\mathcal{R}$, car les temps propres d'Anna et Henri sont égaux pendant une durée infinitésimale (Anna et Henri ont même vecteur vitesse) :

$$\begin{cases} a'_x = \frac{a_x}{\gamma_{v'}^3} \\ a'_y = \frac{a_y}{\gamma_{v'}^2} \\ a'_z = \frac{a_z}{\gamma_{v'}^2} \end{cases} \quad (5.19)$$

Ces relations permettent de calculer la 3-accélération d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob, à partir de l'accélération propre d'Henri. Réciproquement :

$$\begin{cases} a_x = a'_x \gamma_e^3 \\ a_y = a'_y \gamma_e^2 \\ a_z = a'_z \gamma_e^2 \end{cases}$$

5.11 Quadrivecteur accélération

Définition 5.11.1 : Quadri-accélération

La 4-accélération de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est le 4-vecteur dérivée de la 4-vitesse de Bob dans $\mathcal{R}$ par rapport à son temps propre :

$$[{}_4a] \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d[{}_4u]}{dt'}$$

Notation 5.11.1

En notation indicielle la 4-accélération s'écrit $[{}_4a](a^0, a^1, a^2, a^3)$ ou a^μ .

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites de $\mathcal{R}$, il a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} [{}_4a] &= \frac{d[{}_4u](c\gamma_v, \mathbf{u})}{dt'} \\ &= [{}_4a] \left(c \frac{d\gamma_v}{dt'}, \mathbf{a} \right) \end{aligned}$$

La 4-accélération généralise à l'espace-temps la 3-accélération propre (notion déjà relativiste) purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle :

$$a^0 = c \frac{d\gamma_v}{dt'}$$

Une rotation classique purement spatiale de la 3-vitesse propre ne fait varier que les composantes spatiales de la 4-accélération, car la composante temporelle n'est fonction que de la norme de la 3-vitesse propre par l'intermédiaire du facteur relativiste γ_v . La seule autre rotation possible, la rotation hyperbolique entre temps et espace (le changement de référentiel par la transformation de

Lorentz), fait donc varier la composante temporelle et par conséquent également au moins l'une des composantes spatiales car la 4-norme de la 4-accélération est invariante. Une accélération en norme est donc une rotation hyperbolique dans l'espace-temps, alors qu'une accélération par changement de direction est une rotation purement spatiale.

Grâce aux relations (5.17) page 77 et (5.18) page 77, nous trouvons l'expression de la 4-accélération de Bob dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna,

$$[_4a] \left(\frac{\gamma_v^4}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \gamma_v^2 \mathbf{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right)$$

où $\mathbf{v}$ est le 3-vecteur vitesse instantanée de Bob dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{a}$ est sa 3-accélération dans $\mathcal{R}$. La 4-accélération de Bob dans $\mathcal{R}$ a pour composantes contravariantes en unités géométriques :

$$[_4a] \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = [_4a] \begin{pmatrix} \gamma_v^4 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \\ \gamma_v^2 a_x + \gamma_v^4 v_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \\ \gamma_v^2 a_y + \gamma_v^4 v_y \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \\ \gamma_v^2 a_z + \gamma_v^4 v_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Utilisons la relation de calcul vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ \vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{C}) &= \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}^2 \vec{C} \\ \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{C}) &= \vec{A}^2 \vec{C} + \vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{C}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) &= v^2 \mathbf{a} + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [_4a] \left(\frac{\gamma_v^4}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \gamma_v^2 \mathbf{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right) &= [_4a] (\gamma_v^4 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \gamma_v^2 \mathbf{a} + \gamma_v^4 v^2 \mathbf{a} + \gamma_v^4 \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})) \\ &= [_4a] (\gamma_v^4 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{a}(\gamma_v^2 + \gamma_v^4 v^2) + \gamma_v^4 \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a})) \end{aligned}$$

À partir de la déf. 2.2.1 page 21 du facteur de Lorentz exprimé en unités géométriques :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{1}{1 - v^2} \\ \gamma^2 - \gamma^2 v^2 &= 1 \\ \gamma^2 &= 1 + \gamma^2 v^2 \end{aligned}$$

si bien que la 4-accélération s'écrit aussi :

$$[_4a] (\gamma_v^4 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \gamma_v^4 \mathbf{a} + \gamma_v^4 \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}))$$

Remarque 5.11.1

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer $\mathbf{a}$ par $\mathbf{a}/c^2$ et $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}/c$, puis simplifier.

Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de Bob, $\gamma_v = 1$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, la 4-accélération de Bob a pour composantes :

$$[_4a]'(0, \mathbf{a}') = [_4a]'(0, \mathbf{a}')$$

Lorsque la 3-accélération propre d'un observateur est nulle sa 4-accélération est nulle elle aussi.

5.11.1 Quadri-norme de la quadri-accélération

La 4-norme de la 4-accélération est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\| [{}_4a] \|^2 &= [{}_4a] (0, \mathbf{a}) \cdot [{}_4a] (0, \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{a}^2\end{aligned}$$

5.11.2 Quadriproduit scalaire avec la quadrivitesse

Le 4-produit scalaire des 4-vecteurs vitesse et accélération est un invariant :

$$\begin{aligned} [{}_4u] (\gamma_V c, \gamma_V \mathbf{v}) \cdot [{}_4a] \left(\frac{\gamma_V^4}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \gamma_V^2 \mathbf{a} + \frac{\gamma_V^4}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right) &= \gamma_V^5 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \gamma_V \mathbf{v} \cdot \left(\gamma_V^2 \mathbf{a} + \gamma_V^4 \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \right) \\ &= \gamma_V^5 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \gamma_V^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \gamma_V^5 v^2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \\ &= \gamma_V^5 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \gamma_V^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Directement en se plaçant dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} [{}_4u]' (c, \mathbf{0}) \cdot [{}_4a]' (0, \mathbf{a}) &= c \times 0 - \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les 4-vecteurs vitesse et accélération sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps, au sens du 4-produit scalaire. Par suite, la 4-accélération est aussi pseudo-orthogonale à la ligne d'univers. C'est un vecteur à quatre dimensions de direction du genre espace. On arrive au même résultat en dérivant par rapport au temps propre le carré de la 4-norme de la 4-vitesse (5.15) page 70. Le carré de la norme d'un vecteur étant le produit scalaire de ce vecteur avec lui-même, on se sert de l'expression du produit scalaire en notation indicielle (5.3) page 60 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} (\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) &= \frac{dc^2}{dt'} \\ \eta_{\mu\nu} \left(u^\mu \frac{du^\nu}{dt'} + u^\nu \frac{du^\mu}{dt'} \right) &= 0 \\ 2\eta_{\mu\nu} \left(u^\mu \frac{du^\nu}{dt'} \right) &= 0 \\ \eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu &= 0 \end{aligned}$$

5.11.3 Quadriproduit scalaire avec la quadriposition

$$[{}_4x]'(ct', \mathbf{0}) \cdot [{}_4a]'(0, \mathbf{a}) = ct' \times 0 - \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Les 4-vecteurs position et accélération sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps, au sens du 4-produit scalaire (5.4) page 61.

5.11.4 Transformation spéciale des composantes de la quadri-accélération

La 4-accélération étant un 4-vecteur, seules ses composantes se transforment par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). Soit l'observateur Henri de vitesse $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. La 4-accélération d'Henri étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[{}_4a] \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = [{}_4a]' \begin{pmatrix} a'_t \\ a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a'_t = \gamma_e(a_t - v_e a_x) \\ a'_x = \gamma_e(a_x - v_e a_t) \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

où les composantes de la 4-accélération dans $\mathcal{R}$ sont données par (5.20) page 80. En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad a^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} a^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^{0'} = \gamma_e a^0 - \gamma_e v_e a^1 \\ a^{1'} = -\gamma_e v_e a^0 + \gamma_e a^1 \\ a^{2'} = a^2 \\ a^{3'} = a^3 \end{cases}$$

Exemple 5.11.1 : Vaisseau spatial quittant la Terre

À bord d'un vaisseau spatial, Bob quitte Anna restée sur la Terre, d'un mouvement rectiligne accéléré. À partir de l'instant initial t_0 , la centrale inertielle à bord indique que l'accélération propre $\mathbf{a}$ est constante. La norme de la vitesse du vaisseau dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen est notée v . La relation (5.19) page 79 selon l'axe du mouvement en x donne,

$$a = \frac{\mathcal{a}}{\gamma_v^3}$$

et montre que l'accélération a du vaisseau mesurée sur Terre par Anna tend vers zéro lorsque sa vitesse croît. C'est une condition nécessaire pour qu'il ne dépasse pas la vitesse limite c . Cherchons la vitesse du vaisseau mesurée sur Terre par Anna en fonction de la

durée T écoulée sur Terre :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= a \\ &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \\ \int_0^{v(T)} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} &= \int_0^T a dt\end{aligned}$$

Pour intégrer on utilise

$$\begin{aligned}\beta_v &= \frac{v}{c} \\ c d\beta_v &= dv\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{\beta_v(T)} \frac{d\beta_v}{(1 - \beta_v^2)^{3/2}} &= \frac{a}{c} \int_0^T dt \\ \frac{\beta_v}{(1 - \beta_v^2)^{1/2}} &= \frac{a}{c} T \\ \frac{\beta_v^2}{1 - \beta_v^2} &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2 \\ \beta_v^2 &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2 \beta_v^2 \\ \beta_v^2 \left[1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2\right] &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2 \\ \beta_v^2 &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2 \left[1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1} \\ v^2 &= a^2 T^2 \left[1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1} \\ v(T) &= aT \left[1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1/2}\end{aligned} \tag{5.21}$$

Calculons la distance parcourue dans le référentiel terrestre en fonction du temps terrestre :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \int_0^{X(T)} dx &= a \int_0^T t \left[1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 t^2\right]^{-1/2} dt\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable :

$$\begin{aligned}\theta &= a^2 \frac{t^2}{c^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= 2a^2 \frac{t}{c^2} \\ c^2 \frac{d\theta}{2a} &= at dt\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 X(T) &= \frac{c^2}{2a} \int_0^{a^2 T^2 / c^2} (1 + \theta)^{-1/2} d\theta \\
 &= \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \theta} \right]_0^{a^2 T^2 / c^2} \\
 \boxed{X(T) &= \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} - 1 \right)} \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Inversons cette relation pour avoir la durée en fonction de la distance parcourue :

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{c^2} X + 1 &= \sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} \\
 \left(\frac{a}{c^2} X + 1 \right)^2 - 1 &= \frac{a^2 T^2}{c^2} \\
 T &= \frac{c}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{c^2} X + 1 \right)^2 - 1} \\
 &= \frac{c}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{c^2} \right)^2 X^2 + \frac{2a}{c^2} X}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \sqrt{\left(\frac{X}{c} \right)^2 + \frac{2X}{a}}}$$

Comparons l'écoulement du temps sur Terre à celui à bord du vaisseau :

$$\begin{aligned}
 dt' &= \frac{dt}{\gamma_v} \\
 \int_0^{T'} dt' &= \int_0^T (1 - \beta_v^2)^{1/2} dt
 \end{aligned}$$

Avec (5.21) page précédente :

$$\begin{aligned}
 \beta_v^2 &= \frac{a^2 \frac{t^2}{c^2}}{1 + a^2 \frac{t^2}{c^2}} \\
 (1 - \beta_v^2)^{1/2} &= \left(1 - \frac{a^2 \frac{t^2}{c^2}}{1 + a^2 \frac{t^2}{c^2}} \right)^{1/2} \\
 &= \left(1 + a^2 \frac{t^2}{c^2} \right)^{-1/2}
 \end{aligned}$$

D'où

$$T' = \int_0^T \left(1 + a^2 \frac{t^2}{c^2} \right)^{-1/2} dt$$

On pose

$$\Phi = a \frac{t}{c}$$

$$\frac{c}{a} d\Phi = dt$$

Nous avons :

$$T' = \frac{c}{a} \int_0^{\frac{aT}{c}} (1 + \Phi^2)^{-1/2} d\Phi$$

$$= \frac{c}{a} \left[\arg \sinh(\Phi) \right]_0^{aT/c}$$

$$\boxed{\frac{aT'}{c} = \arg \sinh\left(\frac{aT}{c}\right)}$$

Réciproquement :

$$\boxed{\frac{aT}{c} = \sinh\left(\frac{aT'}{c}\right)}$$

Exprimons la distance parcourue en fonction du temps propre. À partir de (5.22) page ci-contre :

$$X(T) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 T^2} - 1 \right)$$

$$X(T') = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{aT'}{c}\right)} - 1 \right)$$

$$\boxed{X(T') = \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(\frac{aT'}{c}\right) - 1 \right]}$$

Inversons cette relation :

$$\frac{a}{c^2} X + 1 = \cosh\left(\frac{aT'}{c}\right)$$

$$\boxed{T' = \frac{c}{a} \arg \cosh\left(\frac{a}{c^2} X + 1\right)}$$

L'accélération propre a un caractère absolu. Si on l'intègre par rapport au temps propre du vaisseau on obtient la norme de la vitesse propre indiqué en fonction du temps propre par les instruments de bord du vaisseau :

$$u(T') = \int_0^{T'} a dt'$$

$$= aT'$$

Nous pouvons l'exprimer en fonction de la vitesse $v(T)$ mesurée dans le référentiel terrestre :

$$aT' = \int_0^{T'} a dt'$$

$$= \int_0^{T'} \gamma_v^3 a dt'$$

La relation entre temps propre t à bord du vaisseau et temps impropre t' sur Terre donne :

$$dt = \gamma_v(t) dt'$$

$$T = \int \gamma_v(t) dt'$$

Si bien que :

$$aT' = \int_0^T \gamma_v^2 a dt$$

$$u(T') = \int_0^{v(T)} \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= c \left[\arg \tanh \left(\frac{v}{c} \right) \right]_0^{v(T)}$$

$$= c \arg \tanh \left[\frac{v(T)}{c} \right]$$

$$= c \arg \tanh [\beta_v(T)]$$

Avec la déf. 4.4 page 51 de la rapidité φ :

$$u(T') = c\varphi \quad (5.23)$$

$$aT' = c\varphi$$

$$a = \frac{c\varphi}{T'}$$

$$a(t') = c \frac{d\varphi}{dt'} \quad (5.24)$$

L'accélération propre est donc, au facteur c près, la variation de rapidité en fonction du temps propre. Inversons (5.23) :

$$v(T) = c \tanh \left[\frac{u(T')}{c} \right]$$

5.12 Quadrivecteur d'onde

5.12.1 Équation de propagation d'une onde

Soit $\psi = f(x)$ une fonction quelconque de x . Si a est une constante positive, $\psi = f(x - a)$ représente la même fonction translatée de a dans le sens des x croissants puisque la valeur $f(0)$ qui était en $x = 0$ se retrouve en $x = a$. Faisons maintenant intervenir le temps t pour décrire

une « impulsion » qui se propage sans déformation à la vitesse v selon l'axe des x croissants. Elle est représentée par une fonction des variables x et t de la forme :

$$f(x, t) = f(x - vt)$$

$f(x + vt)$ représente bien sûr une propagation selon les x décroissants.

5.12.2 Onde sinusoïdale

Les fonctions circulaires sinus et cosinus servent à contruire un modèle physique très simple d'onde *sinusoïdale*, on dit encore *harmonique* ou *monochromatique* (l'onde n'a qu'une fréquence, donc qu'une couleur). Prenons la fonction cosinus :

$$f(x) = \cos(x)$$

Cette fonction mathématique s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ (domaine de définition $x \in]-\infty, +\infty[$). D'après le § 5.12.1, l'argument d'une fonction quelconque doit être de la forme $(x - vt)$ pour un déplacement de l'ensemble de la fonction selon les x croissants à la vitesse v pour un paramètre temps t croissant. La représentation en x de la fonction

$$\psi(x, t) = \cos(x - vt)$$

avec pour paramètre le temps t croissant, donne l'illusion de la propagation d'une onde selon l'axe des abscisses positifs à la vitesse v , sans dissipation d'énergie. Les points de la courbe oscillent verticalement indépendamment les uns des autres, aucune information n'est transmise d'un point à l'autre, de proche en proche. Cette vitesse apparente qui n'est pas celle d'un transport de matière, d'énergie, ou d'information, est appelée *vitesse de phase* de l'onde et est notée v_φ . Elle est liée au modèle mathématique le plus simple d'une onde, et n'est pas limitée par la vitesse limite de l'espace-temps physique, supposée confondue avec la vitesse lumière.

Remarque 5.12.1

Certains phénomènes donnent l'illusion de se propager plus vite que la vitesse limite. Par exemple un chenillard constitué par un ensemble de diodes alignées qui s'allument les uns après les autres. Si on allume toutes les diodes en même temps la vitesse apparente de propagation (fictive) du signal est infinie. Cela est possible parce que l'allumage d'une diode n'est pas assujéti à l'allumage de la diode précédente, il n'y a pas de transport d'information d'une diode à la suivante, ni de propagation d'un quelconque signal. De même une ola dans un stade pourrait théoriquement dépasser la vitesse de la lumière si chaque personne décidait de se lever à un instant précis donné d'avance, sans se soucier de ce que font les personnes sur ses côtés. Il n'y aurait alors pas de transport d'information d'une personne à l'autre. Si toutes les personnes se lèvent en même temps la vitesse de la ola est infinie. Un autre exemple est le déferlement d'une vague. Si la vague casse en une fois, la vitesse de déferlement est infinie. Même chose pour le point de coupe d'une paire de ciseaux, sa propagation n'est qu'une illusion. Si l'on sépare les lames du ciseaux en les mettant parfaitement parallèles, le point de coupe à une vitesse infinie.

Dans notre modèle, l'onde sinusoïdale ne transporte rien, ni matière, ni énergie, ni information, sa vitesse n'est pas limitée.

L'amplitude de ψ (sa valeur à un instant donné) est comprise entre 1 et -1 . Pour supprimer cette limitation dans notre modèle d'onde périodique, nous introduisons l'*amplitude maximale* ψ_{max} du mouvement :

$$\psi(x, t) = \psi_{max} \cos(x - v_\varphi t)$$

L'argument de toute fonction doit être sans dimension sinon la valeur de la fonction dépendrait de l'unité choisie (par exemple mètre ou pied). Par conséquent les arguments x et t de la fonction cosinus sont ici deux variables sans dimension physique, et v_φ est aussi un paramètre sans dimension.

5.12.3 Équation d'onde en k et ω

Pour donner une dimension physique aux variables x et t , introduisons le *nombre d'onde* k propre à l'onde, homogène à l'inverse d'une longueur pour que x puisse être une longueur. L'équation qui modélise l'onde sinusoïdale devient :

$$\psi(x, t) = \psi_{max} \cos[k(x - v_{\varphi}t)]$$

Définition 5.12.1 : Pulsation ou fréquence angulaire

Définissons la pulsation ou fréquence angulaire de l'onde par

$$\omega \stackrel{\text{déf}}{=} kv_{\varphi}$$

l'équation s'écrit :

$$\psi(x, t) = \psi_{max} \cos(kx - \omega t)$$

Pour que ψ reste une sinusoïde sans se déformer dans le temps et dans l'espace, k et ω , et donc v_{φ} , doivent être des constantes dans l'espace et dans le temps. Puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'à l'origine des temps et de l'espace $\psi(0, 0)$ soit égale à ψ_{max} , nous introduisons une constante φ_0 . L'équation d'onde en k et ω s'écrit :

$$\psi(x, t) = \psi_{max} \cos(kx - \omega t + \varphi_0) \quad (5.25)$$

On pose les définitions :

Définition 5.12.2 : Phase du mouvement sinusoïdal

$$\varphi(x, t) \stackrel{\text{déf}}{=} kx - \omega t + \varphi_0$$

Définition 5.12.3 : Phase à l'origine des temps et de l'espace

$$\varphi_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(0, 0)$$

5.12.4 Période spatiale

$\psi(x, t)$ étant une fonction cosinus, elle est périodique dans l'espace,

$$\begin{aligned} \psi_{max} \cos(kx - \omega t) &= \psi_{max} \cos(kx - \omega t + 2\pi) \\ &= \psi_{max} \cos\left[k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) - \omega t\right] \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \psi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) \\ &= \psi(x + \lambda, t) \end{aligned}$$

L'onde se répète identique à elle-même dans l'espace, toutes les distances multiples de λ .

Définition 5.12.4 : Longueur d'onde

La période spatiale de l'onde s'appelle la longueur d'onde, λ .

C'est par exemple la distance entre deux maxima ou entre deux minima d'amplitude de l'onde. On se représente facilement λ , elle donne sens au nombre d'onde que nous avons introduit précédemment :

$$k \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2\pi}{\lambda}$$

5.12.5 Période temporelle

De la même façon, $\psi(x, t)$ est périodique dans le temps,

$$\begin{aligned}\psi_{\max} \cos(kx - \omega t) &= \psi_{\max} \cos(kx - \omega t + 2\pi) \\ &= \psi_{\max} \cos \left[kx - \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \right]\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \psi \left(x, t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \\ &= \psi(x, t + T)\end{aligned}$$

L'onde se répète identique à elle-même dans le temps, toutes les durées multiples de T . La période temporelle de l'onde est appelée simplement *période* de l'onde.

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{kv_{\varphi}} \\ &= \frac{2\pi}{v_{\varphi}} \frac{\lambda}{2\pi}\end{aligned}$$

Définition 5.12.5 : Période

$$T \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\lambda}{v_{\varphi}}$$

On se représente facilement T , elle donne sens à la pulsation que nous avons introduit précédemment :

$$\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2\pi}{T}$$

5.12.6 Équation d'onde en lambda et T

En λ et T , l'équation de l'onde (5.25) page 88 devient :

$$\psi(x, t) = \psi_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$$

5.12.7 Équation d'onde en sigma et nu

Posons les définitions suivantes :

Définition 5.12.6 : Fréquence spatiale d'une onde

$$\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\lambda}$$

Définition 5.12.7 : Fréquence temporelle d'une onde

$$\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{T}$$

L'équation d'onde en σ et ν s'écrit :

$$\psi(x, t) = \psi_{max} \cos [2\pi (\sigma x - \nu t + \varphi_0)]$$

En résumé, pour la partie spatiale nous avons :

$$\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma \\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma} \\ \sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \end{cases}$$

On mesure alors la longueur d'onde λ ou la fréquence spatiale σ et l'on calcule k . Pour la partie temporelle :

$$\begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \\ \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \end{cases}$$

On mesure la période T ou la fréquence ν et l'on calcule ω . Les relations suivantes donnent le passage entre parties spatiale et temporelle :

$$\begin{cases} \omega = kv_\varphi = \frac{2\pi\nu_\varphi}{\lambda} = 2\pi\sigma\nu_\varphi \\ k = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi}{Tv_\varphi} = \frac{2\pi\nu}{v_\varphi} \end{cases}$$

5.12.8 L'onde plane harmonique

Considérons un gaz contenu dans une enceinte parallélépipédique rectangle. Si l'une des parois de l'enceinte oscille parallèlement à elle-même, une onde plane de pression est créée dans le gaz. Un plan d'onde est défini comme un plan dans lequel la pression est égale en tout point de ce plan.

Soit O le centre d'un repère, et soit P un point quelconque de ce plan d'onde. Appelons $\mathbf{r}$ le rayon vecteur $\overrightarrow{OP}$, et $\mathbf{s}$ le vecteur vitesse de phase unitaire de direction et de sens celui de la propagation du plan d'onde :

$$\mathbf{s} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{v}_\varphi}{\|\mathbf{v}_\varphi\|} \quad (5.26)$$

Le plan d'onde est défini par l'ensemble des points P tels qu'à un instant t fixé,

$$\mathbf{r}(P) \cdot \mathbf{s} = D(t)$$

C'est la projection de $\mathbf{r}$ sur $\mathbf{s}$, où la fonction du temps $D(t)$ est la distance du point O au plan d'onde à l'instant t , comme indiqué sur la figure 5.1.

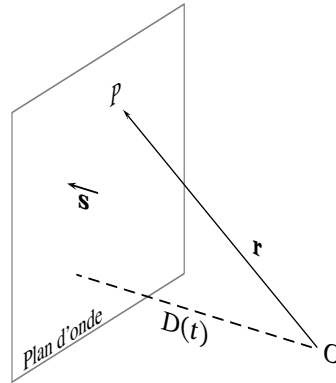


FIG. 5.1 – Plan d'onde

Nous tirons avantage de la notation complexe pour les fonctions circulaires. Il est plus simple de différentier ou d'intégrer la fonction exponentielle car elle ne change pas de forme. Nous effectuons donc le passage

$$\cos(kx - \omega t) \rightarrow e^{i(kx - \omega t)}$$

et nous ne conserverons que la partie réelle des résultats à venir. En supposant nulle la phase à l'origine, le modèle d'onde périodique (5.25) page 88 s'écrit

$$\psi(x, t) = \psi_{\max} e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.27)$$

5.12.9 Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$

À partir du nombre d'onde, déf. 5.12.1 page 88, et de la définition (5.26) page précédente du vecteur vitesse de phase unitaire, on définit le *vecteur d'onde* :

Définition 5.12.8 : Trivecteur d'onde

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &\stackrel{\text{déf}}{=} k\mathbf{s} \\ &= \frac{\omega}{v_\varphi} \mathbf{s}\end{aligned}$$

$$\mathbf{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \mathbf{k} \begin{pmatrix} \omega/v_{\varphi_x} \\ \omega/v_{\varphi_y} \\ \omega/v_{\varphi_z} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons à présent généraliser l'équation d'onde (5.27) à une onde plane :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_{\max} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

5.12.10 Invariance de la phase de l'onde plane sinusoïdale

Pour construire le 4-vecteur d'onde, montrons l'invariance relativiste de la phase de l'onde plane sinusoïdale. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). Un train d'ondes sphériques est émis au moment où les deux référentiels se croisent en $O = O'$ à $(t = t' = 0)$. Il arrive au point M' de $\mathcal{R}'$ à l'instant $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'/v'_\varphi$, et fini de passer à l'instant t' , pour un temps total de passage en M' :

$$t' - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'/v'_\varphi$$

Remarque 5.12.2

Au voisinage d'un point loin de la source O , la sphère est approximée par son plan tangent en ce point, et les ondes sont supposées planes.

Ce même train d'onde arrive au point M de $\mathcal{R}$ à l'instant $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}/v_\varphi$, et fini de passer à l'instant t , pour un temps total de passage en M :

$$t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}/v_\varphi$$

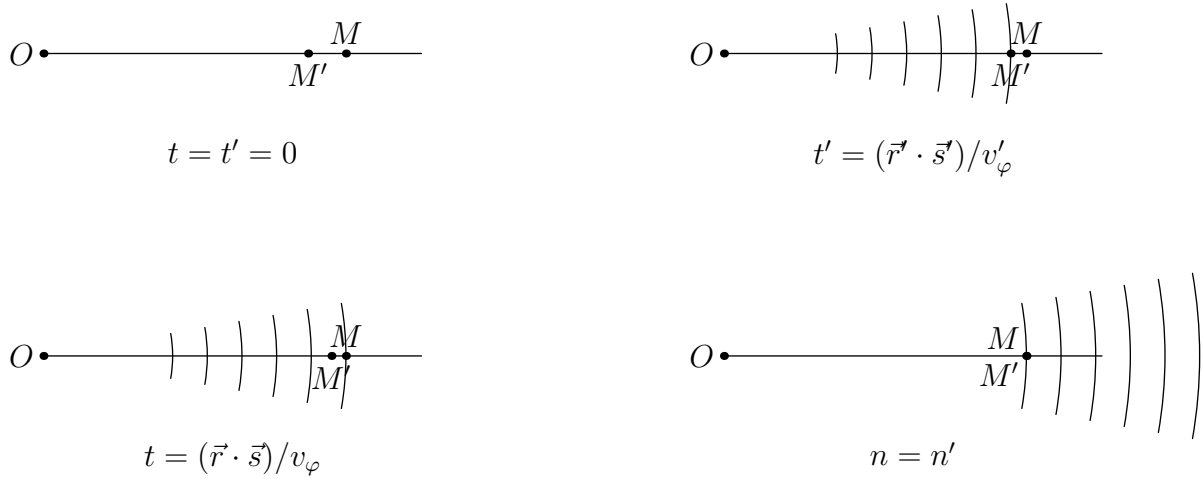


FIG. 5.2 – Onde plane dans le référentiel $\mathcal{R}$

Soient ν et ν' la fréquence de l'onde mesurée respectivement dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Les nombres n et n' de crêtes (nombre de maxima ou de minima d'amplitude) sont les mêmes dans les deux référentiels puisqu'il s'agit du même train d'ondes :

$$\begin{aligned}
 n &= n' \\
 \nu \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v_\phi} \right) &= \nu' \left(t - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'}{v'_\phi} \right) \\
 \frac{\omega}{2\pi} \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{\omega} \right) &= \frac{\omega'}{2\pi} \left(t - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}'}{\omega'} \right) \\
 \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} &= \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'
 \end{aligned}$$

La phase d'une onde sinusoïdale est bien invariante par changement de référentiel galiléen, quelle que soit sa vitesse de phase. On pourrait le vérifier en lui appliquant la transformation de Lorentz-Poincaré. Cet invariant relativiste peut s'écrire comme le 4-produit scalaire d'un 4-vecteur d'onde $[_4k](k^0, \mathbf{k})$ dont la partie temporelle reste à définir, avec la 4-position (c est ici la vitesse limite et non celle de la lumière) :

$$\begin{aligned}
 [_4k](k^0, \mathbf{k}) \cdot [_4x](ct, \mathbf{r}) &= k^0 ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \\
 &= \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

Donc $k^0 = \omega/c$:

Définition 5.12.9 : Quadrivecteur d'onde

Le 4-vecteur d'onde a pour composantes :

$$[_4k] = [_4k] \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$$

Notation 5.12.1

En notation indicielle le 4-vecteur d'onde s'écrit $[_4k](k^0, k^1, k^2, k^3)$ ou k^μ .

5.12.11 Quadrinorme du quadrivecteur d'onde

Comme pour tout 4-vecteur, la 4-norme du 4-vecteur d'onde est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[_4k]\|^2 &= \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} - \|\mathbf{k}\|^2 \\ &= \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_\varphi^2} \right)\end{aligned}$$

On modélise une onde électromagnétique monochromatique (un LASER parfait) se propageant dans le vide, par une sinusoïde dont la vitesse de phase est la vitesse de la lumière. On suppose de plus que la lumière se propage à la vitesse limite :

$$v_\varphi = c$$

Par conséquent, avec la déf. 5.12.8 page 92

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{s}$$

et :

$$\|[_4k]\|^2 = 0$$

Les 4-vecteurs d'ondes électromagnétiques sont alors des 4-vecteurs nuls (Cf. Vol. 1 Notion d'espace).

5.12.12 Transformation spéciale des composantes du quadrivecteur d'onde

Le 4-vecteur d'onde étant un 4-vecteur, seules ses composantes se transforment par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Soient les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3) :

$$[_4k] \begin{pmatrix} k_t \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = [_4k]' \begin{pmatrix} k'_t \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k'_t = \gamma_e(k_t - v_e k_x) \\ k'_x = \gamma_e(k_x - v_e k_t) \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \end{cases}$$

où les composantes du 4-vecteur d'onde dans $\mathcal{R}$ sont données par (5.12.9) page précédente. En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad k^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} k^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k^{0'} = \gamma_e k^0 - \gamma_e v_e k^1 \\ k^{1'} = -\gamma_e v_e k^0 + \gamma_e k^1 \\ k^{2'} = k^2 \\ k^{3'} = k^3 \end{cases}$$

5.13 Quadrivecteur densité numérique-flux

Reprenons la définition du nombre volumique d'éléments donnée dans le Vol. 2 Mécanique classique. L'évènement E_0 est maintenant un point non plus dans l'espace et dans le temps, mais dans l'espace-temps. ρ_n est absolu, tous les observateurs s'accordent sur sa valeur, puisqu'elle n'est mesurée que dans $\mathcal{R}$. Considérons un 3-volume V au repos dans $\mathcal{R}$, supposons que ce soit un parallélépipède rectangle dont l'un des bords est selon l'axe x . Pour un observateur dans $\mathcal{R}'$ en configuration standard avec $\mathcal{R}$, par contraction de Lorentz selon les x :

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\Delta x}{\gamma_v} \Delta y \Delta z \\ &= \frac{V}{\gamma_v} \end{aligned}$$

Pour la densité nous avons alors :

$$\begin{aligned} \rho'_n &= \frac{n}{V'} \\ &= \gamma_v \rho_n \end{aligned}$$

Cette relation est similaire à celle entre temps propre et temps impropre (3.4) page 29. Par analogie avec la déf. 5.8.1 page 69 de la 4-vitesse, on construit un nouveau 4-vecteur.

Définition 5.13.1 : Quadridensité numérique-flux

La 4-densité numérique-flux est le produit de la densité numérique par la 4-vitesse :

$$[{}_4\rho_n] \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_n [{}_4u]$$

Remarques 5.13.1

- On peut s'assurer que $[{}_4\rho_n]$ est bien un 4-vecteur par le raisonnement suivant. La charge est un invariant relativiste par hypothèse observationnelle, donc la charge infinitésimale ρdv également. Dans l'égalité ci-dessous, le membre de gauche est un 4-vecteur, donc le membre de droite également.

$$\rho dv dx^i = \rho dv dt \frac{dx^i}{dt}$$

Or $dv dt$ est un scalaire car :

$$\begin{aligned} dv' dt' &= \frac{dv}{\gamma_v} \gamma_v dt \\ &= dv dt \end{aligned}$$

Donc $\rho \frac{dx^i}{dt}$ est un 4-vecteur.

- En coordonnées galiléennes réduites :

$$\begin{aligned} d\Omega &\stackrel{\text{déf}}{=} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= c dt dv \\ &= dv \end{aligned}$$

$d\Omega$ est un invariant de Lorentz en tant que 4-volume élémentaire de l'espace-temps relativiste absolu.

$$\begin{aligned}
 [{}_4\rho_n] &= [{}_4\rho_n](\rho_n\gamma_v c, \rho_n \mathbf{u}) \\
 &= [{}_4\rho_n](\gamma_v \rho_n c, \gamma_v \rho_n \mathbf{v}) \\
 &= [{}_4\rho_n](\rho'_n c, \rho'_n \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

Dans $\mathcal{R}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et les composantes spatiales de $[{}_4\rho_n]$ sont donc nulles. Il reste à comprendre ce qu'elles représentent dans $\mathcal{R}'$. Soit une surface d'aire A' fixe dans $\mathcal{R}'$ et perpendiculaire au mouvement relatif des référentiels (donc $A' = A$). Notez que cette surface n'a pas de rapport avec le parallélépipède rectangle qui nous a permis de mesurer le nombre volumique. Dans l'expression

$$\gamma_v \rho_n v_x \Delta t' A'$$

$v_x \Delta t' A'$ est un volume, et cette expression est le nombre d'éléments passant à travers l'aire A' en un temps $\Delta t'$ vu depuis $\mathcal{R}'$, dans lequel la densité est $\rho'_n = \gamma_v \rho_n$. Donc la composante spatiale $\gamma_v \rho_n v_x$ est le nombre d'éléments passant à travers une surface par unité d'aire et par unité de temps, autrement dit le *flux* de poussière selon l'axe x' . Dans $\mathcal{R}'$ les autres composantes spatiales ρ_{ny} et ρ_{nz} sont nulles.

Exemple 5.13.1

Le 4-vecteur densité-courant électrique s'écrit

$$[{}_4j] = (c\rho, \mathbf{j})$$

où ρ est la densité volumique de charge et $\mathbf{j}$ est la densité de courant (Cf. Vol. 2 Mécanique classique).

Chapitre 6

DYNAMIQUE RELATIVISTE

Sommaire

6.1 Masse inerte	97
6.2 Quadrivecteur impulsion	98
6.3 Énergie relativiste	99
6.4 Quadrivecteur force	106
6.5 Quadri-opérateur nabla	108
6.6 Quadrigradient	109
6.7 Équation de conservation	110

6.1 Masse inerte

Pour un choc à vitesse relative v quasi nulle, on doit retrouver la conservation de la quantité de mouvement de la mécanique classique (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), c.-à-d.

$$k = \frac{m_2}{m_1}$$

où m_1 et m_2 sont les masses inertes des corps 1 et 2, indépendantes de la vitesse relative v avant l'interaction. Lorsque cette vitesse relative tend vers zéro, les référentiels galiléens des corps avant impact sont quasi confondus. La mesure a donc quasiment lieu dans le référentiel galiléen commun aux corps 1 et 2. La masse inerte d'un système est par définition mesurée dans le référentiel propre de ce système, donc pour une vitesse d'interaction quasi nulle.

La masse inerte d'un système mesurée dans le référentiel propre de ce système, notée simplement m ou parfois m_0 , ne peut être qu'*absolue*, tous les observateurs s'accordent évidemment sur sa valeur. Elle est appelée *masse propre*, *masse intrinsèque*, *masse au repos*, *masse invariable* ou simplement *masse*.

6.2 Quadrivecteur impulsion

Définition 6.2.1 : Quadri-impulsion

La 4-impulsion d'un mobile dans $\mathcal{R}$ est le produit de sa masse par sa 4-vitesse dans $\mathcal{R}$, (5.13) page 69 :

$$[{}_4p] \stackrel{\text{déf}}{=} m[{}_4u]$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2 de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} [{}_4p] &= [{}_4p](m\gamma_v c, mu^x, mu^y, mu^z) \\ &= [{}_4p] \left(\gamma_v mc, m \frac{dx}{dt'}, m \frac{dy}{dt'}, m \frac{dz}{dt'} \right) \end{aligned}$$

Définition 6.2.2 : Inertie

L'inertie ou masse relativiste d'un mobile de 3-vecteur vitesse $\mathbf{v}$ dans un référentiel galiléen est le produit de la masse de ce mobile par le facteur relativiste lié à sa vitesse :

$$I(\mathbf{v}) \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_v m$$

Remarque 6.2.1

Contrairement à la masse, l'inertie n'est pas absolue, ce n'est pas un invariant relativiste car elle dépend de la vitesse de l'observateur. Elle ne peut donc pas être la charge gravitationnelle relativiste, la masse qui apparaît dans les équations de la relativité générale. Si c'était le cas, un observateur ayant une vitesse suffisamment élevée par rapport à une étoile la percevrait comme un trou noir.

Définition 6.2.3 : Quantité de mouvement relativiste

Le 3-vecteur quantité de mouvement relativiste ou 3-impulsion ^a relativiste d'un mobile est le produit :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_v m \mathbf{v} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} I \mathbf{v} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} m \mathbf{u} \end{aligned} \tag{6.1}$$

a. Originellement, une impulsion désignait une variation de quantité de mouvement $\Delta \mathbf{p}$

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) , la 3-quantité de mouvement relativiste a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}(mu_x, mu_y, mu_z) \\ &= \mathbf{p} \left(m \frac{dx}{dt'}, m \frac{dy}{dt'}, m \frac{dz}{dt'} \right) \end{aligned}$$

La 4-impulsion généralise à l'espace-temps la 3-impulsion relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle de même dimension.

Remarques 6.2.1

- À faible vitesse devant c ou lorsque c tend vers l'infini, $m\mathbf{u}$ tend vers le 3-vecteur quantité de mouvement non relativiste $m\mathbf{v}$.
- En utilisant (4.5) page 52, on exprime la quantité de mouvement relativiste en fonction de la rapidité :

$$\mathbf{p} = \sinh(\varphi)m\mathbf{v}$$

6.3 Énergie relativiste

Pour faire le lien avec la mécanique classique, prenons une vitesse v petite devant la vitesse limite c . Le facteur relativiste γ_v tendant vers un, l'inertie tend vers la masse inerte. La partie spatiale du 4-vecteur impulsion, c.-à-d. la 3-quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}$, tend vers la quantité de mouvement non relativiste $m\mathbf{v}$.

Pour la partie temporelle du 4-vecteur impulsion, remarquons que le facteur relativiste déf. 2.2.1 page 21 s'écrit sous la forme

$$\gamma_v = (1 + x)^\alpha$$

avec $\alpha = -1/2$ et $x = -v^2/c^2$, tel que $x \in [-1; 1]$. Prenons son développement en série :

$$\begin{aligned}\gamma_v &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots\end{aligned}$$

La somme des termes au delà du rang i devient négligeable devant le terme de rang i asymptotiquement (lorsque i tend vers l'infini). Nous pouvons approximer le facteur relativiste en limitant le développement au rang que l'on souhaite, l'approximation étant d'autant meilleure que v^2/c^2 est proche de zéro. Pour $v \ll c$, le développement limité à l'ordre deux s'écrit :

$$\begin{aligned}\gamma_v &= 1 + \frac{-1}{2} \left(\frac{-v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{2} - 1 \right) \right] \left(\frac{-v^2}{c^2} \right)^2 + o \left[\left(\frac{-v^2}{c^2} \right)^2 \right] \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2\end{aligned}$$

Notons p^0 la composante temporelle de la 4-impulsion. La multiplication par c nous fait passer du domaine des impulsions au domaine des énergies :

$$\begin{aligned}p^0 &= \gamma_v mc \\ &\approx mc + \frac{mv^2}{2c} + \frac{3mv^4}{8c^3} \\ p^0 c &\approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2}\end{aligned}\tag{6.2}$$

Le premier terme mc^2 est une énergie constante qui existe aussi à vitesse nulle, donc dans le référentiel propre. Le deuxième terme $mv^2/2$ est l'énergie cinétique de la mécanique classique.

Définition 6.3.1 : Énergie au repos

L'énergie au repos d'un système, ou énergie propre, ou énergie de masse est le produit :

$$E_0 \stackrel{\text{déf}}{=} mc^2$$

E_0 n'existe pas en mécanique classique parce que l'on ne mesure ou calcule que des différences d'énergie. Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie au repos est la masse (inerte au repos) du système.

Remarque 6.3.1

Faire la différence entre énergie au repos et masse inerte revient à faire la différence entre un prix en dollars et un prix en euros avec un taux de change fixe.

Définition 6.3.2 : Énergie cinétique relativiste

L'énergie cinétique relativiste d'un mobile est toute l'énergie due à son mouvement relatif, donc l'ensemble des termes contenant v :

$$\begin{aligned} T &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} (\gamma_v - 1) mc^2 \end{aligned}$$

Remarque 6.3.2

Lorsque la vitesse tend vers c le facteur relativiste γ_v tend vers l'infini et donc l'énergie cinétique tend aussi vers l'infini. Il existe une vitesse limite mais pas une énergie cinétique limite.

Définition 6.3.3 : Énergie totale relativiste

L'énergie totale est la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique relativiste :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{déf}}{=} E_0 + T \\ &= \gamma_v mc^2 \\ &= Ic^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie totale relativiste du système est son inertie I . La relation (6.3) est appelée *équivalence masse-énergie*. Elle donne la possibilité théorique de transformer de la masse en énergie et de l'énergie en masse. En relativité il n'y a donc plus conservation de la masse ni de l'énergie, mais de la masse-énergie.

La 4-impulsion s'écrit :

$$[_4p](Ic, \mathbf{p}) = [_4p]\left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \tag{6.4}$$

L'énergie totale (et par conséquent l'inertie) est la composante temporelle du 4-vecteur impulsion, au facteur c près. L'énergie totale est donc l'analogue de la quantité de mouvement dans l'espace, elle mesure le mouvement dans le temps. Tout objet a une énergie totale relativiste car il se déplace dans le temps de l'observateur. Il a toujours à minima une énergie propre, énergie au repos E_0 , car il se déplace dans son temps propre τ .

Remarques 6.3.1

- Multiplier la 4-impulsion par c la rend homogène à une énergie, pour former une sorte de « quadri-énergie ». Diviser la 4-impulsion par c la rend homogène à une masse, pour former une sorte de « quadri-inertie ». Elle n'est jamais homogène aux trois en même temps, sauf lorsque $c = 1$. Nous devrions l'appeler 4-vecteur inertie-énergie-impulsion, mais nous retiendrons le terme 4-impulsion.
- En utilisant (4.5) page 52, on exprime l'énergie totale en fonction de la rapidité :

$$E = \cosh(\varphi)mc^2$$

Les définitions (6.1) page 98 et (6.3) donnent une nouvelle relation pour la 3-quantité de mouvement relativiste :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= I\mathbf{v} \\ c^2\mathbf{p} &= c^2I\mathbf{v} \\ &= E\mathbf{v}\end{aligned}$$

L'énergie totale est liée à l'énergie au repos et à la 3-quantité de mouvement relativiste :

$$\begin{aligned}\gamma_v^2 &= \frac{1}{1 - \beta^2} \\ \gamma_v^2 - \frac{\gamma_v^2 v^2}{c^2} &= 1 \\ \gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 v^2 m^2 c^2 &= m^2 c^4\end{aligned}$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (6.5)$$

6.3.1 Quadrinorme de la quadri-impulsion

La 4-norme de la 4-impulsion est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[_4p]\|^2 &= [_4p] \cdot [_4p] \\ &= m[_4u] \cdot m[_4u] \\ &= m^2 \|[_4u]\|^2 \\ &= m^2 c^2 \\ &= mE_0 \\ &= \frac{E_0^2}{c^2}\end{aligned}$$

Nous pouvons également trouver ce résultat en remarquant que dans le référentiel propre :

$$[_4p]'(mc, \mathbf{0})$$

La 4-norme de la 4-impulsion étant invariante :

$$\begin{aligned}\|[_4p]\|^2 &= \|[_4p]'\|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{c^2}\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\|[_4p]\|^2 &= p_t^2 - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p^2\end{aligned}$$

et avec le résultat précédent nous retrouvons (6.5). En inversant le raisonnement nous pouvons dire que la masse est invariante car c'est la 4-norme d'un 4-vecteur (la 4-impulsion), en revanche l'inertie n'est pas un invariant relativiste car c'est la partie temporelle de ce même 4-vecteur.

6.3.2 Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadriposition

Avec le 4-produit scalaire de la 4-vitesse avec la 4-position § 5.8.2 page 71 :

$$\begin{aligned}[_4p] \cdot [_4x] &= m[_4u] \cdot m[_4x] \\ &= mc^2 t'\end{aligned}$$

C'est un invariant.

6.3.3 Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadrivitesse

Le 4-produit scalaire de la 4-vitesse de Bob par sa 4-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}[_4p] \cdot [_4u] &= m[_4u] \cdot [_4u] \\ &= mc^2\end{aligned}$$

6.3.4 Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadri-accélération

Le 4-produit scalaire de la 4-accélération et de la 4-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}[_4p] \cdot [_4a] &= m[_4u] \cdot m[_4a] \\ &= 0\end{aligned}$$

Ils sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps.

6.3.5 Particules de masse nulle - Cas des photons

D'après la déf. 6.3.3 page 100, l'énergie totale relativiste d'une particule a pour expression :

$$\begin{aligned}E &= \gamma_v mc^2 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Pour avoir une énergie non nulle, une particule de masse nulle doit se déplacer à la vitesse limite. Réciproquement, une particule se déplaçant à la vitesse limite doit avoir une masse nulle sinon son énergie totale serait infinie. Dans le cas d'une particule de masse nulle se déplaçant à la vitesse limite, l'expression précédente donne zéro sur zéro et l'énergie de la particule est indéterminée (plus précisément, elle ne peut être déterminée par cette expression).

Supposons que la masse du photon soit nulle et qu'il se déplace à la vitesse limite. Son énergie (donc son inertie) et sa 3-quantité de mouvement relativiste ne sont pas nulles, car en utilisant la relation de Planck qui lie l'énergie totale du photon à sa fréquence ν , nous avons :

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ I &= \frac{h\nu}{c^2} \end{aligned}$$

Avec la déf. 6.2.3 page 98, la norme de son 3-vecteur quantité de mouvement relativiste s'écrit :

$$\begin{aligned} p &= Ic \\ &= \frac{h\nu}{c} \end{aligned}$$

Si donc la masse du photon est nulle et sa vitesse constante (égale à la vitesse limite), il a quand même une énergie (donc une inertie) et une 3-quantité de mouvement relativiste non nulles, et variables car fonctions de la fréquence ν . Les grandeurs E et $\mathbf{p}$ sont donc plus fondamentales que les grandeurs masse et vitesse, car elles subsistent lorsque la masse est nulle et la vitesse constante.

6.3.6 Transformation spéciale des composantes de la quadri-impulsion

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). La 4-impulsion étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[_4p] \begin{pmatrix} p_t \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = [_4p]' \begin{pmatrix} p'_t \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p'_t = \gamma_e(p_t - v_e p_x) \\ p'_x = \gamma_e(p_x - v_e p_t) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

où les composantes de la 4-impulsion sont données par (6.4) page 100.

Remarque 6.3.3

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer v_e par v_e/c .

Notation 6.3.1

En notation indicielle avec la convention de sommation :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad p^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} p^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p^{0'} = \gamma p^0 - \gamma v_e p^1 \\ p^{1'} = -\gamma v_e p^0 + \gamma p^1 \\ p^{2'} = p^2 \\ p^{3'} = p^3 \end{cases}$$

6.3.7 Conservation de la quadri-impulsion

Comme tout 4-vecteur, la 4-impulsion d'un mobile est invariante par changement de référentiel galiléen, mais cela ne signifie pas, ni n'implique, que la somme des 4-impulsions (appelée 4-impulsion totale) de deux mobiles se conserve lors de leur interaction. Invariance et conservation sont deux notions distinctes.

D'après (6.2) page 99, à vitesse basse mais non nulle, la composante temporelle de la 4-impulsion d'un mobile donne son énergie cinétique sur c (à la constante mc^2 près), et les composantes spatiales donnent la quantité de mouvement de ce mobile. Ces deux quantités se conservent lors d'une interaction en mécanique classique (l'énergie d'agitation thermique est une forme d'énergie cinétique).

On vérifie expérimentalement mais on ne peut démontrer que la somme des 4-impulsions *se conserve lors d'une interaction*, autrement dit la 4-impulsion d'un système isolé *se conserve dans le temps* (y compris lorsque ce système isolé évolue dans le temps). Puisque la somme des 4-impulsions se conserve, les 4-impulsions sont *additive*. Ainsi, la 4-impulsion d'un mobile isolé est la somme des 4-impulsions de ses sous-parties constituantes. La loi de conservation de la somme des 4-impulsions réunit la conservation de la masse et donc de l'énergie, et celle de la quantité de mouvement.

Soient deux systèmes de 4-impulsion $[_4p]_1$ et $[_4p]_2$. Par hypothèse basée sur l'expérience :

$$\begin{aligned} [_4p]_1 + [_4p]_2 &= [_4p]'_1 + [_4p]'_2 \\ \forall \mu = 1, \dots, 4 \quad p_1^{\mu} + p_2^{\mu} &= p_1'^{\mu} + p_2'^{\mu} \end{aligned}$$

- la partie temporelle donne la conservation de l'inertie et non plus celle de la masse inerte de la mécanique classique. Avec (6.4) page 100 :

$$\begin{aligned} p_1^0 + p_2^0 &= p_1'^0 + p_2'^0 \\ I_1 c + I_2 c &= I_1' c + I_2' c \\ I_1 + I_2 &= I_1' + I_2' \end{aligned}$$

L'inertie $I(v)$ d'un mobile, donc son énergie totale $E = Ic^2$, n'est pas invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais la somme des inerties (donc des énergies totales) est conservée par hypothèse lors d'une interaction.

Réciproquement, la masse m d'un mobile, donc son énergie au repos $E_0 = mc^2$, est absolue puisqu'elle n'est définie que dans le référentiel propre de ce mobile, mais la somme des

masses (donc des énergies au repos) ne se conserve pas lors d'une interaction puisque c'est la somme des énergies totales qui se conserve.

- la partie spatiale donne la conservation de la quantité de mouvement relativiste (déf. 6.2.3 p. page 98) selon chaque axe :

$$\begin{cases} p_1^1 + p_2^1 = p_1^{1'} + p_2^{1'} \\ p_1^2 + p_2^2 = p_1^{2'} + p_2^{2'} \\ p_1^3 + p_2^3 = p_1^{3'} + p_2^{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{x_1} + p_{x_2} = p_{x_1}' + p_{x_2}' \\ p_{y_1} + p_{y_2} = p_{y_1}' + p_{y_2}' \\ p_{z_1} + p_{z_2} = p_{z_1}' + p_{z_2}' \end{cases}$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$$

La conservation de la quantité de mouvement est remplacée par la conservation de la quantité de mouvement relativiste, l'inertie $I(v) = \gamma_v m$ remplaçant la masse inerte m .

La quantité de mouvement relativiste d'un mobile n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais par hypothèse la somme des quantités de mouvement relativistes se conserve lors d'une interaction.

Nous devons distinguer les grandeurs

- invariantes* par changement de référentiel. Ces grandeurs sont attachées à un système, par exemple la masse, la charge électrique, les quadrivecteurs et les quadritenseurs.
- conservées* au cours d'une interaction entre deux ou plusieurs systèmes. C'est la somme des grandeurs qui est conservée, par exemple l'énergie totale, l'inertie totale, la quantité de mouvement totale, le quadrivecteur impulsion-énergie total.

Certaines grandeurs appartiennent aux deux catégories (le quadrivecteur impulsion-énergie est invariant et la somme des quadrivecteurs impulsion-énergie se conserve).

Grandeur	Classique	Relativiste
énergie E	non invariante-conservée	non invariante-conservée ($E = I c^2$)
inertie I	invariante-conservée ($I = m$)	non invariante-conservée ($I = E/c^2$)
masse m	invariante-conservée ($m = I$)	invariante-non conservée ($m = U/c^2$)
énergie interne U	invariante-non conservée	invariante-non conservée ($U = m c^2$)

En mécanique classique il existe une quantité indépendante de plus qu'en mécanique relativiste, et une loi de conservation de plus, donc autant de contraintes dans les deux théories. L'inertie est une « grandeur charnière » entre les deux théories : elle s'identifie à la masse en mécanique classique, et à l'énergie en relativité.

Grandeur	Classique	Relativiste
Invariante	masse=inertie, énergie interne	énergie interne=masse
Conservée	énergie, masse=inertie	énergie=inertie

6.4 Quadrivecteur force

Définition 6.4.1 : Quadriforce

La 4-force exercée sur un système est la dérivée de la 4-impulsion de ce système par rapport au temps propre de ce système :

$$[{}_4f] \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d[{}_4p]}{d\tau}$$

Autrement dit

$$[{}_4f] \left(c \frac{d(\gamma_v m)}{d\tau}, \frac{d(\gamma_v m \mathbf{v})}{d\tau} \right)$$

En supposant la masse (inerte au repos) du système constante, avec (5.18) page 77 :

$$[{}_4f] = m[{}_4a] \left(c \frac{d\gamma_v}{d\tau}, \mathbf{a} \right)$$

d'où

$$[{}_4f] \left(m \frac{\gamma_v^4}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, m \gamma_v^2 \mathbf{a} + m \frac{\gamma_v^4}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right)$$

Définition 6.4.2 : Trivecteur force relativiste

La 3-force relativiste est la dérivée de la 3-quantité de mouvement relativiste par le temps propre :

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$$

Avec la déf. 6.2.3 page 98 de la 3-quantité de mouvement relativiste :

$$\mathbf{f} = \frac{d(m\mathbf{u})}{d\tau}$$

En supposant la masse constante, avec la déf. 5.10.1 page 76 de l'accélération propre :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= m\mathbf{a} \\
 &= m \left[\gamma_V^2 \mathbf{a} + \frac{\gamma_V^4}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right] \\
 \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \gamma_V^2 m \left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) + \frac{\gamma_V^2}{c^2} v^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right] \\
 &= \gamma_V^2 m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \left(1 + \frac{\gamma_V^2 v^2}{c^2} \right) \\
 &= \gamma_V^2 m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \left(1 + \frac{v^2}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} \right) \\
 &= \gamma_V^2 m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \left(\frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} \right) \\
 &= \gamma_V^4 m \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

La 4-force généralise à l'espace-temps la 3-force relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle :

$$[{}_4f] \left(\frac{1}{c} \vec{f} \cdot \mathbf{v}, \vec{f} \right)$$

$$[{}_4f] \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{f} \cdot \mathbf{v} \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

6.4.1 Transformation spéciale des composantes de la quadriforce

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.1.5 page 3). La quadriforce étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[{}_4f] \begin{pmatrix} f_t \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = [{}_4f]' \begin{pmatrix} f'_t \\ f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f'_t = \gamma_e(f_t - v_e f_x) \\ f'_x = \gamma_e(f_x - v_e f_t) \\ f'_y = f_y \\ f'_z = f_z \end{cases}$$

où les composantes de la quadriforce sont données par (6.6) de la présente page.

Remarque 6.4.1

Pour retrouver les formules avec $c = 299\,792\,458$ m/s, remplacer v_e par v_e/c .

Notation 6.4.1

En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \quad f^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} f^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f^{0'} = \gamma_e f^0 - \gamma_e v_e f^1 \\ f^{1'} = -\gamma_e v_e f^0 + \gamma_e f^1 \\ f^{2'} = f^2 \\ f^{3'} = f^3 \end{cases}$$

6.5 Quadri-opérateur nabla

Définition 6.5.1 : Quadri-opérateur nabla

Le 4-opérateur nabla est une généralisation à l'espace-temps du 3-opérateur purement spatial nabla :

$$\nabla_4 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

On vérifie qu'il est bien covariant par la transformation de Lorentz. Soit $f = f(x, ct)$ une fonction quelconque de l'espace et du temps. Puisque $x = x(x', ct')$ et $ct = ct(x', ct')$, on a également $f(x, ct) = g(x', ct')$.

Remarque 6.5.1

Soit $f(x) = x^2$. En posant $X = x^2$ on a $g(X) = X$ avec $g(X) = f(x)$.

Donc

$$\begin{aligned} df(x, ct) &= dg(x', ct') \\ \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{c\partial t} cdt &= \frac{\partial g}{\partial x'} dx' + \frac{\partial g}{c\partial t'} cdt' \\ \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt &= \frac{\partial g}{\partial x'} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial g}{\partial t'} \left(\frac{\partial t'}{\partial x} dx + \frac{\partial t'}{\partial t} dt \right) \\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{c\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{cases} \end{aligned}$$

Avec la transformation de Lorentz (2.4a) et (2.4b) :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \gamma_e \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma_e v_e \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -\gamma_e v_e \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \gamma_e \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta_e \frac{\partial}{c\partial t'} \right) \\ \frac{\partial}{c\partial t} = \gamma_e \left(\frac{\partial}{c\partial t'} - \beta_e \frac{\partial}{\partial x'} \right) \end{cases}$$

6.6 Quadrigradient

Le 4-gradient du champ de scalaires $\phi(x^\alpha)$ s'écrit :

$$\nabla_4 \phi \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, -\nabla_3 \phi \right)$$

En notation indicielle il s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha \phi$$

L'indice α étant en bas, il s'agit d'un 4-covecteur. En composantes contravariantes, d'après le changement de variance (1.8) page 15 en convention de genre temps :

$$\nabla_4 \phi \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, \nabla_3 \phi \right)$$

En notation indicielle, on dérive par rapport aux coordonnées covariantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \equiv \partial^\alpha \phi$$

L'indice α étant en haut, il s'agit d'un 4-vecteur.

6.6.1 Quadrinorme du quadrigradient

Comme pour tout 4-vecteur, la 4-norme du 4-gradient est invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Son carré s'identifie à l'opérateur spatio-temporel dalembertien $\square$.

$$\begin{aligned} \|\nabla_4 \phi\|^2 &= \nabla_4 \phi \cdot \nabla_4 \phi \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, -\vec{\nabla} \phi \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, -\vec{\nabla} \phi \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi \\ &= \square \phi \end{aligned}$$

En notation indicielle :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \right\|^2 &= g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \end{aligned}$$

6.7 Équation de conservation

Le 4-produit scalaire du 4-opérateur nabla avec le 4-vecteur densité numérique-flux (5.13.1) page 95, c.-à-d. la 4-divergence du 4-vecteur densité numérique-flux, est invariant par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré :

$$\begin{aligned}\nabla_4 \cdot [{}_4\rho_n] &= \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \cdot (\gamma_v \rho_n c, \gamma_v \rho_n \mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial \rho'_n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho'_n \mathbf{v})\end{aligned}$$

Lorsque la quantité est conservative, on retrouve l'équation de conservation sous sa forme locale (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) :

$$\begin{aligned}\nabla_4 \cdot [{}_4\rho] &= \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \cdot (\gamma_v \rho c, \gamma_v \rho \mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho' \mathbf{v}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\nabla_4 \cdot [{}_4\rho] = 0$$

Notation 6.7.1

En notation indicielle, l'équation de conservation du 4-vecteur densité numérique-flux s'écrit :

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

La 4-divergence du 4-vecteur densité numérique-flux est nulle.

Chapitre 7

CALCUL TENSORIEL EN RELATIVITÉ RESTREINTE

Sommaire

7.1 Quadritenseurs	111
7.2 Principe d'inertie	119

7.1 Quadritenseurs

Par rapport aux transformations purement spatiales, les neuf composantes spatiales d'un 4-tenseur forment un 3-tenseur. Les trois composantes spatio-temporelles A^{01}, A^{02}, A^{03} ainsi que A^{10}, A^{20}, A^{30} forment deux 3-vecteurs. La composante purement temporelle A^{00} est un scalaire tridimensionnel.

7.1.1 Poussière

On considère N éléments pouvant avoir un mouvement d'ensemble mais sans mouvement relatif. Peu importe ici que l'on parle d'atomes, de molécules ou d'autre chose. En physique, ce modèle de réalité d'un ensemble d'éléments immobiles les uns par rapport aux autres est appelé *poussière*. Nous nous plaçons dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}^0$ comobile avec la poussière en un lieu et à un instant donné, au point d'univers appelé évènement E_0 . Si l'on prend un petit volume parallélépipédique rectangle $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ de poussière alors, pour un observateur dans $\mathcal{R}^0$, le nombre volumique d'éléments vaut par définition :

$$n = \frac{N}{V} \quad (7.1)$$

Remarque 7.1.1

Dans $\mathcal{R}^0$ le nombre volumique d'éléments de cette poussière dépend de l'endroit que l'on considère (espace), mais pas de l'instant de la mesure (temps) puisque par hypothèse nous sommes à un instant donné. Si l'on considère un autre instant il faut changer de référentiel comobile.

7.1.2 Densité d'énergie

Reprenons le § 5.13 page 95 sur le 4-vecteur densité numérique-flux. Dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}^0$ instantanément au repos par rapport à la poussière, d'après déf. 6.3.1 page 100, l'énergie d'une particule de poussière de masse m vaut $E_0 = mc^2$. D'après (7.1) page précédente, la densité de particule vaut n . La densité volumique d'énergie est donc :

$$\begin{aligned}\rho &= nE_0 \\ &= nmc^2\end{aligned}$$

Dans un autre référentiel inertiel $\mathcal{R}'$, d'après (6.3) page 100 l'énergie d'une particule de poussière de masse m vaut $E = \gamma_v mc^2$, et la densité de particule vaut $n' = \gamma_v n$. La densité volumique d'énergie est donc :

$$\begin{aligned}\rho' &= n'E \\ &= \gamma_v n \gamma_v mc^2 \\ &= nm \gamma_v c \gamma_v c \\ &= \frac{\rho}{c^2} u^0 u^0\end{aligned}$$

C'est la composante 00 d'un 4-tenseur symétrique appelé 4-tenseur énergie-impulsion.

7.1.3 Quadritenseur énergie-impulsion

Définition 7.1.1 : Quadritenseur énergie-impulsion

On définit le 4-tenseur énergie-impulsion par :

$$P = [{}_4p] \otimes [{}_4N]$$

On a également

$$\begin{aligned}P &= m[{}_4u] \otimes n[{}_4u] \\ &= \frac{\rho}{c^2} [{}_4u] \otimes [{}_4u]\end{aligned}$$

En notation indicielle :

$$\forall \alpha, \beta = 0, \dots, 3 \quad P^{\alpha\beta} = m n u^\alpha u^\beta$$

P^{00} est la densité d'énergie dans n'importe quel référentiel. Pour les autres composantes :

$$\begin{aligned}\forall i = 1, 2, 3 \quad P^{0i} &= n \gamma_v c m u^i \\ &= n' c p^i\end{aligned}$$

p^i est la composante selon x^i de la quantité de mouvement relativiste. P^{0i} est donc la densité de quantité de mouvement selon x^i . On peut également écrire

$$\begin{aligned}\forall i = 1, 2, 3 \quad P^{0i} &= n' c \frac{p^0 v^i}{\gamma_v c} \\ &= \frac{n A v^i dt p^0}{A dt}\end{aligned}$$

$Av^i dt$ est le volume de poussière qui traverse une surface d'aire A perpendiculaire à v^i pendant le temps dt . Donc

$$dn = nAv^i dt$$

est le nombre infinitésimal de particules qui traversent cette surface, et $dn p^0$ est l'énergie infinitésimale qui traverse cette surface. P^{0i} est par conséquent une énergie par unité d'aire et de temps, c'est le flux d'énergie dans la direction v^i . De la même façon

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad P^{ji} &= n'c \frac{p^j v^i}{\gamma_v c} \\ &= \frac{nAv^i dt p^j}{Adt} \end{aligned}$$

P^{ij} est le flux de la composante j de la quantité de mouvement dans la direction i , ou vice-versa puisque le tenseur est symétrique. Or $dn p^j / dt$ est la force qui s'exerce sur la surface. Pour P^{ii} la force est perpendiculaire à la surface, c'est une pression, pour P^{ij} $i \neq j$ la force est tangente à la surface c'est une contrainte. P^{ij} est le 3-tenseur des contraintes de la mécanique classique.

7.1.4 Produit extérieur

Définition 7.1.2 : Produit extérieur

On définit le produit extérieur $\wedge$ du tenseur u par le tenseur v par :

$$u \wedge v = u \otimes v - v \otimes u$$

Le bivecteur obtenu $p = u \wedge v$ est un tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} v \wedge u &= v \otimes u - u \otimes v \\ &= -(u \otimes v - v \otimes u) \\ &= -u \wedge v \end{aligned}$$

Le produit extérieur généralise le produit vectoriel. Si $\vec{u}(u^i)$ et $\vec{v}(v^i)$ sont deux vecteurs de $\vec{e}_i$, le tenseur p d'ordre deux a pour composantes contravariantes dans $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ les quantités antisymétriques :

$$p^{ij} = u^i v^j - u^j v^i$$

Le produit extérieur de deux vecteurs a les propriétés suivantes :

- Linéarité :

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z} \\ \alpha \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge \alpha \vec{y} = \alpha (\vec{x} \wedge \vec{y}) \end{cases}$$

- Anticommutativité :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$$

- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E_n , les C_n^2 éléments de $\Lambda_n^{(2)}$:

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \quad i < j$$

constituent une base de $\Lambda_n^{(2)}$.

7.1.4.1 Quadritenseur antisymétrique

Par rapport aux transformations purement spatiales, les neuf composantes spatiales d'un 4-tenseur antisymétrique forment un 3-tenseur antisymétrique. Les composantes de ce 3-tenseur antisymétrique peuvent s'exprimer sous la forme d'un vecteur axial tridimensionnel. Les trois composantes spatio-temporelles non nulles restantes forment, par rapport aux transformations purement spatiales, un vecteur polaire tridimensionnel. On peut donc toujours écrire le 4-tenseur antisymétrique sous la forme

$$[{}^4_A] \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_x & a_y \\ -p_y & a_x & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

où, vis à vis des transformations spatiales, $\mathbf{p}$ est un vecteur polaire et $\mathbf{a}$ est un vecteur axial. En composantes contravariantes

$$[{}^4_A](\mathbf{p}, \mathbf{a})$$

et en composantes covariantes

$$[{}^4_A](\mathbf{-p}, \mathbf{a})$$

7.1.5 Quadritenseur moment cinétique

Définition 7.1.3 : Quadritenseur moment cinétique

On définit le 4-tenseur moment cinétique d'un mobile dans un référentiel quelconque, comme le produit extérieur de la 4-position par la 4-impulsion :

$$[{}^4_L] \stackrel{\text{déf}}{=} [{}_4r] \wedge [{}_4p]$$

$[{}^4_L]$ a pour composantes deux fois contravariantes :

$$L^{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha)$$

En notation matricielle :

$$L^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} 0 & ctp^x - x\gamma_v mc & ctp^y - y\gamma_v mc & ctp^z - z\gamma_v mc \\ -(ctp^x - x\gamma_v mc) & 0 & xp^y - yp^x & xp^z - zp^x \\ -(ctp^y - y\gamma_v mc) & -(xp^y - yp^x) & 0 & yp^z - zp^y \\ -(ctp^z - z\gamma_v mc) & -(xp^z - zp^x) & -(yp^z - zp^y) & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 7.1.2

En mécanique classique, le moment cinétique est un *pseudovecteur* (ou vecteur *axial*, par opposition aux « vrais » vecteurs dits *polaires*). Un pseudovecteur s'écrit comme produit vectoriel de deux vecteurs polaires. Contrairement aux vecteurs polaires, ils changent de signe par réflexion dans un miroir (symétrie par rapport à un plan), et ne changent pas de signe par réflexion du système de coordonnées (changement de signe de toutes les coordonnées).

Une conséquence de ce changement de signe est que le produit scalaire d'un vecteur polaire par un vecteur axial donne un pseudo-scalaire, qui change de signe par réflexion dans un miroir.

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} yp^z - zp^y \\ zp^x - xp^z \\ xp^y - yp^x \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p^x \\ p^y \\ p^z \end{pmatrix}$$

En remplaçant le produit vectoriel par le produit extérieur,

$$L \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{r} \wedge \vec{p}$$

de composantes

$$L^{jk} = x^j p^k - x^k p^j$$

on voit que le pseudo-vecteur moment cinétique est le dual du tenseur antisymétrique d'ordre deux :

$$L \begin{bmatrix} 0 & xp^y - yp^x & xp^z - zp^x \\ -(xp^y - yp^x) & 0 & yp^z - zp^y \\ -(xp^z - zp^x) & -(yp^z - zp^y) & 0 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 0 & L^z & -L^y \\ -L^z & 0 & L^x \\ L^y & -L^x & 0 \end{bmatrix}$$

On écrit alors les trois composantes indépendantes sous la forme d'un pseudovecteur L^i en posant :

$$L^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L^{jk}$$

où ε_{ijk} est le symbole d'antisymétrie tridimensionnel (tenseur unitaire d'ordre trois parfaitement antisymétrique, Cf. Vol. 1 Notion d'espace).

7.1.5.1 Conservation du quadritenseur moment cinétique

La somme des 4-tenseurs moment cinétique se conserve lors d'une interaction, autrement dit le 4-tenseur moment cinétique d'un système isolé se conserve dans le temps et les 4-tenseurs moment cinétique sont additifs. Le 4-tenseur moment cinétique d'un système constitué de N sous-systèmes s'écrit :

$$[{}^4L] \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^N [{}_4r]_i \wedge [{}_4p]_i$$

7.1.6 Transformation des composantes d'un quadritenseur

7.1.6.1 Transformation des composantes contravariantes

On utilise la loi de transformation des composantes contravariantes d'un tenseur (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), où la matrice de transformation est la matrice de Lorentz Λ déf. 2.4.1 page 23 :

$$t^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \Lambda^{\beta'}_{\delta} t^{\gamma\delta}$$

Les éléments non nuls de la matrice sont les suivants :

$$\begin{cases} \Lambda_0^0 = \Lambda_1^1 = \gamma_e \\ \Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 = -\gamma_e \beta_e \\ \Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1 \end{cases}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} t^{0'0'} &= \Lambda_{\gamma}^{0'} \Lambda_{\delta}^{0'} t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda_0^{0'} \Lambda_0^{0'} t^{00} + \Lambda_0^{0'} \Lambda_1^{0'} t^{01} + \Lambda_1^{0'} \Lambda_0^{0'} t^{10} + \Lambda_1^{0'} \Lambda_1^{0'} t^{11} \\ &= \gamma_e^2 t^{00} - \gamma_e^2 \beta_e t^{01} - \gamma_e^2 \beta_e t^{10} + (\gamma_e \beta_e)^2 t^{11} \\ &= \gamma_e^2 [t^{00} - \beta_e(t^{01} + t^{10}) + \beta_e^2 t^{11}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'0'} &= \Lambda_{\gamma}^{1'} \Lambda_{\delta}^{0'} t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda_0^{1'} \Lambda_0^{0'} t^{00} + \Lambda_0^{1'} \Lambda_1^{0'} t^{01} + \Lambda_1^{1'} \Lambda_0^{0'} t^{10} + \Lambda_1^{1'} \Lambda_1^{0'} t^{11} \\ &= -\gamma_e^2 \beta_e t^{00} + (\gamma_e \beta_e)^2 t^{01} + \gamma_e^2 t^{10} - \gamma_e^2 \beta_e t^{11} \\ &= \gamma_e^2 [\beta_e^2 t^{01} + t^{10} - \beta_e(t^{00} + t^{11})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'1'} &= \Lambda_{\gamma}^{1'} \Lambda_{\delta}^{1'} t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda_0^{1'} \Lambda_0^{1'} t^{00} + \Lambda_0^{1'} \Lambda_1^{1'} t^{01} + \Lambda_1^{1'} \Lambda_0^{1'} t^{10} + \Lambda_1^{1'} \Lambda_1^{1'} t^{11} \\ &= (\gamma_e \beta_e)^2 t^{00} - \gamma_e^2 \beta_e t^{01} - \gamma_e^2 \beta_e t^{10} + \gamma_e^2 t^{11} \\ &= \gamma_e^2 [\beta_e^2 t^{00} - \beta_e(t^{01} + t^{10}) + t^{11}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'2'} &= \Lambda_{\gamma}^{2'} \Lambda_{\delta}^{2'} t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda_2^{2'} \Lambda_2^{2'} t^{22} \\ &= t^{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{3'3'} &= \Lambda_{\gamma}^{3'} \Lambda_{\delta}^{3'} t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda_3^{3'} \Lambda_3^{3'} t^{33} \\ &= t^{33} \end{aligned}$$

7.1.6.2 Transformation des composantes covariantes

On utilise la loi de transformation des composantes covariantes d'un tenseur (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), où d'après le Vol. 1 Notion d'espace, la matrice de transformation est la transposée de la matrice de Lorentz inverse. La matrice de Lorentz étant symétrique, nous pouvons oublier la transposition et prendre la matrice de Lorentz inverse $\bar{\Lambda}$ (2.5) page 23 :

$$t_{\alpha'\beta'} = \bar{\Lambda}_{\alpha'}^{\gamma} \bar{\Lambda}_{\beta'}^{\delta} t_{\gamma\delta}$$

Les éléments non nuls de la matrice inverse sont les suivants :

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}_0^0 = \bar{\Lambda}_1^1 = \gamma_e \\ \bar{\Lambda}_1^0 = \bar{\Lambda}_0^1 = \gamma_e \beta_e \\ \bar{\Lambda}_2^2 = \bar{\Lambda}_3^3 = 1 \end{cases}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
 t_{0'0'} &= \bar{\Lambda}_0^\gamma \bar{\Lambda}_0^\delta t_{\gamma\delta} \\
 &= \bar{\Lambda}_0^0 \bar{\Lambda}_0^0 t_{00} + \bar{\Lambda}_0^0 \bar{\Lambda}_0^1 t_{01} + \bar{\Lambda}_0^1 \bar{\Lambda}_0^0 t_{10} + \bar{\Lambda}_0^1 \bar{\Lambda}_0^1 t_{11} \\
 &= \gamma_e^2 t_{00} + \gamma_e^2 \beta_e t_{01} + \gamma_e^2 \beta_e t_{10} + (\gamma_e \beta_e)^2 t_{11} \\
 &= \gamma_e^2 [t_{00} + \beta_e(t_{01} + t_{10}) + \beta_e^2 t_{11}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{1'0'} &= \bar{\Lambda}_1^\gamma \bar{\Lambda}_0^\delta t_{\gamma\delta} \\
 &= \bar{\Lambda}_1^0 \bar{\Lambda}_0^0 t_{00} + \bar{\Lambda}_1^0 \bar{\Lambda}_0^1 t_{01} + \bar{\Lambda}_1^1 \bar{\Lambda}_0^0 t_{10} + \bar{\Lambda}_1^1 \bar{\Lambda}_0^1 t_{11} \\
 &= +\gamma_e^2 \beta_e t_{00} + (\gamma_e \beta_e)^2 t_{01} + \gamma_e^2 t_{10} + \gamma_e^2 \beta_e t_{11} \\
 &= \gamma_e^2 [\beta_e^2 t_{01} + t_{10} + \beta_e(t_{00} + t_{11})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{1'1'} &= \bar{\Lambda}_1^\gamma \bar{\Lambda}_1^\delta t_{\gamma\delta} \\
 &= \bar{\Lambda}_1^0 \bar{\Lambda}_1^0 t_{00} + \bar{\Lambda}_1^0 \bar{\Lambda}_1^1 t_{01} + \bar{\Lambda}_1^1 \bar{\Lambda}_1^0 t_{10} + \bar{\Lambda}_1^1 \bar{\Lambda}_1^1 t_{11} \\
 &= (\gamma_e \beta_e)^2 t_{00} + \gamma_e^2 \beta_e t_{01} + \gamma_e^2 \beta_e t_{10} + \gamma_e^2 t_{11} \\
 &= \gamma_e^2 [\beta_e^2 t_{00} + \beta_e(t_{01} + t_{10}) + t_{11}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{2'2'} &= \bar{\Lambda}_2^\gamma \bar{\Lambda}_2^\delta t_{\gamma\delta} \\
 &= \bar{\Lambda}_2^2 \bar{\Lambda}_2^2 t_{22} \\
 &= t_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{3'3'} &= \bar{\Lambda}_3^\gamma \bar{\Lambda}_3^\delta t_{\gamma\delta} \\
 &= \bar{\Lambda}_3^3 \bar{\Lambda}_3^3 t_{33} \\
 &= t_{33}
 \end{aligned}$$

Une seconde méthode consiste à trouver les composantes deux fois covariantes du 4-tenseur, en prenant pour tenseur métrique le tenseur de Minkowski (1.7) page 14 (en convention de genre temps) :

$$t_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} t^{\gamma\delta}$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{cases} t_{00} = \eta_{00} \eta_{00} t^{00} \\ t_{01} = \eta_{00} \eta_{11} t^{01} \\ t_{11} = \eta_{11} \eta_{11} t^{11} \\ t_{02} = \eta_{00} \eta_{22} t^{02} \\ t_{22} = \eta_{22} \eta_{22} t^{22} \\ t_{03} = \eta_{00} \eta_{33} t^{03} \\ t_{33} = \eta_{33} \eta_{33} t^{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{00} = t^{00} \\ t_{01} = -t^{01} \\ t_{11} = t^{11} \\ t_{02} = -t^{02} \\ t_{22} = t^{22} \\ t_{03} = -t^{03} \\ t_{33} = t^{33} \end{cases}$$

On remplace alors dans le § 7.1.6.1 précédent.

7.1.6.3 Transformation des composantes mixtes

$$t^{\alpha'}_{\beta'} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha'} \bar{\Lambda}_{\beta'}^{\delta} t^{\gamma}_{\delta}$$

$$\begin{aligned} t^{0'}_{0'} &= \Lambda_{\gamma}^{0'} \bar{\Lambda}_{0'}^{\delta} t^{\gamma}_{\delta} \\ &= \Lambda_0^{0'} \bar{\Lambda}_0^0 t^0_0 + \Lambda_0^{0'} \bar{\Lambda}_0^1 t^0_1 + \Lambda_1^{0'} \bar{\Lambda}_0^0 t^1_0 + \Lambda_1^{0'} \bar{\Lambda}_0^1 t^1_1 \\ &= \gamma_e^2 t^0_0 + \gamma_e^2 \beta_e t^0_1 - \gamma_e^2 \beta_e t^1_0 + (\gamma_e \beta_e)^2 t^1_1 \\ &= \gamma_e^2 [t^0_0 + \beta_e (t^0_1 - t^1_0) + \beta_e^2 t^1_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'}_{0'} &= \Lambda_{\gamma}^{1'} \bar{\Lambda}_{0'}^{\delta} t^{\gamma}_{\delta} \\ &= \Lambda_0^{1'} \bar{\Lambda}_0^0 t^0_0 + \Lambda_0^{1'} \bar{\Lambda}_0^1 t^0_1 + \Lambda_1^{1'} \bar{\Lambda}_0^0 t^1_0 + \Lambda_1^{1'} \bar{\Lambda}_0^1 t^1_1 \\ &= -\gamma_e^2 \beta_e t^0_0 - (\gamma_e \beta_e)^2 t^0_1 + \gamma_e^2 t^1_0 + \gamma_e^2 \beta_e t^1_1 \\ &= \gamma_e^2 [t^1_0 - \beta_e^2 t^0_1 + \beta_e (t^1_1 - t^0_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'}_{1'} &= \Lambda_{\gamma}^{1'} \bar{\Lambda}_{1'}^{\delta} t^{\gamma}_{\delta} \\ &= \Lambda_0^{1'} \bar{\Lambda}_1^0 t^0_0 + \Lambda_0^{1'} \bar{\Lambda}_1^1 t^0_1 + \Lambda_1^{1'} \bar{\Lambda}_1^0 t^1_0 + \Lambda_1^{1'} \bar{\Lambda}_1^1 t^1_1 \\ &= -(\gamma_e \beta_e)^2 t^0_0 - \gamma_e^2 \beta_e t^0_1 + \gamma_e^2 \beta_e t^1_0 + \gamma_e^2 t^1_1 \\ &= \gamma_e^2 [-\beta_e^2 t^0_0 + \beta_e (t^1_0 - t^0_1) + t^1_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'}_{2'} &= \Lambda_{\gamma}^{2'} \bar{\Lambda}_{2'}^{\delta} t^{\gamma}_{\delta} \\ &= \Lambda_2^{2'} \bar{\Lambda}_2^2 t^2_2 \\ &= t^2_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{3'}_{3'} &= \Lambda_{\gamma}^{3'} \bar{\Lambda}_{3'}^{\delta} t^{\gamma}_{\delta} \\ &= \Lambda_3^{3'} \bar{\Lambda}_3^3 t^3_3 \\ &= t^3_3 \end{aligned}$$

7.1.6.4 Vecteur moment de masse relativiste

On définit le vecteur moment de masse relativiste $\mathbf{N}$ (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) :

$$\mathbf{N} \begin{pmatrix} \frac{L^{01}}{c} \\ \frac{L^{02}}{c} \\ \frac{L^{03}}{c} \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^N (t \mathbf{p}_i - \gamma_v m_i \mathbf{r}_i)$$

On notera :

$$[{}^4_4\mathbf{L}] = (c\mathbf{N}, L)$$

La conservation du 4-moment cinétique total $[_4L]$ d'un système isolé signifie que chacune de ses composantes ne varie pas dans le temps tant que le système reste isolé. En particulier le 3-vecteur $\mathbf{N}$ est constant dans le temps. En divisant par l'énergie totale relativiste du système (déf. 6.3.3 page 100) $E = \sum_{i=1}^N E_i$, qui est également conservative, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (t\mathbf{p}_i) - \sum_{i=1}^N (\gamma_v m_i \mathbf{r}_i) &= \vec{C}^{ste} \\ \frac{\sum_{i=1}^N (c^2 t\mathbf{p}_i)}{E} - \frac{\sum_{i=1}^N (\gamma_v m_i c^2 \mathbf{r}_i)}{E} &= \vec{C}^{ste} \\ \frac{c^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{E} t - \frac{\sum_{i=1}^N (E_i \mathbf{r}_i)}{E} &= \vec{C}^{ste} \\ \frac{\sum_{i=1}^N (E_i \mathbf{r}_i)}{E} &= \frac{c^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{E} t - \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

Le centre d'inertie relativiste du système est le point de vecteur position :

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N (E_i \mathbf{r}_i)}{E}$$

Il est animé d'un mouvement uniforme de 3-vecteur vitesse constant :

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i}{E}$$

Lorsque les vitesses des éléments constituant le système sont petites devant c , pour chaque élément i nous avons $E_i \approx m_i c^2$, si bien que l'on retrouve l'expression classique

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_i)}{M}$$

où $M = \sum_{i=1}^N m_i$ est la masse totale du système.

7.2 Principe d'inertie

Considérons un mobile en mouvement dans $\mathbb{M}$ avec une vitesse inférieure à c , donc pour lequel $ds^2 > 0$ d'après (1.6) page 12. L'équation de son mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est défini par la donnée de ses coordonnées galiléennes réduites x^α (déf. 1.1.4 page 2 avec la notation indicielle 1.1.2 page 3) en fonction d'un paramètre temporel (pour la trajectoire nous pouvons prendre un paramètre quelconque). Prenons pour paramètre le temps propre τ de ce mobile, c.-à-d. l'intervalle s au facteur c près. Nous avons alors :

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad x^\alpha = x^\alpha(\tau)$$

Avec ce choix de paramètre, d'après la déf. 5.13 page 69 sa 4-vitesse a pour composantes contravariantes :

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad u^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Le 3-vecteur vitesse d'espace $\mathbf{v}$ de ce mobile libre dans $\mathcal{R}$, ou vélocité (déf. 5.6.1 page 62), a pour composantes contravariantes

$$\forall i = 1, \dots, 3 \quad v^i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dx^i}{dt}$$

où t est le temps propre de $\mathcal{R}$. Séparons les parties temporelle et spatiale de la 4-vitesse $[_4u]$ de ce mobile dans $\mathcal{R}$:

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \begin{cases} u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} \\ u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^0 = c \frac{dt}{d\tau} \\ u^i = v^i \frac{dt}{d\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^0 = c \gamma(v) \\ u^i = v^i \gamma(v) \end{cases}$$

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la vélocité du mobile libre est constante dans le temps t de $\mathcal{R}$, la norme v de la vélocité étant constante, le facteur de dilatation temporelle $\gamma(v)$ est constant et la vélocité est constante dans le temps propre τ du mobile :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad \begin{cases} v = c^{ste} \\ v^i = c^{ste} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u^0 = c^{ste} \\ u^i = c^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du^0}{d\tau} = 0 \\ \frac{du^i}{d\tau} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad \frac{du^\alpha}{d\tau} = 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, la 4-accélération du mobile libre dans $\mathcal{R}$ est nulle. Dans l'espace plat de la relativité restreinte (symboles de Christoffel nuls), un mobile d'accélération nulle décrit une géodésique de l'espace-temps de métrique donnée par la déf. 1.9.1 page 12. Nous pouvons à présent écrire le principe d'inertie en relativité restreinte :

Un mobile libre admet pour trajectoire d'univers une géodésique de $\mathbb{M}$ pour laquelle le ds^2 est positif (dans la convention de genre temps (1.4) page 10 choisie).

Les géodésiques pour lesquelles $ds^2 = 0$ sont parcourues à la vitesse c , elles correspondent aux rayons lumineux si l'on suppose que la lumière se propage à la vitesse limite. Elles sont dites *nulles* ou *isotropes*.

Chapitre 8

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EN RELATIVITÉ RESTREINTE

Sommaire

8.1 Trajectoire d'un système libre	123
8.2 Impulsion relativiste	124
8.3 Énergie relativiste	125
8.4 Quadritenseur moment cinétique	125
8.5 Équation de Hamilton-Jacobi relativiste pour un mobile libre	127

En mécanique classique, l'action de Hamilton d'un système de lagrangien $\mathcal{L}$ entre les évènements A (départ du point A à l'instant t_A) et B (arrivée au point B à l'instant t_B) a pour expression :

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(y(t), \dot{y}(t), t) dt$$

Le principe de moindre action

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

donne l'équation de la trajectoire du système. Cette trajectoire existe en elle-même et doit être indépendante du référentiel galiléen de l'observateur. Dans le cas d'un système libre, le principe de moindre action se réduit à un principe de moindre temps, l'action s'écrivant :

$$\mathcal{S} = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} dt$$

où ε est invariant sur la trajectoire, ayant la dimension d'une énergie et caractérisant le système. Par analogie, en relativité restreinte l'action doit être invariante par changement de référentiel galiléen pour que la trajectoire le soit aussi. L'action relativiste est donc de la forme :

$$\mathcal{S} = \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau$$

où τ est le temps propre du système et ε un invariant relativiste ayant la dimension d'une énergie et caractérisant le système. L'action écrite dans un référentiel galiléen quelconque doit être

invariante, donc de la forme que nous avons indiquée. Avec (3.4) page 29 :

$$\begin{aligned}\int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(y(t), \dot{y}(t), t) dt &= \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \\ &= \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} dt\end{aligned}$$

On en déduit l'expression du lagrangien dans le référentiel galiléen quelconque :

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon}{\gamma_v}$$

Prenons le développement limité de $1/\gamma_v$ pour $v \ll c$:

$$\mathcal{L} \approx \varepsilon \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

Le lagrangien est défini à une constante additive près donc :

$$\mathcal{L} \approx -\frac{\varepsilon v^2}{2c^2}$$

À faible vitesse devant c il doit redonner l'énergie cinétique du système libre :

$$\begin{aligned}-\frac{\varepsilon v^2}{2c^2} &= \frac{mv^2}{2} \\ \varepsilon &= -mc^2\end{aligned}$$

On a donc pour le lagrangien relativiste d'un système libre :

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma_v}} \quad (8.1)$$

Avec (3.2) page 28, l'action du système libre s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \\ &= -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \\ &= -mc \int_A^B ds \\ &= -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} dt\end{aligned}$$

Le principe de moindre action dans l'espace-temps de la relativité restreinte s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{S} &= 0 \\ -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau &= 0 \\ -mc \delta \int_A^B ds &= 0 \\ -mc^2 \delta \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} dt &= 0\end{aligned} \quad (8.2)$$

où A est l'évènement départ du point x_A^1, x_A^2, x_A^3 à l'instant x_A^0 , et B l'évènement arrivée au point x_B^1, x_B^2, x_B^3 à l'instant x_B^0 . L'action est inversement proportionnelle à la quadri-longueur de la ligne d'univers parcourue par le système entre les évènements A et B . D'après la déf. 1.9.1 page 12, la distance est maximale pour $x = y = z = c^{ste}$ (objet immobile dans le référentiel galiléen) et la ligne d'univers est une droite, par conséquent l'action est minimale (signe opposé à celui de la distance) lorsque la ligne d'univers est une droite.

8.1 Trajectoire d'un système libre

Cherchons la trajectoire à partir du principe de moindre action sans utiliser les équations de Lagrange. Avec (8.2) :

$$\begin{aligned} -mc\delta \int_A^B ds &= 0 \\ -m \int_A^B c\delta ds &= 0 \end{aligned}$$

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.1.4 page 2 avec la notation indicielle 1.1.2 page 3 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^\alpha dx_\alpha \\ \delta(ds^2) &= \delta(dx^\alpha dx_\alpha) \\ 2ds\delta ds &= dx^\alpha \delta dx_\alpha + dx_\alpha \delta dx^\alpha \end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire

$$dx^\alpha \delta dx_\alpha = dx_\alpha \delta dx^\alpha$$

Avec la déf. (5.12) page 69 des composantes de la 4-vitesse

$$\begin{aligned} 2ds\delta ds &= 2dx_\alpha \delta dx^\alpha \\ \delta ds &= \frac{dx_\alpha}{c d\tau} \delta dx^\alpha \\ c\delta ds &= u_\alpha \delta dx^\alpha \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} d(u_\alpha \delta x^\alpha) &= du_\alpha \delta x^\alpha + u_\alpha d\delta x^\alpha \\ &= du_\alpha \delta x^\alpha + u_\alpha \delta dx^\alpha \\ -u_\alpha \delta dx^\alpha &= -d(u_\alpha \delta x^\alpha) + du_\alpha \delta x^\alpha \end{aligned}$$

Le principe de moindre action devient :

$$\begin{aligned} -m \int_A^B u_\alpha \delta dx^\alpha &= 0 \\ -m \int_A^B d(u_\alpha \delta x^\alpha) + m \int_A^B du_\alpha \delta x^\alpha &= 0 \\ -m [u_\alpha \delta x^\alpha]_A^B + m \int_A^B \frac{du_\alpha}{ds} \delta x^\alpha ds &= 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Or $\delta x^\alpha(A) = \delta x^\alpha(B) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{m}{c} \int_A^B \frac{du_\alpha}{d\tau} \delta x^\alpha ds &= 0 \\ \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad \frac{du_\alpha}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Le 4-vecteur vitesse est constant pour un système libre.

Si nous voulons à présent obtenir l'expression de la variation de l'action en fonction des coordonnées, nous devons comparer des trajectoires réelles infiniment proches n'ayant pas le même point d'arrivée. Cela revient à considérer l'intégrale indéfinie :

$$\delta \mathcal{S} = -m \int_A^{x^\alpha} u_\alpha \delta dx^\alpha$$

Dans (8.3), posons $\delta x^\alpha(A) = 0$, et $\delta x^\alpha(B)$ variable que l'on notera simplement δx^α . Ces trajectoires étant réelles, l'intégrale dans (8.3) est nulle, et l'on trouve :

$$\delta \mathcal{S} = -m u_\alpha \delta x^\alpha$$

Avec la déf. 6.2.1 page 98 des composantes de la 4-impulsion

$$\delta \mathcal{S} = -p_\alpha \delta x^\alpha \quad (8.5)$$

8.2 Impulsion relativiste

En notation vectorielle, en remplaçant le facteur relativiste par sa déf. 2.2.1 page 21, l'impulsion relativiste d'un système libre de lagrangien (8.1) page 122 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \\ &= -mc^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sqrt{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/c^2} \\ &= -mc^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{-2\mathbf{v}}{c^2} \\ &= \gamma_v m \mathbf{v} \end{aligned}$$

Cette relation définit le 3-vecteur quantité de mouvement relativiste.

Remarque 8.2.1

Pour un système libre ($\partial_{\mathbf{r}} \mathcal{L} = 0$), les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right) &= 0 \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

8.3 Énergie relativiste

En notation vectorielle, la fonction énergie d'un système libre s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H &= \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L} \\
 &= \mathbf{v} \cdot \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mc^2(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 &= \gamma_v mc^2
 \end{aligned}$$

8.4 Quadritenseur moment cinétique

En mécanique classique, pour tout système isolé il y a conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie, mais aussi du moment cinétique (quantité de mouvement en rotation). En étendant ce raisonnement à l'espace-temps on obtient l'expression relativiste du moment cinétique. On considère un élément de matière du système, de coordonnées x^α . En effectuant une rotation infinitésimale, les coordonnées prennent les nouvelles valeurs x'^α , de sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned}
 x'^\alpha - x^\alpha &= \delta x^\alpha \\
 &= x_\beta \delta \Omega^{\alpha\beta} \\
 x'^\alpha &= x_\beta \delta \Omega^{\alpha\beta} + x^\alpha
 \end{aligned}$$

où les $\delta \Omega^{\alpha\beta}$ sont les composantes infiniment petites du premier ordre du 4-tenseur $\Omega^{\alpha\beta}$. Un tenseur (et donc un vecteur) reste le même, qu'on l'exprime en composantes contravariantes ou covariantes. Dans la relation ci-dessus qui ne contient que des vecteurs et des tenseurs, nous pouvons donc passer tous les indices hauts en bas, et tous les indices bas en haut, ce qui permet de conserver la convention de sommation :

$$x'_\alpha = x^\gamma \delta \Omega_{\alpha\gamma} + x_\alpha$$

On considère une rotation du système sans déformation, la norme de la 4-position de l'élément de matière reste constante lors de la rotation :

$$\begin{aligned}
 x'^{\alpha} x'_{\alpha} &= x^{\alpha} x_{\alpha} \\
 (x_{\beta} \delta \Omega^{\alpha\beta} + x^{\alpha}) (x^{\gamma} \delta \Omega_{\alpha\gamma} + x_{\alpha}) &= x^{\alpha} x_{\alpha} \\
 x_{\alpha} x_{\beta} \delta \Omega^{\alpha\beta} + x^{\alpha} x^{\gamma} \delta \Omega_{\alpha\gamma} + x_{\beta} \delta \Omega^{\alpha\beta} x^{\gamma} \delta \Omega_{\alpha\gamma} &= 0 \\
 x_{\alpha} x_{\beta} \delta \Omega^{\alpha\beta} + x^{\alpha} x^{\gamma} \delta \Omega_{\alpha\gamma} &= 0 \\
 x^{\alpha} x^{\beta} \delta \Omega_{\alpha\beta} + x^{\alpha} x^{\gamma} \delta \Omega_{\alpha\gamma} &= 0 \\
 x^{\alpha} x^{\beta} \delta \Omega_{\alpha\beta} &= 0
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

où nous avons négligé les termes quadratiques en $\delta \Omega$ qui sont des infiniment petits du deuxième ordre. Le tenseur $x^{\alpha} x^{\beta}$ est symétrique par construction puisque $x^{\alpha} x^{\beta} = x^{\beta} x^{\alpha}$. En représentation matricielle :

$$x^{\alpha} x^{\gamma} \begin{bmatrix} x^0 x^0 & x^0 x^1 & x^0 x^2 & x^0 x^3 \\ x^1 x^0 & x^1 x^1 & x^1 x^2 & x^1 x^3 \\ x^2 x^0 & x^2 x^1 & x^2 x^2 & x^2 x^3 \\ x^3 x^0 & x^3 x^1 & x^3 x^2 & x^3 x^3 \end{bmatrix}$$

Or, le produit tensoriel complètement contracté d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique est nul.

Exemple 8.4.1

Produit tensoriel complètement contracté d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, en notation matricielle (ce n'est pas un produit matriciel) :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x^{11} & x^{12} \\ x^{21} & x^{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & y^{12} \\ -y^{12} & 0 \end{bmatrix} &= x^{11} \times y^{12} - x^{11} \times y^{21} + x^{12} \times y^{12} - x^{12} \times y^{21} \\
 &\quad + x^{21} \times y^{12} - x^{21} \times y^{21} + x^{22} \times y^{12} - x^{22} \times y^{21} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Il faut donc que $\delta \Omega_{\alpha\beta}$ soit antisymétrique pour avoir (8.6) quels que soient les x^{α} :

$$\delta \Omega_{\alpha\beta} = -\delta \Omega_{\beta\alpha}$$

Remarque 8.4.1

Les tenseurs antisymétriques d'ordre deux sont aussi appelés des *bivecteurs*.

La variation de l'action d'un système qui passe d'une trajectoire à une autre trajectoire infiniment

proche est donnée par (8.5) page 124. En sommant sur les N éléments constitutifs du système :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= - \sum_{i=1}^N p_\alpha \delta x^\alpha \Big|_a^b \\ &= - \sum_{i=1}^N p^\alpha \delta x_\alpha \Big|_a^b \\ &= -\delta\Omega_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^N p^\alpha x^\beta \Big|_a^b\end{aligned}$$

Décomposons le tenseur $p^\alpha x^\beta$ en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$p^\alpha x^\beta = \frac{1}{2}(p^\alpha x^\beta + p^\beta x^\alpha) + \frac{1}{2}(p^\alpha x^\beta - p^\beta x^\alpha)$$

La multiplication contractée de la partie symétrique par le tenseur antisymétrique $\delta\Omega$ étant nulle, il ne reste que la partie antisymétrique :

$$\delta\mathcal{S} = \delta\Omega_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha) \Big|_a^b$$

Puisque l'action ne varie pas nous avons :

$$\sum_{i=1}^N (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha)_a = \sum_{i=1}^N (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha)_b$$

Par conséquent on définit le 4-tenseur antisymétrique du second ordre $[{}_4L]$ appelé 4-moment cinétique total du système, qui se conserve pour tout système isolé :

Définition 8.4.1 : Quadritenseur moment cinétique

Le 4-tenseur moment cinétique $[{}_4L]$ a pour composantes deux fois contravariantes :

$$L^{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^N (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha)$$

8.5 Équation de Hamilton-Jacobi relativiste pour un mobile libre

Nous avons obtenu précédemment la relation (8.3) page 123 :

$$-m[u_\alpha \delta x^\alpha]_A^B + m \int_A^B \frac{du_\alpha}{ds} \delta x^\alpha ds = 0$$

D'après (8.4) page 124, sur une trajectoire réelle la 4-vitesse d'un mobile libre est constante, $du_\alpha/ds = 0$:

$$-m[u_\alpha \delta x^\alpha]_A^B = 0$$

Si l'on considère deux trajectoires réelles ayant même point de départ $\delta x_A^\alpha = 0$ mais une arrivée différente $\delta x_B^\alpha \neq 0$, la différence d'action entre ces deux trajectoires s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta S &= -m u_\alpha \delta x^\alpha \\ &= -p_\alpha \delta x^\alpha \\ \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} &= -p_\alpha \\ \forall \beta = 0, \dots, 3 \quad g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} &= -g^{\alpha\beta} p_\alpha \\ \frac{\partial S}{\partial x_\beta} &= -p^\beta\end{aligned}$$

Avec la déf. 6.2.1 page 98 de la 4-impulsion et (6.5) page 101, nous obtenons l'équation de Hamilton-Jacobi relativiste :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x^0} &= -p_0 \\ \frac{\partial S}{c \partial t} &= -\frac{E}{c} \\ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 &= \frac{E^2}{c^2} \\ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 &= \frac{m^2 c^4}{c^2} + p^2 \\ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 &= m^2 c^2\end{aligned}$$

Index

- Causalité, 47
- Célérité, 66, 67
- Cône de lumière, 42, 43, 69
- Constante
 - chronogéométrique, 5
 - de structure de l'espace-temps, 5
- Convention
 - de genre espace, 12
 - pour la sphère de lumière, 10
 - tenseur métrique, 15
 - de genre temps
 - pour la sphère de lumière, 10
 - tenseur métrique, 13
- Coordonnées
 - galiléennes, 2
 - réduites, 2
- Courbe
 - longueur d'une, 33
- Densité d'énergie, 112
- Diagramme
 - d'espace-temps, 37
 - de Minkowski, 40
 - de Poincaré, 49
 - spatial, 37
 - spatial et temporel, 38
- Distance
 - d'univers, 12
 - propre, 32
 - spatio-temporelle, 5
- Durée
 - impropre, 29
 - propre, 27
- Énergie
 - au repos, 100
 - cinétique relativiste, 100
 - totale relativiste, 100
- Équation(s)
 - d'onde, 88
 - de la sphère de lumière, 10
 - de Maxwell, 8
- Espace
 - euclidien, 49, 53
 - métrique, 5
 - pseudo-euclidien, 1, 13
- Evènement, 7
- Facteur
 - de dilatation temporelle, 29, 67
 - de Lorentz, 21, 80
 - relativiste, 21
 - dérivée du, 77
- Fonction indicatrice, 34
- Fréquence
 - spatiale d'une onde, 90
 - temporelle d'une onde, 90
- Géodésique(s)
 - de l'espace-temps de Minkowski, 17
 - théorème
 - dans l'espace-temps de Minkowski, 17
- Hyperboles invariantes, 44
- Hypercône de lumière, 43
- Inertie, 98
- Intervalle
 - d'univers, 5
 - de genre
 - espace, 47
 - lumière, 46
 - temps, 47
 - infinitésimal, 12
- Invariant, 4
 - de Lorentz, 9
 - relativiste, 9
- Jumeaux de Langevin, 31
- Lagrangien, 122
 - relativiste, 122
- Ligne
 - d'univers, 28

Loi

- covariante, 8
- d'inertie de Sylvester, 16
- de composition
 - des vitesses, 65
 - des vitesses non commutative, 65
 - des vitesses non relativistes, 63
 - interne, 11
 - relativiste des vitesses, 63
- de transformation des composantes, 59

Longueur

- d'onde, 89
- d'une courbe, 33
- impropre, 33
- propre, 32

Matrice

- de Lorentz, 23

Onde

- plane harmonique, 91
- sinusoïdale, 87

Opérateur

- nabla, 108

Phase

- d'un mouvement sinusoïdal, 88
- à l'origine, 88

Plan d'onde, 91

Plongement, 56

Point

- d'univers, 7

Poussière, 111

Principe

- d'inertie, 119
- de moindre action
 - en relativité restreinte, 121
- de relativité, 1

Produit

- extérieur, 113
- scalaire
 - de Minkowski, 60
 - invariance, 62

Pseudo

- métrique, 12
- orthogonale, 81
- orthogonaux, 81, 82, 102

Période, 89

Quadri

-distance, 5

-norme, 61

- de la 4-accélération, 81
- de la 4-impulsion, 101
- de la 4-position, 57
- de la 4-vitesse, 70

-tenseur

- moment cinétique, 114, 127
- énergie-impulsion, 112

-vecteur

- accélération, 79
- d'onde, 93
- densité numérique-flux, 95
- densité-courant, 96
- force, 106
- impulsion, 98
- nabla, 108
- position temps-espace, 56
- vitesse, 69
- vitesse unitaire, 71

Produit

- scalaire, 60

Quadriscalaire, 9

Rapidité

- définition, 51

Rayon

- vecteur, 91

Référentiel(s)

- définition
- en relativité, 2
- en configuration standard, 3
- galiléen, 2

Relativité

- principe de, 1

Scalaire

- de Lorentz, 9

Signature

- euclidienne, 16
- lorentzienne
 - (+ - - -), 14, 46, 61
 - (- + + +), 15, 61
 - (1, 3), 13

Sphère de lumière, 19

Système(s)

- d'unités géométriques, 6, 24

Temps

INDEX

- de la mécanique classique, 31
- impropre, 29
- propre, 27
- Tenseur
 - métrique, 13
- Transformation
 - de Galilée, 4
 - de Lorentz-Poincaré, 7, 9, 19, 43, 45, 54
 - de la tri-accélération, 74
 - de la vitesse propre, 68
 - sous forme intrinsèque, 25
 - des coordonnées, 4
 - spéciale de Lorentz, 21
- Trivecteur
 - accélération, 72
 - propre, 76
 - force relativiste, 106
 - impulsion relativiste, 98
 - position, 55
 - vitesse propre, 66
 - vélocité, 62
- Vaisseau spatial, 82
- Variété
 - d'univers, 13
- Vecteur(s)
 - position, 55
- Vélocité
 - angle imaginaire, 50
 - d'un mobile libre, 120
 - définition, 62
 - dérivée de la, 72
 - lien avec la rapidité, 51
 - lien avec la vitesse, 67
- Vitesse
 - de la lumière, 8
 - limite, 5, 8
 - propre, 66

