

o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

Physique Vol. 6

Relativité générale

Olivier Castéra

Le 14 février 2026

Table des matières

1 Espace euclidien en coordonnées curvilignes	1
1.1 Élément linéaire de l'espace euclidien	1
1.2 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes	4
1.3 Volume élémentaire de l'espace euclidien	9
2 Les symboles de Christoffel	13
2.1 Le problème fondamental de l'analyse tensorielle	13
2.2 Relations entre symboles de Christoffel de 1 ^{re} et 2 ^e espèce	16
2.3 Symétrie des symboles de Christoffel par rapport aux indices	17
2.4 Symboles de Christoffel en fonction du tenseur métrique	18
2.5 Symboles de Christoffel de 2 ^e espèce contractés	19
2.6 Symboles de Christoffel en coordonnées cartésiennes	20
2.7 Symboles de Christoffel en coordonnées orthogonales	20
2.8 Formules de Christoffel	23
2.9 Transport parallèle en espace euclidien	24
3 Dérivée absolue - Dérivée covariante	27
3.1 Différentielle absolue d'un vecteur	27
3.2 Dérivée absolue d'un champ de vecteurs par rapport à son paramètre	29
3.3 Dérivée absolue d'un champ de scalaire par rapport à son paramètre	30
3.4 Dérivée covariante d'un vecteur	30
3.5 Vecteur accélération d'un point mobile	33
3.6 Équations de Lagrange	34
3.7 Différentielle absolue d'un tenseur	35
3.8 Dérivée covariante d'un tenseur	37
3.9 Théorème et identités de Ricci	37
3.10 Dérivée covariante seconde d'un vecteur	38
3.11 Règles de dérivation des tenseurs	39
3.11.1 Dérivée covariante	39
3.11.2 Différentielle absolue	39
4 Opérateurs différentiels	41
4.0.1 Gradient d'un champ de scalaires	41
4.0.2 Divergence d'un champ de vecteurs	41
4.0.3 Divergence d'un champ de tenseurs	42
4.0.4 Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs	43
4.0.5 Laplacien d'un champ de scalaires	44

5 Géométrie des variétés riemanniennes	45
5.1 Métrique euclidienne tangente en un point	46
5.1.1 Espace pré-euclidien tangent à un espace riemannien en un point	46
5.1.2 Caractère intrinsèque	47
5.1.3 Représentation du premier ordre	48
5.1.4 Propriétés déduites des métriques euclidiennes tangentes	49
5.1.5 Représentation du second ordre	51
5.1.6 Transport parallèle en espace courbe	54
5.1.7 Équipollence	55
5.2 Trajectoires dans un espace riemannien	56
5.2.1 Vecteur accélération dans un espace riemannien	56
5.2.2 Principe de Mach	56
5.2.3 Masse inerte et masse grave	57
5.2.4 Forces de marée	58
5.2.5 Géodésiques d'un espace riemannien	60
5.3 Métrique euclidienne de raccordement	66
5.3.1 Développement d'une courbe de $\mathcal{R}_n$ sur l'espace ponctuel euclidien	66
5.3.2 Métrique euclidienne de raccordement le long d'une courbe	67
5.3.3 Application géométrique à la métrique euclidienne de raccordement	70
5.4 Tenseur de courbure d'un espace riemannien	70
5.4.1 Quasi-parallélogramme	71
5.4.2 Développement du quasi-parallélogramme	72
5.4.3 Tenseur rotation	74
5.4.4 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2 ^{de} espèce	74
5.4.5 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1 ^{re} espèce	76
5.4.6 Système de coordonnées localement géodésiques	77
5.4.7 Propriétés du tenseur de courbure	79
5.4.8 Dérivées covariantes secondes d'un vecteur	86
5.4.9 Tenseur de courbure de Ricci	87
5.4.10 Courbure riemannienne scalaire	89
5.4.11 Secondes identités de Bianchi	90
5.4.12 Tenseur d'Einstein	91
6 Dynamique classique	93
6.1 Applications de la géométrie riemannienne	93
6.2 Systèmes holonomes à liaisons scléronomes	94
6.2.1 Cinématique	94
6.2.2 Les équations de la dynamique lagrangienne	96
6.2.3 Absence de forces extérieures	98
6.2.4 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle	98
6.2.5 Recherche d'une géodésique	99
6.3 Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes	101
6.3.1 Les équations de la dynamique	103
6.3.2 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle généralisée	104
6.4 Dynamique classique des milieux continus	105
6.4.1 Milieux continus	105
6.4.2 Dérivée particulière	106
6.4.3 Tenseur des contraintes	106

6.4.4 Équations de la dynamique des milieux continus	110
6.4.5 Écriture des équations en fonction de l'impulsion	111
6.4.6 Forme générale des équations de la dynamique des milieux continus	112
6.4.7 Écriture des équations générales en fonction de l'impulsion	112
6.5 Dynamique relativiste des milieux continus	113
6.6 Forme tensorielle des équations du mouvement	115
7 Gravitation relativiste	119
7.1 Métrique de la relativité générale	119
7.2 Champ gravitationnel faible	120
7.3 Écoulement du temps dans un champ gravitationnel	124
7.4 Décalage gravitationnel vers le rouge	126
7.5 Métrique d'un champ gravitationnel	127
7.6 Lien potentiel gravitationnel et quadritenseur énergie-impulsion	131
7.7 Trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel	131
7.8 Les équations du champ gravitationnel	133
7.8.1 Cas intérieur	133
7.8.2 Cas extérieur	135
8 Principe de moindre action en relativité générale	137
8.1 Cas extérieur	137
8.2 Lagrangien du champ gravitationnel	140
8.3 Constante cosmologique	143
8.4 Cas intérieur	144
9 Champ gravitationnel à symétrie sphérique	147
9.1 La métrique de Schwarzschild	147
9.2 Le tenseur métrique de Schwarzschild	148
9.3 Le tenseur métrique dual de Schwarzschild	148
9.4 Symboles de Christoffel en métrique de Schwarzschild	149
9.5 Symboles de Christoffel contractés en métrique de Schwarzschild	150
9.6 Tenseur de Ricci pour la métrique de Schwarzschild	150
9.7 Équation de la trajectoire d'un corps de faible masse	156
9.8 Avance du périhélie de Mercure	160
9.9 Déviation des rayons lumineux	163

Chapitre 1

ESPACE EUCLIDIEN EN COORDONNÉES CURVILIGNES

Sommaire

1.1 Élément linéaire de l'espace euclidien	1
1.2 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes	4
1.3 Volume élémentaire de l'espace euclidien	9

1.1 Élément linéaire de l'espace euclidien

Définition 1.1.1 : Élément linéaire de l'espace euclidien

Soit E_n un espace ponctuel euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes. Le carré de la distance entre deux points infiniment voisins est égal au carré de la norme euclidienne du vecteur infinitésimal $d\vec{M}$ de l'espace vectoriel euclidien associé :

$$ds^2 \stackrel{\text{déf}}{=} d\vec{M} \cdot d\vec{M}$$

ds est appelé élément linéaire d'espace, ou distance élémentaire ou encore métrique de l'espace.

Dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$ du système de coordonnées curvilignes (x^i) , les composantes contravariantes infinitésimales sont confondues avec les différentielles des coordonnées (Cf. Vol. 1 Notion d'espace). Nous retrouvons le résultat du Vol. 4 Tenseur métrique :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

où les composantes g_{ij} du tenseur métrique sont les produits scalaires des vecteurs de base de la base naturelle.

Remarque 1.1.1

$ds = \|d\vec{M}\|$ est aussi l'abscisse curviligne du point M exprimée dans la base de centre infiniment proche de M .

D'après le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), tout espace pré-euclidien admet une base (pseudo-) orthonormée, donc un système de coordonnées rectangulaire dont c'est la base naturelle, donc aussi un système de coordonnées cartésiennes. Dans la base (pseudo-) orthonormée le tenseur métrique est représentable par une matrice diagonale. Réciproquement, si dans un espace il existe un système de coordonnées rectangulaires, donc aussi un système de coordonnées cartésiennes, alors on peut lui associer une base naturelle (pseudo-) orthonormée, et l'espace est pré-euclidien. C'est le seul cas où tenseur métrique et système de coordonnées (cartésiennes) sont liés. Dans le cas d'espaces non euclidiens, tenseur métrique et système de coordonnées obligatoirement curvilignes sont complètement indépendants.

L'élément linéaire le long d'une courbe paramétrée de paramètre p , est une fonction de ce paramètre : $ds = ds(p)$. Il est souvent avantageux de faire apparaître explicitement le paramètre p dans sa définition :

$$\left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} \quad (1.1)$$

Exemple 1.1.1 : Carré de l'élément linéaire d'espace en coordonnées sphériques

Déterminons l'expression du carré de l'élément linéaire d'espace en coordonnées sphériques de trois façons différentes.

- a) Cherchons l'expression de $d\vec{M}$ en coordonnées sphériques, dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur position s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + r \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + r \cos(\theta) \vec{k} \end{aligned}$$

Or nous avons

$$d\vec{M}(r, \theta, \phi) = \partial_r \vec{M} dr + \partial_\theta \vec{M} d\theta + \partial_\phi \vec{M} d\phi$$

Ces deux relations donnent :

$$\begin{cases} \partial_r \vec{M} = \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k} \\ \partial_\theta \vec{M} = r \cos(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + r \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{j} - r \sin(\theta) \vec{k} \\ \partial_\phi \vec{M} = -r \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{j} \end{cases}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= [\sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k}] dr \\ &\quad + [r \cos(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + r \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{j} - r \sin(\theta) \vec{k}] d\theta \\ &\quad + [-r \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{j}] d\phi \\ &= [\sin(\theta) \cos(\phi) dr + r \cos(\theta) \cos(\phi) d\theta - r \sin(\theta) \sin(\phi) d\phi] \vec{i} \\ &\quad + [\sin(\theta) \sin(\phi) dr + r \cos(\theta) \sin(\phi) d\theta + r \sin(\theta) \cos(\phi) d\phi] \vec{j} \\ &\quad + [\cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta] \vec{k} \end{aligned}$$

dont le produit scalaire avec lui-même donne l'expression cherchée :

$$\begin{aligned} d\vec{M} \cdot d\vec{M} &= [\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)] dr^2 \\ &\quad + r^2 [\cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)] d\theta^2 \\ &\quad + r^2 [\sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)] d\phi^2 \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

- b) Cherchons l'expression de $d\vec{M}$ en coordonnées sphériques, dans la base naturelle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

Sa différentielle vaut :

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r$$

Or d'après le Vol. 1 Notion d'espace :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r(\theta, \phi) &= \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k} \\ d\vec{e}_r &= \partial_\theta \vec{e}_r d\theta + \partial_\phi \vec{e}_r d\phi \\ &= [\cos(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{j} - \sin(\theta) \vec{k}] d\theta \\ &\quad + [-\sin(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{j}] d\phi \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $d\vec{e}_r$ étant perpendiculaires, et le vecteur $\vec{e}_r$ étant de norme unité :

$$\begin{aligned} d\vec{M} \cdot d\vec{M} &= dr^2 \|\vec{e}_r\|^2 + r^2 \|d\vec{e}_r\|^2 \\ &= dr^2 + r^2 \{ [\cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)] d\theta^2 \\ &\quad + [\sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)] d\phi^2 \} \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

- c) En utilisant le tenseur métrique en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} du^i du^j \\ &= g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{13} du^1 du^3 \\ &\quad + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2 + g_{23} du^2 du^3 \\ &\quad + g_{31} du^3 du^1 + g_{32} du^3 du^2 + g_{33} du^3 du^3 \\ &= g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + 2g_{13} du^1 du^3 \\ &\quad + g_{22} (du^2)^2 + 2g_{23} du^2 du^3 + g_{33} (du^3)^2 \end{aligned}$$

Pour un système de coordonnées orthogonales le tenseur métrique est diagonal :

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + g_{22} (du^2)^2 + g_{33} (du^3)^2$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 \\ &= \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr^2 + \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta d\theta^2 + \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi d\phi^2 \\ &= \|\vec{e}_r\|^2 dr^2 + \|\vec{e}_\theta\|^2 d\theta^2 + \|\vec{e}_\phi\|^2 d\phi^2 \end{aligned}$$

Avec les normes des vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques (Cf. Vol. 1 Notion d'espace),

$$\begin{cases} \|\vec{e}_r\| = 1 \\ \|\vec{e}_\theta\| = r \\ \|\vec{e}_\phi\| = r \sin(\theta) \end{cases}$$

et l'on a :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

1.2 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes

Reprenons en coordonnées curvilignes la définition d'une géodésique (Cf. Vol. 1 Notion d'espace).

Définition 1.2.1 : Géodésique

Une trajectoire joignant deux points a et b de $\mathcal{E}_n$ est une géodésique ssi sa longueur est extrémale :

$$\delta \int_{p_a}^{p_b} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}} dp = 0$$

Théorème 1.2.1 : Géodésique

Un mobile dans un espace euclidien $\mathcal{E}_n$ décrit une géodésique si son accélération est nulle :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (1.2)$$

Remarque 1.2.1

La notation avec un point indique que l'on a pris le temps coordonnée pour paramètre, mais une fois que la trajectoire est tracée dans l'espace-temps, n'importe quel paramètre peut être utilisé.

Démonstration. Dans la déf. (1.2.1) de la présente page, posons le lagrangien $\mathcal{L} = g_{ij} x'^i x'^j$,

$$\delta \int_{p_a}^{p_b} \sqrt{\mathcal{L}} dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int_{p_a}^{p_b} \mathcal{L} dp = 0$$

en conservant la condition $\mathcal{L} \geq 0$. Nous obtenons le système des n équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{d}{dp} (2g_{ij} x'^j) - \frac{\partial}{\partial x^i} (g_{kj} x'^k x'^j) &= 0 \\ 2g_{ij} x''^j + 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dp} x'^j - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} x'^k x'^j &= 0 \\ g_{ij} x''^j + \partial_k g_{ij} x'^k x'^j - \frac{1}{2} \partial_i g_{kj} x'^k x'^j &= 0 \\ g_{ij} x''^j + \left(\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i g_{kj} \right) x'^k x'^j &= 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $g_{ij,k} x'^k x'^j = g_{ki,j} x'^k x'^j$:

$$\forall i \quad g_{ij} x''^j + \frac{1}{2} (g_{ki,j} + g_{ij,k} - \partial_i g_{kj}) x'^k x'^j = 0$$

En se servant des relations (2.13) page 19 qui donnent l'expression des symboles de Christoffel de 1^{re} espèce en fonction des dérivées du tenseur métrique :

$$\forall i \quad g_{ij} x''^j + \Gamma_{jik} x'^k x'^j = 0$$

Par multiplication contractée par g^{ih} , nous trouvons le système des n équations différentielles d'une géodésique en coordonnées curvilignes :

$$\forall h \quad x''^h + \Gamma^h_{jk} x'^j x'^k = 0$$

avec $g_{ij} x'^i x'^j \geq 0$. □

Ce système de n équations différentielles ordinaires du second ordre, pour les n fonctions $x^i(\lambda)$ du paramètre quelconque λ , donne une géodésique. La trajectoire à accélération nulle est invariante par changement de coordonnées. Les géodésiques sont donc indépendantes du choix du système de coordonnées, que ce soit dans les espaces euclidiens ou non euclidiens. D'après (3.5) et (3.6) page 33, les coordonnées $x^i(t)$ d'une géodésique de E_n sont solutions du système d'équations différentielles :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \ddot{x}^i + \Gamma^i_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j = 0 \quad (1.3)$$

Les géodésiques ne sont pas fonction du temps, n'importe quel paramètre permet de les définir. Prenons par exemple λ :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \lambda^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial \lambda} \frac{\partial x^j}{\partial \lambda} = 0$$

Une géodésique en particulier est complètement déterminée si l'on se donne un point et la tangente en ce point. Le vecteur $\vec{t}$ tangent à la trajectoire géodésique suivie par un point M a pour expression :

$$\vec{t} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\vec{M}}{d\lambda}$$

Lorsque l'on paramètre avec le temps le vecteur tangent est le vecteur vitesse. Lorsque l'on paramètre avec l'abscisse curviligne de la géodésique comptée à partir d'une origine fixe, d'après (3.4) page 32, le vecteur $\vec{u}$ tangent à la géodésique a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{u} &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\vec{M}}{ds} \\ u^i \vec{e}_i &= \frac{dx^i}{ds} \vec{e}_i \\ \forall i \quad u^i &= \frac{dx^i}{ds} \end{aligned}$$

Le système d'équations différentielles (1.3) devient

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kj} u^k u^j = 0 \quad (1.4)$$

Exemple 1.2.1 : Géodésiques du plan en coordonnées rectilignes

En coordonnées rectilignes d'un espace pré-euclidien, les g_{ij} étant constants les symboles de Christoffel sont nuls. Le système d'équations différentielles (1.3) s'écrit :

$$\forall i \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i \quad \frac{dx^i}{dt} = a_i \quad \Rightarrow \quad \forall i \quad x^i = a_i t + b_i$$

En particulier dans l'espace ponctuel euclidien E_2 (le plan) associé au système de coordon-

nées rectilignes (x, y) :

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (x - b_1)/a_1 \\ y = \frac{a_2}{a_1} x + b_2 - \frac{a_2}{a_1} b_1 \end{cases} \Rightarrow y = ax + b$$

Les géodésiques du plan sont des droites, on note qu'elles ne sont pas fonction du paramètre.

Exemple 1.2.2 : Géodésique du plan en coordonnées polaires

La droite verticale d'équation $x = a$ dans un système rectangulaire a pour équation polaire $\rho = a / \cos(\theta)$. Montrons que cette équation vérifie l'équation (1.4). Paramétrons l'équation de la droite :

$$\begin{cases} \rho = a / \cos(\lambda) \\ \theta = \lambda \end{cases}$$

Avec (1.1) page 2 :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\lambda} &= \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2} \end{aligned}$$

Le long de la droite verticale :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\lambda} &= \sqrt{\left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{a}{\cos(\lambda)}\right)\right]^2 + \left(\frac{a}{\cos(\lambda)}\right)^2 \left(\frac{d\lambda}{d\lambda}\right)^2} \\ &= |a| \sqrt{\frac{\sin^2 \lambda}{\cos^4 \lambda} + \frac{1}{\cos^2(\lambda)}} \\ &= \frac{|a|}{\cos^2(\lambda)} \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction $x(\lambda)$ le long de la droite :

$$\begin{aligned} \frac{dx(\lambda)}{ds} &= \frac{dx}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} \\ &= \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \frac{dx}{d\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(\lambda)}{ds^2} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \frac{dx}{d\lambda} \right) \frac{d\lambda}{ds} \\ &= \left(\frac{-2 \cos(\lambda) \sin(\lambda)}{|a|} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} \right) \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} - \frac{2 \sin(\lambda) \cos^3(\lambda)}{a^2} \frac{dx}{d\lambda} \end{aligned}$$

L'équation de droite pour $\rho(\lambda)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{ds^2} + \Gamma_{\theta\theta}^{\rho} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \frac{d^2\rho}{d(\lambda)^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2} \frac{d\rho}{d\lambda} + (-\rho) \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} (\rho'' - 2\rho' \tan(\lambda) - \rho\theta'^2) \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \left(\frac{a\cos^3(\lambda) + 2a\sin^2(\lambda)\cos(\lambda)}{\cos^4(\lambda)} - \frac{2a\sin(\lambda)}{\cos^2(\lambda)} \tan(\lambda) - \frac{a}{\cos(\lambda)} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

De même, l'équation de droite pour $\theta(\lambda)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma_{\rho\theta}^{\theta} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \frac{d^2\theta}{d(\lambda)^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2} \frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{2}{\rho} \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \frac{d\rho}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} \\ \frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma_{\rho\theta}^{\theta} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \left(\theta'' - 2\theta' \tan(\lambda) + \frac{2\rho'\theta'}{\rho} \right) \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2} \left(-2\tan(\lambda) + \frac{2a\sin(\lambda)\cos(\lambda)}{a\cos^2(\lambda)} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Soit E_n un espace ponctuel rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i) . D'après la définition d'une géodésique, une courbe de coordonnées curvilignes $x^i = x^i(p)$ de paramètre p quelconque est une géodésique ssi :

$$\begin{aligned}\delta \int_A^B \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} &= 0 \\ \delta \int_{P_A}^{P_B} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}} dp &= 0\end{aligned} \tag{1.5}$$

où, puisque l'on prend pour composantes contravariantes les coordonnées curvilignes, les éléments du tenseur métrique sont les produits scalaires des vecteurs de base de la base naturelle.

$$\delta \int_{P_A}^{P_B} g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} dp = 0$$

Le point désignant la dérivation par rapport à p :

$$\delta \int_{P_A}^{P_B} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dp = 0$$

En posant le lagrangien

$$\mathcal{L} = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

nous avons :

$$\delta \int_{P_A}^{P_B} \mathcal{L}(\dot{x}^i) dp = 0$$

D'après le principe de Hamilton cette relation donne le système des n équations d'Euler-Lagrange pour le paramètre p :

$$\begin{aligned}\forall i = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \\ & \frac{d}{dp} (2g_{ij} \dot{x}^j) - \frac{\partial}{\partial x^i} (g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k) = 0 \\ & g_{ij} \ddot{x}^j + \dot{x}^j \frac{dg_{ij}}{dp} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0\end{aligned}$$

Théorème 1.2.2

La longueur d'une courbe est indépendante du choix du paramètre.

Démonstration. Soit le nouveau paramètre q fonction de l'ancien paramètre p :

$$\begin{aligned}q &= f(p) \\ dq &= \frac{\partial f(p)}{\partial p} dp \\ \forall i = 1, \dots, n \quad & \frac{dx^i}{dp} = \frac{dx^i}{dq} \frac{\partial f(p)}{\partial p}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dq} \frac{\partial f(p)}{\partial p} \frac{dx^j}{dq} \frac{\partial f(p)}{\partial p}} dp \\ &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dq} \frac{dx^j}{dq} \frac{\partial f(p)}{\partial p}} dp \\ &= \int_{f(p_0)}^{f(p_1)} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dq} \frac{dx^j}{dq}} dq\end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.3 : Équations paramétriques d'une droite en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(\rho, \theta) = \rho^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = 0 \\ \frac{d}{dp} (\rho^2 \dot{\theta}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = 0 \\ 2\rho \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Lorsque le paramètre est le temps, ce système d'équations différentielles paramétriques impliquent la nullité des composantes de l'accélération du point décrivant la courbe (Cf. Vol. 1 Notion d'espace).

Nous verrons au § 5.2 page 56 qu'une droite peut aussi être définie comme la trajectoire d'un point ayant une accélération nulle.

Montrons que ce système d'équations différentielles donne bien une droite. En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite $y = ax + b$ peut aussi s'écrire :

$$ax + by = c$$

En passant en coordonnées polaires :

$$a\rho \cos(\theta) + b\rho \sin(\theta) = c$$

$$\rho [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)] = c$$

En dérivant par rapport au paramètre :

$$\dot{\rho} [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)] + \rho \dot{\theta} [-a \sin(\theta) + b \cos(\theta)] = 0$$

En dérivant une seconde fois par rapport au paramètre :

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)] + \dot{\rho} \dot{\theta} [-a \sin(\theta) + b \cos(\theta)] + \dot{\rho} \dot{\theta} [-a \sin(\theta) + b \cos(\theta)] \\ + \rho \ddot{\theta} [-a \sin(\theta) + b \cos(\theta)] + \rho \dot{\theta}^2 [-a \cos(\theta) - b \sin(\theta)] = 0 \\ (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)] + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) [-a \sin(\theta) - b \cos(\theta)] = 0 \\ (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dp} (\rho^2 \dot{\theta}) [-a \sin(\theta) - b \cos(\theta)] = 0 \end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = 0 \\ \frac{d}{dp} (\rho^2 \dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

1.3 Volume élémentaire de l'espace euclidien

Nous allons avoir besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant :

Théorème 1.3.1

Soient trois vecteurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w} \cdot \vec{w} \end{bmatrix}$$

Démonstration.

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \vec{w} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} &= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\ &= \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant de toute matrice est égal au déterminant de sa transposée :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w})^2 = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \times \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

Quelles que soient A et B deux matrices compatibles, $\det(A) \times \det(B) = \det[(A)(B)]$:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w})^2 &= \det \left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 & u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 & u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 \\ v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 & v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 & v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \\ w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3 & w_1 v_1 + w_2 v_2 + w_3 v_3 & w_1 w_1 + w_2 w_2 + w_3 w_3 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w} \cdot \vec{w} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien de dimension trois. Pour construire un parallélépipède de volume élémentaire, prenons une variation le long de chaque coordonnée d'un système de coordonnées quelconque (x^1, x^2, x^3) . Construisons d'abord une surface élémentaire orientée d $\vec{S}$. Dans la base naturelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associée à ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \partial_2 \vec{M} dx^2 \times \partial_3 \vec{M} dx^3 \\ &= \vec{e}_2 dx^2 \times \vec{e}_3 dx^3 \\ &= \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 dx^2 dx^3 \end{aligned}$$

où l'opérateur $\times$ est le produit vectoriel. Construisons un élément de volume :

$$\begin{aligned} dV &= \vec{e}_1 dx^1 \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{e}_1 dx^1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 dx^2 dx^3) \\ &= \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned}$$

Avec le th. 1.3.1 page 9 :

$$\begin{aligned} dV &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \sqrt{|g|} \prod_{i=1}^3 dx^i \end{aligned}$$

Soit E_n un espace ponctuel pré-euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i) de base naturelle $(\vec{e}_i)$. Avec la notation du Vol. 1 Notion d'espace, le volume élémentaire de l'espace s'écrit :

$$dV = \sqrt{|g|} d\Omega \quad (1.6)$$

On déduit par intégration la mesure d'un volume fini de l'espace :

$$V = \int \sqrt{|g|} d\Omega$$

Exemple 1.3.1 : Volume élémentaire en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, dans la base naturelle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$:

$$dv = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi dr d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned} dV &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} dr d\theta d\phi \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 \sin^2(\theta) \cos(\phi) \\ r^2 \sin^2(\theta) \sin(\phi) \\ r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix} dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= [r^2 \sin^3(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \sin^3(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)] dr d\theta d\phi \\ &= [r^2 \sin^3(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta)] dr d\theta d\phi \\ &= r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

On peut exprimer le volume élémentaire grâce au tenseur métrique. En coordonnées sphériques le déterminant du tenseur métrique (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) est donné

par :

$$\begin{aligned}g &= 1 \times r^2 \times r^2 \sin^2(\theta) \\&= r^4 \sin^2(\theta) \\\sqrt{g} &= r^2 \sin(\theta)\end{aligned}$$

Si bien que :

$$dV = \sqrt{g} \, dr d\theta d\phi$$

Chapitre 2

LES SYMBOLES DE CHRISTOFFEL

Nous avons vu dans le Vol. 1 Notion d'espace, que lorsque le système de coordonnées est curviligne, qu'il soit orthogonal ou non, nous ne pouvons pas lui associer de base globale. Nous avons alors défini une base naturelle locale, dont les vecteurs de base sont fonction des coordonnées du point où l'on se trouve. Nous avons effectué des changements de base en restant au même point, par changement de système de coordonnées.

Nous nous intéressons maintenant au changement de base lorsque l'on passe d'un point à un autre infiniment proche, en restant dans le même système de coordonnées. Cela va nous permettre de définir la dérivée d'un vecteur ou d'un tenseur. Les vecteurs de la nouvelle base naturelle locale tournent et changent de norme en passant d'un point à un autre. Ils sont bien entendu exprimés dans l'ancienne base naturelle locale, seule base connue *a priori*. Pour rester dans l'ancienne base naturelle locale, nous utiliserons le calcul différentiel au voisinage de l'origine de cette ancienne base.

2.1 Le problème fondamental de l'analyse tensorielle

Supposons qu'en tout point M d'un espace ponctuel euclidien E_n , nous attachions un tenseur défini par ses composantes relatives au repère naturel en M du système de coordonnées curvilignes (x^i) . Nous dirons que nous nous sommes donné un champ de tenseurs dans le système (x^i) . Le tenseur métrique $g_{ij}(x^k)$ fournit un tel exemple de champ de tenseurs. Pour pouvoir comparer ces tenseurs, il convient d'étudier comment le repère naturel varie quand on passe d'un point M à un point infiniment voisin.

Problème 1 : Le problème fondamental de l'analyse tensorielle

L'espace ponctuel euclidien E_n étant rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^j) , pour lequel l'élément linéaire de l'espace est

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

déterminer, par rapport au repère naturel $(M, \vec{e}_j)$, le repère naturel infiniment voisin $(M + d\vec{M}, \vec{e}_j + d\vec{e}_j)$.

Autrement dit, cherchons l'expression des vecteurs infinitésimaux $d\vec{M}$ et $d\vec{e}_j$. Dans la base naturelle :

$$d\vec{M} = dx^j \vec{e}_j$$

Pour le second, appelons ω^i les composantes contravariantes (cherchées) du vecteur $d\vec{e}_j$ dans la base naturelle ($\vec{e}_i$) :

$$\forall j \quad d\vec{e}_j = \omega^i_j \vec{e}_i \quad (2.1)$$

Remarque 2.1.1

Nous avons par exemple

$$\begin{cases} d\vec{e}_1 = \omega^1_1 \vec{e}_1 + \omega^2_1 \vec{e}_2 \\ d\vec{e}_2 = \omega^1_2 \vec{e}_1 + \omega^2_2 \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \omega^1_2 \neq \omega^2_1$$

Les ω^i_j n'étant pas symétriques, on ne doit pas les écrire avec les indices alignés verticalement.

Notation 2.1.1

Un choix de notation entre

$$d\vec{e}_j = \omega^i_j \vec{e}_i \quad \text{et} \quad d\vec{e}_j = \omega_j^i \vec{e}_i$$

est affaire de convention. Un choix étant fait, nous nous y tenons.

Remarque 2.1.2

Dans la notation ω^i_j , l'indice j n'est pas un indice de composante mais désigne un vecteur. Par conséquent les ω^i_j ne sont pas les composantes d'un tenseur.

Tout vecteur $d\vec{e}_j$ est fonction du vecteur déplacement $d\vec{M}$. Les ω^i_j sont donc des infiniment petits du même ordre que les dx^j , et ils doivent s'annuler en même temps qu'eux. Par conséquent ils sont une combinaison linéaires des différentielles dx^k (cf. ex. 2.1.1 page suivante)

$$\forall i, j \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k \quad (2.2)$$

où les Γ^i_{jk} désignent n^3 (chacun des trois indices i, j, k varie de 1 à n) fonctions des coordonnées (x^k) du point M .

Notation 2.1.2

Un choix de notation entre

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k \quad \text{et} \quad \omega^i_j = \Gamma_k^i dx^k$$

est affaire de convention. Un choix étant fait, nous nous y tenons.

Remarque 2.1.3

Dans la notation Γ^i_{jk} , l'indice j n'est pas un indice de composante mais désigne un vecteur. Par conséquent les Γ^i_{jk} ne sont pas les composantes d'un tenseur.

Notre problème se trouve ainsi ramené à la détermination des n^3 fonctions Γ^i_{jk} à partir des $n(n+1)/2$ fonctions g_{ij} (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique).

Avec (2.1) et (2.2) précédentes :

$$\forall i \quad d\vec{e}_j = \Gamma_{jk}^i dx^k \vec{e}_i \quad (2.3)$$

Définition 2.1.1 : Symboles de Christoffel de 2^e espèce

Les n^3 quantités $\Gamma_{jk}^i(x^k)$ sont appelées symboles de Christoffel de 2^e espèce.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall j \quad d\vec{e}_j &= \Gamma_{jk}^i dx^k \vec{e}_i \\ \partial_k \vec{e}_j dx^k &= \Gamma_{jk}^i dx^k \vec{e}_i \\ \forall j, k \quad \partial_k \vec{e}_j &= \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\partial_k \vec{e}_j$ est un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\vec{e}_i$. Le terme Γ_{jk}^i est sa $i^{\text{ème}}$ composante.

Appelons ω_{ij} les composantes covariantes du vecteur $d\vec{e}_j$:

$$\forall i, j \quad \omega_{ij} = d\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$$

Remarque 2.1.4

On vérifie à nouveau que les ω_{ij} ne sont pas symétriques. Nous avons par exemple

$$\begin{cases} \omega_{12} = d\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \\ \omega_{21} = d\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_{12} \neq \omega_{21}$$

Les ω_{ij} sont aussi des combinaisons linéaires des différentielles dx^k :

$$\forall i, j \quad \omega_{ij} = \Gamma_{ijk} dx^k$$

Notation 2.1.3

La notation des indices de gamma dans l'ordre ijk est arbitraire mais un choix est nécessaire. Nous avons choisi d'écrire en premier l'indice de la composante, en deuxième l'indice du vecteur et en dernier l'indice de la différentielle.

Définition 2.1.2 : Symboles de Christoffel de 1^{re} espèce

Les n^3 quantités $\Gamma_{ijk}(x^k)$ sont appelées symboles de Christoffel de 1^{re} espèce.

Exemple 2.1.1 : Symboles de Christoffel de la base naturelle polaire

Étudions le problème de la variation du repère naturel des coordonnées polaires. En dérivant

par rapport aux coordonnées :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\rho \sin(\theta) \vec{i} + \rho \cos(\theta) \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_\rho \vec{e}_\rho = 0 \\ \partial_\theta \vec{e}_\rho = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j} \\ \partial_\rho \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{i} + \cos(\theta) \vec{j} \\ \partial_\theta \vec{e}_\theta = -\rho \cos(\theta) \vec{i} - \rho \sin(\theta) \vec{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\rho \vec{e}_\rho = 0 \\ \partial_\theta \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta / \rho \\ \partial_\rho \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta / \rho \\ \partial_\theta \vec{e}_\theta = -\rho \vec{e}_\rho \end{cases}$$

Les différentielles des vecteurs de la base naturelle polaire s'écrivent :

$$\begin{cases} d\vec{e}_\rho = \partial_\rho \vec{e}_\rho d\rho + \partial_\theta \vec{e}_\rho d\theta \\ d\vec{e}_\theta = \partial_\rho \vec{e}_\theta d\rho + \partial_\theta \vec{e}_\theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta d\theta / \rho \\ d\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta d\rho / \rho - \rho \vec{e}_\rho d\theta \end{cases}$$

Avec (2.1) page 14 :

$$\begin{cases} d\vec{e}_\rho = \omega^\rho_\rho \vec{e}_\rho + \omega^\theta_\rho \vec{e}_\theta \\ d\vec{e}_\theta = \omega^\rho_\theta \vec{e}_\rho + \omega^\theta_\theta \vec{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega^\rho_\rho = 0 \\ \omega^\theta_\rho = d\theta / \rho \\ \omega^\rho_\theta = -\rho d\theta \\ \omega^\theta_\theta = d\rho / \rho \end{cases}$$

Avec (2.3) page précédente,

$$\begin{cases} d\vec{e}_\rho = \Gamma^\rho_{\rho\rho} d\rho \vec{e}_\rho + \Gamma^\rho_{\rho\theta} d\theta \vec{e}_\rho + \Gamma^\theta_{\rho\rho} d\rho \vec{e}_\theta + \Gamma^\theta_{\rho\theta} d\theta \vec{e}_\theta \\ d\vec{e}_\theta = \Gamma^\rho_{\theta\rho} d\rho \vec{e}_\rho + \Gamma^\rho_{\theta\theta} d\theta \vec{e}_\rho + \Gamma^\theta_{\theta\rho} d\rho \vec{e}_\theta + \Gamma^\theta_{\theta\theta} d\theta \vec{e}_\theta \end{cases}$$

nous trouvons les symboles de Christoffel de 2^e espèce de la base naturelle polaire :

$$\begin{array}{cccc} \Gamma^\rho_{\rho\rho} = 0 & \Gamma^\rho_{\rho\theta} = 0 & \Gamma^\theta_{\rho\rho} = 0 & \Gamma^\theta_{\rho\theta} = 1/\rho \\ \Gamma^\rho_{\theta\rho} = 0 & \Gamma^\rho_{\theta\theta} = -\rho & \Gamma^\theta_{\theta\rho} = 1/\rho & \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \end{array}$$

2.2 Relations entre symboles de Christoffel de 1^{re} et 2^e espèce

Les composantes covariantes ω_{ij} et contravariantes ω^i_j du vecteur $d\vec{e}_j$ sont liées par la relation :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \omega_{ij} &= g_{ih} \omega^h_j \\ \Gamma_{ijk} dx^k &= g_{ih} \Gamma^h_{jk} dx^k \\ \forall i, j, k \quad \Gamma_{ijk} &= g_{ih} \Gamma^h_{jk} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le tenseur métrique abaisse l'indice haut, celui de la composante, qui passe de contravariante à

covariante. C'est pourquoi nous laissons une espace libre pour que l'indice puisse descendre et rester un indice de composante.

Réciproquement, nous écrivons :

$$\forall i, j, k \quad \Gamma_{jk}^i = g^{ih} \Gamma_{hjk} \quad (2.6)$$

La connaissance des n^3 fonctions Γ_{jk}^i est donc équivalente à celle des n^3 fonctions Γ_{ijk} .

2.3 Symétrie des symboles de Christoffel par rapport aux indices

Pour que $d\vec{M}$ soit intégrable, autrement dit pour que $d\vec{M}$ soit une différentielle totale exacte, les dérivées secondes de $\vec{M}$ doivent être symétriques par rapport à leurs indices de dérivation (condition de Schwarz). En utilisant (2.4) page 15 :

$$\begin{aligned} \forall j, k \quad \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial x^k \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x^j} \right) \\ &= \partial_k \vec{e}_j \\ &= \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Inversons l'ordre de dérivation :

$$\begin{aligned} \forall j, k \quad \vec{M}_{,kj} &= \vec{M}_{,jk} \\ \Gamma_{jk}^i \vec{e}_i &= \Gamma_{kj}^i \vec{e}_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

Avec la notation 2.1.3 page 15 choisie, les symboles de Christoffel de 2^e espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\boxed{\forall i, j, k \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i} \quad (2.9)$$

De même :

$$\begin{aligned} \forall h, j, k \quad \Gamma_{jk}^h &= \Gamma_{kj}^h \\ g^{hi} \Gamma_{ijk} &= g^{hi} \Gamma_{ikj} \end{aligned}$$

Avec la notation 2.1.3 page 15 choisie, les symboles de Christoffel de 1^{re} espèce sont symétriques par rapport à leurs derniers indices :

$$\boxed{\forall i, j, k \quad \Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}} \quad (2.10)$$

Reprenons (2.9) ou (2.10). Pour chacune des n valeurs de l'indice i de Γ , les indices j et k varient de 1 à n .

Parmi les n^2 équations fournies en faisant varier les indices j et k , on compte n égalités du type $\Gamma_{jj}^i = \Gamma_{jj}^i$ (ou $\Gamma_{ijj} = \Gamma_{ijj}$) qui n'apportent rien.

Parmi les $n^2 - n$ égalités restantes, se trouve l'égalité $\Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i$, et plus loin, $\Gamma_{21}^i = \Gamma_{12}^i$ (ou $\Gamma_{i12} = \Gamma_{i21}$ et $\Gamma_{i21} = \Gamma_{i12}$). Les égalités apparaissent donc deux fois et l'on a par conséquent $(n^2 - n)/2$ égalités distinctes.

En prenant en compte les n valeurs de l'indice i , (2.9) ou (2.10) permettent d'établir le nombre suivant d'équations :

$$n \times \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2(n - 1)$$

Notation 2.3.1

Les symboles de Christoffel sont aussi notés comme suit :

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ijk} = [jk, i] \\ = \{jk, i\}$$

2.4 Symboles de Christoffel en fonction du tenseur métrique

À partir de la définition du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad g_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ dg_{ij} &= \vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j + \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i \\ &= \vec{e}_i \cdot \omega_j^k \vec{e}_k + \vec{e}_j \cdot \omega_i^k \vec{e}_k \\ &= g_{ik} \omega_j^k + g_{jk} \omega_i^k \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \partial_k g_{ij} dx^k &= g_{ih} \Gamma_{jk}^h dx^k + g_{jh} \Gamma_{ik}^h dx^k \\ \forall i, j, k \quad \partial_k g_{ij} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les g_{ij} étant au nombre de $n(n+1)/2$, le système (2.12) comprend $n^2(n+1)/2$ équations. Avec les équations (2.9) de symétries des symboles de Christoffel sur les indices bas, nous avons :

$$\frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{2}n^2(n-1) = n^3$$

équations, pour les n^3 inconnues Γ_{ijk} . Ce système sera soluble si les conditions d'intégrabilité des vecteurs $\vec{e}_i$ sont satisfaites. Pour trouver les conditions d'intégrabilité de l'équation $d\vec{OM} = dx^i \vec{e}_i$, nous avons implicitement supposé que les équations (2.1) page 14 l'étaient, puisque nous les avons utilisées pour écrire (2.8) page précédente. L'intégrabilité des équations (2.1) est donc nécessaire à celle de $d\vec{OM} = dx^i \vec{e}_i$. Pour que $d\vec{e}_i$ soit intégrable, les dérivées secondes de $\vec{e}_i$ doivent être symétriques par rapport à leurs indices de dérivation. Avec (2.4) page 15, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall i, k, l \quad \partial_l(\partial_k \vec{e}_i) &= \partial_k(\partial_l \vec{e}_i) \\ \partial_l(\Gamma_{ik}^j \vec{e}_j) &= \partial_k(\Gamma_{il}^j \vec{e}_j) \\ \partial_l \Gamma_{ik}^j \vec{e}_j + \Gamma_{ik}^j \partial_l \vec{e}_j &= \partial_k \Gamma_{il}^j \vec{e}_j + \Gamma_{il}^j \partial_k \vec{e}_j \\ \partial_l \Gamma_{ik}^j \vec{e}_j + \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jl}^m \vec{e}_m &= \partial_k \Gamma_{il}^j \vec{e}_j + \Gamma_{il}^j \Gamma_{jk}^m \vec{e}_m \\ \partial_l \Gamma_{ik}^j \vec{e}_j + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j \vec{e}_j &= \partial_k \Gamma_{il}^j \vec{e}_j + \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j \vec{e}_j \\ (\partial_l \Gamma_{ik}^j - \partial_k \Gamma_{il}^j) + (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j) &= 0 \end{aligned}$$

En remplaçant les symboles de Christoffel par leurs expressions en fonction du tenseur métrique, (voir plus loin (2.14) de la présente page), on obtient les conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions g_{ij} pour résoudre notre problème.

En appliquant deux fois la permutation circulaire des indices $i \rightarrow j, j \rightarrow k, k \rightarrow i$ aux relations (2.12) page précédente, nous obtenons deux autres ensembles de relations :

$$\begin{aligned}\forall i, j, k \quad \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij} \\ \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} &= \partial_i g_{jk} \\ \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} &= \partial_j g_{ki}\end{aligned}$$

En additionnant la première et la dernière relation et en soustrayant la deuxième, nous obtenons l'expression des symboles de Christoffel de 1^{re} espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\forall i, j, k \quad 2\Gamma_{ijk} = \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk}$$

$$\boxed{\forall i, j, k \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk})} \quad (2.13)$$

Avec (2.6) page 17, les symboles de 2^e espèce ont pour expression :

$$\boxed{\forall i, j \quad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih}(\partial_k g_{hj} + \partial_j g_{kh} - \partial_h g_{jk})} \quad (2.14)$$

2.5 Symboles de Christoffel de 2^e espèce contractés

Dans le cas particulier où $k = i$, (2.14) devient :

$$\forall i, j \quad \Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{ih}(\partial_i g_{hj} + \partial_j g_{ih} - \partial_h g_{ji})$$

Or,

$$\begin{aligned}g^{ih}\partial_i g_{hj} &= g^{hi}\partial_i g_{hj} \\ &= g^{ih}\partial_h g_{ij} \\ &= g^{ih}\partial_h g_{ji}\end{aligned}$$

Il reste

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{ih}\partial_j g_{ih} \quad (2.15)$$

Avec $\partial_k g = g g^{ij} \partial_k g_{ij}$ (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$\forall j \quad \Gamma^i_{ij} = \frac{\partial_j g}{2g} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_j \sqrt{|g|} \\ &= \partial_j \ln \sqrt{|g|}\end{aligned} \quad (2.17)$$

2.6 Symboles de Christoffel en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes (rectilignes) les symboles de Christoffel sont tous nuls car les vecteurs de base ne tournent pas :

$$\forall i, j \quad g_{ij} = c^{ste} \quad \Rightarrow \quad \forall i, j, k \quad \partial_k g_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \forall i, j, k & \Gamma_{ijk} = 0 \\ \forall i, j, k & \Gamma^i_{jk} = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes (rectilignes) ne sont possibles que dans les espaces plats, pré-euclidiens. Si les symboles de Christoffel sont nuls alors les coordonnées sont rectilignes, et l'espace est plat.

Remarque 2.6.1

Si les symboles de Christoffel étaient des tenseurs ils auraient même valeur dans tous les systèmes de coordonnées. Or ils sont nuls dans les systèmes de coordonnées cartésiennes (rectilignes) et non nuls dans les systèmes de coordonnées curvilignes. Par conséquent, ce ne sont pas des tenseurs. Pour les mêmes raisons les ω^i_j ne sont pas les composantes d'un tenseur.

2.7 Symboles de Christoffel en coordonnées orthogonales

En coordonnées orthogonales le tenseur métrique est diagonal, $\forall i \neq j \quad g_{ij} = 0$, permettant de simplifier les symboles de Christoffel de 1^{re} et 2^e espèce (2.13) et (2.14) page précédente.

- pour les symboles de 1^{re} espèce

$$\begin{cases} \forall i = j = k, & \Gamma_{iii} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{ii} + \partial_i g_{ii} - \partial_i g_{ii}) \\ \forall i = j \neq k, & \Gamma_{iik} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ii} + \partial_i g_{ki} - \partial_i g_{ik}) \\ \forall i \neq j = k, & \Gamma_{ijj} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ij} + \partial_j g_{ji} - \partial_i g_{jj}) \\ \forall i = k \neq j, & \Gamma_{iji} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{ij} + \partial_j g_{ii} - \partial_i g_{ji}) \\ i, j, k \neq, & \Gamma_{ijk} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Gamma_{iii} = \frac{1}{2} \partial_i g_{ii} \\ \Gamma_{iij} = \frac{1}{2} \partial_j g_{ii} \\ \Gamma_{ijj} = -\frac{1}{2} \partial_i g_{jj} \\ \Gamma_{iji} = \frac{1}{2} \partial_j g_{ii} \\ \Gamma_{ijk} = 0 \end{cases}$$

Avec la symétrie des symboles :

$$\begin{cases} \Gamma_{iii} = \frac{1}{2} \partial_i g_{ii} \\ \Gamma_{iij} = \frac{1}{2} \partial_j g_{ii} \\ \Gamma_{ijj} = -\frac{1}{2} \partial_i g_{jj} \end{cases} \quad (2.18)$$

- pour les symboles de 2^e espèce, à partir des relations (2.6) page 17 :

$$\begin{cases} \Gamma^i_{ii} = g^{ij} \Gamma_{jii} \\ \Gamma^i_{ij} = g^{ik} \Gamma_{kij} \\ \Gamma^i_{jj} = g^{ik} \Gamma_{kjj} \\ \Gamma^i_{ji} = g^{ik} \Gamma_{kji} \\ \Gamma^i_{jk} = g^{ih} \Gamma_{hjk} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Gamma^i_{ii} = g^{ii} \Gamma_{iii} & \text{sans sommer sur } i \\ \Gamma^i_{ij} = g^{ii} \Gamma_{iij} & \text{sans sommer sur } i \\ \Gamma^i_{jj} = g^{ii} \Gamma_{ijj} & \text{sans sommer sur } i \\ \Gamma^i_{ji} = g^{ii} \Gamma_{iji} & \text{sans sommer sur } i \\ \Gamma^i_{jk} = 0 \end{cases}$$

Avec $\forall i \ g^{ii} = (g_{ii})^{-1}$ (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), et avec (2.18) :

$$\begin{cases} \Gamma_{ii}^i = \Gamma_{iii}/g_{ii} \\ \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{iij}/g_{ii} \\ \Gamma_{jj}^i = \Gamma_{ijj}/g_{ii} \\ \Gamma_{ji}^i = \Gamma_{iji}/g_{ii} \\ \Gamma_{jk}^i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{ii}^i = \partial_i g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma_{ij}^i = \partial_j g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma_{jj}^i = -\partial_i g_{jj}/(2g_{ii}) \\ \Gamma_{ji}^i = \partial_j g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma_{jk}^i = 0 \end{cases}$$

Avec la symétrie des symboles :

$$\begin{cases} \Gamma_{ii}^i = \partial_i g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma_{ij}^i = \partial_j g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma_{jj}^i = -\partial_i g_{jj}/(2g_{ii}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \partial_i \ln g_{ii} \\ \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \partial_j \ln g_{ii} \\ \Gamma_{jj}^i = -\partial_i g_{jj}/(2g_{ii}) \end{cases} \quad (2.19)$$

Exemple 2.7.1 : Symboles de Christoffel en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

Dans la base naturelle associée au coordonnées cylindriques de l'espace euclidien, le tenseur métrique a pour composantes (Cf. Vol. 1 Notion d'espace)

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\phi\phi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1$$

Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $\partial_\rho g_{\phi\phi} = 2\rho$.

- pour les symboles de 1^{re} espèce, à partir des relations (2.18) page précédente :

$$\begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\rho} = \Gamma_{\rho\phi\phi} = \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\rho\phi\phi} = -\frac{1}{2} \partial_\rho g_{\phi\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\rho} = \Gamma_{\rho\phi\phi} = \rho \\ \Gamma_{\rho\phi\phi} = -\rho \end{cases}$$

- pour les symboles de 2^e espèce, à partir des relations (2.19) de la présente page :

$$\begin{cases} \Gamma_{\phi\rho}^\phi = \Gamma_{\rho\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\phi\rho}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\rho = \Gamma_{\rho\phi\phi}/g_{\rho\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\phi\rho}^\phi = \Gamma_{\rho\phi}^\phi = 1/\rho \\ \Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho \end{cases}$$

Avec (2.3) page 15 :

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= \Gamma_{11}^1 \vec{e}_1 dx^1 + \Gamma_{11}^2 \vec{e}_2 dx^1 + \Gamma_{11}^3 \vec{e}_3 dx^1 \\ &\quad + \Gamma_{12}^1 \vec{e}_1 dx^2 + \Gamma_{12}^2 \vec{e}_2 dx^2 + \Gamma_{12}^3 \vec{e}_3 dx^2 \\ &\quad + \Gamma_{13}^1 \vec{e}_1 dx^3 + \Gamma_{13}^2 \vec{e}_2 dx^3 + \Gamma_{13}^3 \vec{e}_3 dx^3 \\ d\vec{e}_\rho &= \Gamma_{\rho\rho}^\rho \vec{e}_\rho d\rho + \Gamma_{\rho\rho}^\phi \vec{e}_\phi d\rho + \Gamma_{\rho\rho}^z \vec{e}_z d\rho \\ &\quad + \Gamma_{\rho\phi}^\rho \vec{e}_\rho d\phi + \Gamma_{\rho\phi}^\phi \vec{e}_\phi d\phi + \Gamma_{\rho\phi}^z \vec{e}_z d\phi \\ &\quad + \Gamma_{\rho z}^\rho \vec{e}_\rho dz + \Gamma_{\rho z}^\phi \vec{e}_\phi dz + \Gamma_{\rho z}^z \vec{e}_z dz \\ &= \rho^{-1} \vec{e}_\phi d\phi \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\phi &= \Gamma^\rho_{\phi\rho} \vec{e}_\rho d\rho + \Gamma^\phi_{\phi\rho} \vec{e}_\phi d\rho + \Gamma^z_{\phi\rho} \vec{e}_z d\rho \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\phi\phi} \vec{e}_\rho d\phi + \Gamma^\phi_{\phi\phi} \vec{e}_\phi d\phi + \Gamma^z_{\phi\phi} \vec{e}_z d\phi \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\phi z} \vec{e}_\rho dz + \Gamma^\phi_{\phi z} \vec{e}_\phi dz + \Gamma^z_{\phi z} \vec{e}_z dz \\ &= \rho^{-1} \vec{e}_\phi d\rho - \rho \vec{e}_\rho d\phi \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d\vec{e}_z &= \Gamma^\rho_{z\rho} \vec{e}_\rho d\rho + \Gamma^\phi_{z\rho} \vec{e}_\phi d\rho + \Gamma^z_{z\rho} \vec{e}_z d\rho \\ &\quad + \Gamma^\rho_{z\phi} \vec{e}_\rho d\phi + \Gamma^\phi_{z\phi} \vec{e}_\phi d\phi + \Gamma^z_{z\phi} \vec{e}_z d\phi \\ &\quad + \Gamma^\rho_{zz} \vec{e}_\rho dz + \Gamma^\phi_{zz} \vec{e}_\phi dz + \Gamma^z_{zz} \vec{e}_z dz \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Exemple 2.7.2 : Symboles de Christoffel en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Dans la base naturelle associée aux coordonnées sphériques, le tenseur métrique de l'espace euclidien a pour composantes (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique)

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$$

Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $\partial_r g_{\theta\theta} = 2r$, $\partial_r g_{\phi\phi} = 2r \sin^2(\theta)$ et $\partial_\theta g_{\phi\phi} = 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$.

- pour les symboles de 1^{re} espèce, à partir des relations (2.18) page 20 :

$$\begin{cases} \Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2} \partial_r g_{\theta\theta} \\ \Gamma_{\phi\phi r} = \Gamma_{313} = \frac{1}{2} \partial_r g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{323} = \frac{1}{2} \partial_\theta g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{r\theta\theta} = -\frac{1}{2} \partial_r g_{\theta\theta} \\ \Gamma_{r\phi\phi} = -\frac{1}{2} \partial_r g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -\frac{1}{2} \partial_\theta g_{\phi\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{212} = r \\ \Gamma_{\phi\phi r} = \Gamma_{313} = r \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{323} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{r\theta\theta} = -r \\ \Gamma_{r\phi\phi} = -r \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

- pour les symboles de 2^e espèce, à partir des relations (2.19) page précédente :

$$\begin{cases} \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma_{\theta\theta r}/g_{\theta\theta} \\ \Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma_{\phi\phi r}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma_{\phi\phi\theta}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} = \Gamma_{r\theta\theta}/g_{rr} \\ \Gamma^r_{\phi\phi} = \Gamma_{r\phi\phi}/g_{rr} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} = \Gamma_{\theta\phi\phi}/g_{\theta\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r \\ \Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = 1/r \\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot(\theta) \\ \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \\ \Gamma^r_{\phi\phi} = -r \sin^2(\theta) \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Exemple 2.7.3 : Symboles de Christoffel à la surface d'une sphère

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , à la surface d'une sphère de rayon r , en se servant de l'exemple précédent :

- pour les symboles de 1^{re} espèce, à partir des relations (2.18) page 20 :

$$\begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\theta\phi\phi} = \frac{1}{2} \partial_{\theta} g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -\frac{1}{2} \partial_{\theta} g_{\phi\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\theta\phi\phi} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

- pour les symboles de 2^e espèce, à partir des relations (2.19) page 21 :

$$\begin{cases} \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma_{\phi\phi\theta}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \Gamma_{\theta\phi\phi}/g_{\theta\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot(\theta) \\ \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

2.8 Formules de Christoffel

Partons d'un changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \vec{e}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \vec{e}_j \\ d\vec{e}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} d\vec{e}_j + d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right) \vec{e}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \quad \omega^{k'}_{i'} \vec{e}_{k'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \omega^l_j \vec{e}_l + d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right) \vec{e}_j \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \omega^l_j \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \vec{e}_{k'} + d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right) \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \vec{e}_{k'} \end{aligned}$$

On simplifie et on réarrange les termes :

$$\begin{aligned} \forall i, k \quad \omega^{k'}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \omega^l_j + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right) \\ \Gamma^{k'}_{i'm'} dx^{m'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \Gamma^l_{jn} dx^n + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} dx^{m'} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \Gamma^l_{jn} \frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}} dx^{m'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} dx^{m'} \end{aligned}$$

$$\forall i, k, m \quad \Gamma^{k'}_{i'm'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}} \Gamma^l_{jn} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}}$$

Ce sont les formules de Christoffel. Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs à cause de la présence du second terme du membre de droite. En inversant le rôle des variables :

$$\forall i, k, m \quad \Gamma^k_{im} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^m} \Gamma^{l'}_{j'n'} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^m \partial x^i}$$

2.9 Transport parallèle en espace euclidien

Définition 2.9.1 : Vecteurs parallèles

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un espace euclidien sont parallèles s'ils font le même angle avec une droite $\mathcal{D}$ donnée.

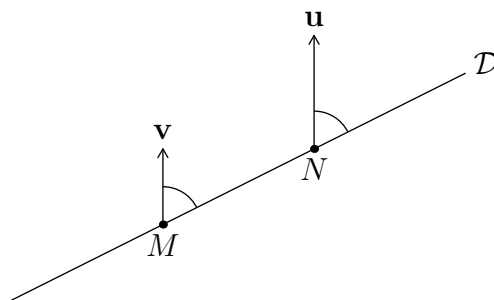


FIG. 2.1 – Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles

Le transport parallèle d'un vecteur consiste à transporter ce vecteur d'un point à un autre le long de la droite joignant ces deux points, en maintenant l'angle que fait le vecteur avec cette droite.

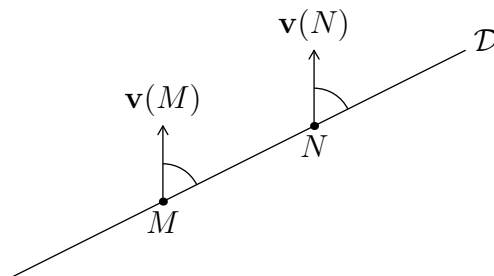


FIG. 2.2 – Transport parallèle du vecteur $\vec{v}$ de M en N selon la droite ($\mathcal{D}$)

En espace euclidien le transport parallèle est indépendant du chemin suivi.

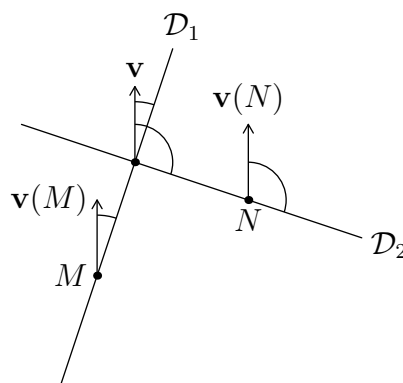


FIG. 2.3 – Deux transports parallèles successifs du vecteur $\vec{v}$

En coordonnées cartésiennes, la base naturelle locale en N est la même que celle en M , c'est pour cette raison que l'on utilise une base globale. Les composantes du vecteur $\vec{v}$ sont les mêmes en chacune de ces bases locales.

Ce n'est plus le cas lorsque l'on utilise le champ de bases naturelles des coordonnées curvilignes. Le transport parallèle a toujours lieu selon une droite, mais les bases locales tournent et les vecteurs de base changent de norme, les composantes du vecteur $\vec{v}$ ne sont plus les mêmes après transport parallèle.

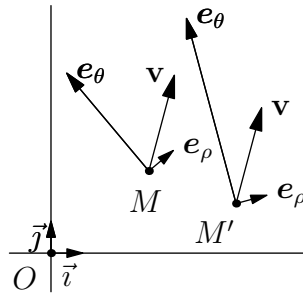


FIG. 2.4 – Transport parallèle du vecteur $\vec{v}$ en coordonnées polaires de l'espace euclidien

Chapitre 3

DÉRIVÉE ABSOLUE - DÉRIVÉE COVARIANTE

3.1 Différentielle absolue d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs $\vec{v}$ dans un espace ponctuel euclidien E_n rapporté à un système de coordonnées (x^i) . Lorsque l'on passe d'un point à un point infiniment proche, le repère naturel $(\vec{e}_i)$ varie ce qui entraîne le changement des composantes du vecteur

Lorsque le vecteur $\vec{v}$ est exprimé en composantes :

- 1) contravariantes, avec (2.1) page 14, et (2.2) page 14, dans la base naturelle :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v^i \vec{e}_i \\ d\vec{v} &= dv^i \vec{e}_i + v^i d\vec{e}_i\end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite est la variation des composantes du vecteur due au changement de base par transport parallèle infinitésimal, voir fig. 2.4 page 25. Le premier terme est la variation infinitésimale des composantes d'un vecteur non constant dans l'espace.

$$\begin{aligned}d\vec{v} &= dv^i \vec{e}_i + v^i \omega_i^j \vec{e}_j \\ &= (dv^i + v^j \omega_j^i) \vec{e}_i \\ &= (\partial_j v^i dx^j + v^k \Gamma_{kj}^i dx^j) \vec{e}_i \\ &= (\partial_j v^i + v^k \Gamma_{kj}^i) dx^j \vec{e}_i \\ &= Dv^i \vec{e}_i\end{aligned}$$

Définition 3.1.1 : Différentielle absolue d'un vecteur

Le vecteur $d\vec{v}$ de composantes contravariantes Dv^i , est appelé vecteur différentielle absolue du vecteur $\vec{v}$.

Définition 3.1.2 : Composantes du vecteur différentielle absolue

Les composantes contravariantes du vecteur différentielle absolue $d\vec{v}$ ont pour expression :

$$Dv^i \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial_j v^i + v^k \Gamma_{kj}^i) dx^j$$

Remarque 3.1.1

Les différentielles dv^i des composantes contravariantes d'un vecteur ne sont pas les composantes contravariantes d'un vecteur.

Remarque 3.1.2

Il existe deux façons d'écrire le vecteur final $\vec{v} + d\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} + d\vec{v} &= v^i \vec{e}_i + dv^i \vec{e}_i + v^i d\vec{e}_i \\ &= v^i (\vec{e}_i + d\vec{e}_i) + dv^i \vec{e}_i \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \vec{v} + d\vec{v} &= (v^i + dv^i) \vec{e}_i + v^i d\vec{e}_i \\ &= (v^i + dv^i + v^j \omega_{ij}^i) \vec{e}_i \end{aligned}$$

- 2) covariantes, on commence par considérer un champ de vecteurs $\vec{w}$ *uniforme* et arbitraire. Avec (2.1) page 14, dans la base naturelle :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{c}^{ste} \\ d(w^i \vec{e}_i) &= 0 \\ dw^j \vec{e}_j + w^j d\vec{e}_j &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dw^j + w^i \omega_{ij}^j) \vec{e}_j &= 0 \\ \forall j \quad dw^j &= -w^i \omega_{ij}^j \end{aligned}$$

Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs exprimés en composantes covariantes v_i . Avec (2.2) page 14, le produit scalaire avec $\vec{w}$ donne :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w^i \\ d(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= d(v_i w^i) \\ d\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot d\vec{w} &= w^i dv_i + v_j dw^j \\ d\vec{v} \cdot \vec{w} &= w^i dv_i + v_j dw^j \\ d\vec{v} \cdot \vec{e}_i w^i &= (dv_i - v_j \omega_{ij}^j) w^i \\ \forall i \quad d\vec{v} \cdot \vec{e}_i &= dv_i - v_j \omega_{ij}^j \\ &= (\partial_j v^i - v_k \Gamma_{ij}^k) dx^j \\ &= Dv_i \end{aligned}$$

Définition 3.1.3 : Composantes du vecteur différentielle absolue

Les composantes covariantes du vecteur différentielle absolue $d\vec{v}$ ont pour expression :

$$Dv_i \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial_j v^i - u_k \Gamma_{ij}^k) dx^j$$

Remarque 3.1.3

Les différentielles Dv_i des composantes covariantes d'un vecteur ne sont pas les composantes covariantes d'un vecteur.

Soit le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que :

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{u}$$

$$\vec{v} = v\vec{u}$$

La norme v d'un vecteur est indépendante de tout système de coordonnées, c'est un scalaire.

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= d(v\vec{u}) \\ Dv^i \vec{e}_i &= \vec{u} dv + v d\vec{u} \\ D(vu^i) \vec{e}_i &= u^i \vec{e}_i dv + v Du^i \vec{e}_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.2 Dérivée absolue d'un champ de vecteurs par rapport à son paramètre

Remarque 3.2.1

Pour dériver un vecteur $\vec{v}$ par rapport à un paramètre p quelconque, nous devons bien sûr supposer que ce vecteur est fonction de p . Dans le cas général nous considérons un champ de vecteurs $\vec{v}(p)$, par exemple la vitesse du vent en tout point de l'espace en fonction du temps. Chaque coordonnée v^i de $\vec{v}$ est alors une fonction de p , dans le système de coordonnées (x^i) on note $\vec{v}[v^i(x^j, p)]$. Lorsque $\vec{v}$ suit une courbe $\mathcal{C}$ d'équations paramétriques $\forall i = 1, \dots, n, x^i = x^i(p)$ dans un espace à n dimensions, par exemple la vitesse d'un mobile sur sa trajectoire dans l'espace, on note au choix $\vec{v}[v^i(p)]$, $\vec{v}[v^i(x^j)]$, ou $\vec{v}[v^i(x^j(p))]$.

Dans un espace ponctuel euclidien E_n rapporté à un système de coordonnées (x^i) , soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équations paramétriques $\forall i = 1, \dots, n, x^i = x^i(p)$. Soit un champ de vecteurs $\vec{v}[v^i(x^j(p))]$ défini le long de $\mathcal{C}$. Une variation infinitésimale dp du paramètre fait passer d'un point de $\mathcal{C}$ à un autre point de $\mathcal{C}$ infiniment proche. À partir de la déf. 3.1.2 page précédente de la différentielle absolue d'un vecteur, on définit la dérivée absolue, ou *dérivée intrinsèque*, par rapport au paramètre p du champ de vecteurs $\vec{v}(p)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$, par :

$$\forall i \quad \frac{Dv^i}{dp} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{dv^i}{dp} + v^k \Gamma_{kj}^i \frac{dx^j}{dp} \quad (3.2)$$

C'est la dérivée covariante du vecteur dans la direction du vecteur tangent, c.-à-d. la multiplication contractée du tenseur dérivée covariante de composantes mixte $\nabla_j v^i$ et du vecteur de composantes contravariantes dx^j/dp tangent à $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \forall i \quad \nabla_j v^i \frac{dx^j}{dp} &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma_{kj}^i \right) \frac{dx^j}{dp} \\ &= \frac{dv^i}{dp} + v^k \Gamma_{kj}^i \frac{dx^j}{dp} \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2

Dérivons par rapport à p la loi de transformation (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) par changement de base naturelle des composantes contravariantes du champ de vecteurs $\vec{v}(p)$:

$$\begin{aligned}\forall i \quad v^{i'} &= v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \\ dv^{i'} &= dv^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + v^j d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) \\ &= dv^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \\ \frac{dv^{i'}}{dp} &= \frac{dv^j}{dp} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j} \frac{dx^k}{dp}\end{aligned}$$

Ce n'est pas la loi de transformation des composantes d'un vecteur à cause de la présence du second terme du membre de droite. La dérivée « ordinaire » d'un vecteur n'est pas un vecteur.

3.3 Dérivée absolue d'un champ de scalaire par rapport à son paramètre

Soit $\phi(p)$ une fonction scalaire le long de la courbe paramétrée, $\mathcal{C} : \forall i \ x^i = x^i(p)$, par exemple la norme du vecteur vitesse d'un mobile parcourant $\mathcal{C}$ (ou la norme de son vecteur accélération, son énergie cinétique, sa température, etc.). La dérivée absolue de $\phi(p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{D\phi}{dp} &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\phi}{dp} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dp}\end{aligned}$$

où dx^i/dp sont les composantes du vecteur tangent à $\mathcal{C}$, les composantes du vecteur vitesse de ce mobile lorsque p est le temps.

3.4 Dérivée covariante d'un vecteur

La dérivée covariante d'un vecteur est la dérivée partielle de ses composantes et des vecteurs de base, par rapport aux coordonnées. Lorsque le vecteur $\vec{v}$ est exprimé :

1) en composantes contravariantes, avec (2.4) page 15, dans la base naturelle :

$$\begin{aligned}\forall j \quad \partial_j \vec{v} &= \partial_j (v^i \vec{e}_i) \\ &= \vec{e}_i \partial_j v^i + v^k \partial_j \vec{e}_k \\ &= (\partial_j v^i + v^k \Gamma_{kj}^i) \vec{e}_i \\ &= \nabla_j v^i \vec{e}_i\end{aligned}$$

Définition 3.4.1 : Composantes mixtes du vecteur dérivée covariante

Les composantes mixtes du vecteur dérivée covariante $\partial_j \vec{v}$ ont pour expression :

$$\nabla_j v^i \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial_j v^i + v^k \Gamma_{kj}^i)$$

Notation 3.4.1

La dérivée covariante $\nabla_j v^i$ se note également $v^i_{;j}$ ou $D_j v^i$.

Avec la déf. 3.1.2 page 28 des Dv^i :

$$\forall i \quad Dv^i \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_j v^i dx^j \quad (3.3)$$

Les $\nabla_j v^i dx^j$ sont donc les composantes contravariantes du vecteur différentielle absolue $d\vec{v}$. D'après $d\vec{OM} = dx^i \vec{e}_i$, les dx^j sont les composantes contravariantes d'un vecteur. Par conséquent les $\nabla_j v^i$ sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

- 2) en composantes covariantes, on commence par considérer un champ de vecteurs $\vec{w}$ *uniforme* et arbitraire. Dans la base naturelle :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{c}^{ste} \\ \forall j \quad \partial_j (w^i \vec{e}_i) &= 0 \\ \vec{e}_i \partial_j w^i + w^k \partial_j \vec{e}_k &= 0 \\ (\partial_j w^i + w^k \Gamma_{kj}^i) \vec{e}_i &= 0 \\ \forall i, j \quad \partial_j w^i &= -w^k \Gamma_{kj}^i \end{aligned}$$

Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs exprimés en composantes covariantes v_i . Le produit scalaire avec $\vec{w}$ donne :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w^i \\ \forall j \quad \partial_j (\vec{v} \cdot \vec{w}) &= \partial_j (v_i w^i) \\ \partial_j \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \partial_j \vec{w} &= w^i \partial_j v_i + v_i \partial_j w^i \\ \partial_j \vec{v} \cdot \vec{w} &= w^i \partial_j v_i - v_i w^k \Gamma_{kj}^i \\ \partial_j \vec{v} \cdot w^i \vec{e}_i &= (\partial_j v_i - v_k \Gamma_{ij}^k) w^i \\ \forall i, j \quad \partial_j \vec{v} \cdot \vec{e}_i &= \partial_j v_i - v_k \Gamma_{ij}^k \\ &= \nabla_j v_i \end{aligned}$$

Définition 3.4.2 : Composantes du vecteur dérivée covariante

Les composantes covariantes du vecteur dérivée covariante $\partial_j \vec{v}$ ont pour expression :

$$\nabla_j v_i \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_j v_i - v_k \Gamma_{ij}^k$$

Notation 3.4.2

La dérivée covariante $\nabla_j v_i$ du covecteur $\underline{v}$ est aussi notée $v_{i;j}$.

Avec la déf. 3.1.3 page 29 :

$$\forall i \quad Dv_i \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_j v_i dx^j$$

Les $\nabla_j v_i dx^j$ sont donc les composantes covariantes du vecteur différentielle absolue $d\vec{v}$. D'après $d\vec{OM} = dx^i \vec{e}_i$, les dx^j sont les composantes contravariantes d'un vecteur. Par conséquent, les quantités $\nabla_j v_i$ sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

Remarque 3.4.1

Effectuons la dérivée partielle par rapport aux coordonnées, de la loi de transformation (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) des composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{v}(v^i)$:

$$\begin{aligned} \forall i \quad v^{i'} &= v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \\ dv^{i'} &= dv^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} + v^k d\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right) \\ \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} dx^{j'} &= \frac{\partial v^k}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} dx^{l'} + v^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{l'} \partial x^k} dx^{l'} \\ &= \frac{\partial v^k}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{j'}} dx^{j'} + v^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{l'} \partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \\ \forall i, j \quad \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial v^k}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{j'}} + v^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{l'} \partial x^k} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

La dérivée partielle « ordinaire » d'un vecteur n'est pas un tenseur à cause de la présence du second terme du membre de droite.

Exemple 3.4.1 : Courbure d'une courbe

Pour étudier la courbure d'une courbe on considère celle-ci comme une trajectoire parcourue par un point au cours du temps. La courbure de la trajectoire est alors la norme de l'accélération subie par ce point qui décrirait la courbe avec un vecteur vitesse de norme unité constante.

Soit donc $\vec{M}(t)$ le vecteur position d'un point décrivant la courbe $\mathcal{C}$. La vitesse de ce point au cours du temps est la dérivée absolue suivante :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}$$

En prenant pour paramètre l'abscisse curviligne $s(t)$ plutôt que le temps, nous obtenons un champ de vecteurs $\vec{u}$ unitaires tangents à la courbe :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{M}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}\|} &= \frac{d\vec{M}}{ds} \\ \vec{u}(s) &= \frac{d\vec{M}}{ds} \end{aligned} \tag{3.4}$$

La courbure κ de $\mathcal{C}(s)$ est le taux de variation du vecteur tangent unitaire en fonction de la distance parcourue sur la courbe (abscisse curviligne) :

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{u}}{ds} \right\|$$

$d\vec{u}/ds$ est un vecteur, la courbure κ est bien invariante par changement de coordonnées.

3.5 Vecteur accélération d'un point mobile

Dans l'espace ponctuel euclidien E_n , considérons un point mobile M dont les coordonnées curvilignes (x^i) sont fonction du temps, $M[x^i(t)]$. Le vecteur position est particulier, il s'écrit

$$\overrightarrow{OM}(t) = x^i(t) \vec{e}_i$$

où les $\vec{e}_i$ ne sont pas fonction du temps. Il relie l'origine de l'ancien repère à l'origine du nouveau repère, et n'est exprimé que dans l'ancienne base. Par conséquent, dans la base naturelle locale $(\vec{e}_i)$, sa différentielle est donnée par $d\overrightarrow{OM} = dx^i \vec{e}_i$

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M} &= dx^i \vec{e}_i + x^i d\vec{e}_i \\ &= dx^i \vec{e}_i \end{aligned}$$

et non par la déf. 3.1.2 page 28 des Du^i . Le vecteur vitesse a alors pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v} &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \\ v^i \vec{e}_i &= \frac{dx^i}{dt} \vec{e}_i \\ \forall i \quad v^i &= \dot{x}^i \end{aligned} \tag{3.5}$$

Avec la déf. 3.1.2 page 28, le vecteur accélération a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &\stackrel{\text{déf}}{=} \dot{\vec{v}} \\ \gamma^i \vec{e}_i &= \frac{d}{dt} (v^i \vec{e}_i) \\ &= \frac{dv^i}{dt} \vec{e}_i + v^i \frac{d\vec{e}_i}{dt} \\ &= \frac{dv^i}{dt} \vec{e}_i + v^i \frac{\omega^j_i \vec{e}_j}{dt} \\ &= \frac{dv^i}{dt} \vec{e}_i + v^j \frac{\omega^i_j \vec{e}_i}{dt} \\ \forall i \quad \gamma^i &= \frac{dv^i}{dt} + v^j \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{dt} \\ &= \dot{v}^i + \Gamma^i_{jk} v^j v^k \\ &= \frac{Dv^i}{dt} \vec{e}_i \end{aligned} \tag{3.6}$$

Remarque 3.5.1

Le vecteur dérivée absolue d'un vecteur le long d'une courbe est unique. En effet, supposons qu'il y en ait deux, alors en coordonnées

cartésiennes (rectilignes) où les symboles de Christoffel sont nuls, nous aurions :

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{d\lambda} = \frac{d\vec{u}}{d\lambda} \\ \frac{\delta\vec{u}}{\delta\lambda} = \frac{d\vec{u}}{d\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{D\vec{u}}{d\lambda} = \frac{\delta\vec{u}}{\delta\lambda}$$

Or d'après le Vol. 4 Tenseur métrique, une équation tensorielle valable dans un système de coordonnées est valable dans tout système de coordonnées.

Exemple 3.5.1 : Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Dans un système de coordonnées cartésiennes (rectilignes) les symboles de Christoffel sont nuls (2.6 page 20), l'accélération (3.6) page précédente s'écrit simplement :

$$\forall i \quad \gamma^i = \frac{dv^i}{dt}$$

Exemple 3.5.2 : Vecteur accélération dans un mouvement circulaire uniforme

Un mobile se déplace d'un mouvement circulaire uniforme ayant pour équations en coordonnées polaires $\rho = c^{ste}$, $\theta = \omega t$. Cherchons les composantes de son vecteur accélération. En se servant des symboles de Christoffel calculés dans l'ex. 2.7.1 page 21 :

$$\begin{cases} \gamma^\rho = \ddot{\rho} + \Gamma^\rho_{\theta\theta} \dot{\theta} \dot{\theta} \\ \gamma^\theta = \ddot{\theta} + \Gamma^\theta_{\rho\rho} \dot{\rho} \dot{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^\rho = -\rho \dot{\theta}^2 \\ \gamma^\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^\rho = -\rho \omega^2 \\ \gamma^\theta = 0 \end{cases}$$

Avec la définition de la norme d'un vecteur (Cf. Vol. 1 Notion d'espace), on en déduit :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \gamma^i \vec{e}_i \cdot \gamma^j \vec{e}_j \\ \gamma &= \sqrt{g_{ij} \gamma^i \gamma^j} \\ &= \sqrt{g_{\rho\rho} \gamma^\rho \gamma^\rho} \\ &= \rho \omega^2 \end{aligned}$$

3.6 Équations de Lagrange

La relation fondamentale de la dynamique classique s'écrit en coordonnées rectangulaires :

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

En coordonnées curvilignes nous avons :

$$\sum \vec{F} = \frac{D(m\vec{v})}{dt}$$

Notons $\vec{F}$ la somme des forces, et supposons la masse m du système constante. Avec l'expression des composantes contravariantes de l'accélération (3.6) page précédente, cette relation s'écrit en

composantes contravariantes :

$$\begin{aligned}\forall i \quad F^i &= m\gamma^i \\ &= m(\dot{v}^i + \Gamma^i_{jk}v^jv^k)\end{aligned}$$

En composantes covariantes, avec l'expression des symboles de Christoffel de 1^{re} espèce en fonction du tenseur métrique (2.13) page 19 :

$$\begin{aligned}\forall i \quad g_{il}F^l &= mg_{il}(\dot{v}^l + \Gamma^l_{jk}v^jv^k) \\ \forall i \quad F_i &= m(g_{ij}\dot{v}^j + \Gamma_{ijk}v^jv^k) \\ &= mg_{ij}\dot{v}^j + \frac{m}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk})v^jv^k \\ &= mg_{ij}\dot{v}^j + m\partial_k g_{ij}v^jv^k - \frac{m}{2}\partial_i g_{jk}v^jv^k \\ &= mg_{ij}\dot{v}^j + m\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}v^j - \frac{m}{2}\partial_i(g_{jk})v^jv^k \\ &= m\frac{d}{dt}(g_{ij}v^j) - \frac{m}{2}\partial_i g_{jk}v^jv^k \\ &= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_{ij}v^i v^j}{\partial v^i}\right) - \frac{m}{2}\frac{\partial g_{jk}v^j v^k}{\partial x^i}\end{aligned}$$

En introduisant l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}T &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}mg_{ij}v^i v^j\end{aligned}$$

on trouve les équations de Lagrange :

$$\forall i \quad F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i}$$

3.7 Différentielle absolue d'un tenseur

Les considérations du § 3.1 page 27 sur la différentielle absolue d'un champ de vecteurs s'étendent à un champ de tenseurs. Soit E_n un espace ponctuel euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i). Soit un champ de tenseurs T d'ordre trois de composantes mixtes, deux fois covariantes et une fois contravariantes :

$$T = t_{ij}^k \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k$$

Lorsque l'on passe d'un point à un point infiniment proche, les composantes du tenseur changent, ainsi que le repère naturel :

$$\begin{aligned}dT &= d(t_{ij}^k \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k) \\ &= dt_{ij}^k (\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k) + t_{ij}^k d(\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k)\end{aligned}$$

Définition 3.7.1 : Tenseur différentielle absolue d'un tenseur

dT est le tenseur différentielle absolue du tenseur T .

Définition 3.7.2 : Différentielles absolues des composantes d'un tenseur

Les Dt_{ij}^k sont les composantes du tenseur différentielle absolue dT , telles que :

$$dT \stackrel{\text{déf}}{=} Dt_{ij}^k \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k$$

Pour trouver l'expression des Dt_{ij}^k nous utilisons la commutativité de la contraction et de la différentiation.

- la multiplication tensorielle de T avec trois champs de vecteurs *uniformes* donne :

$$T \otimes \vec{u} \otimes \vec{v} \otimes \vec{w} = t_{ij}^k u^h v^m w_n \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_h \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}^n$$

où le champ de vecteurs $\vec{w}$ est exprimé en composantes covariantes. La contraction complète de ce produit tensoriel en posant $i = h$, $j = m$ et $k = n$ donne le scalaire :

$$t_{ij}^k u^i v^j w_k$$

Différentions ce scalaire pour un déplacement infiniment petit :

$$d(t_{ij}^k u^i v^j w_k) = dt_{ij}^k u^i v^j w_k + t_{ij}^k du^i v^j w_k + t_{ij}^k u^i dv^j w_k + t_{ij}^k u^i v^j dw_k$$

Les champs de vecteurs étant uniformes par hypothèse, leurs différentielles absolues sont nulles et les définitions 3.1.2 page 28 et 3.1.3 page 29 des Du^i donnent,

$$\begin{cases} d\vec{u} = 0 \\ d\vec{v} = 0 \\ d\vec{w} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall i, du^i = -u^h \omega_h^i \\ \forall j, dv^j = -v^h \omega_h^j \\ \forall k, dw_k = w_h \omega_h^k \end{cases}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} d(t_{ij}^k u^i v^j w_k) &= dt_{ij}^k u^i v^j w_k - t_{ij}^k u^h \omega_h^i v^j w_k - t_{ij}^k u^i v^h \omega_h^j w_k + t_{ij}^k u^i v^j w_h \omega_h^k \\ &= dt_{ij}^k u^i v^j w_k - t_{hj}^k u^i \omega_h^i v^j w_k - t_{ih}^k u^i v^j \omega_h^j w_k + t_{ij}^h u^i v^j w_k \omega_h^k \\ &= (dt_{ij}^k - t_{hj}^k \omega_h^i - t_{ih}^k \omega_h^j + t_{ij}^h \omega_h^k) u^i v^j w_k \end{aligned}$$

- les champs de vecteurs étant uniformes, différentions le produit tensoriel :

$$\begin{aligned} d(T \otimes \vec{u} \otimes \vec{v} \otimes \vec{w}) &= d(t_{ij}^k u^l v^m w_n \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}^n) \\ &= (Dt_{ij}^k u^l v^m w_n + t_{ij}^k Du^l v^m w_n + t_{ij}^k u^l Dv^m w_n + t_{ij}^k u^l v^m Dw_n) \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \\ &\quad \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}^n \\ &= Dt_{ij}^k u^l v^m w_n \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}^n \end{aligned}$$

Si nous contractons complètement ce produit tensoriel nous avons :

$$Dt_{ij}^k u^i v^j w_k = (dt_{ij}^k - t_{pj}^k \omega_p^i - t_{ip}^k \omega_p^j + t_{ij}^p \omega_p^k) u^i v^j w_k$$

$$\forall i, j, k \quad Dt_{ij}^k = dt_{ij}^k - t_{pj}^k \omega_p^i - t_{ip}^k \omega_p^j + t_{ij}^p \omega_p^k \quad (3.7)$$

3.8 Dérivée covariante d'un tenseur

À partir des relations (3.7) :

$$\begin{aligned}\forall i, j, k \quad Dt_{ij}^k &= \partial_h t_{ij}^k dx^h - t_{pj}^k \Gamma_{ih}^p dx^h - t_{ip}^k \Gamma_{jh}^p dx^h + t_{ij}^p \Gamma_{ph}^k dx^h \\ &= (\partial_h t_{ij}^k - t_{pj}^k \Gamma_{ih}^p - t_{ip}^k \Gamma_{jh}^p + t_{ij}^p \Gamma_{ph}^k) dx^h \\ &= \nabla_h t_{ij}^k dx^h\end{aligned}$$

Définition 3.8.1 : Dérivée covariante d'un tenseur

Les composantes du tenseur dérivée covariante du tenseur T s'écrivent

$$\nabla_h t_{ij}^k = \partial_h t_{ij}^k - t_{pj}^k \Gamma_{ih}^p - t_{ip}^k \Gamma_{jh}^p + t_{ij}^p \Gamma_{ph}^k$$

3.9 Théorème et identités de Ricci

Théorème 3.9.1 : Théorème de Ricci

La différentielle absolue du tenseur fondamental est nulle :

$$\forall i, j \quad Dg_{ij} = 0$$

Démonstration. Appliquons (3.7) page précédente à un tenseur de composantes deux fois covariantes, et utilisons (2.11) page 18 :

$$\begin{aligned}\forall i, j \quad Dg_{ij} &= dg_{ij} - \omega_j^k g_{ik} - \omega_i^k g_{jk} \\ &= \omega_j^k g_{ik} + \omega_i^k g_{jk} - \omega_j^k g_{ik} - \omega_i^k g_{jk} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Par conséquent la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle :

$$\begin{aligned}\forall i, j \quad Dg_{ij} &= 0 \\ \nabla_k g_{ij} dx^k &= 0 \\ \forall i, j, k \quad \nabla_k g_{ij} &= 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

Le tenseur métrique se comporte comme une constante vis à vis de la dérivation covariante.

La dérivation covariante des symboles de Kronecker est nulle. En effet :

$$\begin{aligned}\forall j \quad t^i \delta_i^j &= t^j \\ \forall j, k \quad \nabla_k t^i \delta_i^j + t^i \nabla_k \delta_i^j &= \nabla_k t^j \\ \nabla_k t^j + t^i \nabla_k \delta_i^j &= \nabla_k t^j \\ \forall i, j, k \quad \nabla_k \delta_i^j &= 0\end{aligned}$$

Avec l'inverse du tenseur métrique (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), nous avons :

$$\begin{aligned}\forall i, j \quad g^{ki} g_{jk} &= \delta_j^i \\ \forall i, j, h \quad g^{ki} \nabla_h g_{jk} + g_{jk} \nabla_h g^{ki} &= \nabla_h \delta_j^i\end{aligned}$$

Avec (3.8) :

$$\begin{aligned}\forall i, k, h \quad \nabla_h g^{ki} &= 0 \\ \forall i, k \quad D g^{ki} &= 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

Par conséquent la dérivée covariante et la montée-descente des indices commutent :

$$\begin{aligned}\forall i, j, k \quad \nabla_k t_j^i &= \nabla_k (g^{ih} t_{hj}) \\ &= g^{ih} \nabla_k t_{hj} + t_{hj} \nabla_k g^{ih} \\ &= g^{ih} \nabla_k t_{hj}\end{aligned}$$

À partir des relations (2.11) page 18, nous trouvons les identités de Ricci :

$$\begin{aligned}\forall i, j \quad dg_{ij} &= \omega_j^k g_{ik} + \omega_i^k g_{jk} \\ \partial_h g_{ij} dx^h &= \Gamma_{jh}^k g_{ik} dx^h + \Gamma_{ih}^k g_{jk} dx^h \\ \forall h, i, j \quad \partial_h g_{ij} &= g_{ik} \Gamma_{jh}^k + g_{jk} \Gamma_{ih}^k\end{aligned}$$

3.10 Dérivée covariante seconde d'un vecteur

- vecteur en composantes contravariantes

Soit $\vec{v}$ un vecteur de composantes contravariantes v^i , d'après la déf. 3.4.1 page 31 sa dérivée covariante est le tenseur de composantes mixtes :

$$\forall i, j \quad \nabla_j v^i \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_j v^i + v^k \Gamma_{kj}^i$$

La déf. 3.8.1 page précédente de la dérivée covariante d'un tenseur de composantes mixtes,

$$\forall i, j, k \quad \nabla_k t_j^i = \partial_k t_j^i - t_p^i \Gamma_{jk}^p + t_j^p \Gamma_{pk}^i$$

nous donne :

$$\begin{aligned}\nabla_k (\nabla_j v^i) &= \partial_k \nabla_j v^i - \nabla_p v^i \Gamma_{jk}^p + \nabla_j v^p \Gamma_{pk}^i \\ &= \partial_k (\partial_j v^i + v^q \Gamma_{qj}^i) - (\partial_p v^i + v^q \Gamma_{qp}^i) \Gamma_{jk}^p + (\partial_j v^p + v^q \Gamma_{qj}^p) \Gamma_{pk}^i \\ &= \partial_{kj} v^i + v^q \partial_k \Gamma_{qj}^i + \Gamma_{qj}^i \partial_k v^q - \Gamma_{jk}^p \partial_p v^i - v^q \Gamma_{qp}^i \Gamma_{jk}^p + \Gamma_{pk}^i \partial_j v^p + v^q \Gamma_{qj}^p \Gamma_{pk}^i\end{aligned}\tag{3.10}$$

- vecteur en composantes covariantes

Soit $\vec{v}$ un vecteur de composantes covariantes v_i , d'après la déf. 3.4.2 page 31, sa dérivée covariante est le tenseur de composantes deux fois covariantes :

$$\forall i, j \quad \nabla_j v_i \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_j v_i - v_k \Gamma_{ij}^k$$

La déf. 3.8.1 page 37 de la dérivation covariante d'un tenseur de composantes deux fois covariantes,

$$\forall i, j, k \quad \nabla_k t_{ij} = \partial_k t_{ij} - t_{pj} \Gamma_{ik}^p - t_{ip} \Gamma_{jk}^p$$

nous donne :

$$\begin{aligned} \nabla_k(\nabla_j v_i) &= \partial_k \nabla_j v_i - \nabla_j v_p \Gamma_{ik}^p - \nabla_p v_i \Gamma_{jk}^p \\ &= \partial_k (\partial_j v_i - v_q \Gamma_{qj}^i) - (\partial_j v_p - v_q \Gamma_{pj}^q) \Gamma_{ik}^p - (\partial_p v_i - v_q \Gamma_{ip}^q) \Gamma_{jk}^p \\ &= \partial_{kj} v_i - v_q \partial_k \Gamma_{qj}^i - \Gamma_{qj}^i \partial_k v_q - \Gamma_{ik}^p \partial_j v_p + v_q \Gamma_{pj}^q \Gamma_{ik}^p \\ &\quad - \Gamma_{jk}^p \partial_p v_i + v_q \Gamma_{ip}^q \Gamma_{jk}^p \end{aligned}$$

3.11 Règles de dérivation des tenseurs

3.11.1 Dérivée covariante

- de la somme : $\nabla_k(T + S) = \nabla_k T + \nabla_k S$
- de la multiplication tensorielle : $\nabla_k[TS] = [S \nabla_k T] + [T \nabla_k S]$
- de la multiplication tensorielle contractée : $\nabla_k(TS) = S \nabla_k T + T \nabla_k S$

3.11.2 Différentielle absolue

- de la somme : $D(T + S) = DT + DS$
- de la multiplication tensorielle : $D[TS] = [SDT] + [TDS]$
- de la multiplication contractée : $D(TS) = SDT + TDS$

Exemple 3.11.1 : Dérivée covariante d'une somme de deux vecteurs

$$\begin{aligned} \forall i, k \quad \nabla_k t^i + \nabla_k s^i &= \partial_k t^i + t^j \Gamma_{jk}^i + \partial_k s^i + s^j \Gamma_{jk}^i \\ &= \partial_k (t^i + s^i) + (t^j + s^j) \Gamma_{jk}^i \\ &= \nabla_k (t^i + s^i) \end{aligned}$$

On généralise directement à la somme de deux tenseurs d'ordre supérieur à un.

Exemple 3.11.2 : Dérivée covariante de la multiplication tensorielle de deux tenseurs

Soient u_j^i et v_j^i les composantes de deux tenseurs symétriques d'ordre deux de composantes mixtes, de produit tensoriel

$$t_{rs}^{pq} = u_r^p v_s^q$$

En effectuant la dérivée covariante :

$$\begin{aligned} \forall k, p, q, r, s \quad dt_{rs;k}^{pq} &= t_{rs,k}^{pq} + \Gamma_{tk}^p t_{rs}^{tq} + \Gamma_{tk}^q t_{rs}^{pt} - \Gamma_{rk}^t t_{ts}^{pq} - \Gamma_{sk}^t t_{rt}^{pq} \\ &= (v_s^q u_{r,k}^p + u_r^p v_{s,k}^q) + \Gamma_{nk}^p t_{rs}^{nq} + \Gamma_{nk}^q t_{rs}^{pn} - \Gamma_{rk}^n t_{ns}^{pq} - \Gamma_{sk}^n t_{rn}^{pq} \\ &= v_s^q (u_{r,k}^p + \Gamma_{nk}^p u_r^n - \Gamma_{rk}^n u_n^p) + u_r^p (v_{s,k}^q + \Gamma_{nk}^q v_s^n - \Gamma_{sk}^n v_n^q) \\ &= v_s^q u_{r;k}^p + u_r^p v_{s;k}^q \end{aligned}$$

Exemple 3.11.3 : Commutation de la contraction et de la dérivée covariante

La contraction des composantes et la dérivée covariante commutent :

$$\begin{aligned} \forall h, i, j \quad r_{k;h}^{ij} \delta_j^k &= (r_{k,h}^{ij} + \Gamma_{theo}^i r_k^{tj} + \Gamma_{theo}^j r_k^{it} - \Gamma_{kh}^t r_t^{ij}) \delta_j^k \\ &= r_{j,h}^{ij} + \Gamma_{theo}^i r_j^{tj} + \Gamma_{theo}^j r_j^{it} - \Gamma_{jh}^t r_t^{ij} \\ &= r_{j,h}^{ij} + \Gamma_{theo}^i r_j^{tj} \\ &= r_{j;h}^{ij} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la loi de dérivation covariante de la multiplication contractée, la contraction étant effectuée à la fin.

Exemple 3.11.4 : Dérivée absolue de la multiplication tensorielle de deux tenseurs

Soit une courbe d'équations paramétriques $x^i = x^i(\lambda)$ notées $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$, et soient $T[\vec{x}(\lambda)]$ et $S[\vec{x}(\lambda)]$ deux tenseurs définis sur cette courbe :

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\lambda} [TS] &= \nabla_k [TS] \frac{d\vec{x}^k}{d\lambda} \\ &= [S \nabla_k T + T \nabla_k S] \frac{d\vec{x}^k}{d\lambda} \\ &= \left[S \nabla_k T \frac{d\vec{x}^k}{d\lambda} \right] + \left[T \nabla_k S \frac{d\vec{x}^k}{d\lambda} \right] \\ &= \left[S \frac{DT}{d\lambda} \right] + \left[T \frac{DS}{d\lambda} \right] \end{aligned}$$

Chapitre 4

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

4.0.1 Gradient d'un champ de scalaires

Définition 4.0.1 : Covecteur gradient

Dans la base naturelle ($\vec{e}_i$), le covecteur gradient a pour composantes covariantes (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$\forall i \quad \partial_i \phi \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \cdot \vec{e}_i$$

4.0.2 Divergence d'un champ de vecteurs

Définition 4.0.2 : Opérateur divergence d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\vec{u}$ de composantes contravariantes u^i . Par contraction des composantes mixtes $\nabla_j u^i$ du tenseur dérivée covariante on obtient le scalaire

$$\text{div}(\vec{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_i u^i \quad (4.1)$$

appelé divergence du champ de vecteurs $\vec{u}$.

En se servant de la déf. 3.4.1 page 31 de la dérivée covariante puis des symboles de Christoffel contractés, relations (2.17) page 19 :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{u}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \partial_i u^i + u^j \Gamma_{ji}^i \\ &= \partial_i u^i + \frac{u^j}{\sqrt{|g|}} \partial_j \sqrt{|g|} \end{aligned}$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (u^i \sqrt{|g|}) \quad (4.2)$$

Dans un système de coordonnées rectilignes les symboles de Christoffel sont nuls :

$$\text{div}(\vec{u}) = \partial_i u^i \quad (4.3)$$

L'équation de conservation locale (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) s'écrit en notation indicielle, avec l'opérateur divergence en coordonnées rectilignes (4.3) de la présente page :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (4.4)$$

En coordonnées curvilignes (4.1) page précédente elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0 \quad (4.5)$$

4.0.3 Divergence d'un champ de tenseurs

- dans le cas d'un champ de tenseurs de composantes deux fois contravariantes, d'après la définition de la dérivée covariante 3.8.1 page 37 d'un tenseur :

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{ij} &= \partial_k t^{ij} + t^{hj} \Gamma_{hk}^i + t^{ih} \Gamma_{kh}^j \\ \nabla_i t^{ij} &= \partial_i t^{ij} + t^{hj} \Gamma_{hi}^i + t^{ih} \Gamma_{ih}^j \end{aligned}$$

Si le tenseur est antisymétrique $t^{ih} = -t^{hi}$, alors le dernier terme est nul car :

$$\begin{aligned} t^{ih} \Gamma_{ih}^j &= t^{hi} \Gamma_{hi}^j \\ &= -t^{ih} \Gamma_{ih}^j \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il reste :

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ij} &= \partial_i t^{ij} + t^{hj} \Gamma_{hi}^i \\ &= \partial_i t^{ij} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (t^{ij} \sqrt{|g|}) \end{aligned}$$

- dans le cas d'un champ de tenseurs d'ordre deux de composantes mixtes contravariante-covariante :

$$\begin{aligned} \nabla_k t^i_j &= \partial_k t^i_j + t^h_j \Gamma_{hk}^i - t^i_h \Gamma_{kj}^h \\ \nabla_i t^i_j &= \partial_i t^i_j + t^h_j \Gamma_{hi}^i - t^i_h \Gamma_{ij}^h \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_h (t^h_j \sqrt{|g|}) - t^i_h \Gamma_{ij}^h \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_h (t^h_j \sqrt{|g|}) - \frac{1}{2} t^i_h g^{hk} (g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_h (t^h_j \sqrt{|g|}) - \frac{1}{2} t^{ik} (g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \end{aligned}$$

Si le tenseur est symétrique $t^{ik} = t^{ki}$ alors, en échangeant les indices i et k :

$$\begin{aligned} t^{ik} g_{jk,i} &= t^{ki} g_{ji,k} \\ &= t^{ik} g_{ij,k} \\ \nabla_i t_j^i &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (t_j^i \sqrt{|g|}) - \frac{1}{2} t^{ik} g_{ki,j} \end{aligned}$$

4.0.4 Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\vec{u}$ de composantes covariantes u_i . D'après la déf. 3.4.2 page 31, les composantes $\nabla_j u_i$ du tenseur dérivée covariante s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \nabla_j u_i &= \partial_j u_i - u_k \Gamma_{ij}^k \\ \nabla_i u_j &= \partial_i u_j - u_k \Gamma_{ji}^k \end{aligned}$$

Par symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\forall i, j \quad \nabla_j u_i - \nabla_i u_j = \partial_j u_i - \partial_i u_j$$

La soustraction de deux tenseurs est un tenseur (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique).

Définition 4.0.3 : Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs

Les quantités,

$$\forall i, j \quad \text{rot}_{ij} \vec{u} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_j u_i - \partial_i u_j$$

sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = (\partial_j u_i - \partial_i u_j) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

appelé rotationnel du champ de vecteurs $\vec{u}$.

Le tenseur rotationnel est antisymétrique

$$\text{rot}_{ij} \vec{u} = -\text{rot}_{ji} \vec{u}$$

Un tenseur antisymétrique d'ordre n possède n^2 composantes, dont $n(n-1)/2$ sont différentes. Dans le cas d'un espace à trois dimensions, et seulement dans ce cas, $3(3-1)/2 = 3$, le nombre de composantes « strictes » du tenseur est égal à la dimension de l'espace :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) \begin{pmatrix} 0 & u_{1,2} - u_{2,1} & u_{1,3} - u_{3,1} \\ -(u_{1,2} - u_{2,1}) & 0 & u_{2,3} - u_{3,2} \\ -(u_{1,3} - u_{3,1}) & -(u_{2,3} - u_{3,2}) & 0 \end{pmatrix}$$

À tout tenseur antisymétrique on peut adjoindre un vecteur ayant pour composantes les composantes strictes du tenseur.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) \begin{pmatrix} u_{3,2} - u_{2,3} \\ u_{1,3} - u_{3,1} \\ u_{2,1} - u_{1,2} \end{pmatrix}$$

est appelé *vecteur rotationnel*.

Exemple 4.0.1 : Vecteur rotationnel en coordonnées rectangulaires en trois dimensions

Dans le système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de l'espace euclidien E_3 :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix}$$

4.0.5 Laplacien d'un champ de scalaires

Définition 4.0.4 : Laplacien d'un champ de scalaires

Soit ϕ une fonction scalaire des coordonnées curvilignes. On appelle laplacien de ϕ le scalaire :

$$\Delta\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \text{div} \vec{\text{grad}}(\phi)$$

La divergence étant définie avec les composantes contravariantes du vecteur, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \nabla_i (g^{ij} \partial_j \phi) \\ &= g^{ij} \nabla_i (\partial_j \phi) \end{aligned}$$

Avec la déf. 3.4.2 page 31 :

$$\Delta\phi = g^{ij} (\partial_{ij} \phi - \Gamma^k_{ij} \partial_k \phi)$$

Avec (4.2) page 41 nous avons aussi :

$$\Delta\phi = \nabla_i (g^{ij} \partial_j \phi)$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \phi)$$

Pour un système de coordonnées rectangulaires, $g = 1$ et $g^{ij} = \delta^{ij}$:

$$\Delta\phi = \sum_i \partial_{ii} \phi$$

Exemple 4.0.2 : Laplacien en coordonnées rectangulaires

Dans le système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de l'espace euclidien E_3 :

$$\Delta\phi = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi$$

Chapitre 5

GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Sommaire

5.1 Métrique euclidienne tangente en un point	46
5.2 Trajectoires dans un espace riemannien	56
5.3 Métrique euclidienne de raccordement	66
5.4 Tenseur de courbure d'un espace riemannien	70

Nous avons vu dans le Vol. 4 Tenseur métrique, qu'un espace vectoriel est pré-euclidien s'il admet une base orthonormée globale ou pseudo-orthonormée globale, autrement dit si le tenseur fondamental G peut être ramené par un changement de coordonnées à la forme :

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \pm \delta_{ij}$$

Cela n'est pas toujours possible car dans un espace à n dimensions, un changement de variables fournit n fonctions $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ alors qu'il en faudrait $n(n+1)/2$ pour changer chaque élément d'une métrique riemannienne quelconque. Les espaces pré-euclidiens sont donc des cas particuliers d'espace riemannien.

Pour une dimension donnée il existe une infinité d'espaces riemanniens, quelques espace pré-euclidiens, et un seul espace euclidien. Si nous ne pouvons pas toujours ramener globalement un espace riemannien à un espace pré-euclidien par changement de coordonnées, il est toujours possible de le faire localement en un point, que nous noterons M_0 . Cela revient à considérer l'espace pré-euclidien tangent à l'espace riemannien en M_0 . Les métriques de deux espaces tangents en un point sont par définition égales, et par conséquent la dimension de l'espace et celle de son espace tangent sont égales.

De plus, nous cherchons un espace tangent pré-euclidien dont les composantes du tenseur métrique $\bar{g}_{ij}$ sont des constantes (ne sont pas fonction des coordonnées)

$$\forall i, j, k \quad \partial_k \bar{g}_{ij} = 0$$

donc exprimées dans un système de coordonnées rectilignes (cartésiennes).

5.1 Métrique euclidienne tangente en un point

5.1.1 Espace pré-euclidien tangent à un espace riemannien en un point

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de métrique :

$$ds^2 = g_{ij}(x^i) dx^i dx^j$$

Pour douer cet espace de propriétés géométriques, nous allons l'identifier localement en un point, puis au voisinage de ce point, à un espace ponctuel pré-euclidien de même signature (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), donc de même dimension. Soit $M_0(x_0^i)$ un point de $\mathcal{R}_n$, la métrique en ce point s'écrit :

$$ds^2 = g_{ij}(x_0^i) dx^i dx^j$$

Soit E_n un espace ponctuel pré-euclidien. Prenons pour cet espace de même dimension que $\mathcal{R}_n$, les mêmes variables que pour l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$, c.-à-d. le système de coordonnées curvilignes (x^i) . La métrique de E_n s'écrit

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^i) dx^i dx^j$$

Au point $M_0(x_0^i)$ faisons correspondre le point $m_0(x_0^i)$ de E_n , tel qu'en ces deux points les valeurs des composantes des métriques pré-euclidienne et riemannienne soient égales :

$$\forall i, j \quad (\bar{g}_{ij})_{m_0} = (g_{ij})_{M_0} \quad (5.1)$$

Nous dirons que ces deux métriques sont *tangentes* au point M_0 (ou m_0).

Nous avons fixé la métrique de E_n en un seul point, le point m_0 . Prenons une métrique constante (dont les composantes ne sont pas des fonctions explicites ou implicites des coordonnées) pour l'espace E_n tout entier, qui soit en tout point égale à $(\bar{g}_{ij})_{m_0}$. C'est le plus simple et cela nous assure que l'espace que nous avons contruit est bien pré-euclidien.

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \bar{g}_{ij} &= (\bar{g}_{ij})_{m_0} \\ &= (g_{ij})_{M_0} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Notons $(\bar{\mathbf{e}}_i)$ la base naturelle de l'espace vectoriel pré-euclidien E_n associé à E_n :

$$\forall i, j \quad \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = (g_{ij})_{M_0}$$

Exemple 5.1.1

Comme espace riemannien $\mathcal{R}_2$, prenons la surface d'une sphère de rayon r , de métrique

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2 \sin^2(\rho/r) d\phi^2$$

et de tenseur métrique :

$$G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho/r) \end{bmatrix}$$

Au point de coordonnées $M_0(\rho_0, \phi_0)$ de cette sphère, la métrique et le tenseur métrique valent

$$ds^2 = d\rho_0^2 + r^2 \sin^2(\rho_0/r) d\phi_0^2$$

et

$$(G)_{M_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix}$$

L'espace ponctuel euclidien E_2 tangent à $\mathcal{R}_2$ a pour tenseur métrique au point m_0 :

$$(\bar{G})_{m_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix} = (G)_{M_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix}$$

Prenons un tenseur métrique constant :

$$\bar{G} = (\bar{G})_{M_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix}$$

5.1.2 Caractère intrinsèque

Effectuons la transformation de coordonnées $(x^i) \rightarrow (x^{i'})$. Pour que la notion de métrique euclidienne tangente présente un caractère intrinsèque (soit indépendante du système de coordonnées), l'égalité (5.2) page ci-contre doit être vérifiée dans le nouveau système de coordonnées $(x^{i'})$. Nous cherchons les conditions pour avoir :

$$\forall k, l \quad \bar{g}_{k'l'} = (g_{k'l'})_{M_0}$$

Par changement de coordonnées, le tenseur métrique de l'espace ponctuel euclidien tangent E_n se transforme en tout point selon la loi (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$\forall i, j \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \bar{g}_{k'l'}$$

Par conséquent, il faut aussi que dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ nous ayons en tout point

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} g_{k'l'}$$

et c'est ce que nous *poserons*. En effet, en partant de (5.2) page précédente

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \bar{g}_{ij} &= (g_{ij})_{M_0} \\ \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \bar{g}_{k'l'} &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} (g_{k'l'})_{M_0} \\ \forall k, l \quad \bar{g}_{k'l'} &= (g_{k'l'})_{M_0} \end{aligned}$$

et l'égalité (5.2) page 46 est conservée par changement de coordonnées. Nous pouvons alors, grâce au caractère *intrinsèque* de la représentation du premier ordre et de la métrique euclidienne tangente, étendre aux espaces riemanniens des notions géométriques d'origine euclidienne.

5.1.3 Représentation du premier ordre

Montrons que l'on peut trouver une infinité de métriques euclidiennes tangentes à un espace riemannien. Soit (x^i) un système de coordonnées curviligne d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$. Au point $M_0(x_0^i)$ de $\mathcal{R}_n$, faisons correspondre le point m_0 de l'espace ponctuel euclidien E_n , et un repère $(m_0, \bar{\mathbf{e}}_i)$ tels que

$$\forall i, j \quad \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = (g_{ij})_{M_0} \quad (5.3)$$

sans plus d'hypothèses sur les vecteurs de base $\bar{\mathbf{e}}_i$, ni sur le système de coordonnées de E_n . Supposons qu'à tout point $M(x^i)$ du voisinage de $M_0(x_0^i)$ dans $\mathcal{R}_n$, nous fassions correspondre un point m du voisinage de m_0 dans E_n , tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_0 \mathbf{m} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left[(x_M^i - x_{M_0}^i) + \Psi_2^i(x^r - x_0^r) \right] \bar{\mathbf{e}}_i \\ d\mathbf{m} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left[dx^i + \Psi_2^i(dx^r) \right] \bar{\mathbf{e}}_i \end{aligned} \quad (5.4)$$

où les fonctions Ψ_2^i sont du deuxième ordre par rapport aux variables $(x^r - x_0^r)$, pour $x^r - x_0^r$ voisins de zéro, et où l'on utilise le dx^i entre M et M_0 de l'espace $\mathcal{R}_n$ alors que l'on est dans E_n . Localement donc, le point m se trouve défini par les coordonnées (x^i) . Par conséquent, avec cette correspondance, les (x^i) sont un système de coordonnées curvilignes pour l'espace euclidien au voisinage de m_0 . Cette correspondance définit *une représentation du premier ordre* pour le voisinage de M_0 . Le point m est l'image de M dans cette représentation, m_0 est l'image de M_0 .

Avec (5.4), nous avons :

$$\begin{aligned} d\mathbf{m} &\stackrel{\text{déf}}{=} \bar{\mathbf{e}}_i dx^i + \Psi_2^i(dx^r) \bar{\mathbf{e}}_i \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^i} \right)_{m_0} dx^i + \Psi_2^i(dx^r) \bar{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall i \quad \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^i} \right)_{m_0} = \bar{\mathbf{e}}_i \quad (5.5)$$

La correspondance (5.4) impose donc que $(\bar{\mathbf{e}}_i)$ soit la base naturelle du système de coordonnées local (x^i) dans E_n , et que $(m, \bar{\mathbf{e}}_i)$ soit un repère naturel en m . Par conséquent :

$$\forall i, j \quad \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = (\bar{g}_{ij})_{m_0}$$

Avec (5.3) :

$$\forall i, j \quad (\bar{g}_{ij})_{m_0} = (g_{ij})_{M_0}$$

Les deux métriques admettent même coefficients en x_0^i , elles sont tangentes en ce point.

La représentation du premier ordre est-elle indépendante du système de coordonnées ? Lors du changement de coordonnées $(x^i) \rightarrow (x^{i'})$, elle prend la forme suivante

$$\mathbf{m}_0 \mathbf{m} = \left[(x^{i'} - x_0^{i'}) + \Theta_2^i(x^{r'} - x_0^{r'}) \right] \bar{\mathbf{e}}_i$$

où les fonctions Θ_2^i sont du deuxième ordre par rapport aux variables $x^{r'} - x_0^{r'}$, pour $x^{r'} - x_0^{r'}$ voisins de zéro. Sa forme étant indépendante du système de coordonnées utilisé, elle présente un caractère intrinsèque.

5.1.4 Propriétés déduites des métriques euclidiennes tangentes

Certaines propriétés de l'espace euclidien vont pouvoir être transposées dans les espaces riemanniens en utilisant la métrique euclidienne tangente en chaque point M de $\mathcal{R}_n$.

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de métrique :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Soit M un point de $\mathcal{R}_n$ et soit E_n l'espace ponctuel euclidien tangent en M à $\mathcal{R}_n$, de même système de coordonnées curvilignes (x^i) et de métrique constante :

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \bar{g}_{ij} dx^i dx^j \\ &= (g_{ij})_M dx^i dx^j \end{aligned}$$

Définition 5.1.1 : Tenseur de $\mathcal{R}_n$

Nous définissons un tenseur au point M d'un espace riemannien par ses composantes relatives aux coordonnées (x^i) , en définissant un tenseur au point m de l'espace euclidien tangent en M , par ses composantes dans le repère $(m, \bar{e}_i)$.

5.1.4.1 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs attachés au même point M d'un espace riemannien de tenseur métrique G , est donné par :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (g_{ij})_M v^i w^j$$

5.1.4.2 Métrique de $\mathcal{R}_n$

Le carré de la « distance » élémentaire entre deux points M_0 et M infiniment proches dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ est égal au carré de la « distance » élémentaire euclidienne des deux points images m_0 et m :

$$\begin{aligned} \overline{m_0 m}^2 &= \bar{g}_{ij} dx^i dx^j \\ &= (g_{ij})_{M_0} dx^i dx^j \\ &= \overline{M_0 M}^2 \end{aligned}$$

On déduit la longueur d'un arc de courbe en intégrant la distance élémentaire dans l'espace riemannien. La fonction indicatrice ε (cf. Tome 4) rend le carré de la distance positif dans les espaces pseudo-riemanniens :

$$ds^2 = \varepsilon g_{ij} dx^i dx^j$$

De façon équivalente

$$\varepsilon ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

Par intégration on en déduit la longueur d'un arc de courbe (et l'on retrouve (1.5) page 7) :

$$\Gamma = \int_a^b \sqrt{\varepsilon g_{ij} dx^i dx^j}$$

Exemple 5.1.2 : Longueur d'une courbe dans un espace hyperbolique

Soit la courbe paramétrée :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^1 = 1 \\ x^2 = \lambda \end{cases} \quad (1 \leq \lambda \leq 2)$$

Dans un espace de métrique hyperbolique

$$g_{11} = g_{22} = 1/(x^2)^2 \quad : \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

calculons sa longueur :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 &= \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)^T G \left(\frac{dx^j}{d\lambda} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

donc $\varepsilon = 1$.

$$\Gamma = \int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{d\lambda}{\lambda} = \ln 2$$

5.1.4.3 Hypervolume dans $\mathcal{R}_n$

L'hypervolume élémentaire d'origine M_0 dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ est égal à celui d'origine m_0 dans l'espace euclidien tangent en ce point. Il est donné par (1.6) page 11 :

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= \sqrt{|\bar{g}|} d\Omega \\ &= \sqrt{|g|} d\Omega \end{aligned}$$

où le déterminant g est fonction des coordonnées du point M_0 . Par intégration on en déduit l'hypervolume d'un domaine de dimension n :

$$\mathcal{V} = \int \sqrt{|g|} d\Omega$$

Par changement de coordonnées, on a (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} d\Omega &= J \sqrt{|g'|} \frac{d\Omega'}{J} \\ &= \sqrt{|g'|} d\Omega' \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'élément d'hypervolume et par suite l'hypervolume sont donc invariants par changement de coordonnées, ce sont des scalaires. Une arrête de l'hypervolume pouvant être prise de longueur nulle, un hypervolume de dimension quelconque d'un domaine de l'espace est un scalaire.

5.1.5 Représentation du second ordre

Pour étendre aux espaces riemanniens les notions d'analyse tensorielle de la géométrie euclidienne, nous définissons la notion de champ de tenseurs sur un espace riemannien.

Définition 5.1.2 : Champ de tenseurs

Attachons à chaque point M d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ un tenseur T de la façon suivante : au point M faisons correspondre dans l'espace euclidien tangent un repère (m, e_i) compatible avec la métrique riemannienne en ce point. La donnée des composantes du tenseur dans ce repère en fonction des coordonnées (x^i) communes aux deux espaces dans le voisinage de M , constitue un champ de tenseurs dans $\mathcal{R}_n$.

Exemple 5.1.3 : Tenseur fondamental

Les composantes g_{ij} du tenseur fondamental données en tout point M sont un exemple de composantes covariantes d'un champ de tenseurs d'ordre deux.

Définition 5.1.3 : Différentielle absolue d'un tenseur

Soient T_0 et T deux tenseurs de $\mathcal{R}_n$, attachés aux points infiniment voisins M_0 et M . Dans une représentation du premier ordre, leur différence est définie à des infiniment petits du premier ordre. La partie principale de cette différence est appelée différentielle absolue du tenseur T .

La notion de métrique euclidienne tangente ne nous permet pas de comparer entre eux des tenseurs attachés à deux points, même infiniment proches, de l'espace riemannien.

En effet, dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$, donnons-nous un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ par leurs composantes contravariantes v^i . Soient deux vecteurs de ce champ, attachés en deux points infiniment proches M_0 et M . Leur différentielle absolue est la différence géométrique de leurs vecteurs images dans l'espace euclidien tangent E_n . D'après la déf. 3.1.2 page 28, les composantes contravariantes des Dv^i dans le repère naturel en un point m_0 de E_n s'écrivent :

$$\forall i \quad (Dv^i)_{m_0} = (dv^i)_{m_0} + (v^j)_{m_0} (\bar{\Gamma}_{kj}^i)_{m_0} du^k$$

Pour étendre la notion de différentielle absolue aux espaces riemanniens, et écrire

$$\forall i \quad (Dv^i)_{M_0} = (Dv^i)_{m_0}$$

il faudrait avoir

$$\forall i, j, k \quad (\Gamma_{kj}^i)_{M_0} = (\bar{\Gamma}_{kj}^i)_{m_0}$$

c.-à-d. d'après (2.14) page 19 :

$$\forall i, j, k \quad (\partial_k g_{ij})_{M_0} = (\partial_k \bar{g}_{ij})_{m_0} \quad (5.7)$$

Deux telles métriques sont dites *osculatrices*. Pour cela, remplaçons la représentation du premier ordre (5.4) page 48 par une représentation du second ordre, c.-à-d. remplaçons l'espace euclidien

tangent par un espace euclidien osculateur. La formule de Taylor à l'ordre deux s'écrit

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{a,b} (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{a,b} (y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{a,b} (x - a)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{a,b} (y - b)^2 \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\bigg|_{a,b} (x - a)(y - b) + R_3[(x - a), (y - b)]$$

où les fonctions R_3 sont du 3^e ordre par rapport aux variables $(x - a)$ et $(y - b)$. En prenant deux points infiniment proches :

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + R_3(dx, dy)$$

En particulier pour le vecteur position, en utilisant (2.7) page 17 :

$$\mathbf{om}(x^i + dx^i) - \mathbf{om}_0(x^i) = \partial_i \mathbf{m} dx^i + \frac{1}{2} \partial_{jk} \mathbf{m} dx^j dx^k + \Phi_3^i(dx^r) \bar{\mathbf{e}}_i \\ = dx^i \bar{\mathbf{e}}_i + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{jk}^i dx^j dx^k \bar{\mathbf{e}}_i + \Phi_3^i(dx^r) \bar{\mathbf{e}}_i \\ = \left[dx^i + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{jk}^i dx^j dx^k + \Phi_3^i(dx^r) \right] \bar{\mathbf{e}}_i$$

où les fonctions Φ_3^i sont du 3^e ordre par rapport aux variables dx^r au voisinage du point m_0 . Posons :

$$d\mathbf{m} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[dx^i + \frac{1}{2} \Gamma_{kj}^i dx^j dx^k + \Phi_3^i(dx^r) \right] \bar{\mathbf{e}}_i \quad (5.8)$$

où les symboles de Christoffel sont évalués dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ alors que l'on est dans E_n . Cette représentation étant déjà du premier ordre car elle peut s'écrire sous la forme de (5.4) page 48 avec $\Psi_2^i(dx^r) = \frac{1}{2} \Gamma_{kj}^i dx^j dx^k + \Phi_3^i(dx^r)$, (5.5) page 48 restent valables :

$$\forall i \quad \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^i} \right)_{m_0} = \bar{\mathbf{e}}_i$$

Dérivons à nouveau :

$$\forall i, k \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^k \partial x^i} \right)_{m_0} = \partial_k \bar{\mathbf{e}}_i \\ = (\bar{\Gamma}_{ki}^j)_{m_0} \bar{\mathbf{e}}_j \\ \forall j, k \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^k \partial x^j} \right)_{m_0} = (\bar{\Gamma}_{kj}^i)_{m_0} \bar{\mathbf{e}}_i$$

D'autre part, avec (5.8) :

$$\forall j, k \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^k \partial x^j} \right)_{m_0} = (\Gamma_{kj}^i)_{M_0} \bar{\mathbf{e}}_i$$

On en déduit :

$$\forall i, j, k \quad (\Gamma_{kj}^i)_{M_0} = (\bar{\Gamma}_{kj}^i)_{m_0}$$

Les notions de représentation du second ordre et de métrique euclidienne osculatrice permettent d'étendre aux espaces riemanniens les notions d'analyse tensorielle euclidienne relative aux tenseurs attachés à deux points infiniment voisins. Il en est ainsi en particulier pour tous les opérateurs différentiels que nous avons étudiés au § 4 page 41.

Nous pouvons étendre la notion de différentielle absolue (déf. 3.1.2 page 28) aux espaces riemanniens. Quel que soit le point m_0 , nous avons :

$$\forall i \quad Dv^i = dv^i + v^j \omega^i_j$$

Si le champ de vecteurs est défini par ses composantes covariantes v_i , sa différentielle absolue (déf. 3.1.3 page 29) a pour composantes covariantes :

$$\forall i \quad Dv_i = dv_i - v_j \omega^j_i$$

De même, on généralise aux espaces riemanniens la déf. 3.4.1 page 31 de la dérivée covariante d'un vecteur. Les quantités,

$$\forall i, k \quad \nabla_k v^i = \partial_k v^i + v^j \Gamma^i_{jk}$$

sont les composantes mixtes du tenseur d'ordre deux *dérivée covariante* du vecteur $\underline{v}$.

Si le champ de vecteurs est défini par ses composantes covariantes, les quantités,

$$\forall i, k \quad \nabla_k v_i = \partial_k v_i - v_j \Gamma^j_{ik}$$

sont les composantes covariantes du tenseur (d'ordre deux) *dérivée covariante* du covecteur $\underline{v}$. Ces formules sont généralisées aux dérivées covariantes de tenseurs riemanniens.

Exemple 5.1.4 : Espace osculateur en un point d'une surface quelconque

Soit une surface S quelconque (un espace proprement riemannien de dimension deux) plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions, et soit P un plan tangent à S au point M . Soit (x, y, z) un système de coordonnées rectangulaire de centre M , tel que (x, y) soit le système de coordonnées du plan. Le carré de l'élément linéaire du plan est donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Dans le système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) la surface a pour équation $z = z(x, y)$, le carré de son élément linéaire est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Or

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ dz^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Au point M la coordonnée z de la surface est un minimum local et l'on a :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 0 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 0 \end{cases} \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Par conséquent, au point M les coefficients des métriques sont égaux (et valent l'unité), la représentation est du premier ordre (relations (5.1) page 46). Les dérivées partielles du premier ordre de ces coefficients par rapport aux coordonnées sont aussi égales (et sont nulles puisque l'on dérive des constantes), la représentation est du second ordre (relations (5.7) page 51). L'espace osculateur à la surface est donc ici l'espace tangent à la surface.

5.1.6 Transport parallèle en espace courbe

Généralisons la déf. 2.9.1 page 24 des vecteurs parallèles aux espaces riemanniens :

Définition 5.1.4 : Vecteurs parallèles

Deux vecteurs d'un espace riemannien sont parallèles s'ils font le même angle avec une géodésique donnée (plus précisément avec le vecteur tangent à la géodésique).

Soient $M(x^i)$ et $M'(x^i + \Delta x^i)$ deux points d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$. Par ces deux points passe au moins une géodésique. Soit $\mathbf{u}(u^i)$ le vecteur d'origine M , appartenant à l'hyperplan T_x tangent en M à $\mathcal{R}_n$, et soit $\mathbf{v}(v^i)$ le vecteur d'origine M' , appartenant à l'hyperplan $T_{x+\Delta x}$ tangent en M' à $\mathcal{R}_n$. Si l'on souhaite comparer les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, nous devons effectuer un transport parallèle du vecteur $\mathbf{v}$ vers le vecteur $\mathbf{u}$. Dans le cas général les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas tangents à la géodésique qui permet le transport parallèle.

Exemple 5.1.5 : Transport parallèle d'un vecteur sur une sphère

Sur une sphère, le transport parallèle d'un vecteur s'effectue le long d'un grand cercle. Transportons parallèlement le vecteur $\mathbf{v}$ dans son plan tangent, de M' en M :

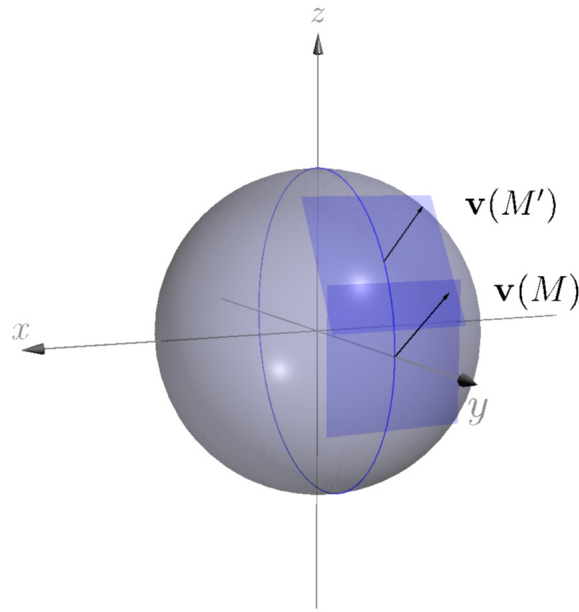


FIG. 5.1 – Transport parallèle du vecteur $\mathbf{v}$

Les vecteurs $\mathbf{v}(M)$ et $\mathbf{v}(M')$ sont *parallèles sur la sphère*.

Remarque 5.1.1

Le changement de bases naturelles infiniment proches donnant les symboles de Christoffel, relations (2.3) page 15, n'a rien à voir avec un quelconque transport parallèle des vecteurs de base, qui lui aurait lieu uniquement selon les géodésiques. Au contraire, chaque vecteur de base varie en suivant sa ligne de coordonnée qui n'est pas toujours une géodésique de l'espace.

5.1.7 Équipollence

Deux vecteurs d'un espace euclidien sont équipollents s'ils ont même longueur (même norme), même direction (ils sont parallèles) et même sens : leur différence géométrique est nulle. Dans un espace riemannien, deux vecteurs d'origines infiniment voisines M et M' sont équipollents s'ils sont équipollents dans l'espace euclidien tangent en M .

Définition 5.1.5 : Équipollence

Soient deux vecteurs d'origines infiniment voisines. Ils sont équipollents ssi la différentielle absolue $d\mathbf{v}$ (déf. 3.1.1 page 27) de composantes contravariantes Dv^i correspondant au transport du premier vecteur au second est nulle :

$$\forall i \quad Dv^i = 0$$

Définition 5.1.6 : Transport parallèle ou transport par équipollence

Le transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{v}$ d'origine M en un point infiniment voisin M' , consiste à construire le vecteur $\mathbf{v}'$ d'origine M' , équipollent à $\mathbf{v}$.

5.2 Trajectoires dans un espace riemannien

5.2.1 Vecteur accélération dans un espace riemannien

Dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$, considérons un point mobile M dont les coordonnées curvilignes (x^i) sont fonction du temps, $M(x^i(t))$. Comme dans l'ex. 3.5 page 33 pour un espace euclidien, les composantes contravariantes du n -vecteur vitesse ont pour expression

$$\forall i = 1, \dots, n \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

et le n -vecteur accélération a pour composantes contravariantes :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \gamma^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

5.2.2 Principe de Mach

Reprenons le principe de Mach (Cf. Vol. 2 Mécanique classique). Un mobile inertiel tourne en général sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines, car même dans l'espace profond loin des masses et des sources d'énergie, l'espace-temps n'est jamais parfaitement plat, il existe toujours un champ gravitationnel et le mobile n'est jamais parfaitement sur une ligne de champ. Un mouvement inertiel implique donc quasi toujours une rotation par rapport aux étoiles lointaines.

Les forces d'inertie axifuges qui s'exercent sur un mobile sont dues à la sortie de son centre d'inertie de sa trajectoire inertielle (sortie de son centre d'inertie de sa trajectoire géodésique dans l'espace-temps local) et/ou à sa sortie du mouvement inertiel de rotation dans l'espace-temps local (sortie de chacun des éléments constitutifs du mobile de leur trajectoire géodésique dans l'espace-temps local). Le déplacement d'un mobile est donc relatif à l'espace-temps local, donc à la répartition de la matière-énergie principalement à proximité du mobile. De même, le mouvement de rotation d'un mobile est aussi relatif à l'espace-temps local, donc à la répartition de la matière-énergie principalement à proximité du mobile. Les forces d'inertie axifuges qui s'exercent sur un mobile sont bien dues à sa rotation par rapport au reste de l'univers (plus précisément à la répartition de la matière-énergie du reste de l'univers) comme le pensait Mach, avec une importance décroissant approximativement en $1/r^2$ pour les masses pas trop lointaines du mobile, et quasi nulle pour les étoiles lointaines. La rotation de l'observateur par rapport aux étoiles lointaines n'est pas ce qui provoque la force axifuge, c'est la rotation de l'observateur par rapport à l'espace-temps local qui en est responsable. La conclusion de Mach est donc valide mais imprécise, et les prémisses sont fausses.

Exemple 5.2.1

Dans sa révolution autour du Soleil, la Terre a une trajectoire inertielle, son centre de gravité suit une géodésique de l'espace-temps courbe. La Terre est en chute libre dans le

champ de gravitation local, dû en grande partie au Soleil et aux planètes Jupiter et Saturne. Pour un observateur non terrestre, le 3-vecteur accélération de la Terre est non nul, son 3-vecteur vitesse varie en norme et en direction dans sa révolution autour du Soleil.

Définition 5.2.1 : Mouvement inertiel

Un mobile a un mouvement inertiel ssi son centre d'inertie et chacune de ses parties suivent une trajectoire géodésique.

Exemple 5.2.2

La Terre aura un mouvement inertiel lorsque elle montrera toujours la même face au Soleil, dans quelques centaines de millions d'années, de la même façon que la Lune montre toujours la même face à la Terre. La Terre tourne sur elle-même par conservation du moment cinétique, elle a effectué environ 4 milliards de révolutions avec disons 400 rotations par révolution. Elle est déformée par la force de gravitation exercée par le Soleil car cette force approximativement en $1/r^2$ est plus importante sur la face orientée vers le Soleil. Elle est en permanence ovalisée selon l'axe Terre-Soleil, mais comme elle tourne sur elle-même elle est continuellement déformée, ce qui provoque les marées terrestres et océaniques. La Terre chauffe par frottement, et libère cette énergie de rotation par rayonnement, principalement dans les infrarouges.

5.2.3 Masse inerte et masse grave

Revenons sur l'observation de l'égalité entre masse inerte et masse grave (Cf. Vol. 2 Mécanique classique). La masse inerte est le coefficient associé à un corps qui mesure sa résistance à sa mise en mouvement, autrement dit sa résistance à sa sortie de sa trajectoire géodésique. Lorsque l'on pèse un corps, la balance sort en permanence le corps de sa trajectoire géodésique en l'empêchant de tomber vers le centre la Terre. On mesure donc le même coefficient et la masse grave d'un corps est aussi sa masse inerte, si l'on admet comme modèle de la réalité que les masses libres suivent les géodésiques de l'espace-temps, autrement dit si l'on admet la relativité générale. Cette dernière serait remise en question si une expérience montrait une différence entre masse inerte et masse grave. La relativité générale explique donc le « principe d'équivalence », qui de fait n'est plus un principe (s'en était un en mécanique classique) et ne peut donc servir pour construire la relativité générale.

En l'absence de champ gravitationnel, ou dans un champ gravitationnel homogène (partout le même en tout point de l'espace), les centres de gravité et d'inertie d'un corps sont confondus. Si le corps a un centre de symétrie, il se confond avec les centres de gravité et d'inertie. En revanche, dans un champ gravitationnel inhomogène, seul le centre de gravité actif (le centre de gravité des masses graves dans leur rôle actif, (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) est confondu avec le centre d'inertie. Le centre de gravité passif, qui lui dépend du champ gravitationnel extérieur, n'est pas confondu avec le centre d'inertie.

Exemple 5.2.3

Considérons un système formé de deux masses identiques reliées par une tige de masse négligeable, plongé dans un champ gravitationnel inhomogène (fig. 5.2). Les centres de

gravité G_{actif} et G_{passif} ne sont pas confondus.

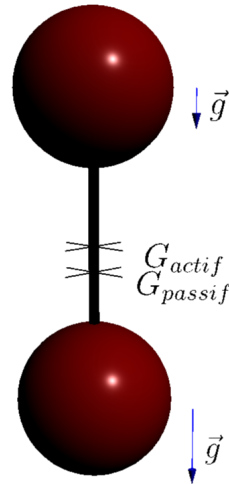


FIG. 5.2 – Champ gravitationnel inhomogène

5.2.4 Forces de marée

Dans le cas purement théorique d'absence de champ de gravitation, les géodésiques sont des droites de l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte. Un référentiel inertiel qui suit l'une de ces droites est appelé référentiel galiléen. Un observateur qui ne suit pas une géodésique de cet espace-temps plat ressent un champ gravitationnel alors même qu'il n'y a pas de masse. Ainsi, un référentiel en accélération rectiligne est équivalent à un référentiel galiléen en présence d'un champ de gravitation homogène. Un tel champ gravitationnel homogène n'existe qu'en première approximation car un champ gravitationnel tend toujours vers zéro à l'infini de la masse qui crée le champ. De plus, les lignes de champ convergent vers le centre de gravité de la masse qui crée le champ, alors que dans un référentiel accéléré le champ ressenti est de divergence nulle (il ne converge ni ne diverge). Pour ces deux raisons cette équivalence ne peut être que locale dans l'espace et dans le temps (dans un quadri-volume d'espace-temps suffisamment petit). En l'absence de masse, un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe qui passe ou non par le centre du référentiel, est équivalent à un référentiel galiléen en présence d'un champ gravitationnel divergent et tendant vers l'infini à l'infini. Ici aussi, l'équivalence ne peut être que locale.

Notez également qu'un référentiel en accélération rectiligne non uniforme et un référentiel en rotation non uniforme sont localement équivalents à un référentiel galiléen dans un champ gravitationnel homogène et non constant (variable dans le temps).

Utilisons le principe d'équivalence en rotation pour guider notre réflexion. Un champ gravitationnel est équivalent à un référentiel en rotation. Dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ de système de coordonnées galiléennes (t, x, y, z) , l'intervalle ds est donné par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

L'intervalle conserve sa forme lorsque l'on passe à un autre référentiel inertiel. Voyons comment il se transforme lorsque nous passons dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}'$ de coordonnées

(t', x', y', z') en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$:

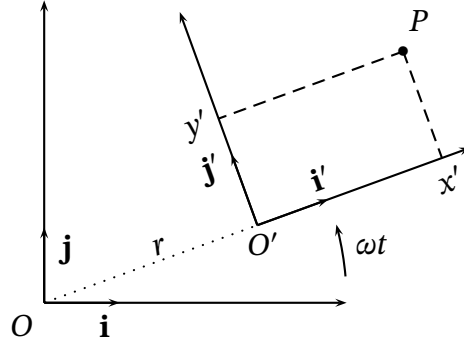


FIG. 5.3 – Référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$

Écrivons l'expression des vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction des vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}$, dans le référentiel $\mathcal{R}'$. A priori nous ne connaissons pas la transformation du temps, nous supposons $t' = t$ et envisagerons une transformation du temps un peu plus loin :

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j} \\ \mathbf{j}' = -\sin(\omega t)\mathbf{i} + \cos(\omega t)\mathbf{j} \end{cases}$$

Soit P un point quelconque fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P} \\ x\mathbf{i} + y\mathbf{j} &= r\mathbf{i}' + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' \\ &= (r + x')[\cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}] + y'[-\sin(\omega t)\mathbf{i} + \cos(\omega t)\mathbf{j}] \end{aligned}$$

r et ω sont ici des paramètres :

$$\begin{cases} x = (r + x') \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y = (r + x') \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = g(t, x', y') \\ y = h(t, x', y') \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' + \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' + \frac{\partial y}{\partial t} dt \\ dz = dz' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \cos(\omega t)dx' - \sin(\omega t)dy' - \omega[(r + x') \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)]dt \\ dy = \sin(\omega t)dx' + \cos(\omega t)dy' + \omega[(r + x') \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)]dt \\ dz = dz' \end{cases}$$

On suppose r nul :

$$\Rightarrow \begin{cases} dx^2 = \cos^2(\omega t)dx'^2 + \sin^2(\omega t)dy'^2 - 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)dx'dy' \\ \quad + \omega^2[(r+x')^2\sin^2(\omega t) + y'^2\cos^2(\omega t) + 2x'y'\sin(\omega t)\cos(\omega t)]dt^2 \\ \quad - 2\omega[\cos(\omega t)dx' - \sin(\omega t)dy'][x'\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t)]dt \\ dy^2 = \sin^2(\omega t)dx'^2 + \cos^2(\omega t)dy'^2 + 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)dx'dy' \\ \quad + \omega^2[(r+x')^2\cos^2(\omega t) + y'^2\sin^2(\omega t) - 2x'y'\cos(\omega t)\sin(\omega t)]dt^2 \\ \quad + 2\omega[\sin(\omega t)dx' + \cos(\omega t)dy'][x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)]dt \\ dz^2 = dz'^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= dx'^2 + dy'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)dt^2 \\ &\quad + 2\omega[\sin^2(\omega t)x'dy' - \cos^2(\omega t)y'dx' + \cos^2(\omega t)x'dy' - \sin^2(\omega t)y'dx']dt \\ &= dx'^2 + dy'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)dt^2 - 2\omega(y'dx' - x'dy')dt \end{aligned}$$

Dans le référentiel tournant, l'intervalle s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 - 2\omega(y'dx' + x'dy')dt \end{aligned}$$

Quelle que soit la transformation du temps on ne peut faire disparaître le dernier terme et cette expression ne peut se réduire à une somme de carrés de différentielles des coordonnées t', x', y', z' . Ce système de coordonnées est donc curviligne est le carré de l'intervalle élémentaire ds s'écrit sous la forme quadratique générale

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

où les $g_{\mu\nu}$ sont fonction des coordonnées spatiales et temporelle. Les référentiels non galiléens étant équivalents à un champ gravitationnel, on en déduit que les masses et donc l'énergie déterminent les propriétés géométriques de l'espace-temps.

5.2.5 Géodésiques d'un espace riemannien

Appliquons la définition d'une géodésique (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) à un espace de Riemann.

Définition 5.2.2 : Géodésique

Une trajectoire joignant deux points a et b de $\mathcal{R}_n$ est une géodésique ssi sa longueur est extrémale :

$$\delta \int_{p_a}^{p_b} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}} dp = 0$$

Théorème 5.2.1 : Géodésique

Un mobile dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ décrit une géodésique ssi sa n -accélération est nulle :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

Voir la remarque 1.2.1 page 4 sur la notation avec un point. La démonstration du théorème est identique à celle donnée au § 1.2 page 4. Avec (3.3) page 31 :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n \quad \gamma^i &= 0 \\ \frac{Dv^i}{dt} &= 0 \\ \frac{\nabla_k v^i dx^k}{dt} &= 0 \\ v^k \nabla_k v^i &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les relations (5.9) montrent que sur une géodésique le vecteur vitesse reste équipollent à lui-même (déf. 5.1.5 page 55). Cela permet d'étendre la notion de transport parallèle à un voisinage quelconque. Deux vecteurs formant un même angle avec une géodésique seront dits parallèles. Les géodésiques constituent l'extension en géométrie riemannienne des droites de l'espace euclidien. Les systèmes de coordonnées construits avec les géodésiques d'un espace courbe sont appelés *systèmes de coordonnées géodésiques* (cf. § 5.4.6 page 77). Un système de coordonnées rectilignes (cartésien), est un système de coordonnées géodésiques de l'espace euclidien, construit avec des droites qui sont des géodésiques de l'espace euclidien.

Si nous adoptons pour paramètre indépendant l'abscisse curviligne s le long de la géodésique, le vecteur $\mathbf{u}$ de composantes dx^i/ds est un vecteur unitaire colinéaire à $d\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= u_i u^i \\ &= dx_i dx^i / (ds^2) \\ &= g_{ij} dx^j dx^i / (ds^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il est tangent à la courbe, comme l'est la vitesse (relations (3.4) page 32). Avec ce vecteur, les équations des géodésiques (1.2) page 4 s'écrivent :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0$$

En relativité générale, la présence de matière et/ou d'énergie (d'agitation thermique, électromagnétique, etc.) définit le tenseur énergie-impulsion qui détermine la métrique de l'espace-temps. d^2x^λ/ds^2 est la 4-accélération de l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ est la courbure de l'espace-temps. Pour une masse m dans un champ gravitationnel :

$$\forall \lambda = 0, \dots, 3 \quad m \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = -m \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (5.10)$$

La force gravitationnelle de Newton est remplacée par le terme $-m \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ de courbure du quadri-espace riemannien R_4 , dont les mobiles libres suivent une géodésique. Le tenseur métrique G est le *potentiel du champ gravitationnel* car sa dérivée première donne l'intensité du champ gravitationnel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (relations (2.14) page 19).

Remarque 5.2.1

Dans un champ gravitationnel, les géodésiques sont courbées vers la masse créant le champ (voir la déviation d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil § 9.9 page 163). Trois géodésiques formeraient ainsi un triangle sphérique autour d'un l'objet massif. La courbure est donc positive.

Dans les espaces euclidiens et pseudo-euclidiens toute droite est à la fois une trajectoire à accélération nulle (donc une géodésique) et un extremum de longueur entre deux points de cette droite. Il en va de même en géométrie riemannienne, comme nous allons le voir. Reprenons (1.5) page 7 pour énoncer la définition suivante :

La définition d'une géodésique est indépendante du système de coordonnées puisque la notion de distance en est elle-même indépendante. Dans l'espace-temps de la relativité générale, la distance spatio-temporelle entre deux événements quelconques sur la trajectoire inertielle de la Terre est extrémale. Dans un espace riemannien, le carré de l'intervalle élémentaire d'univers a pour expression

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{ij} dx^i dx^j + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{00} (dx^0)^2 \end{aligned}$$

où l'on a séparé les coordonnées spatiales et temporelles, et où l'on utilise la notation indicielle pour les coordonnées galiléennes réduite (cf. Tome 4). Or, les événements sur la trajectoire terrestre ont lieu au même endroit dans le référentiel terrestre et seul le temps propre varie :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} (dx^0)^2 \\ ds &= c \sqrt{g_{00}} dt \end{aligned}$$

relation qui généralise la relation $ds = c dt$ de relativité restreinte, et l'on a

$$\Delta\tau = \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{g_{00}} dt$$

Pour être sur une géodésique, il s'agit alors de chercher la condition pour avoir ds^2 extrémal lorsque la partie spatiale est nulle. C'est le cas lorsque l'intervalle de temps propre $d\tau = dx^0/c$ est *maximal* et rend le ds^2 maximal (si $d\tau$ était minimal, une partie spatiale non nulle rendrait le ds^2 plus petit encore à cause des signes négatifs).

Si la forme quadratique fondamentale n'est pas définie, la détermination de la longueur de la géodésique d'un espace riemannien,

$$s = \int_{p_a}^{p_b} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}} dp$$

devra se faire dans une région de l'espace où elle conserve un signe constant.

Exemple 5.2.4 : Équation des géodésiques à la surface d'une sphère

1) première méthode

Les composantes du tenseur métrique sur une sphère de rayon r en coordonnées (θ, ϕ) s'écrivent (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) : $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$. Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$. Les relations (2.19) page 21 donnent les symboles de Christoffel de 2^e espèce en coordonnées

orthogonales :

$$\begin{cases} \Gamma_{ii}^i = \frac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \\ \Gamma_{ij}^i = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} \\ \Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} \\ \Gamma_{jk}^i = 0 \quad i, j, k \neq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0 \\ \Gamma_{\theta\phi}^\theta = 0 \\ \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot(\theta) \\ \Gamma_{\theta\theta}^\phi = 0 \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

Les géodésiques ont alors pour équations :

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\phi}{ds^2} + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \frac{d\phi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin(\theta)\cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{\tan(\theta)} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \end{cases}$$

La seconde relation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{d\phi}{ds} \sin^2(\theta) \right] &= 0 \\ \frac{d\phi}{ds} \sin^2(\theta) &= c^{ste} \end{aligned}$$

Une solution (parmi d'autres) évidente est :

$$\phi = c^{ste}$$

La première relation donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d\theta}{ds} &= a \\ \theta &= as + \theta_0 \end{aligned}$$

où a est une constante. En prenant $\theta = 0$ en $s = 0$ on a :

$$\theta = as$$

ϕ étant constante

$$s = r\theta$$

d'où

$$a = \frac{1}{r}$$

L'équation d'une géodésique est donc :

$$\begin{cases} \theta = s/r \\ \phi = c^{ste} \end{cases}$$

Comme θ varie de 0 à π , la géodésique est un demi-arc de grand cercle allant d'un pôle à l'autre. Par symétrie sphérique, tous les arcs de grands cercles sont des géodésiques.

2) seconde méthode

À partir du carré de l'élément linéaire sur une sphère de rayon r :

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

où $g_{\theta\theta} = r^2$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$. Plutôt que de calculer les symboles de Christoffel, résolvons le problème de variation,

$$\begin{aligned} \delta \int ds &= 0 \\ \delta \int r [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2]^{1/2} &= 0 \\ \delta \int [\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2]^{1/2} dp &= 0 \\ \delta \int [\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2] dp &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

où le point désigne une dérivation par rapport au paramètre quelconque p . Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \phi, p) = \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2$$

et les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} 2 \frac{d\dot{\theta}}{dp} - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0 \\ \frac{d}{dp} [\sin^2(\theta) \dot{\phi}] = 0 \end{cases} \quad (5.12a) \\ \Rightarrow &\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0 \\ 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} + \sin^2(\theta) \ddot{\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0 \\ \ddot{\phi} + 2 \cot(\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve les deux équations différentielles (1.2) page 4 d'une géodésique, qui nous donne les symboles de Christoffel :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \dot{\phi}^2 = 0 \\ \ddot{\phi} + \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \dot{\theta} \dot{\phi} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \dot{\phi} \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot(\theta) \end{cases}$$

(5.12a) donne une *intégrale première* du mouvement (une constante par rapport au paramètre) :

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) \dot{\phi} &= c_1 \\ \dot{\phi} &= c_1 / \sin^2(\theta) \\ \dot{\phi}^2 &= c_1^2 / \sin^4 \theta \end{aligned}$$

Une seconde intégrale première est obtenue en posant simplement un lagrangien constant $\mathcal{L} = c_2$ (dans (5.11), la variation d'une constante est nulle) :

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 = c_2$$

À partir des deux intégrales premières :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2(\theta)} &= c_2 \\ \frac{\dot{\theta}^2}{c_1^2} &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\ \frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\phi}^2 \sin^4 \theta} &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\ \frac{1}{\sin^4 \theta} \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= \cot(\theta) \\ \frac{d\alpha}{d\phi} &= \frac{-\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \frac{d\theta}{d\phi} \\ \left(\frac{d\alpha}{d\phi} \right)^2 &= \frac{1}{\sin^4 \theta} \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 \\ &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - \alpha^2 \end{aligned}$$

Donc α est une fonction sinusoïdale de ϕ (la dérivée seconde est la fonction de départ avec un signe opposé) :

$$\alpha(\phi) = a \sin(\phi + b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\phi} &= a \cos(\phi + b) \\ \left(\frac{d\alpha}{d\phi} \right)^2 &= a^2 \cos^2(\phi + b) \end{aligned}$$

On trouve l'expression de la nouvelle constante :

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2(\phi + b) &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - a^2 \sin^2(\phi + b) \\ a^2 &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 \end{aligned}$$

Revenons à l'ancienne variable θ :

$$\begin{aligned}\cot(\theta) &= a \sin(\phi + b) \\ \cos(\theta) &= \sin(\theta) [A \cos(\phi) + B \sin(\phi)] \\ r \cos(\theta) &= Ar \sin(\theta) \cos(\phi) + Br \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= Ax + By\end{aligned}$$

Les géodésiques sont donc les sections de la sphère par des plans passant par son centre, c.-à-d. des grands cercles.

5.3 Métrique euclidienne de raccordement

5.3.1 Développement d'une courbe de $\mathcal{R}_n$ sur l'espace ponctuel euclidien

Dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de système de coordonnées curvilignes (x^i) , soit C une courbe d'équations paramétriques $x^i = x^i(t)$ où t est un paramètre quelconque. À chaque point M de C faisons correspondre un point m et un repère naturel $(m, \mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel euclidien E_n associé à l'espace ponctuel euclidien E_n .

Au point M_0 de C pour $t = 0$, faisons correspondre un point m_0 arbitrairement choisi dans E_n , et un repère naturel $(m_0, \mathbf{e}_{i_0})$ indéterminé en orientation mais défini en forme (angles entre les vecteurs) et grandeur par :

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_{i_0} \cdot \mathbf{e}_{j_0} = (g_{ij})_{M_0} \quad (5.13)$$

Soit (y^i) le système de coordonnées de l'espace ponctuel euclidien E_n . La base $(\mathbf{e}_i)$ étant une base naturelle, $d\vec{OM} = dx^i \vec{e}_i$ est vérifiée :

$$d\mathbf{m} = dy^i \mathbf{e}_i$$

Les vecteurs des bases naturelles en m dans E_n vérifient également (2.3) page 15 :

$$\forall i \quad d\mathbf{e}_i = (\Gamma^h_{ki})_m dy^k \mathbf{e}_h$$

Le choix des bases en chaque point m étant libre, on pose

$$(\Gamma^h_{ki})_m = (\Gamma^h_{ki})_M$$

Les symboles de Christoffel sont donc calculés à partir de la métrique riemannienne g_{ij} au point M . Ils ne dépendent donc que du paramètre t , de même que $d\mathbf{m}$ par l'intermédiaire de M . Nous obtenons :

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = dy^i \mathbf{e}_i \\ d\mathbf{e}_i = (\Gamma^h_{ki})_M dy^k \mathbf{e}_h \end{cases} \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{m}}{dt} = \frac{dy^i}{dt} \mathbf{e}_i \\ \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = (\Gamma^h_{ki})_M \frac{dy^k}{dt} \mathbf{e}_h \end{cases} \quad \forall i \quad (5.14)$$

$\mathbf{m}(t)$ et les $\mathbf{e}_i(t)$ sont obtenus par intégration de ce système d'équations différentielles en se servant des conditions initiales que nous nous sommes données pour $t = 0$, relation (5.13). À la courbe C de $\mathcal{R}_n$ correspond la courbe $\tilde{C}$ de l'espace ponctuel euclidien E_n , appelée *développement de la courbe C sur l'espace euclidien*.

La modification des conditions initiales, c.-à-d. la modification du repère naturel $(\mathbf{m}_0, \mathbf{e}_{i_0})$, revient à effectuer un déplacement quelconque de la courbe $\tilde{C}$ dans l'espace euclidien. Par suite, $\tilde{C}$ se trouve définie à un déplacement près dans E_n , et est indéterminée en orientation. En effet, dans l'espace euclidien, le lieu et l'orientation d'une figure n'ont que peu d'importance.

5.3.2 Métrique euclidienne de raccordement le long d'une courbe

Établissons le théorème suivant au sujet du développement de la courbe C :

Théorème 5.3.1 : Métrique euclidienne de raccordement

On peut trouver dans l'espace ponctuel euclidien E_n une métrique telle que les valeurs numériques que prennent ses coefficients et leurs dérivées premières le long de la courbe $\tilde{C}$ de E_n , coïncident avec les valeurs numériques que prennent les coefficients de la métrique riemannienne et leurs dérivées premières aux points homologues de la courbe C de $\mathcal{R}_n$.

Autrement dit d'après (5.7) page 51, on peut construire une métrique euclidienne qui soit osculatrice à la métrique riemannienne en tous points d'une courbe C de $\mathcal{R}_n$.

Démonstration. Choisissons le système de coordonnées curvilignes (x^i) de $\mathcal{R}_n$ de sorte que la première coordonnée soit précisément la courbe C , les autres coordonnées étant nulles le long de la courbe :

$$\forall M \in C : \begin{cases} x_M^1 = t \\ x_M^2 = \dots = x_M^n = 0 \end{cases}$$

Prenons la convention que les indices grecs varient de 2 à n , la courbe C s'écrit :

$$C : \begin{cases} x^1 = t \\ x^\mu = 0 \end{cases}$$

Faisons de même dans l'espace ponctuel euclidien E_n . À la courbe C de $\mathcal{R}_n$ faisons correspondre la courbe $\tilde{C}$ de E_n telle qu'elle soit l'ensemble des points m de coordonnées :

$$\forall m \in \tilde{C} \quad \begin{cases} y_m^1 = t \\ y_m^\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{C} : \begin{cases} y^1 = t \\ y^\mu = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles (5.14) page précédente qui par intégration donne le développement de la courbe C de $\mathcal{R}_n$ s'écrit :

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = dy^1 \mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_i = (\Gamma_{1i}^h)_{x^\mu=0} dy^1 \mathbf{e}_h \quad \forall i, \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d\mathbf{m}}{dy^1} = \mathbf{e}_1 \\ \frac{d\mathbf{e}_i}{dy^1} = (\Gamma_{1i}^h)_{x^\mu=0} \mathbf{e}_h \quad \forall i, \mu \end{cases} \quad (5.15)$$

où les symboles de Christoffel sont évalués sur la courbe C , c.-à-d. pour $x^\mu = 0 \quad \forall \mu = 2, \dots, n$, et où seul dy^1 est non nul le long de la courbe C .

À tout point P au voisinage d'un point M de C tel que $x_P^1 = x_M^1$, faisons correspondre un point p au voisinage du point m de $\bar{C}$, tel que

$$\mathbf{mp} = \left[x_P^i - x_M^i + \frac{1}{2} (\Gamma^i_{jk})_{x^\mu=0} (x_P^j - x_M^j)(x_P^k - x_M^k) + \Phi_3^i(x_P^r - x_M^r) \right] \mathbf{e}_i \quad (5.16)$$

où l'on utilise les valeurs du système de coordonnées (x^i) de $\mathcal{R}_n$, où les vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ sont ceux de (5.15), donc ceux de (5.14) page 66, et où les fonctions Φ_3^i sont du 3^e ordre par rapport aux variables $x_P^r - x_M^r$ pour $x_P^r - x_M^r$ voisins de zéro. Or,

$$\begin{cases} x_P^1 = x_M^1 \\ x_P^\mu \neq 0 \end{cases}$$

donne

$$\begin{aligned} \forall i, \mu \quad x_P^j - x_M^j &= x_P^1 - x_M^1 + x_P^\mu - x_M^\mu \\ &= x_P^\mu - x_M^\mu \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall i, \mu \quad (x_P^i - x_M^i) \mathbf{e}_i &= (x_P^1 - x_M^1) \mathbf{e}_1 + (x_P^\mu - x_M^\mu) \mathbf{e}_\mu \\ &= x_P^\mu \mathbf{e}_\mu \end{aligned}$$

(5.16) devient :

$$\mathbf{mp} = x_P^\nu \mathbf{e}_\nu + \left[\frac{1}{2} (\Gamma^i_{\gamma\delta})_{x^\mu=0} x_P^\gamma x_P^\delta + \Phi_3^i(x_P^\epsilon) \right] \mathbf{e}_i$$

Si m est le centre du système de coordonnées :

$$\mathbf{mp} = x^\nu \mathbf{e}_\nu + \left[\frac{1}{2} (\Gamma^i_{\gamma\delta})_{x^\mu=0} x^\gamma x^\delta + \Phi_3^i(x^\epsilon) \right] \mathbf{e}_i \quad (5.17)$$

Le point p est défini par les n variables scalaires x^i (avec $x^1 = t$), les coordonnées (x^i) de $\mathcal{R}_n$ forment donc aussi un système de coordonnées curvilignes pour E_n au voisinage de la courbe $\bar{C}$. Le repère naturel en $m(t, x^\mu = 0)$ est défini par

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} \right)_{x^\mu=0} &= \frac{d\mathbf{m}}{dx^1} \\ &= \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

p étant dans le voisinage de m , (5.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= dx^\nu \mathbf{e}_\nu + \left[\frac{1}{2} (\Gamma^i_{\gamma\delta})_{x^\mu=0} dx^\gamma dx^\delta + \Phi_3^i(x^\epsilon) \right] \mathbf{e}_i \\ \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\alpha} \right)_{x^\mu=0} &= \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1} \right)_{x^\mu=0} = \mathbf{e}_1 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\alpha} \right)_{x^\mu=0} = \mathbf{e}_\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} \right)_{x^\mu=0} = \mathbf{e}_i$$

Le repère naturel du système de coordonnées (x^i) au voisinage du point m est le repère $(m, \mathbf{e}_i)$ posé en (5.14) page 66. La métrique de E_n dans le système de coordonnées (x^i) au voisinage de la courbe $\tilde{C}$, admet donc pour coefficients en m les produits scalaires $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ des vecteurs de base donnés en (5.14).

Montrons qu'en tout point de la courbe C , ces coefficients sont égaux à ceux de la métrique riemannienne. Avec les secondes relations de (5.15) page 67 et avec (2.12) page 18 nous avons :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) &= d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j \\ &= (\Gamma^h_{ki})_M \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_j dx^k + (\Gamma^h_{kj})_M \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_i dx^k \\ &= [(\Gamma^h_{ki})_M g_{hj} + (\Gamma^h_{kj})_M g_{hi}] dx^k \\ &= [(\Gamma_{jki})_M + (\Gamma_{ikj})_M] dx^k \\ &= dg_{ij} \end{aligned}$$

Les quantités $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ et g_{ij} satisfont donc au même système différentiel. Or, d'après (5.13) page 66, les conditions initiales sont les mêmes. Il en résulte

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}$$

identiquement quand M décrit C . Les métriques euclidienne et riemannienne sont donc tangentes en tous point de C .

Pour montrer qu'elles sont osculatrices (tangentes à l'ordre deux), en se servant des relations (2.7) page 17, montrons que les symboles de Christoffel en m dans E_n sont égaux à ceux en M dans $\mathcal{R}_n$. Pour la première coordonnée x^1 , d'après (5.15) page 67 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^1 \partial x^i} \right)_{x^\mu=0} &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^1} \right)_{x^\mu=0} \\ &= (\Gamma^h_{1i})_{x^\mu=0} \mathbf{e}_h \end{aligned}$$

Pour les autres coordonnées, avec (5.18) page précédente :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right)_{x^\mu=0} &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{x^\mu=0} \\ &= (\Gamma^h_{\alpha\beta})_{x^\mu=0} \mathbf{e}_h \end{aligned}$$

Au final :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{x^\mu=0} = (\Gamma^h_{ij})_{x^\mu=0} \mathbf{e}_h$$

Les métriques sont donc osculatrices, et la métrique euclidienne obtenue est appelée *métrique euclidienne de raccordement le long de C*. $\square$

Ainsi, grâce à un choix convenable de système de coordonnées, on peut rendre nuls tous les symboles de Christoffel, non seulement en un point donné mais le long d'une courbe de l'espace riemannien. En relativité générale, cela revient à dire qu'il est toujours possible de trouver localement et instantanément, un espace de Poincaré-Minkowski osculateur en tout point d'une ligne d'univers quelconque, géodésique ou non. On peut suivre une ligne d'univers non géodésique par changement continu de référentiel inertiel, autrement dit dans un référentiel accéléré.

5.3.3 Application géométrique à la métrique euclidienne de raccordement

Soit C une géodésique de l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$. En chaque point M de C on attache un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ tangent à la courbe. Lorsque l'on passe du point M à un point de C infiniment voisin, le vecteur $\mathbf{u}$ est transporté parallèlement (déf. 5.1.6 page 55), sa différentielle absolue est nulle. Cette différentielle absolue est égale à celle du vecteur image dans l'espace ponctuel euclidien E_n , dans une représentation du second ordre du voisinage de M (par exemple celle d'une métrique euclidienne de raccordement). Le vecteur image n'est autre que le vecteur unitaire tangent à la courbe $\tilde{C}$ de E_n , développement de C . Par transport parallèle d'un vecteur dans un espace euclidien, on construit une droite. On en conclut que les géodésiques d'un espace riemannien sont les courbes qui se développent sur l'espace euclidien selon des droites.

5.4 Tenseur de courbure d'un espace riemannien

Dans un espace riemannien, effectuons le transport parallèle d'un vecteur en partant d'un point M et en revenant en ce point. Après ce cycle le vecteur n'a pas la même orientation, il a tourné d'un angle α .

Exemple 5.4.1

Un vecteur qui parcourt un triangle sphérique ne retrouve pas son orientation de départ à son retour au point initial M :

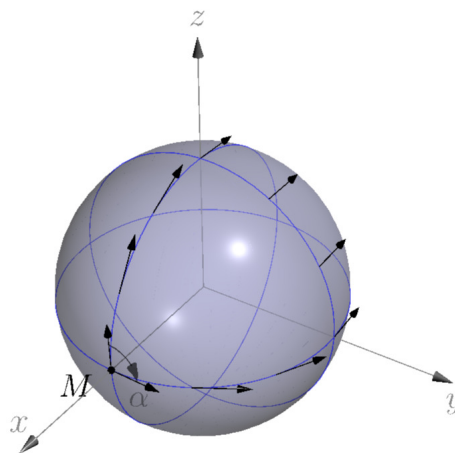
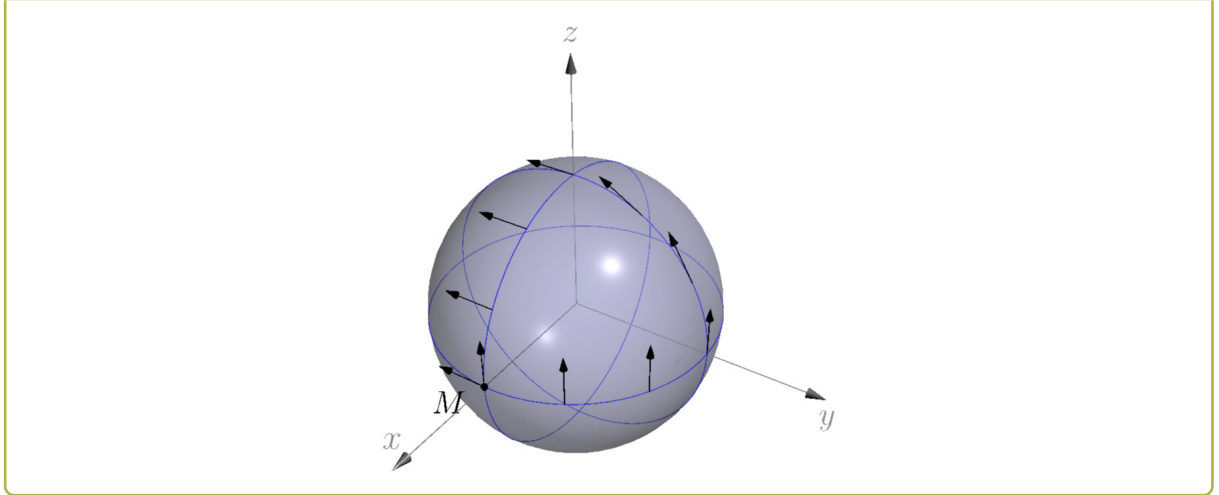


FIG. 5.4 – Courbure de la sphère

Sa nouvelle orientation dépend du sens de parcours, l'angle α change de signe :



Remarque 5.4.1

Le transport d'un vecteur n'est défini que selon une géodésique.

L'angle de rotation final d'un vecteur effectuant un cycle dans un espace riemannien donne une information sur la courbure de l'espace comprise dans le cycle. Plus le cycle est petit, plus l'angle de rotation du vecteur est petit.

5.4.1 Quasi-parallélogramme

Introduisons le tenseur de courbure d'un espace riemannien en suivant une méthode géométrique due à Élie Cartan. Soient deux symboles de différentiation, d et δ , que l'on supposera *échangeables*, c.-à-d. tels que :

$$\forall j \quad \delta dx^j = d\delta x^j \quad (5.19)$$

Sous cette hypothèse, pour une fonction scalaire $f(x^j)$ deux fois continûment différentiable des x^j , nous avons :

$$\begin{aligned} d\delta f &= d(\partial_j f \delta x^j) \\ &= \partial_{ji} f \delta x^j dx^i + \partial_j f d\delta x^j \\ &= \partial_{ij} f dx^i \delta x^j + \partial_i f \delta dx^i \\ &= \delta(\partial_i f dx^i) \\ &= \delta df \end{aligned}$$

La fonction f pouvant être par exemple un changement de variables, on en déduit que le caractère échangeable de deux symboles de différentiation subsiste par un changement arbitraire des variables x^j .

Soit $M(x^j)$ un point de $\mathcal{R}_n$:

- la différentiation d fait passer de $M(x^j)$ à $M_1(x^j + dx^j) = M + d\mathbf{M}$
- la différentiation δ fait passer de $M(x^j)$ à $M_2(x^j + \delta x^j) = M + \delta\mathbf{M}$

Nous supposons que $d\mathbf{M}$ et $\delta\mathbf{M}$ ne sont pas colinéaires, c.-à-d. que dx^j et δx^j ne sont pas proportionnels.

- de $M_1(x^j + dx^j)$, la différentiation δ fait passer au point $M_3(x^j + \delta x^j + dx^j + \delta dx^j)$

— de $M_2(x^j + \delta x^j)$, la différentiation d fait passer au point $M_4(x^j + dx^j + \delta x^j + d\delta x^j)$

D'après (5.19) page précédente, les points M_3 et M_4 sont confondus. Le circuit fermé formé des quatre points M, M_1, M_3, M_2 est appelé *quasi-parallélogramme* dans $\mathcal{R}_n$.

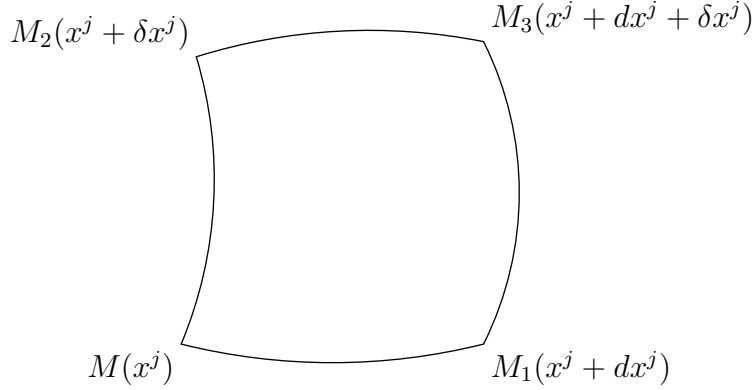


FIG. 5.5 – Quasi-parallélogramme

5.4.2 Développement du quasi-parallélogramme

Développons le quasi-parallélogramme dans l'espace ponctuel euclidien E_n tangent à l'espace riemannien au point M . Pour rester dans cet espace nous nous maintenons au voisinage infinitésimal du point M en considérant un trajet fermé infiniment petit.

— lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M au point infiniment proche M_1 , dans E_n on passe du repère naturel $(m, \mathbf{e}_j)$ au repère naturel

$$(m + d\mathbf{m}, \mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j)$$

et d'après (5.14) page 66 :

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = dx^j \mathbf{e}_j \\ d\mathbf{e}_j = \omega^i_j \mathbf{e}_i = \Gamma^i_{jk} dx^k \mathbf{e}_i \end{cases} \quad \forall j$$

Puis, lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M_1 au point M_3 , dans E_n on passe au repère naturel

$$(m + d\mathbf{m} + \delta d\mathbf{m}, \mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j + \delta d\mathbf{e}_j)$$

— lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M au point M_2 , dans E_n on passe du repère naturel $(m, \mathbf{e}_j)$ au repère naturel

$$(m + \delta \mathbf{m}, \mathbf{e}_j + \delta \mathbf{e}_j)$$

et avec (5.14) :

$$\begin{cases} \delta \mathbf{m} = \delta x^j \mathbf{e}_j \\ \delta \mathbf{e}_j = \tilde{\omega}^i_j \mathbf{e}_i = \Gamma^i_{jk} \delta x^k \mathbf{e}_i \end{cases} \quad \forall j$$

où le tilde indique la forme différentielle prise par ω pour les δx^j . Puis, lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M_2 au point M_3 , dans E_n on passe au repère naturel

$$(m + \delta \mathbf{m} + d\mathbf{m} + d\delta \mathbf{m}, \mathbf{e}_j + \delta \mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j + d\delta \mathbf{e}_j)$$

Comparons les positions des deux repères naturels finaux :

$$\begin{aligned}
 d\delta\mathbf{m} - \delta d\mathbf{m} &= d(\delta x^j \mathbf{e}_j) - \delta(dx^j \mathbf{e}_j) \\
 &= \delta x^j d\mathbf{e}_j - dx^j \delta \mathbf{e}_j \\
 &= \delta x^j \omega^i_j \mathbf{e}_i - dx^j \tilde{\omega}^i_j \mathbf{e}_i \\
 &= (\delta x^j \Gamma^i_{jk} dx^k - dx^j \Gamma^i_{jk} \delta x^k) \mathbf{e}_i \\
 &= (\delta x^j \Gamma^i_{jk} dx^k - dx^k \Gamma^i_{kj} \delta x^j) \mathbf{e}_i \\
 &= (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) dx^k \delta x^j \mathbf{e}_i
 \end{aligned}$$

On suppose que les conditions d'intégrabilité des points sont satisfaites, et donc que les symboles de Christoffel de 2^e espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$d\delta\mathbf{m} - \delta d\mathbf{m} = \vec{0}$$

Les développements selon les deux trajets conduisent alors au même repère final, et le quasi-parallélogramme est fermé également dans l'espace ponctuel euclidien tangent E_n .

Comparons l'orientation des vecteurs des deux repères naturels finaux :

$$\begin{aligned}
 \forall j \quad d\delta\mathbf{e}_j - \delta d\mathbf{e}_j &= d(\tilde{\omega}^i_j \mathbf{e}_i) - \delta(\omega^i_j \mathbf{e}_i) \\
 &= d\tilde{\omega}^i_j \mathbf{e}_i + \tilde{\omega}^i_j d\mathbf{e}_i - \delta\omega^i_j \mathbf{e}_i - \omega^i_j \delta \mathbf{e}_i \\
 &= d\tilde{\omega}^i_j \mathbf{e}_i - \delta\omega^i_j \mathbf{e}_i + \tilde{\omega}^k_j d\mathbf{e}_k - \omega^k_j \delta \mathbf{e}_k \\
 &= (d\tilde{\omega}^i_j - \delta\omega^i_j + \tilde{\omega}^k_j \omega^i_k - \omega^k_j \tilde{\omega}^i_k) \mathbf{e}_i \\
 &= \Omega^i_j \mathbf{e}_i
 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\forall i, j \quad \Omega^i_j \stackrel{\text{déf}}{=} d\tilde{\omega}^i_j - \delta\omega^i_j + \tilde{\omega}^k_j \omega^i_k - \omega^k_j \tilde{\omega}^i_k \quad (5.20)$$

Les bases finales ont même forme (même angle entre les vecteurs de base pris deux à deux) puisque les produits scalaires de ces vecteurs donnent les coefficients de la métrique en M_3 , qui est unique. Par conséquent, les quantités Ω^i_j définissent la rotation permettant de passer d'un repère à l'autre au voisinage infinitésimal du point m_3 de E_n . La courbure d'un espace riemannien se manifeste ainsi par le fait qu'en développant sur l'espace euclidien, à partir d'un même repère initial, deux chemins ayant mêmes extrémités, les repères finaux sont différents en orientation.

Remarque 5.4.2

Nous aurions pu comparer les repères finaux par $\forall j \delta d\mathbf{e}_j - d\delta\mathbf{e}_j$. Ainsi le tenseur rotation Ω^i_j est défini au signe près.

5.4.3 Tenseur rotation

Théorème 5.4.1

Les quantités Ω^i_j sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

Démonstration. Cherchons comment se transforment les quantités en question par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned}\forall j \quad \mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \mathbf{e}_{k'} \\ \delta \mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \delta \mathbf{e}_{k'} + \delta \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) \mathbf{e}_{k'} \\ d\delta \mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} d\delta \mathbf{e}_{k'} + d \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) \delta \mathbf{e}_{k'} + \delta \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) d\mathbf{e}_{k'} + d\delta \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) \mathbf{e}_{k'}\end{aligned}$$

De même :

$$\forall j \quad \delta d\mathbf{e}_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \delta d\mathbf{e}_{k'} + \delta \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) d\mathbf{e}_{k'} + d \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) \delta \mathbf{e}_{k'} + \delta d \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right) \mathbf{e}_{k'}$$

d et δ étant échangeables devant les $\partial x^{k'}/\partial x^j$, ne restent que les variations des vecteurs :

$$\begin{aligned}\forall j \quad d\delta \mathbf{e}_j - \delta d\mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} d\delta \mathbf{e}_{k'} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \delta d\mathbf{e}_{k'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} (d\delta \mathbf{e}_{k'} - \delta d\mathbf{e}_{k'}) \\ \forall j \quad \Omega^i_j \mathbf{e}_i &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \Omega^{h'}_{k'} \mathbf{e}_{h'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \Omega^{h'}_{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}} \mathbf{e}_i \\ \forall h, j \quad \Omega^i_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}} \Omega^{h'}_{k'}\end{aligned}$$

□

5.4.4 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2^{de} espèce

Reprenons (5.20) page précédente donnant les composantes du tenseur rotation :

$$\forall i, j \quad \Omega^i_j = d\tilde{\omega}^i_j - \delta \omega^i_j + \tilde{\omega}^k_j \omega^i_k - \omega^k_j \tilde{\omega}^i_k$$

Avec (2.2) page 14, nous avons

— d'une part

$$\begin{aligned}
 \forall i, j \quad d\tilde{\omega}^i_j - \delta\omega^i_j &= d(\Gamma^i_{sj} \delta x^s) - \delta(\Gamma^i_{sj} dx^s) \\
 &= \partial_r \Gamma^i_{sj} dx^r \delta x^s + \Gamma^i_{sj} d\delta x^s - \partial_r \Gamma^i_{sj} \delta x^r dx^s - \Gamma^i_{sj} \delta dx^s \\
 &= \partial_r \Gamma^i_{sj} dx^r \delta x^s - \partial_r \Gamma^i_{sj} \delta x^r dx^s \\
 &= \partial_r \Gamma^i_{sj} dx^r \delta x^s - \partial_s \Gamma^i_{rj} \delta x^s dx^r \\
 &= (\partial_r \Gamma^i_{sj} - \partial_s \Gamma^i_{rj}) dx^r \delta x^s
 \end{aligned}$$

— et d'autre part

$$\begin{aligned}
 \forall i, j \quad \tilde{\omega}^k_j \omega^i_k - \omega^k_j \tilde{\omega}^i_k &= \Gamma^k_{sj} \delta x^s \Gamma^i_{rk} dx^r - \Gamma^k_{rj} dx^r \Gamma^i_{sk} \delta x^s \\
 &= (\Gamma^k_{sj} \Gamma^i_{rk} - \Gamma^k_{rj} \Gamma^i_{sk}) dx^r \delta x^s
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \forall i, j \quad \Omega^i_j &= (\partial_r \Gamma^i_{sj} - \partial_s \Gamma^i_{rj}) dx^r \delta x^s + (\Gamma^k_{sj} \Gamma^i_{rk} - \Gamma^k_{rj} \Gamma^i_{sk}) dx^r \delta x^s \\
 &= (\partial_r \Gamma^i_{sj} - \partial_s \Gamma^i_{rj} + \Gamma^k_{sj} \Gamma^i_{rk} - \Gamma^k_{rj} \Gamma^i_{sk}) dx^r \delta x^s
 \end{aligned}$$

Les dx^r et les δx^s étant les composantes contravariantes de deux vecteurs différentiels arbitraires, relation $d\vec{OM} = dx^i \vec{e}_i$, et les Ω^i_j étant les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux, d'après le théorème du quotient (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) les quantités entre parenthèses sont les composantes une fois contravariante et trois fois covariantes d'un tenseur d'ordre quatre. Tout comme le tenseur rotation, il est défini au signe près.

Définition 5.4.1 : Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2^{de} espèce

Le tenseur d'ordre quatre

$$\forall i, j, r, s \quad R^i_{jrs} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_r \Gamma^i_{js} - \partial_s \Gamma^i_{jr} + \Gamma^k_{js} \Gamma^i_{kr} - \Gamma^k_{jr} \Gamma^i_{ks}$$

de composantes une fois contravariantes et trois fois covariantes, est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2^{de} espèce de l'espace riemannien R_n .

Étant donnée une forme différentielle quadratique arbitraire, pour qu'elle soit la métrique d'un espace euclidien, il est nécessaire que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\forall i, j, r, s \quad R^i_{jrs} = 0 \tag{5.21}$$

Dans ce cas, l'orientation du repère ne dépend pas du chemin suivi (par exemple le long d'un parallélogramme), et les conditions (2.1) page 14 sont intégrables.

Lorsque la variété correspondante est topologiquement équivalente à l'espace euclidien, on démontre que ces conditions sont suffisantes. Lorsque la variété correspondante n'est pas topologiquement équivalente à l'espace euclidien, si les conditions (5.21) sont satisfaites, l'espace riemannien est dit *localement euclidien* : ses propriétés purement locales ne diffèrent pas de celles d'un espace euclidien.

5.4.5 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1^{re} espèce

À partir de la déf. 5.4.1 page précédente du tenseur de courbure

$$\forall i, j, r, s \quad R^i_{jrs} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_r \Gamma^i_{js} - \partial_s \Gamma^i_{jr} + \Gamma^k_{js} \Gamma^i_{kr} - \Gamma^k_{jr} \Gamma^i_{ks}$$

abaissions l'indice contravariant :

$$\begin{aligned} \forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} &= g_{ih} R^h_{jrs} \\ &= g_{ih} (\partial_r \Gamma^h_{js} - \partial_s \Gamma^h_{jr} + \Gamma^k_{js} \Gamma^h_{kr} - \Gamma^k_{jr} \Gamma^h_{ks}) \\ &= g_{ih} \partial_r \Gamma^h_{js} - g_{ih} \partial_s \Gamma^h_{jr} + \Gamma^k_{js} \Gamma_{ikr} - \Gamma^k_{jr} \Gamma_{iks} \\ &= \partial_r (g_{ih} \Gamma^h_{js}) - \Gamma^h_{js} \partial_r g_{ih} - \partial_s (g_{ih} \Gamma^h_{jr}) + \Gamma^h_{jr} \partial_s g_{ih} \\ &\quad + \Gamma^k_{js} \Gamma_{ikr} - \Gamma^k_{jr} \Gamma_{iks} \\ &= \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k_{js} (\Gamma_{ikr} - \partial_r g_{ik}) - \Gamma^k_{jr} (\Gamma_{iks} - \partial_s g_{ik}) \end{aligned}$$

Les relations (2.12) page 18 donnent

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij} & \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij} \\ \Gamma_{ijk} - \partial_k g_{ij} &= -\Gamma_{jik} & \Gamma_{ijk} - \partial_k g_{ij} &= -\Gamma_{jik} \\ \Gamma_{ikr} - \partial_r g_{ik} &= -\Gamma_{kir} & \Gamma_{iks} - \partial_s g_{ik} &= -\Gamma_{kis} \end{aligned} \quad \text{et}$$

si bien que l'on a la définition suivante :

Définition 5.4.2 : Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1^{re} espèce

Le tenseur d'ordre quatre

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} - \Gamma^k_{js} \Gamma_{kir} + \Gamma^k_{jr} \Gamma_{kis}$$

de composantes quatre fois covariantes, est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1^{re} espèce de l'espace riemannien R_n .

En dérivant (2.13) page 19,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk}) & \Gamma_{ijk} &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk}) \\ \Gamma_{ijs} &= \frac{1}{2} (\partial_s g_{ij} + \partial_j g_{si} - \partial_i g_{js}) & \Gamma_{ijr} &= \frac{1}{2} (\partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ri} - \partial_i g_{jr}) \\ \partial_r \Gamma_{ijs} &= \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js}) & \partial_s \Gamma_{ijr} &= \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{js} g_{ir} - \partial_{is} g_{jr}) \end{aligned} \quad \text{et}$$

le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1^{re} espèce s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js}) - \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{js} g_{ir} - \partial_{is} g_{jr}) \\ &\quad - \Gamma^k_{js} \Gamma_{kir} + \Gamma^k_{jr} \Gamma_{kis} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} (\partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js} - \partial_{js} g_{ir} + \partial_{is} g_{jr}) - \Gamma^k_{js} \Gamma_{kir} + \Gamma^k_{jr} \Gamma_{kis} \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.4.6 Système de coordonnées localement géodésiques

En tout point d'un espace riemannien passent une infinité de géodésiques, une par direction. Par exemple une infinité de droites passent par un point du plan ou de l'espace euclidien, une infinité de grands cercles passent par un point de la sphère.

En tout point d'un espace riemannien il est toujours possible de définir un *système de coordonnées localement géodésiques*. Ce système de coordonnées utilise les géodésiques passant par un point donné comme système de coordonnées pour les points du voisinage. On peut toujours choisir ce système de coordonnées de sorte qu'il soit orthonormal, on parle alors de *système de coordonnées géodésiques normal*, ou *système de coordonnées riemanniennes normal*.

L'ensemble des géodésiques passant par un point ne se croisent pas ailleurs qu'en ce point si l'on prend un voisinage suffisamment petit. Les coordonnées géodésiques sont donc utilisées la plupart du temps localement. Cela revient à se placer dans l'espace plat tangent à l'espace riemannien au point considéré, et à utiliser un système de coordonnées rectilignes.

L'emploi de ce système de coordonnées facilite les calculs car les propriétés (intrinsèques) des tenseurs démontrées dans ce système de coordonnées sont valides dans tous les autres systèmes de coordonnées. Nous montrons que dans les systèmes de coordonnées localement géodésiques, les dérivées des composantes du tenseur métrique sont nulles et par conséquent les symboles de Christoffel également. En ce point, la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle ordinaire.

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien R_n . Soit un point $M(a^1, \dots, a^n)$ de R_n et soit P un point suffisamment voisin de M pour que deux géodésiques passant par M ne passent pas par P . Considérons l'unique géodésique MP passant par M et P , d'équations paramétriques de paramètre l'abscisse curviligne s :

$$\forall i \quad x^i = x^i(s)$$

Prenons le point $M(a^i)$ pour origine de l'abscisse curviligne de cette géodésique :

$$\forall i \quad x^i(0) = a^i$$

Les coordonnées des points de cette géodésique se développent en série de puissance de s au voisinage de M :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x^i(s) = a^i + s \left(\frac{dx^i}{ds} \right)_M + \frac{1}{2} s^2 \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} \right)_M + \dots$$

Les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{u}(u^i)$ tangent à la géodésique MP au point M s'écrivent :

$$\forall i \quad u^i = \left(\frac{dx^i}{ds} \right)_M$$

Ce vecteur unitaire est dans l'hyperplan tangent à l'espace riemannien R_n .

Remarque 5.4.3

L'hyperplan en question est un espace pré-euclidien de même dimension n que l'espace riemannien, qui contient toutes les tangentes en M à toutes les courbes de R_n passant par M .

Les équations (1.2) page 4 d'une géodésique nous donnent l'expression de la dérivée seconde des coordonnées de la géodésique $x^i(s)$ par rapport à s au point M :

$$\forall i \quad \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} \right)_M = -\Gamma^i_{jk} \left(\frac{dx^j}{ds} \right)_M \left(\frac{dx^k}{ds} \right)_M$$

Si bien que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x^i = a^i + su^i - \frac{1}{2} s^2 (\Gamma^i_{jk})_M u^j u^k + \dots$$

Plaçons-nous dans le système de coordonnées $(x^{i'})$ de centre M en effectuant la transformation de coordonnées (ou en posant $a^i = 0 \forall i$)

$$\forall i \quad x^{i'} = x^i - a^i$$

Alors

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x^{i'} = su^i - \frac{1}{2} s^2 (\Gamma^i_{jk})_M u^j u^k + \dots$$

Définition 5.4.3 : Coordonnées localement géodésiques

Les coordonnées localement géodésiques y^i d'un point quelconque P suffisamment proche de $M(a^i = 0)$ sont définies par :

$$\forall i \quad y^i \stackrel{\text{déf}}{=} su^i \quad (5.23)$$

où s est la distance de M à P le long de la géodésique.

Les coordonnées localement géodésiques ne conservent que la partie linéaire en s des coordonnées curvilignes en prenant les tangentes aux géodésiques, et reviennent à effectuer la transformation de coordonnées :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad y^i = x^{i'} + \frac{1}{2} s^2 (\Gamma^i_{jk})_M u^j u^k$$

On a supprimé localement au point M la courbure du système de coordonnées géodésique $(x^{i'})$. Les termes de courbure d'ordre supérieur sont négligés.

Remarque 5.4.4

Parmi l'infinité de géodésiques passant par le point M de l'espace riemannien R_n , nous pouvons en choisir n dont les tangentes en M sont perpendiculaires entre elles, et construire ainsi un système de coordonnées géodésiques normal.

Théorème 5.4.2

Au point origine M des coordonnées localement géodésiques, les symboles de Christoffel de 1^{re} et de 2^e espèce sont nuls, ainsi que les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique.

Démonstration. Pour un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de direction fixée et d'origine M , la dérivée de (5.23) donne :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{dy^i}{ds} &= u^i \\ \forall i \quad \frac{d^2 y^i}{ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

Les équations différentielles (1.2) page 4 d'une géodésique donnent :

$$\forall i \quad \left(\frac{d^2 y^i}{ds^2} \right)_M + (\Gamma^i_{jk})_M \left(\frac{dy^j}{ds} \right)_M \left(\frac{dy^k}{ds} \right)_M = 0$$

$$(\Gamma^i_{jk})_M u^j u^k = 0$$

Les symboles de Christoffel étant symétriques par rapport aux indices inférieurs, ils ne peuvent s'annuler par soustraction. Par exemple pour k et j variant de 1 à 2 :

$$\begin{aligned} (\Gamma^i_{11})_M u^1 u^1 + (\Gamma^i_{12})_M u^1 u^2 + (\Gamma^i_{21})_M u^2 u^1 + (\Gamma^i_{22})_M u^2 u^2 &= 0 \\ (\Gamma^i_{11})_M u^1 u^1 + [(\Gamma^i_{12})_M + (\Gamma^i_{21})_M] u^1 u^2 + (\Gamma^i_{22})_M u^2 u^2 &= 0 \\ (\Gamma^i_{11})_M u^1 u^1 + 2(\Gamma^i_{12})_M u^1 u^2 + (\Gamma^i_{22})_M u^2 u^2 &= 0 \\ \Rightarrow (\Gamma^i_{11})_M = (\Gamma^i_{12})_M = (\Gamma^i_{22})_M &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, dans le système de coordonnées localement géodésiques de centre M :

$$\forall i, j, k \quad (\Gamma^i_{jk})_M = 0$$

Les relations (2.5) page 16 donnent les symboles de Christoffel de 1^{re} espèce :

$$\forall i, j, k \quad (\Gamma_{ijk})_M = g_{ih} (\Gamma^h_{jk})_M = 0$$

Les relations (2.12) page 18 donnent les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique :

$$\forall i, j, k \quad (\partial_k g_{ij})_M = (\Gamma_{ijk})_M + (\Gamma_{jik})_M = 0 \quad \square$$

D'après (5.10) page 61, le champ gravitationnel de la physique non relativiste devient la courbure de l'espace-temps en relativité générale. En un point arbitraire de l'espace-temps, le système de coordonnées localement géodésiques permet d'éliminer localement autour de ce point la courbure de l'espace-temps, donc le champ gravitationnel. En physique non relativiste, l'égalité observée entre masse grave et masse inerte entraîne l'égalité locale entre forces d'inertie et force de gravitation : observation d'une équivalence locale entre ces deux forces. Le choix toujours possible d'un système de coordonnées localement géodésiques est l'expression du principe d'équivalence (entre masse grave et masse inerte, ou entre force d'inertie et force de gravitation) en relativité générale. En physique relativiste et non relativiste les systèmes de coordonnées localement géodésiques sont appelés système de référence *localement inertielle* et système de coordonnées *galiléennes*.

5.4.7 Propriétés du tenseur de courbure

À partir des relations (5.22) page 76, dans le système de coordonnées localement géodésiques le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1^{re} espèce s'écrit :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js} - \partial_{js} g_{ir} + \partial_{is} g_{jr})$$

où les g_{ij} sont les coefficients de l'élément linéaire en coordonnées localement géodésiques.

Remarque 5.4.5

Cette dernière relation n'est valable qu'en coordonnées géodésiques, par exemple en coordonnées cartésiennes dans le plan mais pas en coordonnées polaires dans le plan. De plus elle n'est valable qu'en un point, au centre du système de coordonnées géodésiques. En revanche, les propriétés de symétrie du tenseur de courbure sont valables dans tous les systèmes de coordonnées.

5.4.7.1 Antisymétries et symétrie par blocs

— antisymétrie par rapport aux deux premiers indices :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{jirs} = \frac{1}{2} (\partial_{ir} g_{js} - \partial_{jr} g_{is} - \partial_{is} g_{jr} + \partial_{js} g_{ir})$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{jirs} = -R_{ijrs}}$$

— antisymétrie par rapport aux deux derniers indices :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{js} g_{ir} - \partial_{is} g_{jr} - \partial_{jr} g_{is} + \partial_{ir} g_{js})$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} = -R_{ijrs}}$$

— symétrique par blocs des deux premiers et des deux derniers indices :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{rsij} = \frac{1}{2} (\partial_{is} g_{jr} - \partial_{js} g_{ir} - \partial_{ir} g_{js} + \partial_{jr} g_{is})$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{rsij} = R_{ijrs}}$$

5.4.7.2 Premières identités de Bianchi

Le tenseur de courbure est cyclique. Par permutation circulaire sur les indices j, r, s puis addition, nous obtenons les premières identités de Bianchi :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} = \frac{1}{2} (\partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js} - \partial_{js} g_{ir} + \partial_{is} g_{jr})$$

$$\forall i, j, r, s \quad R_{irsj} = \frac{1}{2} (\partial_{rs} g_{ij} - \partial_{is} g_{rj} - \partial_{rj} g_{is} + \partial_{ij} g_{rs})$$

$$\forall i, j, r, s \quad R_{isjr} = \frac{1}{2} (\partial_{sj} g_{ir} - \partial_{ij} g_{sr} - \partial_{sr} g_{ij} + \partial_{ir} g_{sj})$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} + R_{irsj} + R_{isjr} = 0} \quad (5.24)$$

5.4.7.3 Composantes indépendantes

Dans un espace à n dimensions, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel a n^4 composantes. À l'aide des propriétés précédentes, calculons le nombre de composantes indépendantes. Par composante indépendante on entend une composante non nulle qui ne soit pas l'opposée d'une autre composante déjà comptabilisée comme indépendante, et qui ne soit pas la somme de deux autres composantes indépendantes.

- 1) Composantes ayant quatre indices identiques, du type R_{aaaa} où a est la valeur prise par tous les indices i, j, r, s . L'antisymétrie par rapport aux indices i et j donne :

$$\begin{aligned} R_{aaaa} &= -R_{aaaa} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) Composantes ayant trois indices identiques :

$$\forall a \neq b \quad R_{aaab}, R_{aaba}, R_{abaa}, R_{baaa}$$

La symétrie par blocs et l'antisymétrie par rapport aux indices i, j et r, s donnent :

$$R_{aaab} = -R_{aaba} = -R_{baaa} = -R_{abaa} = -R_{aaab} = 0$$

3) Composantes ayant exactement deux fois deux indices identiques :

$$\forall a \neq b \quad R_{aabb}, R_{abab}, R_{baab}, R_{baba}, R_{bbaa}, R_{abba}$$

La condition $a \neq b$ est trop faible et l'on doit poser soit $a < b$ soit $a > b$ pour ne pas tout compter deux fois (si a prend l'ancienne valeur de b , et b l'ancienne valeur de a). Cette condition sert au dénombrement et n'a pas de rapport avec les propriétés de symétrie du tenseur de courbure. Plus simplement, supprimons les termes symétriques :

$$R_{aabb}, R_{abab}, R_{abba} \quad \text{avec} \quad a \neq b$$

La symétrie par blocs et l'antisymétrie par rapport aux indices i, j et r, s donnent :

$$\begin{aligned} R_{aabb} &= -R_{aabb} \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad R_{abab} = -R_{abba}$$

Donc un type de composantes nulles et deux types de composantes non indépendantes. Il ne reste plus qu'à dénombrer les composantes du type R_{abab} , ce qui revient à dénombrer ab . Dans un espace de dimension n , l'un des indices prend n valeurs et l'autre $n-1$ valeurs car il est différent du premier ($a \neq b$). Il s'agit de choisir deux nombres différents parmi n où l'ordre des nombres choisis n'intervient pas. Ceci est équivalent à tirer sans remise deux boules parmi n boules numérotées de 1 à n sans tenir compte de l'ordre. C'est une combinaison :

$$C_n^2 = n(n-1)/2$$

4) Composantes ayant exactement deux indices identiques (autrement dit exactement trois indices différents) sont de douze types

$$R_{aabc}, R_{aacb}, R_{bcba}, R_{cbba}, R_{abca}, R_{acba}, R_{babc}, R_{cabb}, R_{bacb}, R_{cabab}, R_{abbc}, R_{acbb}$$

avec $a \neq b$ et $a \neq c$ sinon on serait dans le cas (2)). Ici aussi la condition $b \neq c$ est trop faible et l'on doit poser $b < c$ (ou $b > c$) pour ne pas tout compter deux fois. En revanche, a étant présent deux fois, les valeurs de a et de b , et celles de a et de c peuvent s'échanger sans redonner la même composante. Ainsi les conditions $a \neq b$, $a \neq c$ et $b < c$ donnent les trois cas : $a < b < c$, $b < a < c$ et $b < c < a$. On peut aussi écrire que les composantes sont des six types suivants

$$\forall a \neq b, a \neq c, b \neq c \quad R_{aabc}, R_{bcaa}, R_{abca}, R_{baac}, R_{bacb}, R_{abac}$$

La symétrie par blocs donne :

$$R_{aabc} = R_{bcaa} = 0$$

L'antisymétrie et la symétrie par blocs donnent :

$$R_{abac} = -R_{abca} = R_{bacb} = -R_{baac}$$

Donc deux types de composantes nulles et quatre types de composantes non indépendantes. Reste à dénombrer les composantes du type R_{abac} . Par hypothèse $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, donc un indice prend n valeurs, l'autre prend $n-1$ valeurs et le dernier prend $n-2$ valeurs. On pose $c < b$ avec a quelconque, cela donne les trois cas $a < c < b$, $c < a < b$ et $c < b < a$, pour chaque cas C_n^3 combinaisons :

$$3C_n^3 = n(n-1)(n-2)/2$$

5) Les composantes ayant leurs quatre indices différents sont de 24 types :

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{abdc} = R_{badc} = -R_{bacd} = -R_{cdba} = R_{cdab} = -R_{dcab} = R_{dcba} \\ R_{acbd} &= -R_{acdb} = R_{cadb} = -R_{cabd} = -R_{bdca} = R_{bdac} = -R_{dbac} = R_{dbca} \\ R_{adbc} &= -R_{adcb} = R_{dacb} = -R_{dabc} = -R_{bcd a} = R_{bcad} = -R_{cbad} = R_{cbda} \end{aligned}$$

avec $a < b < c < d$ pour ne pas tout compter plusieurs fois. Nous avons trois ensembles de huit types de composantes non indépendantes. Les premières identités de Bianchi (5.24) page 80 montrent que le dernier ensemble dépend des deux premiers car

$$R_{abcd} + R_{acbd} = -R_{adbc}$$

Il reste deux ensembles de huit types de composantes non indépendantes. Nous dénombrons C_n^4 combinaisons pour les composantes de type R_{abcd} et autant pour celles de type R_{acbd} , soit :

$$2C_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$$

Au total, dans un espace de dimension n , le nombre de composantes non nulles et indépendantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} &= \frac{n(n-1)}{2} \left[1 + (n-2) \left(1 + \frac{n-3}{6} \right) \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \left[1 + \frac{(n-2)(n+3)}{6} \right] \\ &= (n^2 - n)(n^2 + n)/12 \\ &= n^2(n^2 - 1)/12 \end{aligned}$$

Exemple 5.4.2 : Tenseur de courbure d'un espace à une dimension

Dans un espace riemannien à une dimension le tenseur de courbure a $1^4 = 1$ composante, dont $1^2(1^2 - 1)/12 = 0$ indépendantes. Le tenseur de courbure d'une courbe est nul

$$R_{1111} = 0$$

car c'est bien la courbure intrinsèque qui est mesurée.

Exemple 5.4.3 : Tenseur de courbure d'un espace à deux dimensions

Dans un espace riemannien à deux dimensions le tenseur de courbure a $2^4 = 16$ composantes, dont $2^2(2^2 - 1)/12 = 1$ seule indépendante :

$$R_{1212} = -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112}$$

Les composantes ont deux fois deux indices identiques, et l'on a bien $2(2 - 1)/2 = 1$.

- en coordonnées cartésiennes du plan, autrement dit pour l'élément différentiel

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

le tenseur métrique est constant, tous les symboles de Christoffel sont nuls (§ 2.6 page 20). D'après la déf. 5.4.2 page 76 du tenseur de courbure de 1^{re} espèce, toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles, l'espace est plat.

- en coordonnées polaires appliquées au plan, l'élément différentiel (Cf. Vol. 1 Notion d'espace) s'écrit :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2$$

avec $x^1 = \rho$ et $x^2 = \theta$, où $g_{11} = 1$ et $g_{22} = (x^1)^2$. Calculons la valeur de la seule composante indépendante potentiellement non nulle grâce aux symboles de Christoffel non nuls donnés dans l'ex. 2.7.1 page 21 :

$$\begin{cases} \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = x^1 \\ \Gamma_{122} = -x^1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/x^1 \\ \Gamma^1_{22} = -x^1 \end{cases}$$

Avec la déf. 5.4.2 page 76 du tenseur de courbure de 1^{re} espèce :

$$\begin{aligned} \forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} &\stackrel{\text{déf}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k_{jr} \Gamma_{kis} - \Gamma^k_{js} \Gamma_{kir} \\ R_{1212} &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^k_{21} \Gamma_{k12} - \Gamma^k_{22} \Gamma_{k11} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^1_{21} \Gamma_{112} - \Gamma^1_{22} \Gamma_{111} + \Gamma^2_{21} \Gamma_{212} - \Gamma^2_{22} \Gamma_{211} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} + \Gamma^2_{21} \Gamma_{122} \\ &= -1 + x^1/x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est nul et l'espace est plat.

- en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , à la surface d'une sphère de rayon r . Calculons la valeur de la seule composante indépendante potentiellement non nulle grâce aux symboles de Christoffel non nuls donnés dans l'ex. 2.7.3 page 23 :

$$\begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\theta\phi\phi} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} = \cot(\theta) \\ \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Avec la déf. 5.4.2 page 76 du tenseur de courbure de 1^{re} espèce :

$$\begin{aligned} \forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} &\stackrel{\text{déf}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k_{jr} \Gamma_{kis} - \Gamma^k_{js} \Gamma_{kir} \\ R_{\theta\phi\phi\phi} &= \partial_{\theta} \Gamma_{\phi\phi\phi} - \partial_{\phi} \Gamma_{\theta\phi\phi} + \Gamma^k_{\phi\theta} \Gamma_{k\phi\phi} - \Gamma^k_{\phi\phi} \Gamma_{k\theta\theta} \\ &= \partial_{\theta} \Gamma_{\phi\phi\phi} - \partial_{\phi} \Gamma_{\theta\phi\phi} + \Gamma^{\theta}_{\phi\theta} \Gamma_{\theta\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} \Gamma_{\theta\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} \Gamma_{\phi\phi\phi} - \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} \Gamma_{\phi\theta\theta} \\ &= \partial_{\theta} \Gamma_{\phi\phi\phi} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} \Gamma_{\phi\phi\phi} \\ &= r^2 [\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)] + \cot(\theta) \times r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= r^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est non nul et l'espace est courbe.

Exemple 5.4.4 : Tenseur de courbure d'un espace à trois dimensions

Dans un espace riemannien à trois dimensions le tenseur de courbure a $3^4 = 81$ composantes, dont $3^2(3^2 - 1)/12 = 6$ indépendantes.

$3(3 - 1)/2 = 3$ composantes ayant deux fois deux indices identiques :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112} \\ R_{1313} &= -R_{1331} = R_{3131} = -R_{3113} \\ R_{2323} &= -R_{2332} = R_{3232} = -R_{3223} \end{aligned}$$

$3(3 - 1)(3 - 2)/2 = 3$ composantes ayant exactement deux indices identiques :

$$\begin{aligned} R_{1213} &= -R_{1231} = R_{2131} = -R_{2113} = -R_{1321} = R_{1312} = -R_{3112} = R_{3121} \\ R_{2123} &= -R_{2132} = R_{1232} = -R_{1223} = -R_{2312} = R_{2321} = -R_{3221} = R_{3212} \\ R_{3132} &= -R_{3123} = R_{1323} = -R_{1332} = -R_{3213} = R_{3231} = -R_{2331} = R_{2313} \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques dans l'espace euclidien, autrement dit pour l'élément différentiel (Cf. Vol. 1 Notion d'espace)

$$ds^2 = d(x^1)^2 + (x^1 dx^2)^2 + (x^1 \sin x^2)^2 (dx^3)^2$$

avec $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$ et $x^3 = \phi$, d'après l'ex. 2.7.2 page 22 les symboles de Christoffel non nuls sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} = x^1 \\ \Gamma_{331} = \Gamma_{313} = x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ \Gamma_{122} = -x^1 \\ \Gamma_{133} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{233} = -(x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 1/x^1 \\ \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = 1/x^1 \\ \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot x^2 \\ \Gamma^1_{22} = -x^1 \\ \Gamma^1_{33} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma^2_{33} = -\sin x^2 \cos x^2 \end{array} \right.$$

Avec la déf. 5.4.2 page 76 du tenseur de courbure de 1^{re} espèce :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^1_{21} \Gamma_{112} - \Gamma^1_{22} \Gamma_{111} + \Gamma^2_{21} \Gamma_{212} - \Gamma^2_{22} \Gamma_{211} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} + \Gamma^2_{21} \Gamma_{212} = -1 + x^1/x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1313} &= \partial_1 \Gamma_{133} - \partial_3 \Gamma_{131} + \Gamma^1_{31} \Gamma_{113} - \Gamma^1_{33} \Gamma_{111} + \Gamma^3_{31} \Gamma_{313} - \Gamma^3_{33} \Gamma_{311} \\ &= \partial_1 \Gamma_{133} + \Gamma^3_{31} \Gamma_{313} = -\sin^2 x^2 + x^1 \sin^2 x^2/x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2323} &= \partial_2 \Gamma_{233} - \partial_3 \Gamma_{232} + \Gamma^2_{32} \Gamma_{223} - \Gamma^2_{33} \Gamma_{222} + \Gamma^3_{32} \Gamma_{323} - \Gamma^3_{33} \Gamma_{322} \\ &= \partial_2 \Gamma_{233} + \Gamma^3_{32} \Gamma_{323} = -(x^1)^2 \cos^2 x^2 + \cot x^2 (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ijrs} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k_{jr} \Gamma_{kis} - \Gamma^k_{js} \Gamma_{kir}$$

$$\begin{aligned}
 R_{1213} &= \partial_1 \Gamma_{123} - \partial_3 \Gamma_{121} + \Gamma_{21}^k \Gamma_{k13} - \Gamma_{23}^k \Gamma_{k11} \\
 &= \partial_1 \Gamma_{123} - \partial_3 \Gamma_{121} + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{113} - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{111} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{213} - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{211} \\
 &\quad + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{313} - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{311} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{2123} &= \partial_2 \Gamma_{213} - \partial_3 \Gamma_{212} + \Gamma_{12}^k \Gamma_{k23} - \Gamma_{13}^k \Gamma_{k22} \\
 &= \partial_2 \Gamma_{213} - \partial_3 \Gamma_{212} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{123} - \Gamma_{13}^1 \Gamma_{122} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{223} - \Gamma_{13}^2 \Gamma_{222} \\
 &\quad + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{323} - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{322} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{3132} &= \partial_3 \Gamma_{312} - \partial_2 \Gamma_{313} + \Gamma_{13}^k \Gamma_{k32} - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k33} \\
 &= \partial_3 \Gamma_{312} - \partial_2 \Gamma_{313} + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{132} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{133} + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{232} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{233} \\
 &\quad + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{332} - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{333} \\
 &= -\partial_2 \Gamma_{313} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{233} + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{332} \\
 &= -2x^1 \sin x^2 \cos x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est nul et l'espace est plat.

Exemple 5.4.5 : Tenseur de courbure d'un espace à quatre dimensions

Dans un espace riemannien à quatre dimensions le tenseur de courbure a $4^4 = 256$ composantes, dont $4^2(4^2 - 1)/12 = 20$ indépendantes.

$4(4 - 1)/2 = 6$ composantes ayant deux fois deux indices identiques :

$$\begin{aligned}
 R_{1212} &= -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112} \\
 R_{1313} &= -R_{1331} = R_{3131} = -R_{3113} \\
 R_{1414} &= -R_{1441} = R_{4141} = -R_{4114} \\
 R_{2323} &= -R_{2332} = R_{3232} = -R_{3223} \\
 R_{2424} &= -R_{2442} = R_{4242} = -R_{4224} \\
 R_{3434} &= -R_{3443} = R_{4343} = -R_{4334}
 \end{aligned}$$

$4(4-1)(4-2)/2 = 12$ composantes ayant exactement deux indices identiques :

$$\begin{aligned}
 R_{1213} &= -R_{1231} = R_{2131} = -R_{2113} = -R_{1321} = R_{1312} = -R_{3112} = R_{3121} \\
 R_{1214} &= -R_{1241} = R_{2141} = -R_{2114} = -R_{1421} = R_{1412} = -R_{4112} = R_{4121} \\
 R_{1314} &= -R_{1341} = R_{3141} = -R_{3114} = -R_{1431} = R_{1413} = -R_{4113} = R_{4131} \\
 R_{2123} &= -R_{2132} = R_{1232} = -R_{1223} = -R_{2312} = R_{2321} = -R_{3221} = R_{3212} \\
 R_{2124} &= -R_{2142} = R_{1242} = -R_{1224} = -R_{2412} = R_{2421} = -R_{4221} = R_{4212} \\
 R_{2324} &= -R_{2342} = R_{3242} = -R_{3224} = -R_{2432} = R_{2423} = -R_{4223} = R_{4232} \\
 R_{3132} &= -R_{3123} = R_{1323} = -R_{1332} = -R_{3213} = R_{3231} = -R_{2331} = R_{2313} \\
 R_{3134} &= -R_{3143} = R_{1343} = -R_{1334} = -R_{3413} = R_{3431} = -R_{4331} = R_{4313} \\
 R_{3234} &= -R_{3243} = R_{2343} = -R_{2334} = -R_{3423} = R_{3432} = -R_{4332} = R_{4332} \\
 R_{4142} &= -R_{4124} = R_{1424} = -R_{1442} = -R_{4214} = R_{4241} = -R_{2441} = R_{2414} \\
 R_{4143} &= -R_{4134} = R_{1434} = -R_{1443} = -R_{4314} = R_{4341} = -R_{3441} = R_{3414} \\
 R_{4243} &= -R_{4234} = R_{2434} = -R_{2443} = -R_{4324} = R_{4342} = -R_{3442} = R_{3424}
 \end{aligned}$$

$4(4-1)(4-2)(4-3)/12 = 2$ composantes ayant quatre indices différents :

$$\begin{aligned}
 R_{1234} &= -R_{1243} = R_{2143} = -R_{2134} = -R_{3421} = R_{3412} = -R_{4312} = R_{4321} \\
 R_{1324} &= -R_{1342} = R_{3142} = -R_{3124} = -R_{2431} = R_{2413} = -R_{4213} = R_{4231}
 \end{aligned}$$

5.4.8 Dérivées covariantes secondes d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs de composantes contravariantes v^h , cherchons la différence entre $\nabla_r(\nabla_s v^h)$ et $\nabla_s(\nabla_r v^h)$. Reprenons (3.10) page 38 :

$\forall h, r, s$

$$\begin{aligned}
 \nabla_r(\nabla_s v^h) &= \partial_{rs} v^h + v^i \partial_r \Gamma_{is}^h + \Gamma_{is}^h \partial_r v^i - \Gamma_{sr}^k \partial_k v^h - v^i \Gamma_{ik}^h \Gamma_{sr}^k + \Gamma_{kr}^h \partial_s v^k + v^i \Gamma_{is}^k \Gamma_{kr}^h \\
 \nabla_s(\nabla_r v^h) &= \partial_{sr} v^h + v^i \partial_s \Gamma_{ir}^h + \Gamma_{ir}^h \partial_s v^i - \Gamma_{rs}^k \partial_k v^h - v^i \Gamma_{ik}^h \Gamma_{rs}^k + \Gamma_{ks}^h \partial_r v^k + v^i \Gamma_{ir}^k \Gamma_{ks}^h
 \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
 \forall h, r, s \quad \nabla_r(\nabla_s v^h) - \nabla_s(\nabla_r v^h) &= v^i \partial_r \Gamma_{is}^h - v^i \partial_s \Gamma_{ir}^h + \Gamma_{is}^h \partial_r v^i - \Gamma_{ir}^h \partial_s v^i + \Gamma_{kr}^h \partial_s v^k - \Gamma_{ks}^h \partial_r v^k \\
 &\quad + v^i \Gamma_{is}^k \Gamma_{kr}^h - v^i \Gamma_{ir}^k \Gamma_{ks}^h \\
 &= v^i (\partial_r \Gamma_{is}^h - \partial_s \Gamma_{ir}^h) + \Gamma_{is}^h \partial_r v^i - \Gamma_{ir}^h \partial_s v^i + \Gamma_{kr}^h \partial_s v^k - \Gamma_{ks}^h \partial_r v^k \\
 &\quad + v^i (\Gamma_{is}^k \Gamma_{kr}^h - \Gamma_{ir}^k \Gamma_{ks}^h)
 \end{aligned}$$

On en déduit qu'en un point M :

$$\forall h, r, s \quad \nabla_r(\nabla_s v^h) - \nabla_s(\nabla_r v^h) = v^i (\partial_r \Gamma_{is}^h - \partial_s \Gamma_{ir}^h + \Gamma_{is}^k \Gamma_{kr}^h - \Gamma_{ir}^k \Gamma_{ks}^h)$$

On reconnaît la déf. 5.4.1 page 75 du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2^{de} espèce :

$$\forall h, r, s \quad \nabla_r(\nabla_s v^h) - \nabla_s(\nabla_r v^h) = v^i R_{irs}^h$$

Dans un espace courbe, les dérivées covariantes secondes d'un vecteur, et plus généralement d'un tenseur, dépendent de l'ordre des dérivations (ce qui n'a pas lieu pour les dérivées ordinaires).

5.4.9 Tenseur de courbure de Ricci

Nous verrons au § 7.8 page 133 que pour établir les équations de la relativité générale nous devons trouver un tenseur chronogéométrique (lié uniquement à la courbure de l'espace-temps) symétrique d'ordre deux.

Effectuons toutes les contractions possibles des composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. En utilisant les symétries du tenseur de courbure du § 5.4.7 page 79 :

$$R_{ijrs} = -R_{jirs} = R_{jisr} = -R_{ijsr} = R_{rsij} = -R_{srij} = R_{srji} = R_{rsji}$$

$$\begin{aligned} g^{ij}R_{ijrs} &= -g^{ij}R_{jirs} = g^{ij}R_{jisr} = -g^{ij}R_{ijsr} = g^{ij}R_{rsij} = -g^{ij}R_{srij} = g^{ij}R_{srji} = g^{ij}R_{rsji} \\ R^i_{irs} &= -R^i_{irs} = R^i_{isr} = -R^i_{isr} \\ R_{rs} &= -R_{rs} = R_{sr} = -R_{sr} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{rs}R_{ijrs} &= g^{ij}R_{rsij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{ir}R_{ijrs} &= -g^{ir}R_{jirs} = g^{ir}R_{jisr} = -g^{ir}R_{ijsr} = g^{ir}R_{rsij} = -g^{ir}R_{srij} = g^{ir}R_{srji} = g^{ir}R_{rsji} \\ R_{js} &= -R_{js} = R_{sj} = -R_{sj} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{js}R_{ijrs} &= g^{ir}R_{jisr} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{is}R_{ijrs} &= -g^{is}R_{jirs} = g^{is}R_{jisr} = -g^{is}R_{ijsr} = g^{is}R_{rsij} = -g^{is}R_{srij} = g^{is}R_{srji} = g^{is}R_{rsji} \\ R_{jr} &= R_{rj} \\ g^{jr}R_{ijrs} &= g^{is}R_{jisr} \\ R^r_{irs} &= R^s_{jsr} \\ R_{is} &= R_{jr} \end{aligned}$$

Par contraction des composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, nous ne pouvons donc former qu'un seul tenseur, le tenseur symétrique d'ordre deux R_{is} , qui s'écrit également R_{jr} .

Définition 5.4.4 : Tenseur de courbure de Ricci

Le tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned} \forall i, s \quad R_{is} &\stackrel{\text{déf}}{=} g^{jr}R_{ijrs} \\ &= R^r_{irs} \\ &= \partial_r \Gamma^r_{si} - \partial_s \Gamma^r_{ri} + \Gamma^k_{si} \Gamma^r_{rk} - \Gamma^k_{ri} \Gamma^r_{sk} \end{aligned}$$

est appelé tenseur de courbure de Ricci de l'espace riemannien.

Montrons que ce tenseur est symétrique en montrant que chacun de ses termes est symétrique :

$$\begin{aligned}\partial_r \Gamma_{si}^r &= \partial_r \Gamma_{is}^r \\ \Gamma_{si}^k \Gamma_{rk}^r &= \Gamma_{is}^k \Gamma_{rk}^r \\ \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^r &= \Gamma_{rs}^k \Gamma_{ik}^r\end{aligned}$$

À partir des relations (2.16) page 19 :

$$\begin{aligned}\partial_s \Gamma_{ri}^r &= \partial_s \left(\frac{1}{2g} \partial_i g \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_s (\partial_i \ln |g|) \\ &= \frac{1}{2} \partial_i (\partial_s \ln |g|) \\ &= \partial_i \Gamma_{rs}^r\end{aligned}$$

Exemple 5.4.6 : Tenseur de Ricci dans les espaces pré-euclidiens

D'après le § 2.6 page 20, dans les espaces pré-euclidiens les symboles de Christoffel sont nuls. Par conséquent le tenseur de Ricci est également nul. Par exemple dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte :

$$\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} = 0$$

Exemple 5.4.7 : Tenseur de Ricci d'une sphère

En se servant de l'ex. 2.7.3 page 23 :

$$\begin{aligned}R_{\theta\theta} &= \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^k \Gamma_{rk}^r - \Gamma_{r\theta}^k \Gamma_{\theta k}^r \\ &= -\partial_\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi \\ &= 1 + \cot^2(\theta) - \cot^2(\theta) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{\phi\phi} &= \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r - \partial_\phi \Gamma_{r\phi}^r + \Gamma_{\phi\phi}^k \Gamma_{rk}^r - \Gamma_{r\phi}^k \Gamma_{\phi k}^r \\ &= \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{r\theta}^r - \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{r\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^r \\ &= \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\theta (\Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\phi) - \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi - \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\theta - \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi \\ &= \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi - \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi \\ &= \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta \\ &= \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) \\ &= \sin^2(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\phi} &= \partial_r \Gamma^r_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^r_{r\phi} + \Gamma^k_{\theta\phi} \Gamma^r_{rk} - \Gamma^k_{r\phi} \Gamma^r_{\theta k} \\
 &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\phi} + \Gamma^\phi_{\theta\phi} \Gamma^r_{r\phi} - \Gamma^\phi_{r\phi} \Gamma^r_{\theta\phi} \\
 &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\phi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

5.4.10 Courbure riemannienne scalaire

La contraction des composantes du tenseur de courbure de Ricci (déf. 5.4.4 page 87), donne un invariant, le seul possible :

Définition 5.4.5 : Courbure de Ricci

Le scalaire

$$\begin{aligned}
 R &\stackrel{\text{déf}}{=} g^{is} g^{jr} R_{ijrs} \\
 &= g^{is} R^r_{i\ rs} \\
 &= g^{is} R_{is} \\
 &= R^i_i
 \end{aligned}$$

est appelé courbure de Ricci ou courbure riemannienne scalaire de l'espace.

Dans un espace riemannien à n dimensions :

$$R^i_i = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + \dots + R^n_n$$

Réciproquement, dans un espace à n dimensions $g^{ik} g_{ki} = n$ (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$\begin{aligned}
 g_{ij} g^{ij} R_{ij} &= g_{ij} R \\
 R_{ij} &= \frac{1}{n} g_{ij} R
 \end{aligned}$$

Exemple 5.4.8 : Courbure de Ricci d'un espace de dimension 2

Dans un espace riemannien de dimension deux, d'après l'ex. 5.4.3 page 82, les seules composantes du tenseur de Riemann-Christoffel non nulles sont les suivantes :

$$R_{12,12} = -R_{12,21} = R_{21,21} = -R_{21,12}$$

Avec le déterminant du tenseur métrique dual (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), par définition la courbure de Ricci a pour expression :

$$\begin{aligned}
 R &= g^{is} R_{is} \\
 &= g^{12} g^{21} R_{12,12} + g^{21} g^{12} R_{21,21} + g^{11} g^{22} R_{12,21} + g^{22} g^{11} R_{21,12} \\
 &= (g^{12} g^{21} + g^{21} g^{12} - g^{11} g^{22} - g^{22} g^{11}) R_{12,12} \\
 &= 2(g^{11} g^{22} - g^{12} g^{21}) R_{12,12} \\
 &= -2g^{-1} R_{12,12}
 \end{aligned}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} R_{12,12} &= -\frac{1}{2}gR \\ &= -\frac{1}{2}R(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \end{aligned}$$

Exemple 5.4.9 : Courbure de Ricci d'une sphère

En utilisant l'inverse du tenseur métrique (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) et l'ex. 5.4.7 page 88, la courbure de Ricci d'une sphère de rayon r s'écrit :

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}R_{ij} \\ &= g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \sin^2(\theta) \\ &= \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

5.4.11 Deuxièmes identités de Bianchi

Nous pouvons obtenir de nouvelles identités par dérivation du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Adoptons un système de coordonnées localement géodésiques en un point M de R_n , les symboles de Christoffel sont alors nuls et la déf. 5.4.1 page 75 du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel s'écrit :

$$\forall h, i, r, s \quad R^h_{irs} = \partial_r \Gamma^h_{si} - \partial_s \Gamma^h_{ri}$$

Dans le système de coordonnées localement géodésiques, les symboles de Christoffel étant nuls, la déf. 3.4.1 page 31 de la dérivation covariante se réduit à la dérivation partielle ordinaire :

$$\begin{aligned} \forall h, i, r, s, t \quad \nabla_t R^h_{irs} &= \partial_t R^h_{irs} \\ &= \partial_{tr} \Gamma^h_{si} - \partial_{ts} \Gamma^h_{ri} \end{aligned}$$

Par permutation circulaire sur les indices r, s, t , nous avons :

$$\begin{aligned} \forall h, i, r, s, t \quad \nabla_r R^h_{ist} &= \partial_{rs} \Gamma^h_{ti} - \partial_{rt} \Gamma^h_{si} \\ \forall h, i, r, s, t \quad \nabla_s R^h_{itr} &= \partial_{st} \Gamma^h_{ri} - \partial_{sr} \Gamma^h_{ti} \end{aligned}$$

Puis en additionnant les trois relations obtenues :

$$\forall h, i, r, s, t \quad \nabla_t R^h_{irs} + \nabla_r R^h_{ist} + \nabla_s R^h_{itr} = 0$$

La dérivée covariante d'un tenseur étant un tenseur, chacun des membres de l'identité est un tenseur et cette relation est donc une relation tensorielle. Par conséquent, les identités de Bianchi sont valables dans tout système de coordonnées, en tout point de R_n . L'abaissement de l'indice conduit aux expressions :

$$\forall h, i, r, s, t \quad \nabla_t R_{hirs} + \nabla_r R_{hist} + \nabla_s R_{hitr} = 0$$

5.4.12 Tenseur d'Einstein

Toujours au § 7.8 page 133, nous verrons que pour établir les équations de la relativité générale, la divergence du tenseur symétrique d'ordre deux que nous cherchons doit être nulle. En effet, ce tenseur qui représente la courbure de l'espace-temps doit être égale au tenseur impulsion-énergie qui est conservatif, donc de divergence nulle (théorème de divergence Cf. Vol. 2 Mécanique classique). Effectuons une double contraction des secondes identités de Bianchi :

1) Pour $t = h$:

$$\forall i, r, s \quad \nabla_h R^h_{irs} + \nabla_r R^h_{ish} + \nabla_s R^h_{ihr} = 0$$

La contraction doit avoir lieu sur le même indice (ici pour les deux derniers termes) :

$$\begin{aligned} \forall i, r, s \quad \nabla_h R^h_{irs} - \nabla_r R^h_{ih} + \nabla_s R^h_{ih} &= 0 \\ \nabla_h R^h_{irs} - \nabla_r R_{is} + \nabla_s R_{ir} &= 0 \\ \forall k, r, s \quad g^{ik} \nabla_h R^h_{irs} - g^{ik} \nabla_r R_{is} + g^{ik} \nabla_s R_{ir} &= 0 \end{aligned}$$

La dérivée covariante du tenseur métrique étant nulle, (3.8) page 37 :

$$\begin{aligned} \nabla_h (g^{ik} R^h_{irs}) - \nabla_r (g^{ik} R_{is}) + \nabla_s (g^{ik} R_{ir}) &= 0 \\ \nabla_h R^{hk}_{rs} - \nabla_r R^k_s + \nabla_s R^k_r &= 0 \end{aligned}$$

2) Puis pour $s = k$:

$$\begin{aligned} \forall r \quad \nabla_h R^{hk}_{rk} - \nabla_r R^k_k &= 0 + \nabla_k R^k_r \\ \nabla_h R^h_r + \nabla_k R^k_r - \nabla_r R &= 0 \\ 2\nabla_k R^k_r - \nabla_r R &= 0 \\ \nabla_k R^k_r - \frac{1}{2} \delta^k_r (\nabla_k R) &= 0 \\ \nabla_k R^k_r - \frac{1}{2} \nabla_k (\delta^k_r R) &= 0 \\ \nabla_k \left(R^k_r - \frac{1}{2} \delta^k_r R \right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Définition 5.4.6 : Tenseur d'Einstein

Le tenseur d'ordre deux

$$\forall k, r \quad S^k_r \stackrel{\text{déf}}{=} R^k_r - \frac{1}{2} \delta^k_r R$$

est appelé tenseur d'Einstein.

Par symétrie du tenseur de courbure de Ricci, ce tenseur est symétrique. (5.25) de la présente page exprime que la divergence du tenseur d'Einstein est nulle ((4.1) page 41). Les composantes covariantes de ce tenseur s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall k, r \quad g_{ik} S^i_r &= g_{ik} R^i_r - \frac{1}{2} g_{ik} \delta^i_r R \\ S_{kr} &= R_{kr} - \frac{1}{2} g_{kr} R \end{aligned} \tag{5.26}$$

Chapitre 6

DYNAMIQUE CLASSIQUE

Sommaire

6.1 Applications de la géométrie riemannienne	93
6.2 Systèmes holonomes à liaisons scléronomes	94
6.3 Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes	101
6.4 Dynamique classique des milieux continus	105
6.5 Dynamique relativiste des milieux continus	113
6.6 Forme tensorielle des équations du mouvement	115

6.1 Applications de la géométrie riemannienne

La géométrie riemannienne trouve une application importante dans les problèmes de mécanique. Soit un système dynamique se déplaçant dans l'espace ordinaire, euclidien à trois dimensions. Prenons le cas d'un pendule sphérique. La tige du pendule exerce une force sur la masse l'obligeant à se déplacer sur une sphère. Nous pouvons ignorer cette force et considérer directement que la masse se déplace sur une sphère, sans jamais la quitter. Nous savons que l'espace accessible à la masse du pendule simple est une sphère. Dans le cas général, pour trouver la forme de l'espace accessible, la force doit pouvoir être remplacée par une fonction des coordonnées, de la forme

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0$$

La liaison est alors dite *holonome*. Par exemple, pour le pendule sphérique en coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) :

$$\rho = c^{ste}$$

Dans le cas présent la liaison est aussi *scléronome*, c.-à-d. indépendante du temps. Grâce à cette relation, pour décrire le mouvement de la masse nous passons de :

- trois coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) , une force, un espace euclidien
- à :
- deux coordonnées (θ, ϕ) , aucune force, un espace courbe (la sphère)

Lorsque l'on utilise un nombre minimal de coordonnées pour décrire l'évolution du système, on parle de *coordonnées généralisées*. Ici ce sont deux angles, et l'espace riemannien correspondant est une surface (deux dimensions).

En l'absence de champ gravitationnel, la masse ne peut décrire que des grands cercles de la sphère, c.-à-d. des géodésiques de cet espace riemannien. De plus la masse se déplace à vitesse constante en norme.

Lorsqu'il existe une force dérivant d'une énergie potentielle, par exemple un champ gravitationnel, nous verrons qu'il existe quand même un espace riemannien dans lequel les trajectoires de la masse sont encore toutes des géodésiques.

Enfin, lorsque la longueur de la tige varie dans le temps, par exemple un moteur allonge ou raccourcit la tige, la liaison est dite holonome *rhéonome*. Nous pouvons encore supprimer la force, mais l'espace riemannien évolue dans le temps. Le temps devient une nouvelle coordonnée, au même titre que les coordonnées spatiales, et nous considérons l'évolution du système dans un nouvel espace riemannien ayant une dimension supplémentaire. Dans le cas du pendule sphérique, l'espace riemannien a alors trois coordonnées, (θ, ϕ, t) .

6.2 Systèmes holonomes à liaisons scléronomes

Considérons un système dynamique S à n degrés de liberté, c.-à-d. un système à n coordonnées généralisées (q^i) . L'évolution temporelle de ce système est représentée par un point M se déplaçant dans un espace de dimension n ayant pour coordonnées les (q^i) , appelé *espace de configuration*. Cet espace de configuration est l'ensemble des configurations possibles du système, il constitue une variété différentielle à n dimensions, autrement dit un espace riemannien V_n . Lorsque les liaisons sont holonomes, parfaites et indépendantes du temps, l'espace de configuration n'évolue pas dans le temps : les composantes g_{ij} du tenseur métrique de l'espace de configuration ne sont pas des fonctions explicites du temps. Soit ds l'élément linéaire de l'espace de configuration :

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$$

où les indices latins varient de 1 à n , et où les g_{ij} sont fonction des q^i uniquement.

6.2.1 Cinématique

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour composantes contravariantes,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad v^i = \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$$

et pour composantes covariantes :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad v_i = g_{ij} v^j = g_{ij} \dot{q}^j = \dot{q}_i$$

Exprimons l'énergie cinétique en fonction de l'élément linéaire :

$$\begin{aligned}
 T &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} m v^2 \\
 &= \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\
 ds^2 &= \frac{2T}{m} dt^2
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Remarque 6.2.1

On peut toujours changer d'unité de masse et poser $m = 1$ pour avoir :

$$ds^2 = 2T dt^2$$

On peut également diviser l'unité de longueur des q^i par $\sqrt{m}$ et obtenir le même résultat.

Nous avons également :

$$\begin{aligned}
 T &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} m v^2 \\
 &= \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \\
 &= \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dérivons par rapport aux composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned}
 \forall i \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j) \\
 &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_i \sum_{j \neq i} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \sum_i \sum_{j=i} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \right) \\
 &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_i \sum_{j \neq i} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \right) + \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left(\sum_i g_{ii} \dot{q}^i \dot{q}^i \right) \\
 &= \frac{m}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} g_{ij} \dot{q}^j + m \sum_i g_{ii} \dot{q}^i \\
 &= m g_{ij} \dot{q}^j \\
 &= m v_i
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Or, les composantes de l'impulsion généralisée s'écrivent :

$$\forall i \quad p_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$$

où $\mathcal{L} = T - \mathcal{V}$ est le lagrangien. Lorsque l'énergie potentielle totale $\mathcal{V}$ ne dépend pas des vitesses généralisées :

$$\begin{aligned}
 \forall i \quad p_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \\
 &= m v_i
 \end{aligned}$$

Les composantes de l'impulsion généralisée ne sont autres que le produit de la masse par les composantes covariantes de la vitesse du point représentatif M dans l'espace riemannien V_n des configurations.

Pour l'accélération, servons-nous de la déf. 3.4 p. 32 du vecteur unitaire $\vec{u}$ tangent à la trajectoire $\mathcal{C}$ au point M :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= 1 \\ \frac{d}{ds} (\vec{u} \cdot \vec{u}) &= 0 \\ 2 \frac{d\vec{u}}{ds} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{d\vec{u}}{ds} \cdot \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

Le vecteur $d\vec{u}/ds$ est soit nul soit orthogonal à $\vec{u}$ partout sur la trajectoire $\mathcal{C}$. D'après (3.2) p. 29, il a pour composantes les dérivées absolues Du^i/ds . Il n'est pas unitaire, appelons ρ sa norme. On définit un vecteur unitaire $\vec{n}$ qui lui est colinéaire :

$$\forall i \quad \frac{Du^i}{ds} = \frac{n^i}{\rho}$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}(n^i)$, colinéaire au vecteur orthogonal à la tangente à $\mathcal{C}$, est appelé *vecteur de la normale principale* à $\mathcal{C}$. La dérivation absolue de la vitesse par rapport au temps donne l'accélération :

$$\begin{aligned}\forall i \quad a^i &= \frac{Dv^i}{dt} \\ &= \frac{D(vu^i)}{dt}\end{aligned}$$

Avec (3.1) p. 29 :

$$\begin{aligned}\forall i \quad a^i &= \frac{dv}{dt} u^i + v \frac{Du^i}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} u^i + \frac{v^2}{\rho} n^i\end{aligned} \tag{6.4}$$

Le vecteur accélération se décompose en une accélération tangentielle et une accélération normale. Le scalaire $\rho(s)$ appelé *rayon de courbure* de $\mathcal{C}$ au point considéré, a la dimension d'une longueur. ρ^{-1} est appelé *courbure* de $\mathcal{C}$ dans V_n au point considéré.

6.2.2 Les équations de la dynamique lagrangienne

En l'absence d'hypothèses sur le caractère conservatif ou non des forces généralisées Q_i s'exerçant sur le système, le mouvement du système est déterminé par les équations de Lagrange sous leur forme la plus générale :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i \tag{6.5}$$

Désignons par $Q_i \delta q^i$ le travail élémentaire des forces extérieures appliquées au système lors d'un déplacement virtuel arbitraire δq^i . C'est un scalaire qui ne dépend pas du système de coordonnées

dans lequel on l'exprime, car si c'était le cas le système gagnerait ou perdrait de l'énergie par changement de coordonnées. C'est donc un invariant par changement de coordonnées. Les δq^i étant les composantes contravariantes d'un vecteur, les Q_i sont les composantes covariantes du vecteur force généralisées de V_n . Servons-nous des relations (6.3) page 95 et (6.2) page 95 :

$$\forall i \quad \frac{d}{dt} (mg_{ij} \dot{q}^j) - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{1}{2} mg_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k \right) = Q_i \quad (6.6)$$

Le calcul suivant est identique à celui de la démonstration du th. 1.2.1 p. 4 :

$$\begin{aligned} \forall i \quad Q_i &= m \left(g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \frac{dg_{ij}}{dt} \dot{q}^j \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k \right) \\ &= m \left(g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} \dot{q}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k \right) \\ &= m \left(g_{ij} \ddot{q}^j + \partial_k g_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k \right) \\ &= m \left[g_{ij} \ddot{q}^j + \left(\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \right) \dot{q}^j \dot{q}^k \right] \end{aligned}$$

En remarquant que $\partial_k g_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k = \partial_j g_{ik} \dot{q}^j \dot{q}^k$ et avec (2.13) p. 19 donnant les symboles de Christoffel de première espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} \forall i \quad Q_i &= m \left[g_{ij} \ddot{q}^j + \left(\frac{1}{2} \partial_j g_{ki} + \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i g_{kj} \right) \dot{q}^k \dot{q}^j \right] \\ &= m \left[g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj}) \dot{q}^k \dot{q}^j \right] \\ &= m (g_{ih} \ddot{q}^h + \Gamma_{ijk} \dot{q}^k \dot{q}^j) \end{aligned}$$

Avec (3.6) p. 33 donnant les composantes du vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \forall i \quad Q_i &= mg_{ih} (\ddot{q}^h + \Gamma^h_{jk} \dot{q}^k \dot{q}^j) \\ &= mg_{ih} a^h \\ &= ma_i \end{aligned}$$

Ainsi les membres de gauche des équations de Lagrange (6.5) page ci-contre ne sont autres que les composantes covariantes du vecteur accélération de M dans l'espace riemannien de configuration. Les équations de Lagrange étendent la relation fondamentale de la dynamique aux espaces courbes. D'après (6.4) page précédente, on peut encore écrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\forall i \quad m \frac{dv}{dt} u_i + m \frac{v^2}{\rho} n^i = Q_i \quad (6.7)$$

Au cours du mouvement le vecteur force généralisée reste dans le plan défini par la tangente à la trajectoire et par la normale principale, nous dirons qu'il est *coplanaire* à celles-ci.

6.2.3 Absence de forces extérieures

En l'absence de forces extérieures exercées sur le système, c.-à-d. lorsque les Q_i sont nulles, l'énergie cinétique est constante puisqu'il n'y a pas d'énergie potentielle. Dans l'espace riemannien, le vecteur vitesse est donc constant et l'accélération nulle, le point M suit une géodésique de V_n :

$$\forall i \quad a_i = 0$$

$$m \frac{dv}{dt} u_i + m \frac{v^2}{\rho} n^i = 0$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ 1/\rho = 0 \end{cases}$$

La norme du vecteur vitesse est constante et la courbure est nulle dans l'espace riemannien. À partir des relations (6.6) page précédente nous avons également :

$$\forall i \quad \frac{d}{dt} (mg_{ij} \dot{q}^j) - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\frac{1}{2} mg_{kj} \dot{q}^k \dot{q}^j \right) = 0$$

$$\ddot{q}_i - \frac{1}{2} \partial_i g_{kj} \dot{q}^k \dot{q}^j = 0 \quad (6.8)$$

Ce sont les équations différentielles des coordonnées de la géodésique suivie par le système dans l'espace riemannien des configurations

6.2.4 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle

Supposons que le vecteur force généralisée dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps :

$$\forall i \quad Q_i = -\partial_i \mathcal{V}(q^i)$$

En prenant le produit scalaire de (6.7) page précédente par le vecteur vitesse,

$$v^i \left(m \frac{dv}{dt} u_i + m \frac{v^2}{\rho} n^i \right) = Q_i v^i$$

$$mv u^i \left(\frac{dv}{dt} u_i + \frac{v^2}{\rho} n^i \right) = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}$$

$$mv \frac{dv}{dt} = -\frac{d\mathcal{V}}{dt}$$

$$\int mv dv = - \int d\mathcal{V}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 + \mathcal{V} = c^{ste}$$

C'est l'équation de conservation dans le temps de l'énergie mécanique E d'un système conservatif (système dont les forces dérivent toutes d'un potentiel) :

$$E = T + \mathcal{V}$$

Cette équation donne l'expression de la vitesse d'un système conservatif :

$$v = \sqrt{2(E - \mathcal{V})}$$

À partir des relations (6.6) page 97, la loi du mouvement du système s'écrit :

$$\forall i \quad m \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{q}^j) - \frac{m}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^k \dot{q}^j = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^i} \quad (6.9)$$

Ce ne sont pas les équations des coordonnées d'une géodésique à cause du membre de droite non nul. Cependant, dans le § suivant nous montrons que nous pouvons quand même réduire le problème à la recherche d'une géodésique en faisant « disparaître » ce terme.

6.2.5 Recherche d'une géodésique

Déterminons la trajectoire fictive du point représentatif d'un système en présence d'une énergie potentielle, sous la forme d'une géodésique. Il s'agit de supprimer le terme $\partial \mathcal{V} / \partial q^i$ dans les équations différentielles (6.9) en changeant de paramètre et en changeant d'espace de configuration. Gardons l'hypothèse de conservation de l'énergie mécanique du § précédent (système conservatif).

- Dans la loi du mouvement, remplaçons le temps par une fonction à déterminer, $\theta(t)$, c.-à-d., effectuons un changement de paramètre de la trajectoire (Cf. Vol. 1 Notion d'espace). Les coordonnées sont maintenant des fonctions de la fonction $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \forall i \quad q^i &= q^i[\theta(t)] \\ \frac{dq^i[\theta(t)]}{dt} &= \frac{\partial q^i}{\partial \theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt} \\ \dot{q}^i &= \frac{dq^i}{d\theta} \dot{\theta} \end{aligned}$$

La loi horaire ne dépend plus explicitement du temps mais cela ne change pas la forme de la trajectoire suivie par le système :

$$\begin{aligned} \forall i \quad m \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left(g_{ij} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) - \frac{m}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dq^k}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^i} &= 0 \\ \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(g_{ij} \frac{dq^j}{d\theta} \dot{\theta} \right) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} + \frac{1}{m} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^i} &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

- Changeons d'espace de configuration en changeant de métrique mais pas de système de coordonnées (q^i) :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= F(q^i) ds^2 \\ &= F(q^i) g_{ij} dq^i dq^j \\ &= g'_{ij} dq^i dq^j \end{aligned}$$

Par la suite nous fixerons la nouvelle métrique par l'intermédiaire de la fonction inconnue $F(q^i)$ de sorte que la trajectoire soit une géodésique dans le nouvel espace de configuration. Cherchons

la composante covariante de la vitesse dans cette nouvelle métrique en utilisant la fonction $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}\forall i \quad q_i &= g'_{ij} q^j \\ &= F(q^i) g_{ij} q^j \\ \frac{dq_i}{d\theta} &= F(q^i) g_{ij} \frac{dq^j}{d\theta}\end{aligned}$$

Les équations différentielles d'une géodésique de ce nouvel espace de configuration sont données par (6.8) page 98 :

$$\begin{aligned}\forall i \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dq_i}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g'_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} \left(F g_{ij} \frac{dq^j}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q^i} g_{jk} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} &= 0\end{aligned} \quad (6.11)$$

Le paramètre $\theta(t)$ étant libre, prenons le égal à l'abscisse curviligne s' . Nous avons alors :

$$\begin{aligned}F g_{jk} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} &= F g_{jk} \frac{dq^j}{ds'} \frac{dq^k}{ds'} \\ &= \frac{ds'^2}{ds'^2} \\ g_{jk} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} &= \frac{1}{F}\end{aligned}$$

Par conséquent (en gardant θ plutôt que s') :

$$\begin{aligned}\forall i \quad \frac{d}{d\theta} \left(F g_{ij} \frac{dq^j}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} - \frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial q^i} &= 0 \\ F \frac{d}{d\theta} \left(F g_{ij} \frac{dq^j}{d\theta} \right) - \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{dq^j}{d\theta} \frac{dq^k}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q^i} &= 0\end{aligned}$$

Cette relation s'identifie avec la loi du mouvement du système (6.10) page précédente, si l'on prend :

$$F(q^i) = \dot{\theta} \quad \text{et} \quad F(q^i) = c^{ste} - 2V/m$$

Pour la constante, prenons le double de l'énergie mécanique divisée par la masse :

$$F(q^i) = \frac{2}{m} [E - \mathcal{V}(q^i)]$$

Dans cette relation, il vaut mieux ne pas remplacer $E - \mathcal{V}$ par T , car T est une fonction explicite des vitesses.

La trajectoire d'un système dynamique conservatif, pour une valeur donnée de son énergie mécanique, est donc une géodésique (relations (6.11)) de l'espace de configuration de métrique riemannienne :

$$\begin{aligned}ds'^2 &= F(q^i) g_{ij} dq^i dq^j \\ &= \frac{2}{m} [E - \mathcal{V}(q^i)] g_{ij} dq^i dq^j\end{aligned}$$

La loi horaire $s'(t)$ selon laquelle ces géodésiques sont décrites au cours du temps est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{2}{m} [E - \mathcal{V}(q^i)] \\ \theta(t) &= \frac{2}{m} \int [E - \mathcal{V}(q^i)] dt \\ s' &= \frac{2}{m} [E - \mathcal{V}(q^i)] t + \theta(t=0)\end{aligned}$$

6.3 Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes

Considérons un système dynamique à n degrés de liberté. Lorsque les liaisons sont holonomes, parfaites et dépendantes du temps, les configurations possibles pour le système dépendent de l'instant considéré. Nous sommes amenés à substituer à l'espace de configuration, un *espace-temps de configuration*, c.-à-d. une variété à $n + 1$ dimensions V_{n+1} , pour laquelle les q^i et le temps q^0 constituent un système de coordonnées. Le point représentatif du système dynamique se déplace en fonction du temps, sur une hypersurface qui se déforme dans le temps.

Remarque 6.3.1

Le passage à un système de coordonnées en mouvement est traité comme un cas particulier de liaisons holonomes dépendantes du temps. On utilise les mêmes formules mais le nombre de coordonnées ne change pas.

Soit ds l'élément linéaire de l'espace-temps de configuration,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$$

où les indices grecs varient de 0 à n , et où les $g_{\alpha\beta}$ sont fonction des q^λ .

Le vecteur vitesse a pour composantes contravariantes,

$$\forall \alpha = 0, \dots, n \quad v^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt} = \dot{q}^\alpha$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} & \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{q}^0 = 1 \end{cases} \quad (6.12)$$

Le vecteur vitesse a pour composantes covariantes :

$$\forall \alpha = 0, \dots, n \quad v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta = \dot{q}_\alpha$$

Exprimons l'énergie cinétique à partir de la vitesse et de l'élément linéaire :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\end{aligned}$$

Comme pour le cas scléronome :

$$ds^2 = \frac{2T}{m} dt^2$$

En dérivant l'énergie cinétique par rapport à la vitesse :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} (g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) \\ &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \sum_{\alpha} \sum_{\beta=\alpha} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right) \\ &= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right) + \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\sum_{\alpha} g_{\alpha\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\alpha \right) \\ &= \frac{m}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + m \sum_{\alpha} g_{\alpha\alpha} \dot{q}^\alpha \\ &= m g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \\ &= m v_\alpha \end{aligned}$$

Les n composantes p_i de l'impulsion généralisée sont donc encore égales aux produits de la masse avec les n composantes covariantes v_i de la vitesse. La dérivation absolue de la vitesse par rapport au temps donne l'accélération :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad a^\alpha &= \frac{Dv^\alpha}{dt} \\ &= \ddot{q}^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \end{aligned}$$

L'accélération a pour composantes covariantes :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad a_\alpha &= g_{\alpha\beta} \frac{Dv^\beta}{dt} \\ &= g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \end{aligned}$$

La composante temporelle s'écrit :

$$\begin{aligned} a_0 &= g_{0\beta} \ddot{q}^\beta + \Gamma_{0\gamma\beta} \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \\ &= g_{00} \ddot{q}^0 + g_{0i} \ddot{q}^i + \Gamma_{0ik} \dot{q}^i \dot{q}^k + \Gamma_{0i0} \dot{q}^i \dot{q}^0 + \Gamma_{00k} \dot{q}^0 \dot{q}^k + \Gamma_{000} \dot{q}^0 \dot{q}^0 \end{aligned}$$

Avec (6.12) page précédente,

$$\begin{aligned} \dot{q}^0 &= 1 \\ \ddot{q}^0 &= 0 \end{aligned}$$

nous avons

$$a_0 = g_{0i} \ddot{q}^i + \Gamma_{0ik} \dot{q}^i \dot{q}^k + \Gamma_{0i0} \dot{q}^i + \Gamma_{00k} \dot{q}^k + \Gamma_{000}$$

Avec (2.13) p. 19 donnant les symboles de Christoffel de première espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\begin{cases} \Gamma_{0i0} = \frac{1}{2} \partial_i g_{00} \\ \Gamma_{00k} = \frac{1}{2} \partial_k g_{00} \\ \Gamma_{000} = \frac{1}{2} \partial_0 g_{00} \end{cases} \Rightarrow a_0 = g_{0i} \ddot{q}^i + \Gamma_{0ik} \dot{q}^i \dot{q}^k + \partial_i g_{00} \dot{q}^i + \frac{1}{2} \partial_0 g_{00}$$

6.3.1 Les équations de la dynamique

Quel que soit le type de liaison, scléronome ou rhéonome, le mouvement du système est déterminé par les équations de Lagrange :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i$$

dans lesquelles l'énergie cinétique est maintenant fonction de $\dot{q}^0$. Cherchons l'équation différentielle pour l'indice 0. Effectuons le produit scalaire par $\dot{q}^i$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i - \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i &= Q_i \dot{q}^i \\ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i \right] - \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i &= Q_i \dot{q}^i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i \right) &= Q_i \dot{q}^i \end{aligned} \quad (6.13)$$

Réécrivons le premier terme du membre de gauche. L'énergie cinétique est une fonction homogène de degré deux des vitesses généralisées (si les variables, ici les vitesses généralisées, sont multipliées par un scalaire, le résultat est multiplié par ce scalaire au carré) :

$$\begin{aligned} T(\lambda \dot{q}^0, \dots, \lambda \dot{q}^n) &= \lambda^2 T(\dot{q}^0, \dots, \dot{q}^n) \\ dT(\lambda \dot{q}^\alpha) &= d[\lambda^2 T(\dot{q}^\alpha)] \\ \frac{\partial T}{\partial (\lambda \dot{q}^\alpha)} d(\lambda \dot{q}^\alpha) &= d(\lambda^2 T) \\ \frac{\partial T}{\partial (\lambda \dot{q}^\alpha)} \frac{d(\lambda \dot{q}^\alpha)}{d\lambda} &= \frac{d(\lambda^2 T)}{d\lambda} \\ \frac{\partial T}{\partial (\lambda \dot{q}^\alpha)} \dot{q}^\alpha &= 2\lambda T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \dot{q}^0 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i &= 2T \quad (\text{pour } \lambda = 1) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i &= 2T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) &= 2 \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \right) \end{aligned}$$

Réécrivons le second terme du membre de gauche :

$$\begin{aligned} dT(\dot{q}^i, \dot{q}^0, q^i, q^0) &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} d\dot{q}^0 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^0} dq^0 + \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^0} \dot{q}^0 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^0} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \end{aligned}$$

Injectons ces deux relations dans (6.13) page précédente :

$$\begin{aligned} 2 \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \right) - \left(\frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^0} \right) &= Q_i \dot{q}^i \\ \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \right) + \frac{\partial T}{\partial q^0} &= Q_i \dot{q}^i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^0} &= \frac{dT}{dt} - Q_i \dot{q}^i \end{aligned}$$

Cette relation remplace celle de conservation de l'énergie que nous avons pour le cas holonome scléronome. L'énergie mécanique ne se conserve plus car les liaisons, variables au cours du temps, effectuent des travaux que nous ne pouvons prévoir explicitement. Nous obtenons les mêmes équations que pour le cas holonome scléronome, ainsi qu'une équation pour la composante temporelle :

$$\begin{cases} ma_i = Q_i & \forall i \\ ma_0 = \frac{dT}{dt} - Q_i \dot{q}^i \end{cases} \quad (6.14)$$

Ces deux équations sont les équations du mouvement de M dans V_{n+1} . Si le mouvement du système a lieu sans forces extérieures exercées sur le système, les n composantes a_i sont nulles, mais a_0 est en général différent de zéro et les trajectoires du point M dans V_{n+1} ne s'interprètent pas géométriquement d'une manière simple.

6.3.2 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle généralisée

Supposons que toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle généralisée $\mathcal{U}(q^0, q^1, \dots, q^n)$ pouvant contenir explicitement le temps q^0 . Si l'on introduit le lagrangien

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{U}$$

les équations du mouvement du système deviennent :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0$$

La métrique de la variété V_{n+1} s'écrit :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \\ &= g_{ij} dq^i dq^j + 2 g_{i0} dq^i dq^0 + g_{00} dq^0 dq^0 \end{aligned}$$

Choisissons des vecteurs de base orthogonaux entre l'espace et le temps, $\forall i \ g_{i0} = 0$:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= g_{ij} dq^i dq^j + g_{00} (dq^0)^2 \\ &= ds^2 + g_{00} (dq^0)^2 \end{aligned}$$

Avec (6.1) page 95 et en faisant entrer la fonction U dans g_{00} :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{2T}{m} dt^2 + g_{00} (dq^0)^2 \\ &= \frac{2T}{m} dt^2 - \frac{2U}{m} dt^2 \\ &= \frac{2\mathcal{L}}{m} dt^2 \end{aligned}$$

Les formules (6.14) subsistent avec cette métrique à condition de remplacer les forces par leurs énergies potentielles, c.-à-d., remplacer T par $\mathcal{L}$ et les Q_i par zéro. Les équations du mouvement du point représentatif M dans l'espace V_{n+1} doué de la nouvelle métrique s'écrivent :

$$\begin{cases} a_i = 0 & \forall i \\ ma_0 = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \end{cases}$$

6.4 Dynamique classique des milieux continus

6.4.1 Milieux continus

D'un point de vue microscopique tout milieu est composé de particules. Cependant, en prenant un volume de matière suffisamment grand, nous pouvons nous placer d'un point de vue macroscopique et supposer le milieu continu. Cette approximation est valable pour les fluides en hydrodynamique et pour les solides en théorie de l'élasticité. On utilise donc les mathématiques du continu pour modéliser un milieu physique qui ne l'est pas. Rien de nouveau en cela, en physique l'espace et le temps sont aussi supposés continus, et en mécanique classique les échanges de matière, d'énergie et de quantité de mouvement ou de moment cinétique sont supposés continus.

En relativité, on utilise les milieux continus car la notion de solide n'existe pas, puisqu'elle suppose un déplacement simultané des différentes parties d'un solide soumis à une force de surface. En faisant vibrer ce solide on pourrait transmettre un signal avec une vitesse infinie, en désaccord avec l'existence d'une vitesse limite.

Plaçons-nous dans un référentiel inertiel et étudions l'évolution dans le temps et dans l'espace d'une caractéristique ϕ quelconque d'un milieu continu, sa masse volumique, sa température, sa pression, sa vitesse, son accélération...

Plusieurs points de vue sont possibles :

- du point de vue d'Euler on imagine un volume infinitésimal en un point fixe de notre référentiel, au travers duquel circule le milieu continu. La caractéristique ϕ du milieu continu dans le volume infinitésimal varie dans le temps mais pas dans l'espace
- du point de vue de Lagrange on choisit un volume infinitésimal de matière du milieu continu et l'on suit son évolution dans le temps et dans l'espace. Le volume infinitésimal de matière se déforme au cours du temps. La caractéristique ϕ du milieu continu dans le volume infinitésimal varie dans le temps et dans l'espace. En général la vitesse de l'élément de matière que l'on suit est fonction du temps
- il existe un troisième point de vue qui consiste à se placer dans le référentiel inertiel de repos instantané du volume infinitésimal de matière. Dans ce référentiel la vitesse du volume infinitésimal de matière du milieu continu est nulle, mais son accélération est en général non nulle. La caractéristique ϕ du volume infinitésimal varie dans le temps mais pas dans l'espace. C'est en fait un cas particulier du point de vue d'Euler, dans lequel le référentiel inertiel de l'observateur est choisi de façon à ce que la vitesse instantanée du milieu continu soit nulle.

6.4.2 Dérivée particulière

Rapportons l'espace à un système de coordonnées curvilignes quelconques (x^i). Prenons le point de vue de Lagrange, et soient $v^i(t)$ les composantes contravariantes de la vitesse du volume infinitésimal de matière du milieu continu par rapport à l'observateur inertiel :

$$\begin{aligned} d\phi[t, x^i(t)] &= \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i(t) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{dx^i(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + v^i(t) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v}(t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \end{aligned} \quad (6.15)$$

La dérivée particulière de ϕ nous dit qu'en chaque point du référentiel d'un observateur inertiel, la variation dans le temps de la caractéristique ϕ du milieu continu est due à sa variation locale (en un point fixe) dans le temps et à la vitesse relative $\vec{v}(t)$ de l'observateur par rapport au milieu continu, dans le gradient de ϕ .

6.4.3 Tenseur des contraintes

Pour étudier l'équilibre des forces dans un milieu continu, considérons le volume à face planes ayant le nombre minimal de faces, le tétraèdre. Nous choisissons un tétraèdre trirectangle (dont trois des quatre faces sont des triangles rectangles), régulier : $a = b = c$ sur la fig. 6.1 ci-dessous.

Rapportons l'espace à un système de coordonnées rectangulaire (x^1, x^2, x^3) et à son repère naturel orthonormé ($o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) dont le centre o est l'orthocentre du tétraèdre.

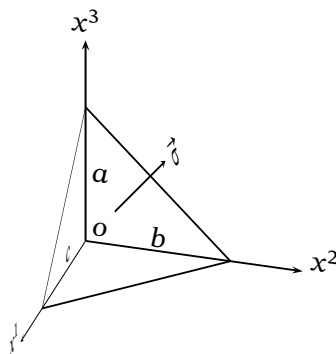


FIG. 6.1 – Tétraèdre trirectangle régulier

Soient $\vec{F}^1, \vec{F}^2, \vec{F}^3$ les forces extérieures s'exerçant respectivement sur les faces appartenant aux plans coordonnées $(x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_2)$. Ces forces mettent le tétraèdre en mouvement accéléré de rotation et de translation. Dans le cas statique, une quatrième force extérieure $\vec{F}$ exercée sur la base du tétraèdre (face « inclinée ») maintient le tétraèdre immobile :

$$\vec{F} + \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 = \vec{0}$$

Appelons s, s_1, s_2, s_3 à la fois les faces du tétraèdre et leurs surfaces correspondantes.

Remarque 6.4.1

Les projections de la base s sur les plans coordonnées $(x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_2)$ sont précisément les surfaces égales s_1, s_2, s_3 . Par symétrie, la base fait un angle de 45° avec les autres surfaces :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad s_i &= s \cos(45) \\ &= \frac{\sqrt{2}s}{2} \end{aligned}$$

Soient $\vec{f}, \vec{f}^1, \vec{f}^2, \vec{f}^3$ les vecteurs forces extérieures par unité de surface (elles sont homogènes à une pression) s'exerçant sur chaque faces du tétraèdre :

$$\begin{aligned} \vec{f}s + \vec{f}^1s_1 + \vec{f}^2s_2 + \vec{f}^3s_3 &= \vec{0} \\ \vec{f} + \frac{\vec{f}^i s_i}{s} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Soit $\vec{\sigma}$ le vecteur unitaire normal à la base, sortant du tétraèdre, de composantes covariantes dans la base $(\vec{e}_i)$:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_i &= \sigma_i \\ &= \frac{s_i}{s} \end{aligned}$$

Si bien que

$$\vec{f} + \vec{f}^i \sigma_i = \vec{0} \quad (6.16)$$

Dans la base $(\vec{e}_i)$, posons que le vecteur force par unité de surface $\vec{f}^1$ qui s'exerce sur la face s_1 a pour composantes contravariantes les t^{1i} :

$$\begin{aligned} \vec{f}^1 &= t^{11}\vec{e}_1 + t^{12}\vec{e}_2 + t^{13}\vec{e}_3 \\ &= t^{1i}\vec{e}_i \end{aligned}$$

$$\vec{f}^1 \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{12} \\ t^{13} \end{pmatrix}$$

où les t^{1j} sont homogènes à une pression.

Remarque 6.4.2

Nous aurions pu aussi choisir la convention « contraire » en prenant les trois vecteurs unitaires sortants, normaux aux surfaces s_i , qui forment la base $(\vec{n}_i)$ orthonormée, telle que :

$$\vec{n}_i = -\vec{e}_i$$

Avec cette convention nous aurions écrit

$$\begin{aligned} \vec{f}^1 &= t^{11}\vec{n}_1 + t^{12}\vec{n}_2 + t^{13}\vec{n}_3 \\ &= t^{1j}\vec{n}_j \end{aligned}$$

autement dit :

$$\vec{f}^1 = -t^{1j}\vec{e}_j$$

Pour chacune des trois forces :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \vec{f}^i = t^{ij} \vec{e}_j$$

De même pour le vecteur force par unité de surface qui s'exerce sur la base :

$$\vec{f} = f^j \vec{e}_j$$

Avec (6.16) page précédente

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -\vec{f}^i \sigma_i \\ f^j \vec{e}_j &= -t^{ij} \vec{e}_j \sigma_i \\ \forall j = 1, 2, 3 \quad f^j &= -t^{ij} \sigma_i \end{aligned} \quad (6.17)$$

donc

$$\vec{f} = -t^{ij} \sigma_i \vec{e}_j$$

Dans la base naturelle $(\vec{e}_j)$, la force par unité de surface $\vec{f}$ a pour composantes contravariantes $-t^{ij} \sigma_i$.

Remarque 6.4.3

Dans la convention contraire, base $(\vec{n}_i)$, nous aurions :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -t^{ij} \sigma_i \vec{n}_j \\ &= t^{ij} \sigma_i \vec{e}_j \end{aligned}$$

Dans la relation (6.17) de la présente page, les f^j sont des composantes contravariantes et les σ_i des composantes covariantes, d'après le critère général de tensorialité, pour qu'une suite ordonnée de quantité constitue les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que le produit contracté de cette suite ordonnée de quantités avec un tenseur donne un tenseur, les t^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur, appelé *tenseur des contraintes*. Sous forme matricielle (6.17) de la présente page s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Remarque 6.4.4

Vérifions le caractère tensoriel des t^{ij} en effectuant la transformation de coordonnées de x^i à $x^{i'}$, auquel correspond le changement de base naturelle :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \vec{e}_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \vec{e}_{k'}$$

Le vecteur force par unité de surface se transforme selon :

$$\begin{aligned} -\vec{f} &= t^{ij} \sigma_i \vec{e}_j \\ &= t^{ij} (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_j \\ &= t^{ij} \left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \vec{e}_{l'} \right) \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \vec{e}_{k'} \\ &= t^{ij} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_{l'}) \vec{e}_{k'} \end{aligned}$$

Or la force exercée sur la surface S ne dépend pas du système de coordonnées (la force est un vecteur) :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \vec{f}' \\ t^{ij} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_{l'}) \vec{e}_{k'} &= t^{k'l'} (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_{l'}) \vec{e}_{k'} \\ \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} t^{ij} &= t^{k'l'}\end{aligned}$$

La matrice 3×3 des t^{ij} est donc un tenseur de composantes deux fois contravariantes.

Cherchons l'expression de la force infinitésimale :

$$\begin{aligned}f^j &= -t^{ij} \sigma_i \\ f^j s_i &= -t^{ij} s_i \\ \forall j = 1, 2, 3 \quad f^j ds &= -t^{ij} ds_i\end{aligned}\tag{6.18}$$

Lorsque le fluide est parfait (ni transfert de chaleur, ni viscosité en cisaillement ou en traction-compression) les contraintes sont normales aux surfaces du tétraèdre. Le tenseur des contraintes devenu tenseur des pressions prend la forme suivante,

$$\forall i, j \quad t^{ij} = \pm p g^{ij}$$

où le scalaire p est la pression du fluide (positive ou nulle) au point (au centre du tétraèdre) et à l'instant considéré, et où les g^{ij} sont les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées choisi. Lorsque ce dernier est orthogonal, le tenseur métrique est diagonal ainsi que celui des pressions. Sur la face s_1 :

$$\begin{aligned}\vec{f}^1 &= t^{1j} \vec{e}_j \\ &= \pm p g^{1j} \vec{e}_j \\ &= \pm p \vec{e}_1\end{aligned}$$

La force exercée sur le tétraèdre par le fluide parfait extérieur au tétraèdre étant une force entrante, nous conservons le signe positif :

$$\vec{f}^1 = p \vec{e}_1$$

et dans la convention choisie,

$$\forall i, j \quad t^{ij} = p g^{ij}\tag{6.19}$$

la contrainte normale t^{ii} est positive en compression.

Remarque 6.4.5

Dans la convention contraire, base $(\vec{n}_i)$:

$$\begin{aligned}\vec{f}^1 &= -t^{1j} \vec{e}_j \\ &= \mp p g^{1j} \vec{e}_j \\ &= \mp p \vec{e}_1\end{aligned}$$

La force exercée sur le tétraèdre par le fluide parfait extérieur au tétraèdre étant une force entrante, nous conservons le signe positif pour avoir :

$$\vec{f}^1 = p \vec{e}_1$$

et

$$\forall i, j \quad t^{ij} = -p g^{ij}$$

la contrainte normale t^{ii} est négative en compression.

Pour la force par unité de surface exercée sur la base :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= -t^{ij}\sigma_i\vec{e}_j \\ &= -pg^{ij}\sigma_i\vec{e}_j\end{aligned}$$

6.4.4 Équations de la dynamique des milieux continus

On considère un volume élémentaire dv de matière du milieu continu, de surface fermée ds , et de masse volumique ρ . On utilise un système de coordonnées rectangulaire et on se place dans le référentiel inertiel de repos instantané de ce volume élémentaire de matière. Notons $\vec{f}_v$ la somme des forces volumiques extérieures par unité de volume s'exerçant sur dv (force de gravitation et force électromagnétique), et $\vec{f}_s$ la somme des forces surfaciques extérieures par unité de surface s'exerçant également sur dv .

Remarque 6.4.6

Pour le tétraèdre :

$$\vec{f}_s = \vec{f}_s + \vec{f}^1_{s_1} + \vec{f}^2_{s_2} + \vec{f}^3_{s_3}$$

6.4.4.1 Mouvement en translation

Pour le mouvement en translation, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned}\rho\gamma dv &= \vec{f}_v dv + \vec{f}_s ds \\ \rho\gamma^i \vec{e}_i dv &= f_v^i \vec{e}_i dv - f_s^i \vec{e}_i ds \\ \forall i = 1, 2, 3 \quad \rho\gamma^i dv &= f_v^i dv - f_s^i ds\end{aligned}$$

(6.17) page 108 est applicable à toute force de surface :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \rho\gamma^i dv = f_v^i dv - t^{ki} ds_k$$

Intégrons sur un volume V quelconque, de surface S , puis utilisons le théorème de la divergence (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) dans un système de coordonnées rectilignes :

$$\begin{aligned}\forall i \quad \iiint_V (f_v^i - \rho\gamma^i) dv - \iint_S t^{ki} ds_k &= 0 \\ \iiint_V (f_v^i - \rho\gamma^i - \partial_k t^{ki}) dv &= 0 \\ f_v^i - \partial_k t^{ki} &= \rho\gamma^i\end{aligned}\tag{6.20}$$

Ce sont les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées rectilignes.

6.4.4.2 Mouvement en rotation - symétrie du tenseur des contraintes

Pour le mouvement en rotation, la somme des moments des forces extérieures par rapport à un point arbitraire de l'espace, est égale au moment des forces d'inertie par rapport à ce même point :

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_v^i dv - \vec{r}_j \times \vec{f}_s^j ds = \vec{r} \times \vec{\gamma} \rho dv$$

Les rayons vecteurs des forces de volume sont tous égaux à $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times (\vec{f}_v^i - \rho \gamma) dv - \vec{r}_j \times \vec{f}_s^j ds = \vec{0}$$

En notation indicielle et en intégrant sur un volume quelconque V de surface S , puis en utilisant le théorème de la divergence (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad & \iiint_V [x^i (f_v^j - \rho \gamma^j) - x^j (f_v^i - \rho \gamma^i)] dv - \iint_S (x^i t^{kj} - x^j t^{ki}) ds_k = 0 \\ & \iiint_V [x^i (f_v^j - \rho \gamma^j - \partial_k t^{kj}) - x^j (f_v^i - \rho \gamma^i - \partial_k t^{ki})] dv - \iiint_V (t^{ij} - t^{ji}) dv = 0 \end{aligned}$$

Les relations (6.20) page ci-contre montrent que la première intégrale est nulle, il reste :

$$\forall i, j \quad \iiint_V (t^{ij} - t^{ji}) dv = 0$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique par rapport à ses deux indices :

$$t^{ij} = t^{ji}$$

6.4.5 Écriture des équations en fonction de l'impulsion

Les relations (6.20) page précédente peuvent s'écrire en fonction de la densité volumique d'impulsion. Écrivons l'accélération dans un système de coordonnées rectilignes, puis utilisons (6.15) page 106 :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad \gamma^i &= \frac{d\vec{v}^i}{dt} \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \partial_k v^i \end{aligned}$$

La vitesse de l'élément de matière varie localement dans le temps, et il existe un gradient de vitesse dans le milieu continu.

En vue de passer au cas relativiste, plaçons-nous dans le référentiel inertiel instantané $\mathcal{R}_0$ au repos par rapport à l'élément de matière du milieu continu. La vitesse relative est nulle (mais pas sa variation dans le temps ou dans l'espace) :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad \gamma^i &= \frac{\partial v^i}{\partial t} \\ \rho \gamma^i &= \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial t} - v^i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial t} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé une seconde fois la nullité des v^i dans le référentiel propre de l'élément de matière du milieu continu. Les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées rectilignes (6.20) page 110 par unité de volume s'écrivent en fonction de l'impulsion :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad f_v^i - \partial_k t^{ki} = \partial_t(\rho v^i)$$

Soit $\vec{p}$ le 3-vecteur impulsion par unité de volume non relativiste, de composantes contravariantes :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \vec{p}^i \stackrel{\text{déf}}{=} \rho v^i$$

Les équations de la dynamique et l'équation de continuité (4.4) p. 42 s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i \vec{p}^i = 0 \\ \partial_t \vec{p}^i + \partial_k t^{ki} = f_v^i \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (6.21)$$

6.4.6 Forme générale des équations de la dynamique des milieux continus

Généralisons (6.20) page 110 à un système de coordonnées curvilignes. Les équations tensorielles

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad f_v^i - \nabla_k t^{ki} = \rho \gamma^i \quad (6.22)$$

sont invariantes par changement de coordonnées et redonnent (6.20) pour un système de coordonnées rectilignes. Ce sont donc les équations de la dynamique des milieux continus dans un système de coordonnées curvilignes arbitraires.

6.4.7 Écriture des équations générales en fonction de l'impulsion

Dans (6.22) de la présente page, écrivons les forces volumiques d'inertie ($\rho \gamma^i$) en fonction de l'impulsion. Les relations (3.6) p. 33 donnent l'accélération en fonction de la vitesse dans un système de coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad \gamma^i &= \frac{d\vec{v}^i}{dt} + \Gamma_{kj}^i v^k v^j \\ &= \partial_t v^i + v^k \partial_k v^i + \Gamma_{kj}^i v^k v^j \\ &= \partial_t v^i + v^k (\partial_k v^i + \Gamma_{kj}^i v^j) \end{aligned}$$

En multipliant par la masse volumique et avec la déf. 3.4.1 p. 31 de la dérivée covariante :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad \rho \gamma^i &= \rho \partial_t v^i + \rho v^k \nabla_k v^i \\ &= \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} - v^i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k v^i) - v^i \nabla_k (\rho v^k) \\ &= \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k v^i) - v^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k (\rho v^k) \right] \end{aligned}$$

Avec l'équation de continuité (4.5) p. 42 le dernier terme est nul :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \rho \gamma^i = \partial_t (\rho v^i) + \nabla_k (\rho v^k v^i)$$

Remplaçons dans les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées curvilignes (6.22) page ci-contre :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \partial_t (\rho v^i) + \nabla_k (\rho v^k v^i + t^{ki}) = f_v^i$$

Ces trois équations et celle de continuité déterminent la dynamique des milieux continus sous l'action de forces de volume et de surface. Il reste à remplacer les t^{ki} et les f^i par des modèles de forces.

6.5 Dynamique relativiste des milieux continus

Nous nous plaçons dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}_0$ momentanément au repos par rapport au milieu continu (référentiel comobile), en un lieu et à un instant précis, c.-à-d. en un point d'univers donné appelé événement P_0 . En ce point les composantes de la 3-vélocité du milieu dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ sont nulles, en revanche les dérivées de ces composantes peuvent être non nulles. Nous choisissons un système de coordonnées rectangulaires.

En dynamique relativiste toutes les formes d'énergie apportent leur contribution au 4-vecteur 4-impulsion. Or les énergies s'additionnent, nous devons donc raisonner en termes d'énergie. Dans les équations de la dynamique classique des milieux continus (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), le 3-vecteur impulsion volumique non relativiste $\bar{\mathbf{p}}$ ne contient que le terme de masse volumique ρ (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), auquel correspond l'énergie de masse par unité de volume en relativité. Multiplions la définition du 3-vecteur impulsion volumique non relativiste (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) par c^2 pour faire apparaître l'énergie de masse (on utilise la définition de l'énergie au repos, $E_0 = mc^2$) :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad c^2 \bar{p}^i = \rho c^2 v^i$$

où ρ est la masse volumique propre, celle mesurée dans le référentiel propre $\mathcal{R}_0$. Pour former la 4-impulsion relativiste nous devons aussi prendre en compte l'énergie des contraintes mécanique. En revanche, nous supposons l'absence de champ électromagnétique.

Le travail par unité de temps de la force de contrainte est son produit scalaire euclidien par la vitesse de l'élément de matière considéré. À partir de (6.18) p. 109 :

$$v_j F^j ds = -v_j t^{ij} ds_i$$

Remarque 6.5.1

Les composantes covariante v_j sont nulles mais la substitution se fera à la fin. De même que lorsque l'on écrit la relation fondamentale de la dynamique $\sum F = d(m\mathbf{v})/dt$ la vitesse peut être nulle sans que l'accélération le soit.

Au terme $\rho c^2 v^i$ homogène à une énergie par unité de temps et de surface correspond le terme de mêmes dimensions $v_j t^{ij}$. La partie spatiale du 4-vecteur densité volumique d'impulsion relativiste $[_4\bar{\mathbf{p}}]$ a alors pour composantes contravariantes :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad p^i = \rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j$$

Exemple 6.5.1 : Densité volumique d'impulsion relativiste

La pression p est homogène à une densité volumique d'énergie. En mécanique classique, l'énergie infinitésimale contenue dans un volume élémentaire dv (volume infinitésimal d'ordre un) de fluide parfait à la pression p a pour expression

$$dE = -p dv$$

Lorsque dv est positif le système fournit de l'énergie mécanique au milieu extérieur, il perd de l'énergie et dE est négatif, d'où le signe négatif. Cette relation donne

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad dE v^i &= -p v^i dv \\ &= -p g^{ij} v_j dv \\ &= -t^{ij} v_j dv \end{aligned}$$

En relativité, avec $dm = \rho dv$:

$$dE = \rho dv c^2 - p dv$$

Avec (6.19) p. 109 pour un fluide parfait, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad dE v^i &= (\rho c^2 v^i - p v^i) dv \\ \frac{dE v^i}{c^2} &= \left(\rho v^i - \frac{1}{c^2} p g^{ij} v_j \right) dv \\ p^i &= \rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j \end{aligned}$$

Les composantes spatiales de la 4-impulsion $[_4p]$ sont nulles en P_0 mais il n'en est pas de même de leurs dérivées. Les équations de la dynamique classique des milieux continus (6.21) p. 112 deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i \left(\rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j \right) = 0 \\ \partial_t \left(\rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j \right) + \partial_k t^{ki} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

En tenant compte de la nullité des v^i en P_0 , $v^i \partial_t \rho = 0$ et $v_j \partial_t t^{ij} = 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_i v^i - \frac{1}{c^2} \partial_i t^{ij} v_j = 0 \\ \rho \partial_t v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} \partial_t v_j + \partial_k t^{ki} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Introduisons la variable $x^0 = ct$ dont la différentielle est $dx^0 = c dt$:

$$\begin{cases} c \partial_0 \rho + \rho \partial_i v^i - \frac{1}{c^2} \partial_i t^{ij} v_j = 0 \\ c \rho \partial_0 v^i - \frac{1}{c} t^{ij} \partial_0 v_j + \partial_k t^{ki} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (6.23)$$

6.6 Forme tensorielle des équations du mouvement

Il s'agit d'écrire les équations de la dynamique relativiste des milieux continus (6.23) dans l'espace-temps de la relativité, c.-à-d. sous forme de 4-vecteurs et de 4-tenseurs. Nous introduisons le 4-tenseur d'univers symétrique T de composantes deux fois contravariantes $T^{\alpha\beta}$ qui généralise le tenseur des contraintes du § 6.4.3 p. 106. Dans le référentiel inertiel de repos instantané $\mathcal{R}_0$ et au point d'univers P_0 , ce tenseur a pour composantes :

$$\forall i, k = 1, 2, 3 \quad T^{ik} = t^{ik} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad T^{i0} = T^{0i} = T^{00} = 0$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ 0 & t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ 0 & t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{bmatrix}$$

Les indices latins varient de un à trois, les indices grecs de zéro à trois, l'indice zéro désignant la composante temporelle. Nous introduisons également le 4-vecteur force d'univers par unité de volume, qui a pour composantes dans $\mathcal{R}_0$ en P_0 :

$$\forall i \quad \phi^i = f^i \quad ; \quad \phi^0 = 0$$

$$[_4\phi] \begin{bmatrix} 0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}$$

ainsi que la 4-vitesse

$$\forall i \quad u^i = \gamma v^i \quad ; \quad u^0 = \gamma c$$

qui a pour composantes dans $\mathcal{R}_0$ en P_0 :

$$\forall i \quad u^i = 0 \quad ; \quad u^0 = c$$

Montrons que (6.23) page précédente s'écrivent

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad \nabla_\beta (\rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}) = \phi^\alpha \quad (6.24)$$

Détaillons ces quatre relations :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \begin{cases} \nabla_\beta (\rho u^0 u^\beta + T^{0\beta}) = \phi^0 \\ \nabla_\beta (\rho u^i u^\beta + T^{i\beta}) = \phi^i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla_\beta (\rho u^0 u^\beta) + \nabla_k T^{0k} + \nabla_0 T^{00} = 0 \\ \nabla_\beta (\rho u^i u^\beta) + \nabla_0 T^{i0} + \nabla_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

En coordonnées rectilignes :

$$\begin{cases} \partial_\beta (\rho u^0 u^\beta) + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \partial_\beta (\rho u^i u^\beta) + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^0 u^\beta \partial_\beta \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^0 + \rho u^0 \partial_\beta u^\beta + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ u^i u^\beta \partial_\beta \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^i + \rho u^i \partial_\beta u^\beta + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Nous avons aussi les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\beta u^\beta = \partial_0 u^0 + \partial_k u^k \\ u^\beta \partial_\beta \rho = u^0 \partial_0 \rho + u^i \partial_i \rho \\ u^\beta \partial_\beta u^i = u^0 \partial_0 u^i + u^i \partial_i u^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Dans $\mathcal{R}_0$ avec $\forall i \ u^i = 0$, $u^0 = c$, $\partial_0 u^0 = 0$ (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte), ces trois relations deviennent :

$$\begin{cases} \partial_\beta u^\beta = \partial_k u^k \\ u^\beta \partial_\beta \rho = c \partial_0 \rho \\ u^\beta \partial_\beta u^i = c \partial_0 u^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Remplaçons :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + \rho c \partial_k u^k + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ u^i c \partial_0 \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^i + \rho u^i \partial_\beta u^\beta + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

De nouveau avec $\forall i \ u^i = 0$, $u^0 = c$:

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + \rho c \partial_i u^i + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \rho c \partial_0 u^i + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Par hypothèse $\forall \alpha \ T^{\alpha 0} = 0$:

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad T^{\alpha\beta} u_\beta &= T^{\alpha 0} u_0 + T^{\alpha j} u_j \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Les tenseurs et vecteurs ayant une existence propre indépendante de tout référentiel, cette relation vraie dans $\mathcal{R}_0$ est vraie dans tout référentiel. Cette relation donne :

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad T^{\alpha 0} c + T^{\alpha j} u_j &= 0 \\ T^{\alpha 0} c &= -T^{\alpha j} u_j \\ \forall \alpha, \beta = 0, \dots, 3 \quad c \partial_\beta T^{\alpha 0} &= -\partial_\beta T^{\alpha j} u_j \end{aligned}$$

Séparons les parties spatiale et temporelle :

$$\forall \alpha \quad \begin{cases} c \partial_k T^{\alpha 0} = -\partial_k T^{\alpha j} u_j \\ c \partial_0 T^{\alpha 0} = -\partial_0 T^{\alpha j} u_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \partial_k T^{k0} = -\partial_k T^{kj} u_j \quad \forall \alpha = k \\ c \partial_0 T^{i0} = -\partial_0 T^{ij} u_j \quad \forall i \\ c \partial_0 T^{00} = -\partial_0 T^{0j} u_j = -u_j \partial_0 T^{0j} - T^{0j} \partial_0 u_j = 0 \end{cases}$$

Avec ces relations (T est symétrique par hypothèse) :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + c \rho \partial_i u^i - \frac{1}{c} \partial_k T^{kj} u_j = 0 \\ c \rho \partial_0 u^i - \frac{1}{c} T^{ij} \partial_0 u_j + \partial_k T^{ik} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Or, nous avons également (dans $\mathcal{R}_0$, $\gamma = 1$) :

$$\begin{cases} \partial_i u^i = \gamma \partial_i v^i + v^i \partial_i \gamma \\ \partial_0 u^i = \gamma \partial_0 v^i + v^i \partial_0 \gamma \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_i u^i = \gamma \partial_i v^i \\ \partial_0 u^i = \gamma \partial_0 v^i \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_i u^i = \partial_i v^i \\ \partial_0 u^i = \partial_0 v^i \quad \forall i \end{cases}$$

Nous retrouvons (6.23) page 114, ce qui achève la démonstration :

$$\begin{cases} c \partial_0 \rho + \rho \partial_i v^i - \frac{1}{c^2} \partial_i t^{ij} v_j = 0 \\ c \rho \partial_0 v^i - \frac{1}{c} t^{ij} \partial_0 v_j + \partial_k t^{ik} = f^i \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Les relations (6.24) page 115 s'écrivent :

$$\forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad \nabla_\beta P^{\alpha\beta} = \phi^\alpha \quad (6.26)$$

où l'on a posé

$$\forall \alpha, \beta = 0, \dots, 3 \quad P^{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} \rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta} \quad (6.27)$$

Le tenseur symétrique $P^{\alpha\beta}$ est le 4-tenseur *énergie-impulsion* du milieu continu considéré. Le 4-produit scalaire avec la 4-vitesse s'écrit, en utilisant (6.25) page ci-contre :

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \dots, 3 \quad P^{\alpha\beta} u_\beta &= (\rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}) u_\beta \\ &= \rho u^\alpha u^\beta u_\beta \\ &= c^2 \rho u^\alpha \end{aligned}$$

Le tenseur énergie-impulsion peut être vu comme une application linéaire ayant pour vecteur propre le 4-vecteur vitesse et pour valeur propre correspondante la masse volumique ρ .

D'après (6.19) p. 109, lorsque le milieu continu est un fluide parfait le tenseur énergie-impulsion admet pour composantes :

$$\forall i, k \quad T^{ik} = t^{ik} = -p \eta^{ik} \quad ; \quad \forall i \quad T^{i0} = T^{0i} = T^{00} = 0$$

Le signe négatif vient du choix de la métrique en convention de genre temps $\forall i, k \quad \eta^{ik} = -1$. En tenant compte du fait que $\forall i \quad u^i = 0 \Rightarrow \forall i, k \quad u^i u^k = 0$ et $u^0 u^0 = c^2$, dans un système de coordonnées quelconque :

$$T^{\alpha\beta} = -p g^{\alpha\beta} + \frac{p}{c^2} u^\alpha u^\beta$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta = 0, \dots, 3 \quad P^{\alpha\beta} &= \rho u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} + \frac{p}{c^2} u^\alpha u^\beta \\ &= \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Chapitre 7

GRAVITATION RELATIVISTE

Sommaire

7.1 Métrique de la relativité générale	119
7.2 Champ gravitationnel faible	120
7.3 Écoulement du temps dans un champ gravitationnel	124
7.4 Décalage gravitationnel vers le rouge	126
7.5 Métrique d'un champ gravitationnel	127
7.6 Lien potentiel gravitationnel et quadritenseur énergie-impulsion	131
7.7 Trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel	131
7.8 Les équations du champ gravitationnel	133

7.1 Métrique de la relativité générale

En mécanique classique la gravitation est une force attractive entre les masses. Nous abandonnons ici la notion de force gravitationnelle pour un modèle où les masses et distributions énergétiques courbent l'espace-temps. Les systèmes libres ainsi que la lumière suivent les géodésiques de l'espace-temps.

L'univers est représenté par une variété riemannienne V_4 à quatre dimensions, de métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.1)$$

de signature $(+ - - -)$ ou $(- + + +)$. En particulier l'équation

$$ds^2 = 0$$

définit en chaque point de la variété V_4 un hypercône élémentaire de lumière (cf. Tome 4). Les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des coordonnées x^μ , dont les dérivées déterminent les symboles de Christoffel qui apparaissent dans les équations des géodésiques. Ils définissent donc complètement les géodésiques de ce système de coordonnées, donc la gravitation, c'est pourquoi on les appelle *potentiels gravitationnels* de ce système. Par analogie avec la définition d'un potentiel scalaire (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), le tenseur métrique G est un « potentiel tenseur ». Dans

l'espace-temps de dimension $n = 4$ les composantes $g_{\mu\nu}$ sont au nombre de seize (4×4), mais seules dix sont indépendantes (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$n(n + 1)/2 = 10$$

Le problème consiste en la détermination de ces dix potentiels gravitationnels.

L'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte est osculateur à l'espace-temps courbe pseudo-riemannien de la relativité générale. Quelle que soit l'intensité du champ gravitationnel, un observateur inertiel se déplace sur une géodésique de l'espace-temps de la relativité générale, dans l'espace pseudo-euclidien de raccordement de la relativité restreinte.

7.2 Champ gravitationnel faible

Une faible courbure de l'espace-temps doit redonner la théorie de la gravitation newtonienne pour des vitesses petites devant la vitesse limite. En coordonnées galiléennes, un champ gravitationnel faible s'écrit de la forme :

$$\forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace plat pseudo-euclidien dans $\mathbb{M}$, et $h_{\mu\nu}$ est le tenseur symétrique

$$[h_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{02} & h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{03} & h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix}$$

tel que

$$\forall \mu, \nu \quad h_{\mu\nu} \approx 0$$

On suppose également que la métrique est stationnaire (constante dans le temps) :

$$\forall \mu, \nu \quad \partial_0 g_{\mu\nu} = 0$$

La ligne d'univers d'un mobile en chute libre dans ce champ gravitationnel est une géodésique dont l'équation est donnée par (1.2) page 4,

$$\forall \lambda = 0, \dots, 3 \quad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Le paramètre est ici le temps propre τ du mobile. Le paramètre étant quelconque, nous pouvons également prendre le temps coordonnée $x^0 = ct$ (ou temps impropre) d'un référentiel quelconque. Habituellement on prend un référentiel dans l'espace profond, loin de toute masse-énergie. Le mobile est supposé non relativiste, son 3-vecteur vitesse est petit devant la vitesse limite c :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad & \frac{dx^i}{dt} \ll c \\ & dx^i \ll c dt \\ & dx^i \ll dx^0 \\ & \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \end{aligned}$$

En faisant cette approximation puis en remplaçant x^0 par ct :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \quad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} &\approx 0 \\ \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Écrivons les symboles de Christoffel de 2^e espèce en fonction des potentiels gravitationnels selon (2.14) page 19. Dans la relation qui suit, les deux premiers termes du membre de droite sont nuls car le système de coordonnées est stationnaire :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \quad \Gamma^\lambda_{00} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa 0,0} + g_{0\kappa,0} - g_{00,\kappa}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} g_{00,\kappa} \end{aligned}$$

Faisons l'approximation du premier ordre

$$g^{\lambda\kappa} \approx \eta^{\lambda\kappa}$$

De plus

$$g_{00,\kappa} = h_{00,\kappa}$$

car les composantes du tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ de $\mathbb{M}$ sont des constantes :

$$\forall \lambda \quad \Gamma^\lambda_{00} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} h_{00,\kappa}$$

(7.2) devient :

$$\forall \lambda \quad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{\lambda\kappa} h_{00,\kappa} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

- la première relation, pour $\lambda = 0$, donne pour la partie temporelle :

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{0\kappa} h_{00,\kappa} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Seule η^{00} est non nulle donc $\kappa = 0$, et le système de coordonnées étant stationnaire $h_{00,0} = g_{00,0} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} &\approx \frac{c^2}{2} \eta^{00} h_{00,0} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Soit α une constante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} &\approx 0 \\ \frac{dt}{d\tau} &\approx \alpha \\ \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 &\approx \alpha^2 \\ d\tau^2 &\approx \frac{dt^2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

- les trois relations suivantes donnent pour la partie spatiale :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Pour une signature $(+ - - -)$ de $\mathbb{M}$ (noté $\mathbb{R}^{1,3}$) nous avons $\eta^{ij} = -\delta^{ij}$:

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &\approx -\frac{c^2}{2} \delta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} &\approx -\frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \mathbf{grad}(h_{00}) \\ \alpha^2 \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &\approx -\frac{c^2}{2} \alpha^2 \mathbf{grad}(h_{00}) \\ \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &\approx -\frac{c^2}{2} \mathbf{grad}(h_{00}) \end{aligned}$$

Comparons avec l'équation de Newton d'un mobile dans un champ gravitationnel. Soient m_g la masse grave et m_i la masse inerte de ce mobile :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= m_g \vec{g} \\ m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= -m_g \vec{\text{grad}}(\phi) \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$-\frac{c^2}{2} \mathbf{grad}(h_{00}) \approx -\frac{m_g}{m_i} \mathbf{grad}(\phi)$$

En posant l'égalité entre masse grave et masse inerte :

$$h_{00} \approx \frac{2\phi}{c^2}$$

Par conséquent, dans la limite des champs gravitationnels faibles :

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (7.3)$$

où ϕ est négatif (Cf. Vol. 2 Mécanique classique).

Cette dernière relation peut être obtenue grâce au principe de moindre action. En mécanique classique, le lagrangien d'un système dans un champ gravitationnel de potentiel ϕ s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_i v^2 - m_g \phi$$

En relativité restreinte (cf. Tome 4) :

$$\mathcal{L} = -m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_g \phi$$

À faible vitesse nous avons :

$$\mathcal{L} \approx -m_i c^2 + \frac{1}{2} m_i v^2 - m_g \phi$$

On remarque que si l'on supprime le terme constant $m_i c^2$ du lagrangien (ce qui est toujours loisible de faire) on retrouve bien le lagrangien non relativiste. L'action s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \mathcal{L} dt \\ &\approx -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt \end{aligned}$$

où l'on a posé l'égalité entre masse inerte et masse grave :

$$\begin{aligned} ds &\approx \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt \\ ds^2 &\approx \left[c^2 + \left(\frac{v^2}{2c} \right)^2 - v^2 + \left(\frac{\phi}{c} \right)^2 + 2 \left(c - \frac{v^2}{2c} \right) \frac{\phi}{c} \right] dt^2 \\ &\approx \left\{ c^2 + v^2 \left[\left(\frac{v^2}{4c^2} \right) - 1 \right] + 2\phi \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\phi}{2c^2} \right] \right\} dt^2 \end{aligned}$$

On approxime respectivement à moins un et un les termes entre crochets :

$$\begin{aligned} ds^2 &\approx (c^2 + 2\phi - v^2) dt^2 \\ &\approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) (c dt)^2 - dr^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{00} (dx^0)^2 - g_{ii} (dx^i)^2 \end{aligned}$$

si bien que

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Exemple 7.2.1 : Écart à un espace plat, pour la Terre et pour le Soleil

Calculons quelques valeurs de la correction à apporter à la composante temporelle du tenseur métrique en présence d'un champ gravitationnel. À partir de l'expression du potentiel de champ gravitationnel ϕ (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) :

$$\frac{2\phi}{c^2} = \frac{-2\mathcal{G}M}{rc^2}$$

où la vitesse limite vaut exactement $c = 299\,792\,458$ m/s, et la constante gravitationnelle a pour valeur $\mathcal{G} = 6,674\,30 \times 10^{-11}$ m³/kg/s².

Prenons la Terre qui a pour masse $M_\oplus = 5,973\,6 \times 10^{24}$ kg et pour rayon moyen $r_\oplus = 6\,371$ km. À sa surface, la correction est de :

$$\begin{aligned} \frac{-2\mathcal{G}M_\oplus}{rc^2} &= \frac{-2 \times 6,674\,30 \times 10^{-11} \times 5,973\,6 \times 10^{24}}{6\,371 \times 10^3 \times 299\,792\,458^2} \\ &= -1,392\,59 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Prenons le Soleil qui a pour masse $M_\odot = 1,989 \times 10^{30}$ kg et pour rayon $r_\odot = 696\,342$ km. À sa surface, la correction est de :

$$\begin{aligned} \frac{-2\mathcal{G}M_\odot}{rc^2} &= \frac{-2 \times 6,674\,30 \times 10^{-11} \times 1,989 \times 10^{30}}{696\,342 \times 10^3 \times 299\,792\,458^2} \\ &= -4,242\,35 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Ces valeurs petites devant l'unité n'invalident pas l'approximation d'un champ gravitationnel faible (elles ne le valident pas non plus).

Remarque 7.2.1

On ne peut démontrer ce que l'on a posé en hypothèse, par exemple que le champ gravitationnel est faible. Tout ce que l'on peut faire est de montrer que le raisonnement est cohérent, en vérifiant que les valeurs sont effectivement petites devant l'unité, après l'avoir supposé. Si ce n'était pas le cas l'hypothèse serait fautive, mais comme c'est le cas on ne peut pas conclure. Il se pourrait que le raisonnement en supposant que le champ gravitationnel est fort donne des valeurs grandes devant l'unité, et donc soit cohérent lui aussi.

7.3 Écoulement du temps dans un champ gravitationnel

Un horloger et son horloge sont fixes dans le champ gravitationnel terrestre. Cet horloger ne peut observer la dilatation du temps en comparant l'intervalle de temps de l'horloge avec celui donné par le constructeur de l'horloge, puisque le champ gravitationnel affecte le temps et non l'horloge elle-même. L'horloger n'a pas conscience de la dilatation du temps, son horloge fonctionne de manière nominale. Ainsi, le carré de l'intervalle entre les deux événements que sont le tic et le tac de l'horloge marque le temps propre de l'horloger :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

Un observateur dans un champ gravitationnel de même intensité, et sans vitesse relative avec l'horloger, mesure le même écoulement du temps que l'horloger, leurs horloges sont synchrones.

En revanche, un observateur inertiel dans l'espace profond loin de toute masse-énergie créant un champ gravitationnel, ou en chute libre dans un champ gravitationnel, peut observer la déformation de l'espace-temps due à la présence de la Terre.

Dans son système de coordonnées (x^μ), le carré de l'intervalle entre le tic et le tac de l'horloge est donné par :

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

L'intervalle entre deux événements est un invariant. Les carrés des intervalles dans les deux référentiels (dans les deux systèmes de coordonnées) sont égaux :

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ c^2 \left(\frac{d\tau}{dx^0} \right)^2 &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0} \end{aligned}$$

$t = x^0/c$ est le temps propre de l'observateur galiléen, et u^μ sa 4-vitesse dans le référentiel terrestre de l'horloger :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{c dt} \frac{dx^\nu}{c dt} \\ c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \end{aligned}$$

Si le 3-vecteur vitesse spatiale u^i de l'observateur galiléen est nul dans le référentiel terrestre :

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= g_{00} u^0 u^0 \\ \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= g_{00} \\ d\tau &= \sqrt{g_{00}} dt \end{aligned} \quad (7.4)$$

où g_{00} est le coefficient temporel de la métrique au niveau de l'horloge. En utilisant (7.3) page 122 comme approximation d'un champ gravitationnel faible, nous obtenons $d\tau$ en fonction de dt :

$$\begin{aligned} d\tau &\approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right)^{1/2} dt \\ &\approx \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right) dt \end{aligned} \quad (7.5)$$

Remarque 7.3.1

Le potentiel gravitationnel ϕ étant négatif, on peut aussi écrire :

$$d\tau \approx \left(1 - \frac{|\phi|}{c^2} \right) dt$$

Si l'horloge s'approche d'un objet massif, ϕ augmente en valeur absolue. On observe que le temps propre de l'horloge ralentit.

Remarque 7.3.2

On remarque que la masse même de l'horloge affecte son temps propre.

De même, nous obtenons dt en fonction de $d\tau$:

$$\begin{aligned} dt &\approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right)^{-1/2} d\tau \\ &\approx \left(1 - \frac{\phi}{c^2} \right) d\tau \end{aligned}$$

Remarque 7.3.3

Le potentiel gravitationnel ϕ étant négatif, on peut aussi écrire :

$$dt \approx \left(1 + \frac{|\phi|}{c^2} \right) d\tau$$

Pour un intervalle de temps fini

$$\Delta\tau = \int \sqrt{g_{00}} dt$$

D'après cette dernière relation, notre choix de signature de métrique implique

$$g_{00} > 0$$

Lorsque le champ gravitationnel est constant dans le temps

$$\Delta\tau = \sqrt{g_{00}} \Delta t$$

7.4 Décalage gravitationnel vers le rouge

Soit un atome en un point d'un champ gravitationnel, de fréquence propre

$$\nu_0 = \frac{dN}{dt_0}$$

Grâce à (7.5) page précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{dN}{dt_0} \\ &= \frac{dN}{dt} \frac{dt}{dt_0} \\ &\approx \nu \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right)\end{aligned}$$

En un point A où règne un champ gravitationnel de potentiel ϕ_A , la fréquence d'un atome vaut :

$$\nu_{0A} \approx \nu \left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right)$$

En un point B où règne un champ gravitationnel de potentiel ϕ_B , elle vaut :

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu \left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right) \\ &\approx \nu_{0A} \left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right) \\ &\approx \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right) \\ &\approx 1 + \frac{\phi_A}{c^2} - \frac{\phi_B}{c^2} - \frac{\phi_A \phi_B}{c^4} \\ &\approx \nu_{0A} \left(1 + \frac{\phi_A - \phi_B}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Exemple 7.4.1 : Mesure terrestre de la fréquence de la lumière émise par le Soleil

Sur Terre on mesure la fréquence de la lumière émise par le Soleil :

$$\begin{aligned}\nu_{0\oplus} &\approx \nu_{0\odot} \left(1 - \frac{\phi_{\odot} - \phi_{\oplus}}{c^2}\right) \\ &\approx \nu_{0\odot} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{-GM_{\odot}}{R_{\odot}} + \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}\right)\right] \\ &\approx \nu_{0\odot} \left(1 - \frac{GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}\right) \\ \frac{\nu_{0\oplus} - \nu_{0\odot}}{\nu_{0\odot}} &\approx -\frac{GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}\end{aligned}$$

Constante gravitationnelle : $G \approx 6,674\,28 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Vitesse de la lumière : $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$

Masse du Soleil : $M_{\odot} \approx 1,988\,5 \times 10^{30} \text{ kg}$

Rayon moyen du Soleil : $R_{\odot} \approx 696\,342 \times 10^3 \text{ m}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{\odot}} \approx -2 \times 10^{-6}$$

Les raies spectrales d'émission des atomes venant du Soleil et observées depuis la Terre sont décalées vers les basses fréquences (vers le rouge) par rapport aux raies spectrales d'émission de mêmes atomes situés sur la Terre.

Exemple 7.4.2 : Décalage gravitationnel de la fréquence de la lumière

On considère un photon émis verticalement vers le haut, depuis un point A de la surface terrestre, vers un point B à une hauteur H au-dessus du point A . On note M la masse de la Terre et R son rayon :

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu_{0A} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R+H} \right) \right] \\ &\approx \nu_{0A} \left[1 - \frac{GM}{Rc^2} \left(\frac{H}{R+H} \right) \right]\end{aligned}$$

On fait la nouvelle approximation $R + H \approx R$:

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu_{0A} \left(1 - \frac{GMH}{R^2c^2} \right) \\ \frac{\nu_{0B} - \nu_{0A}}{\nu_{0A}} &\approx \frac{-GMH}{R^2c^2} \\ &\approx \frac{-gH}{c^2}\end{aligned}$$

où g est le champ de pesanteur à la surface de la Terre (supposé constant jusqu'à la hauteur H). En B la fréquence du photon est décalée vers le rouge.

Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre à Paris : $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$

Vitesse de la lumière : $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$

Hauteur : $H = 20 \text{ m}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 2,18 \times 10^{-15}$$

7.5 Métrique d'un champ gravitationnel

Contrairement à la relativité restreinte, en relativité générale on ne peut définir l'élément de distance spatiale en posant $dx^0 = 0$, car d'après (7.4), dans un champ gravitationnel le temps propre est fonction de x^0 par l'intermédiaire de g_{00} lui-même fonction du lieu. On procède alors de la façon suivante : d'un point B de coordonnées spatiales $x^i + dx^i$ on émet un rayon lumineux vers un point A de coordonnées spatiales x^i , qui réfléchit le rayon vers le point B . Le temps mesuré en B multiplié par c est égal au double de la distance AB . L'intervalle d'univers entre

l'évènement émission du rayon en B et l'évènement réception du rayon en B s'écrit :

$$ds^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$$

En séparant les coordonnées spatiales et temporelles :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{00} (dx^0)^2$$

En supposant que la lumière se propage à la vitesse limite, l'intervalle est nul :

$$g_{ij} dx^i dx^j + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{00} (dx^0)^2 = 0$$

Cherchons pour quelles valeurs de dx^0 cette équation est vérifiée. Le discriminant réduit de cette équation du second degré en dx^0 s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac \\ &= g_{0i}^2 (dx^i)^2 - g_{00} g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

Les deux racines de l'équations sont :

$$\begin{aligned} dx_{\pm}^0 &= (-b' \pm \sqrt{\Delta'})/a \\ &= \left(-g_{0i} dx^i \pm \sqrt{g_{0i}^2 (dx^i)^2 - g_{00} g_{ij} dx^i dx^j} \right) / g_{00} \end{aligned}$$

En remplaçant $g_{0i} dx^i$ par $g_{0j} dx^j$:

$$\begin{aligned} dx_{\pm}^0 &= \left(-g_{0i} dx^i \pm \sqrt{g_{0i} g_{0j} dx^i dx^j - g_{00} g_{ij} dx^i dx^j} \right) / g_{00} \\ &= \left[-g_{0i} dx^i \pm \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{00} g_{ij}) dx^i dx^j} \right] / g_{00} \end{aligned}$$

$x^0 + dx_-^0$ est la coordonnées temporelle de l'évènement émission du signal, et $x^0 + dx_+^0$ est la coordonnées temporelle de l'évènement réception du signal. « L'intervalle de temps » entre les deux évènements s'écrit :

$$dx_+^0 - dx_-^0 = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{00} g_{ij}) dx^i dx^j}$$

Avec (7.4) page 125 nous avons l'intervalle de temps propre :

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} (dx_+^0 - dx_-^0) / c$$

que l'on multiplie par $c/2$ pour avoir la distance spatiale :

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{g_{00}} (dx_+^0 - dx_-^0) / 2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{(g_{0i} g_{0j} - g_{00} g_{ij}) dx^i dx^j} \\ dl^2 &= \frac{1}{g_{00}} (g_{0i} g_{0j} - g_{00} g_{ij}) dx^i dx^j \\ &= \left(\frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j \\ &= \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \tag{7.6}$$

où

$$\forall i, j \quad \gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}$$

est la métrique tridimensionnelle de l'espace exprimée en fonction de celle quadridimensionnelle de l'espace-temps. En général les $g_{\lambda\mu}$ dépendent de x^0 de sorte que la métrique spatiale dépend du temps. Dans ce cas on ne peut intégrer dl car sa valeur dépend de la ligne d'univers choisie entre les deux événements. En relativité générale la notion de distance perd donc sa signification, sauf lorsque les $g_{\lambda\mu}$ ne dépendent pas du temps.

Remarque 7.5.1

Lorsque le champ gravitationnel tend vers zéro, l'espace-temps devient celui pseudo-euclidien de la relativité restreinte avec les g_{0i} nuls et $g_{00} = 1$. Nous retrouvons alors

$$\forall i, j \quad \gamma_{ij} = -g_{ij}$$

Le signe négatif est dû au choix de la signature de la métrique.

Avec le dual du tenseur métrique (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) :

$$\forall \lambda, \mu \quad g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_{\mu}^{\lambda}$$

vraie lorsque les paramètres λ et μ prennent les valeurs 0, 1, 2, 3 est aussi vraie lorsque les paramètres ne prennent que les valeurs 1, 2, 3 :

$$\forall i, j \quad g^{i\nu} g_{\nu j} = \delta_j^i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j \quad g^{ik} g_{kj} + g^{i0} g_{0j} = \delta_j^i \quad (7.7)$$

Elle est également vraie lorsqu'au moins un paramètre est nul

$$\begin{aligned} \begin{cases} g^{0\nu} g_{\nu j} = \delta_j^0 & \forall j \\ g^{i\nu} g_{\nu 0} = \delta_0^i & \forall i \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} g^{0k} g_{kj} + g^{00} g_{0j} = \delta_j^0 & \forall j \\ g^{ik} g_{k0} + g^{i0} g_{00} = \delta_0^i & \forall i \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} g^{0k} g_{kj} + g^{00} g_{0j} = 0 & \forall j \neq 0 \\ g^{0k} g_{k0} + g^{00} g_{00} = 1 & i = j = 0 \\ g^{ik} g_{k0} + g^{i0} g_{00} = 0 & \forall i \neq 0 \end{cases} \\ \forall i \quad g^{ik} g_{k0} + g^{i0} g_{00} = 0 & \Leftrightarrow \forall i \quad g^{i0} = -\frac{g^{ik} g_{k0}}{g_{00}} \end{aligned}$$

Reprenons (7.7) de la présente page

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad g^{ik} g_{kj} + g^{i0} g_{0j} &= \delta_j^i \\ g^{ik} g_{kj} - \frac{g^{ik} g_{k0}}{g_{00}} g_{0j} &= \delta_j^i \\ g^{ik} \left(g_{kj} - \frac{g_{k0} g_{0j}}{g_{00}} \right) &= \delta_j^i \\ -g^{ik} \gamma_{kj} &= \delta_j^i \end{aligned}$$

Avec le dual du tenseur métrique :

$$\forall j, k \quad \gamma_{kj} = -g_{kj}$$

et

$$\forall j, k \quad \gamma^{kj} = -g^{kj}$$

Le tenseur tridimensionnel $-g_{ij}$ est le tenseur métrique de la métrique (7.6) page 128.

Pour synchroniser deux horloges aux points A et B précédents, nous utilisons également des signaux lumineux. L'instant x^0 au point A est simultané à l'instant au point B milieu de l'aller-retour :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(dx_-^0 + dx_+^0) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-g_{0i}dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}}{g_{00}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-g_{0i}dx^i - \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}}{g_{00}} \right\} \\ &= - \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'instant x^0 au point A est simultané avec l'instant $-g_{0i}dx^i/g_{00}$ au point B . Cette relation permet de synchroniser les horloges dans un volume infinitésimal autour du point B . En procédant de proche en proche on peut synchroniser des horloges le long d'une ligne ouverte, mais pas le long d'un contour fermé. En effet, après avoir fait le tour du contour, on se trouve avec une valeur de $-g_{0i}dx^i/g_{00}$ différente de zéro. La synchronisation des horloges dans tout l'espace est a fortiori impossible, à l'exception des référentiels dans lesquels $\forall i \ g_{0i} = 0$. Cette impossibilité de synchroniser toutes les horloges dans tout l'espace n'est pas une propriété de l'espace-temps, elle est liée au choix du référentiel. Dans tout champ gravitationnel il est toujours possible de choisir un référentiel tel que les quantités g_{0i} soient nulles, ce qui rend possible la synchronisation de toutes les horloges.

En relativité restreinte le cours du temps est différent pour deux horloges animées d'un mouvement relatif. En relativité générale s'ajoute le fait que le temps s'écoule différemment en différents points de l'espace d'un référentiel donné. Si deux événements E_1 et E_2 ont lieu en un point A et sont simultanés avec respectivement les deux événements E'_1 et E'_2 en un point B , l'intervalle de temps propre entre E_1 et E_2 sera en général différent de l'intervalle de temps propre entre E'_1 et E'_2 .

Puisque nous avons supposé $dx_-^0 = dx_+^0$, la relation précédente s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \frac{g_{00}}{2}(dx_+^0 + dx_-^0) + g_{0i}dx^i &= 0 \\ g_{00}dx^0 + g_{0i}dx^i &= 0 \\ g_{0\lambda}dx^\lambda &= 0 \\ dx_0 &= 0 \end{aligned}$$

La différentielle covariante dx_0 doit donc être nulle.

7.6 Lien potentiel gravitationnel et quadritenseur énergie-impulsion

Prenons le laplacien du potentiel gravitationnel g_{00} en champ faible et pour $v \ll c$:

$$\begin{aligned}\Delta g_{00} &= \Delta \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \\ &= \frac{2}{c^2} \Delta \phi\end{aligned}$$

Avec l'équation de Poisson (Cf. Vol. 2 Mécanique classique) :

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi\rho\mathcal{G}}{c^2}$$

Or avec la définition du tenseur énergie-impulsion (cf. Tome 4) :

$$P^{00} = \rho c^2$$

En coordonnées galiléennes réduites avec la notation indicielle (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte), avec la signature $(+ - - -)$, $P^{00} = P_{00}$:

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} P_{00} \quad (7.8)$$

7.7 Trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel

Nous cherchons l'équation de la trajectoire d'un mobile libre de masse m dans un champ gravitationnel. Nous reprenons le principe de moindre action en relativité restreinte (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte) dans lequel la présence d'un champ gravitationnel est prise en compte dans l'expression de la métrique ds :

$$\begin{aligned}-mc\delta \int_A^B ds &= 0 \\ \delta \int_A^B ds &= 0 \\ \int_A^B \delta ds &= 0\end{aligned}$$

À partir de (7.1) page 119 :

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ \delta ds^2 &= \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} \delta dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu \\ 2ds\delta ds &= \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta ds &= \left(\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{\delta dx^\nu}{ds} \right) ds \\
 &= \left[\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu \right) - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\nu \right] ds \\
 \int \delta ds &= \int \left[\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\nu \right] ds + \int \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu \right) ds
 \end{aligned}$$

Le dernier membre est nul car $\delta x^\nu(A) = \delta x^\nu(B) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \int \delta ds &= \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\sigma \right] ds \\
 &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds
 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma = 0, \dots, 3 \quad \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)
 \end{aligned}$$

$$\int \delta ds = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right] \delta x^\sigma ds$$

On utilise les symboles de Christoffel de 1^{re} espèce, relation (2.13) page 19,

$$\int \delta ds = \int \left(-\Gamma_{\sigma\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds$$

puis les symboles de Christoffel de 2^e espèce, relation (2.5) page 16 :

$$\begin{aligned}
 \int \delta ds &= - \int \left(g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds \\
 &= - \int \left(g_{\sigma\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\lambda\sigma} \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds \\
 &= - \int g_{\sigma\lambda} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds
 \end{aligned}$$

La variation de l'action étant nulle pour des variations arbitraires des coordonnées δx^σ , nous retrouvons l'équation (1.2) page 4 d'une géodésique :

$$\forall \lambda = 0, \dots, 3 \quad \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Nous pouvons obtenir ce résultat par un raisonnement beaucoup plus direct. En relativité restreinte un mobile est libre si sa 4-accélération est nulle (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte) :

$$\forall \lambda \quad \frac{du_\lambda}{ds} = 0$$

En relativité générale le champ gravitationnel courbe l'espace-temps, ce qui revient à prendre un système de coordonnées curviligne. La dérivée ordinaire est remplacée par une dérivée absolue :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \quad \frac{Du^\lambda}{ds} &= 0 \\ \frac{du^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

C'est l'équation de la trajectoire d'un mobile libre dans un champ gravitationnel.

7.8 Les équations du champ gravitationnel

7.8.1 Cas intérieur

Nous cherchons à établir une relation entre champ gravitationnel et matière qui généralise les équations de Poisson et de Laplace (Cf. Vol. 2 Mécanique classique). Ces équations différentielles déterminent localement le potentiel newtonien dans les cas intérieur et extérieur à la distribution de matière. Nous cherchons cette relation sous une forme covariante générale, c.-à-d. tensorielle. Commençons par l'équation du champ en dehors de la matière (cas extérieur). Supposons que le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel (§ 5.4.4 page 74) soit nul

$$\forall \lambda, \mu, \nu, \sigma \quad R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$$

Dans ce cas, on peut toujours effectuer un changement de coordonnées pour rendre constants les potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$ et nuls les symboles de Christoffel. Les géodésiques sont alors des lignes droites dans l'espace-temps et dans l'espace. C'est l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte, sans courbure ni gravitation. Par exemple, dans notre système solaire, à l'extérieur de la matière du Soleil et des planètes, ces dernières se déplaceraient en ligne droite à vitesse constante. On rejette donc cette hypothèse.

Supposons que le tenseur de courbure de Ricci (§ 5.4.9 page 87) soit nul :

$$\forall \mu, \sigma \quad R_{\mu\sigma} = 0 \quad (7.10)$$

Cette hypothèse est moins contraignante car on peut avoir $R_{\mu\nu,\lambda\sigma} \neq 0$ bien que le tenseur de Ricci soit nul. Cette relation conduit à des équations aux dérivées partielles du second ordre pour les potentiels gravitationnels (autrement dit contenant les potentiels gravitationnels ainsi que leurs dérivées premières et secondes), dans lesquelles les dérivées secondes interviennent linéairement. En cela elle ressemble à l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ (Cf. Vol. 2 Mécanique classique). Nous conservons cette hypothèse.

Cherchons maintenant les équations à l'intérieur de la matière sous la forme d'une égalité entre tenseurs de l'espace-temps,

$$\forall \mu, \nu \quad S_{\mu\nu} = \chi Q_{\mu\nu}$$

où d'après (7.8) page 131 :

$$\forall \mu, \nu \quad S_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} Q_{\mu\nu}$$

Le tenseur $Q_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion total des distributions de matière et d'énergie. Il décrit en chaque point d'univers la distribution de matière et d'énergie (cas intérieur). Dans les régions vides de matière et d'énergie (cas extérieur) il est identiquement nul et nous devons retrouver (7.10) page précédente, donc $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Le tenseur $Q_{\mu\nu}$ étant d'ordre deux, le tenseur $S_{\mu\nu}$ est aussi d'ordre deux.

Dans l'hypothèse d'un milieu continu avec interactions électromagnétiques nous avons

$$\forall \mu, \nu \quad Q_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}$$

où $P_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du milieu continu (déf. (6.27) p. 117) et $M_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. $P_{\mu\nu}$ et $M_{\mu\nu}$ étant symétriques, $Q_{\mu\nu}$ l'est aussi. Par conséquent le tenseur que nous cherchons $S_{\mu\nu}$ est aussi symétrique. La gravitation n'étant pas modélisée par une force, les f^i sont nulles et (6.26) p. 117 deviennent :

$$\forall \mu, \nu \quad \nabla_\nu P^{\mu\nu} = 0$$

La divergence du tenseur énergie-impulsion du milieu continu est nulle car il se conserve (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte), ainsi que celle de $Q_{\mu\nu}$ qui généralise $P_{\mu\nu}$

$$\forall \mu, \nu \quad \nabla_\nu Q^{\mu\nu} = 0$$

Ils sont dits *conservatifs*. Cette étude valable en relativité restreinte est valable localement pour l'espace-temps de la relativité générale en prenant une métrique pseudo-euclidienne osculatrice à V_4 . Par conséquent $S_{\mu\nu}$ est aussi de divergence nulle :

$$\forall \mu, \nu \quad \nabla_\nu S^{\mu\nu} = 0$$

$S_{\mu\nu}$ est un tenseur purement géométrique ne dépendant que de la métrique, c.-à-d. des potentiels gravitationnels et de leurs dérivées (par rapport aux coordonnées). Si on utilise le tenseur métrique et uniquement ses dérivées premières, alors aucun nouveau tenseur ne peut être construit. En effet, en chaque point on peut trouver un système de coordonnées (géodésiques) dans lequel les dérivées premières du tenseur métrique sont nulles. Le tenseur cherché est alors égale au tenseur métrique lui-même, ou à son inverse, ou à $\epsilon^{ijkl}/\sqrt{g}$ (où ϵ^{ijkl} est le tenseur d'antisymétrie), etc. Cette égalité entre tenseur étant vraie dans un système de coordonnées, elle est vraie dans tout système de coordonnées. Nous utilisons donc le tenseur métrique ainsi que ses dérivées premières et secondes. Le tenseur de courbure de Ricci dépend des potentiels gravitationnels et est symétrique d'ordre deux mais n'est pas de divergence nulle, en revanche le tenseur d'Einstein (5.26) page 91 est symétrique d'ordre deux, conservatif et dépendant des potentiels gravitationnels.

Élie Cartan a montré que de façon générale les tenseurs satisfaisant aux conditions précédentes sont donnés par

$$\forall \mu, \nu \quad S_{\mu\nu} = \alpha \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \beta) \right]$$

où α et β sont des constantes, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure de Ricci, R est sa courbure riemannienne scalaire. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \beta) &= \chi Q_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \chi Q_{\mu\nu} \end{aligned}$$

où l'on supprime la constante α puisqu'il y a déjà la constante χ . La constante $\Lambda = -\frac{1}{2}\beta$ est appelée *constante cosmologique*. Sauf dans certaines études cosmologiques très spéciales, on n'envisage en théorie relativiste de la gravitation que le cas $\Lambda = 0$. Nous avons alors les équations du champ gravitationnel :

$$\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} Q_{\mu\nu} \quad (7.11)$$

7.8.2 Cas extérieur

Les équations du champ gravitationnel libre, c.-à-d. à l'extérieur des masses qui l'engendrent s'écrivent :

$$\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

En passant en composantes mixtes :

$$\begin{aligned} \forall \nu, \nu \quad g^{\nu\mu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} R &= \chi g^{\nu\mu} Q_{\mu\nu} \\ R^\nu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\nu_\nu R &= \chi Q^\nu_\nu \end{aligned}$$

où l'on utilise la notation des tenseurs symétriques (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique). En contractant les indices ν et ν ,

$$\forall \nu \quad R^\nu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\nu_\nu R = \chi Q^\nu_\nu$$

D'après la déf. (5.4.5) page 89 de la courbure scalaire :

$$R^\nu_\nu = R$$

De même la contraction suivante est appelée *scalaire de Laue* :

$$Q^\nu_\nu = Q$$

Avec $\delta^\nu_\nu = 4$ dans un espace à 4 dimensions (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique), on a alors :

$$\begin{aligned} R - 2R &= \chi Q \\ R &= -\chi Q \end{aligned}$$

Cette dernière relation permet d'écrire les équations équivalentes à (7.11) de la présente page :

$$\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} \left(Q_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} Q \right)$$

Dans un espace vide $Q_{\mu\nu} = 0$, nous retrouvons (7.10) page 133 :

$$\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} = 0 \quad (7.12)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, cela ne signifie pas que l'espace-temps vide de matière et d'énergie soit plat (il est déformé par de la matière ou de l'énergie « plus loin »), car pour cela il faudrait que le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel soit nul, c.-à-d. les conditions plus restrictives $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$.

Chapitre 8

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

8.1 Cas extérieur

Le principe de moindre action est la méthode historique utilisée par David Hilbert pour établir les équations du champ gravitationnel. Par analogie avec le principe de moindre action qui donne les équations de la dynamique classique, nous supposons que les équations du champ gravitationnel à l'extérieur des masses et de l'énergie qui l'engendrent, dérivent (sont issues) d'un principe de moindre action. Il s'agit de trouver l'action $\mathcal{S}_g$ du champ gravitationnel comme fonction des potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$, invariante par changement de coordonnées pour assurer l'invariance des équations du champ gravitationnel, puis de poser l'hypothèse que la variation de cette action est nulle lors d'une variation des potentiels gravitationnels :

$$\delta \mathcal{S}_g = 0$$

Pour trouver l'expression de $\mathcal{S}_g$, partons de l'invariance de l'hypervolume par changement de coordonnées, (5.6) page 50 :

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|} d\Omega &= \sqrt{|g'|} d\Omega' \\ \int \mathcal{L}_g \sqrt{|g|} d\Omega &= \int \mathcal{L}'_g \sqrt{|g'|} d\Omega'\end{aligned}$$

où le lagrangien du champ gravitationnel $\mathcal{L}_g$ est un scalaire, donc un invariant. Le déterminant g étant négatif (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte), nous avons la forme de l'action cherchée :

$$\mathcal{S}_g = \kappa \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g} d\Omega$$

où κ est une constante. Il s'agit à présent de trouver l'expression du lagrangien $\mathcal{L}_g$. Par analogie avec l'équation de Laplace du potentiel du champ gravitationnel dans le cas extérieur $\Delta\phi = 0$ (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), nous cherchons les équations du champ gravitationnel sous forme d'équations différentielles du second ordre par rapport aux potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$. Autrement dit $\mathcal{L}_g$ doit être du premier ordre car on prend sa variation. Il n'existe pas de scalaire

formé à partir des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées premières $\partial_k g_{\mu\nu}$ (ou des symboles de Christoffel). Ces derniers peuvent toujours être annulés en un point en prenant un système de coordonnées localement géodésique en ce point. En revanche, le scalaire de courbure riemannienne R , ainsi que $\alpha R + \beta$ où α et β sont des constantes, contiennent les dérivées secondes des $g_{\mu\nu}$ de manière linéaire, ce qui fait qu'elles disparaissent lors de la variation. Dans un premier temps on suppose que le lagrangien est la courbure scalaire. Avec la définition de la courbure scalaire R 5.4.5 page 89 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_g &= \kappa \int \sqrt{-g} R d\Omega \\ \delta \mathcal{S}_g &= \kappa \int \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) d\Omega \\ \frac{1}{\kappa} \delta \mathcal{S}_g &= \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega \\ &= \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d\Omega + \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega \end{aligned}$$

- Calculons la première intégrale grâce à $dg = g g^{ij} dg_{ij}$ (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) qui donne δg :

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= \frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}} \\ &= \frac{-g}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= 4 \\ \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) &= 0 \\ g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= \frac{g}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{\sqrt{-g} \sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d\Omega &= \int R \delta \sqrt{-g} d\Omega \\ &= -\frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} R \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\Omega \end{aligned}$$

- Calculons la troisième intégrale en nous plaçant dans un système de coordonnées localement géodésiques. Le tenseur de courbure de Ricci (déf. 5.4.4 page 87) se simplifie. Les symboles

de Christoffel sont nuls, mais pas leur dérivée :

$$\begin{aligned}
 \forall \mu, \sigma = 0, \dots, 3 \quad R_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\xi_{\sigma\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\sigma\xi} \\
 &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \\
 &= \delta (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) \\
 &= \partial_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \\
 &= D_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - D_\sigma \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}
 \end{aligned}$$

car lorsque les symboles de Christoffel sont nuls, la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle ordinaire. C'est une équation tensorielle, donc valable dans tous système de coordonnées, pas seulement localement géodésique.

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (D_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - D_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) \\
 &= g^{\mu\nu} D_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\nu} D_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}
 \end{aligned}$$

La dérivation covariante du tenseur métrique étant nulle :

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= D_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - D_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) \\
 &= D_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - D_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}) \\
 &= D_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu})
 \end{aligned}$$

Reprenons le théorème de la divergence :

$$\oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div } \vec{u} \, dv$$

$\vec{u} \cdot \vec{n}$ et $\text{div } \vec{u}$ sont des scalaires et l'intégrale de surface et celle de volume ne dépendent pas du système de coordonnées, par conséquent ce théorème est une égalité entre deux scalaires, donc une relation tensorielle vraie dans tout système de coordonnées :

$$\oint_S u^i n_i \, ds = \iiint_V \partial_i u^i \, dv \quad (8.1)$$

Avec $\prod_{i=1}^n dx^i \stackrel{\text{déf}}{=} d\Omega$, remplaçons ds par $\sqrt{|g|} \, d\sigma$ et dv par $\sqrt{|g|} \, d\Omega$:

$$\oint_S \sqrt{|g|} u^i n_i \, d\sigma = \iiint_V \sqrt{|g|} \partial_i u^i \, d\Omega$$

on a :

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega &= \int \sqrt{-g} D_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}) d\Omega \\
 &= \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}) d\sigma_\lambda \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Cette intégrale est nulle car calculée sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration sur laquelle les variations du champ sont nulles conformément au principe de moindre action.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa} \delta \mathcal{S}_g &= -\frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} R \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega \\ \delta \mathcal{S}_g &= \kappa \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\Omega\end{aligned}$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit les équations du champ gravitationnel dans le cas extérieur :

$$\begin{aligned}\forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ S_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}$$

Chaque composante du tenseur $S_{\mu\nu}$ est nulle, ce qui donne 16 relations. Nous avons vu que par symétrie des tenseurs $R_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, le tenseur S est symétrique. Par conséquent, parmi les 16 composantes de ce tenseur, seules 10 sont distinctes et ne restent que 10 relations indépendantes (par exemple la relation $S_{02} = 0$ est équivalente à la relation $S_{20} = 0$). La nullité de la divergence du tenseur d'Einstein (5.25) page 91 donne :

$$\begin{aligned}\forall \lambda, \nu = 0, \dots, 3 \quad g^{\lambda\mu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ R^{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\nu R &= 0 \\ \forall \nu = 0, \dots, 3 \quad \nabla_\lambda \left(R^{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\nu R \right) &= 0\end{aligned}$$

Ces quatre relations lient les dix composantes de $S_{\mu\nu}$ restantes, il n'y a donc que six relations distinctes, qui correspondent aux six composantes indépendantes du tenseur métrique.

8.2 Lagrangien du champ gravitationnel

Nous allons voir que le lagrangien a une expression plus simple que la courbure scalaire. Avec la déf. 5.4.5 page 89 de la courbure scalaire R puis celle du tenseur de courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ 5.4.4 page 87 :

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ \sqrt{-g} R &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\xi_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right)\end{aligned}$$

On intègre par partie le premier et le deuxième terme dans la parenthèse :

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} R &= \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \\ &\quad + \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \right) \\ &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\xi_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right)\end{aligned}$$

Réorganisons les termes et intégrons :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g} R d\Omega &= \int \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right) \\ &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\xi_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right) d\Omega \\ &\quad + \int \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \right) d\Omega\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la divergence sous forme tensorielle (8.1) p. 139, le dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \int \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) d\Omega &= \int \partial_\lambda [\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \Gamma^\nu_{\nu\mu})] d\Omega \\ &= \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \Gamma^\nu_{\nu\mu}) d\sigma^r \end{aligned}$$

Sa variation est nulle car l'intégrale est évaluée sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration sur laquelle la variation du champ est nulle conformément au principe de moindre action. Il reste

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} R d\Omega &= \int \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \\ &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma^\xi_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi}) d\Omega \end{aligned}$$

- le premier terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \mu \quad \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) &= g^{\mu\nu} \partial_\nu (\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{\partial_\nu g}{2\sqrt{-g}} + \sqrt{-g} \partial_\nu g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Avec $\partial_k g = g g^{ij} \partial_k g_{ij}$ (Cf. Vol. 4 Tenseur métrique) donnant $\partial_\nu g$:

$$\begin{aligned} \forall \mu \quad \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) &= -g^{\mu\nu} \frac{g}{2\sqrt{-g}} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g} \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{-\sqrt{-g}\sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g} \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g} \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\nu g^{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad g^{\mu\nu} &= g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\lambda \\ &= g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} g_{\lambda\sigma} \\ \forall \mu \quad \partial_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} g_{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} \partial_\nu g^{\nu\sigma} g_{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} \\ &= \partial_\nu g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\lambda + \delta^\mu_\sigma \partial_\nu g^{\nu\sigma} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} \\ &= \partial_\nu g^{\mu\nu} + \partial_\nu g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} \\ &= -g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \mu \quad \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} \right)$$

Avec la relation donnant les symboles de Christoffel de 2^e espèce en fonction du tenseur

métrique (2.14) page 19 :

$$\begin{aligned}
 \forall \mu, \sigma, \nu = 0, \dots, 3 \quad \Gamma^\mu_{\sigma\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\sigma\nu}) \\
 \forall \mu \quad g^{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} &= g^{\mu\lambda} \left(\frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\lambda g_{\sigma\nu} \right) \\
 &= g^{\mu\lambda} \left(g^{\sigma\nu} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\lambda g_{\sigma\nu} \right) \\
 &= g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu} \partial_\lambda g_{\sigma\nu} \\
 &= g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \mu \quad \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g} g^{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu}$$

- le deuxième terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \forall \lambda, \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) &= g^{\mu\nu} \partial_\lambda (\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \partial_\lambda g^{\mu\nu} \\
 &= g^{\mu\nu} \frac{-\partial_\lambda g}{2\sqrt{-g}} + \sqrt{-g} \partial_\lambda g^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} g^{\xi\omega} \partial_\lambda g_{\xi\omega} + \sqrt{-g} \partial_\lambda g^{\mu\nu} \\
 &= \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\xi\omega} \partial_\lambda g_{\xi\omega} + \partial_\lambda g^{\mu\nu} \right)
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Ricci en composantes contravariantes (3.9) page 38 et en appliquant (3.7) page 36 :

$$\begin{aligned}
 \forall \mu, \nu \quad Dg^{\mu\nu} &= 0 \\
 \forall \lambda, \mu, \nu \quad \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\xi} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi} \Gamma^\mu_{\xi\lambda} &= 0
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall \lambda, \mu, \nu \quad \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\xi\omega} \partial_\lambda g_{\xi\omega} - g^{\mu\xi} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi} \Gamma^\mu_{\xi\lambda} \right)$$

On utilise la forme particulière des symboles de Christoffel, (2.15) page 19 :

$$\forall \lambda, \mu, \nu \quad \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Gamma^\xi_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi} \Gamma^\mu_{\xi\lambda} \right)$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{-g} R d\Omega &= \int -\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \sqrt{-g} g^{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Gamma^\xi_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi} \Gamma^\mu_{\xi\lambda} \right) \\
 &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\xi_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right) d\Omega
 \end{aligned}$$

Factorisons $\sqrt{-g}$ et développons le reste :

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{-g} R d\Omega &= \int \sqrt{-g} \left(-g^{\sigma\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\xi_{\xi\lambda} + g^{\mu\xi} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\mu_{\xi\lambda} \right. \\
 &\quad \left. + g^{\mu\nu} \Gamma^\xi_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\xi} - g^{\mu\nu} \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right) d\Omega \\
 &= \int \sqrt{-g} \left(-g^{\sigma\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} + g^{\mu\xi} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\mu_{\xi\lambda} - g^{\mu\nu} \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right) d\Omega \\
 &= \int \sqrt{-g} \left(2g^{\mu\xi} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - g^{\sigma\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu} \Gamma^\xi_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \right) d\Omega
 \end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indices $\sigma \rightleftharpoons \mu$ et $\nu \rightleftharpoons \xi$ dans le deuxième terme, et $\nu \rightarrow \xi$ et $\xi \rightarrow \sigma$ dans le troisième :

$$\int \sqrt{-g} R d\Omega = \int \sqrt{-g} (2g^{\mu\xi} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi} \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi} - g^{\mu\xi} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\xi\sigma}) d\Omega$$

Ajoutons le terme nul $\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi}$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} R d\Omega &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\xi} [2(\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi}) - (\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi})] d\Omega \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\xi} (\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi}) d\Omega \end{aligned}$$

Nous obtenons l'expression du lagrangien du champ gravitationnel :

$$\mathcal{L}_g = g^{\mu\xi} (\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\nu_{\xi\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\xi})$$

8.3 Constante cosmologique

Si à la place de R nous prenons la combinaison linéaire $\alpha R + \beta$ avec α et β des constantes, nous avons :

$$\mathcal{S}_g = \kappa \int \sqrt{-g} (\alpha R + \beta) d\Omega$$

Or nous devons retrouver

$$\mathcal{S}_g = \kappa \int \sqrt{-g} R d\Omega$$

lorsque la constante β est nulle, donc $\alpha = 1$. Les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \beta) &= 0 \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \beta &= 0 \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \beta$$

est appelée *constante cosmologique*. Si cette constante est non nulle, sa valeur est très faible et par conséquent n'intervient quasiment pas localement mais uniquement en cosmologie, d'où son nom.

8.4 Cas intérieur

Dans le cas intérieur, pour déterminer les équations du champ gravitationnel dans la matière ou en présence de rayonnement électromagnétique, nous devons ajouter à l'action du champ gravitationnel $\mathcal{S}_g$, l'action pour la matière et le champ électromagnétique $\mathcal{S}_e$ (« e » pour énergie), telle que :

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{S}_g + \mathcal{S}_e) &= 0 \\ \delta\mathcal{S}_g + \delta\mathcal{S}_e &= 0 \\ \delta\mathcal{S}_e &= 0\end{aligned}$$

On suppose que l'action s'écrit

$$\mathcal{S}_e = \kappa' \int \mathcal{L}_e \sqrt{-g} d\Omega$$

où le lagrangien $\mathcal{L}_e$ est fonction du tenseur métrique et de ses dérivées premières :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_e &= \mathcal{L}_e(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \mathcal{L}_e(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})\end{aligned}$$

La variation de l'action s'écrit

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_e &= \kappa' \int \delta(\mathcal{L}_e \sqrt{-g}) d\Omega \\ \frac{1}{\kappa'} \delta\mathcal{S}_e &= \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\lambda g^{\mu\nu}) d\Omega \\ &= \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\lambda g^{\mu\nu}) d\Omega\end{aligned}$$

On intègre par partie le second terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa'} \delta\mathcal{S}_e &= \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right] d\Omega \\ &\quad - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu} d\Omega \\ &= \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \partial_\lambda \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \right] d\Omega \\ &\quad - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu} d\Omega\end{aligned}$$

On utilise le théorème de la divergence sous forme tensorielle (8.1) p. 139 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa'} \delta\mathcal{S}_e &= \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d\Omega + \oint \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} d\sigma_\lambda \\ &\quad - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu} d\Omega \\ &= \int \frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d\Omega - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu} d\Omega\end{aligned}$$

L'intégrale sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration est nulle car les variations du champ y sont nulles conformément au principe de moindre action.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_e &= \kappa' \int \left\{ \frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d\Omega \\ &= \kappa' \int \frac{1}{2}\sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega\end{aligned}$$

où l'on a posé le tenseur impulsion-énergie

$$\forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad T_{\mu\nu} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right]$$

Nous avons alors

$$\delta(\mathcal{S}_g + \mathcal{S}_e) = \kappa \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \chi T_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\Omega$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit les équations du champ gravitationnel dans le cas intérieur :

$$\forall \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}$$

Chapitre 9

CHAMP GRAVITATIONNEL À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

9.1 La métrique de Schwarzschild

Ce champ est créé par une distribution de matière à symétrie centrale. Lorsque la densité de matière tend vers zéro nous devons retrouver une métrique euclidienne, qui s'écrit en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2] \\ &= c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2] \end{aligned}$$

Le ds^2 le plus général est donc

$$ds^2 = a(r, t) c^2 dt^2 - b(r, t) dr^2 - c(r, t) [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2] + d(r, t) dr dt$$

où les fonctions a , b et d sont sans dimension, et c est homogène au carré d'une longueur. Effectuons une transformation de coordonnées de la forme générale

$$r = f_1(r', t') \quad \text{et} \quad t = f_2(r', t')$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques des nouvelles coordonnées r' et t' . Chaque fonction permet une condition, et l'on se débarrasse du terme croisé en posant

$$d(r', t') = 0$$

La deuxième condition conserve la symétrie centrale :

$$c(r', t') = r'^2$$

Les deux fonctions inconnues restantes sont écrites sous une forme exponentielle :

$$a(r', t') = e^{\alpha(r', t')} \quad \text{et} \quad b(r', t') = e^{\beta(r', t')}$$

Nous obtenons le ds^2 de la métrique de Schwarzschild (en omettant les primes)

$$ds^2 = e^{\alpha} c^2 dt^2 - e^{\beta} dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2]$$

où α et β sont des fonctions de r et t .

9.2 Le tenseur métrique de Schwarzschild

En coordonnées galiléennes réduites avec la notation indicielle (Cf. Vol. 5 Relativité restreinte) :

$$ds^2 = g_{00}d(x^0)^2 + g_{11}d(x^1)^2 + g_{22}d(x^2)^2 + g_{33}d(x^3)^2$$

avec

$$\begin{cases} g_{00} = e^\alpha \\ g_{11} = -e^\beta \\ g_{22} = -r^2 \\ g_{33} = -r^2 \sin^2(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow G \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Le déterminant de G s'écrit

$$g = -e^\alpha e^\beta r^4 \sin^2(\theta) \quad (9.2)$$

9.3 Le tenseur métrique dual de Schwarzschild

Les composantes du tenseur dual s'écrivent :

$$g^{00} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} -e^\beta & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{vmatrix} \Rightarrow g^{00} = \frac{-e^\beta r^4 \sin^2(\theta)}{-e^\alpha e^\beta r^4 \sin^2(\theta)} \Rightarrow g^{00} = e^{-\alpha}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{vmatrix} \Rightarrow g^{11} = \frac{e^\alpha r^4 \sin^2(\theta)}{-e^\alpha e^\beta r^4 \sin^2(\theta)} \Rightarrow g^{11} = -e^{-\beta}$$

$$g^{22} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{vmatrix} \Rightarrow g^{22} = \frac{e^\alpha e^\beta r^2 \sin^2(\theta)}{-e^\alpha e^\beta r^4 \sin^2(\theta)} \Rightarrow g^{22} = -\frac{1}{r^2}$$

$$g^{33} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix} \Rightarrow g^{33} = \frac{e^\alpha e^\beta r^2}{-e^\alpha e^\beta r^4 \sin^2(\theta)} \Rightarrow g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

9.4 Symboles de Christoffel en métrique de Schwarzschild

Les symboles de Christoffel ayant trois indices, dans un espace de dimension quatre ils ont $4^3 = 64$ composantes. Leur symétrie par rapport à deux indices réduit le nombre de composantes indépendantes à $4 \times (8 + 2) = 40$ (la moitié de la matrice 4×4 des indices symétriques, plus la moitié de ses éléments diagonaux, le tout fois 4).

Les relations (2.19) page 21 en coordonnées rectangulaires nous donnent pour les symboles de Christoffel de 2^e espèce :

$$\begin{cases} \Gamma^0_{00} = \frac{g_{00,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{01} = \frac{g_{00,1}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{02} = \frac{g_{00,2}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{03} = \frac{g_{00,3}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{11} = \frac{-g_{11,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{22} = \frac{-g_{22,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{33} = \frac{-g_{33,0}}{2g_{00}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{10} = \frac{g_{11,0}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{12} = \frac{g_{11,2}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{13} = \frac{g_{11,3}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{00} = \frac{-g_{00,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{22} = \frac{-g_{22,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{33} = \frac{-g_{33,1}}{2g_{11}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^2_{22} = \frac{g_{22,2}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{20} = \frac{g_{22,0}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{21} = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{23} = \frac{g_{22,3}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{00} = \frac{-g_{00,2}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{11} = \frac{-g_{11,2}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{33} = \frac{-g_{33,2}}{2g_{22}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^3_{33} = \frac{g_{33,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{30} = \frac{g_{33,0}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{31} = \frac{g_{33,1}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{32} = \frac{g_{33,2}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{00} = \frac{-g_{00,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{11} = \frac{-g_{11,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{22} = \frac{-g_{22,3}}{2g_{33}} \end{cases}$$

g_{00} et g_{11} ne sont fonction que des coordonnées x^0 et x^1 , g_{22} n'est fonction que de x^1 , et g_{33} n'est fonction que de x^1 et x^2 . Donc

$$g_{00,2} = g_{00,3} = g_{11,2} = g_{11,3} = g_{22,0} = g_{22,2} = g_{22,3} = g_{33,0} = g_{33,3} = 0$$

$$\begin{cases} \Gamma^0_{00} = \frac{g_{00,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{01} = \frac{g_{00,1}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0_{11} = \frac{-g_{11,0}}{2g_{00}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \frac{g_{11,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{10} = \frac{g_{11,0}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{00} = \frac{-g_{00,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{22} = \frac{-g_{22,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1_{33} = \frac{-g_{33,1}}{2g_{11}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^2_{21} = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2_{33} = \frac{-g_{33,2}}{2g_{22}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^3_{31} = \frac{g_{33,1}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3_{32} = \frac{g_{33,2}}{2g_{33}} \end{cases}$$

Notons par un point la dérivation par rapport à ct et par un prime celle par rapport à r . Avec le tenseur métrique de Schwarzschild (9.1) page 148 :

$$\begin{cases} \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} \dot{\alpha} \\ \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} \alpha' \\ \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} \dot{\beta} e^{\beta-\alpha} \end{cases} \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} \beta' \\ \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2} \dot{\beta} \\ \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \\ \Gamma^1_{22} = -r e^{-\beta} \\ \Gamma^1_{33} = -r \sin^2(\theta) e^{-\beta} \end{cases} \begin{cases} \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases} \begin{cases} \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^3_{32} = \cot(\theta) \end{cases}$$

9.5 Symboles de Christoffel contractés en métrique de Schwarzschild

Avec le déterminant du tenseur métrique de Schwarzschild (9.2) page 148, notons par un point la dérivation par rapport à ct et par un prime celle par rapport à r :

$$\begin{cases} \Gamma^i_{i0} = \frac{\partial_0 g}{2g} \\ \Gamma^i_{i1} = \frac{\partial_1 g}{2g} \\ \Gamma^i_{i2} = \frac{\partial_2 g}{2g} \\ \Gamma^i_{i3} = \frac{\partial_3 g}{2g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^i_{i0} = \frac{-(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) e^{\alpha+\beta} r^4 \sin^2(\theta)}{-2e^{\alpha+\beta} r^4 \sin^2(\theta)} \\ \Gamma^i_{i1} = \frac{-[4r^3 + (\alpha' + \beta') r^4] e^{\alpha+\beta} \sin^2(\theta)}{-2e^{\alpha+\beta} r^4 \sin^2(\theta)} \\ \Gamma^i_{i2} = \frac{-2e^{\alpha+\beta} r^4 \sin(\theta) \cos(\theta)}{-2e^{\alpha+\beta} r^4 \sin^2(\theta)} \\ \Gamma^i_{i3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^i_{i0} = \frac{1}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ \Gamma^i_{i1} = \frac{2}{r} + \frac{1}{2} (\alpha' + \beta') \\ \Gamma^i_{i2} = \cot(\theta) \\ \Gamma^i_{i3} = 0 \end{cases}$$

9.6 Tenseur de Ricci pour la métrique de Schwarzschild

Grâce aux symboles de Christoffel, § 9.4 page précédente, calculons la composante R_{00} :

$$R_{00} = \partial_r \Gamma^r_{00} - \partial_0 \Gamma^r_{r0} + \Gamma^k_{00} \Gamma^r_{rk} - \Gamma^k_{r0} \Gamma^r_{0k}$$

$$\begin{aligned} \partial_r \Gamma^r_{00} &= \partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_1 \Gamma^1_{00} + \partial_2 \Gamma^2_{00} + \partial_3 \Gamma^3_{00} \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_1 \Gamma^1_{00} \\ &= \frac{1}{2} \partial_{ct} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \partial_r (\alpha' e^{\alpha-\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} \alpha'' + \frac{1}{2} \alpha'^2 - \frac{1}{2} \alpha' \beta' \right) e^{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \Gamma^r_{r0} &= \partial_0 \Gamma^0_{00} + \partial_0 \Gamma^1_{10} + \partial_0 \Gamma^2_{20} + \partial_0 \Gamma^3_{30} \\ &= \frac{1}{2} \partial_{ct} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \partial_r \dot{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \ddot{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{00} \Gamma^r_{rk} &= \Gamma^0_{00} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{00} \Gamma^r_{r1} + \Gamma^2_{00} \Gamma^r_{r2} + \Gamma^3_{00} \Gamma^r_{r3} \\
 &= \Gamma^0_{00} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{00} \Gamma^r_{r1} \\
 &= \Gamma^0_{00} (\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) + \Gamma^1_{00} (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\alpha} \left(\frac{1}{2} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \dot{\beta} \right) + \frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{2} \alpha' + \frac{1}{2} \beta' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \left(\frac{1}{4} \alpha'^2 + \frac{1}{4} \alpha' \beta' + \frac{1}{r} \alpha' \right) e^{\alpha-\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{r0} \Gamma^r_{0k} &= \Gamma^0_{r0} \Gamma^r_{00} + \Gamma^1_{r0} \Gamma^r_{01} + \Gamma^2_{r0} \Gamma^r_{02} + \Gamma^3_{r0} \Gamma^r_{03} \\
 &= \Gamma^0_{r0} \Gamma^r_{00} + \Gamma^1_{r0} \Gamma^r_{01} \\
 &= \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{20} \Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{30} \Gamma^3_{00} \\
 &\quad + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{10} \Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{20} \Gamma^2_{01} + \Gamma^1_{30} \Gamma^3_{01} \\
 &= \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{10} \Gamma^1_{01} \\
 &= \frac{1}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \alpha'^2 e^{\alpha-\beta} + \frac{1}{4} \alpha'^2 e^{\alpha-\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \alpha'^2 e^{\alpha-\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{1}{2} \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} \alpha'' + \frac{1}{2} \alpha'^2 - \frac{1}{2} \alpha' \beta' \right) e^{\alpha-\beta} - \frac{1}{2} \ddot{\alpha} - \frac{1}{2} \ddot{\beta} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \left(\frac{1}{4} \alpha'^2 + \frac{1}{4} \alpha' \beta' + \frac{1}{r} \alpha' \right) e^{\alpha-\beta} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 - \frac{1}{2} \alpha'^2 e^{\alpha-\beta} \\
 &= -\frac{1}{2} \ddot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\alpha} \dot{\beta} - \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha'' + \frac{1}{4} \alpha'^2 - \frac{1}{4} \alpha' \beta' + \frac{1}{r} \alpha' \right) e^{\alpha-\beta}
 \end{aligned}$$

Calculons la composante R_{10} :

$$R_{10} = \partial_r \Gamma^r_{01} - \partial_0 \Gamma^r_{r1} + \Gamma^k_{01} \Gamma^r_{rk} - \Gamma^k_{r1} \Gamma^r_{0k}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_r \Gamma^r_{01} &= \partial_0 \Gamma^0_{01} + \partial_1 \Gamma^1_{01} + \partial_2 \Gamma^2_{01} + \partial_3 \Gamma^3_{01} \\
 &= \partial_0 \Gamma^0_{01} + \partial_1 \Gamma^1_{01} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_{ct} \alpha' + \frac{1}{2} \partial_r \dot{\beta} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}' + \frac{1}{2} \dot{\beta}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_0 \Gamma^r_{r1} &= \partial_0 \Gamma^0_{01} + \partial_0 \Gamma^1_{11} + \partial_0 \Gamma^2_{21} + \partial_0 \Gamma^3_{31} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_{ct} \alpha' + \frac{1}{2} \partial_{ct} \beta' + \partial_{ct} \frac{1}{r} + \partial_{ct} \frac{1}{r} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}' + \frac{1}{2} \dot{\beta}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{01} \Gamma^r_{rk} &= \Gamma^0_{01} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{01} \Gamma^r_{r1} + \Gamma^2_{01} \Gamma^r_{r2} + \Gamma^3_{01} \Gamma^r_{r3} \\
 &= \Gamma^0_{01} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{01} \Gamma^r_{r1} \\
 &= \Gamma^0_{01} (\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) + \Gamma^1_{01} (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \\
 &= \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{01} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{01} \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{01} \Gamma^2_{21} + \Gamma^1_{01} \Gamma^3_{31} \\
 &= \frac{1}{4} \alpha' \dot{\alpha} + \frac{1}{4} \alpha' \dot{\beta} + \frac{1}{4} \alpha' \dot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta} \beta' + \frac{1}{r} \dot{\beta} \\
 &= \frac{1}{4} \alpha' \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha' \dot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta} \beta' + \frac{1}{r} \dot{\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{r1} \Gamma^r_{0k} &= \Gamma^0_{r1} \Gamma^r_{00} + \Gamma^1_{r1} \Gamma^r_{01} + \Gamma^2_{r1} \Gamma^r_{02} + \Gamma^3_{r1} \Gamma^r_{03} \\
 &= \Gamma^0_{r1} \Gamma^r_{00} + \Gamma^1_{r1} \Gamma^r_{01} \\
 &= \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{21} \Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{31} \Gamma^3_{00} \\
 &\quad + \Gamma^1_{01} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{21} \Gamma^2_{01} + \Gamma^1_{31} \Gamma^3_{01} \\
 &= \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{01} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{01} \\
 &= \frac{1}{4} \alpha' \dot{\alpha} + \frac{1}{4} \alpha' \dot{\beta} + \frac{1}{4} \alpha' \dot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta} \beta' \\
 &= \frac{1}{4} \alpha' \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \alpha' \dot{\beta} + \frac{1}{4} \dot{\beta} \beta'
 \end{aligned}$$

$$R_{10} = \frac{\dot{\beta}}{r}$$

Calculons la composante R_{11} :

$$R_{11} = \partial_r \Gamma^r_{11} - \partial_1 \Gamma^r_{r1} + \Gamma^k_{11} \Gamma^r_{rk} - \Gamma^k_{r1} \Gamma^r_{1k}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_r \Gamma^r_{11} &= \partial_0 \Gamma^0_{11} + \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_2 \Gamma^2_{11} + \partial_3 \Gamma^3_{11} \\
 &= \partial_0 \Gamma^0_{11} + \partial_1 \Gamma^1_{11} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_{ct} (\dot{\beta} e^{\beta-\alpha}) + \frac{1}{2} \partial_r \beta' \\
 &= \frac{1}{2} \beta'' + \left(\frac{1}{2} \ddot{\beta} + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 - \dot{\beta} \dot{\alpha} \right) e^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_1 \Gamma^r_{r1} &= \partial_1 \Gamma^0_{01} + \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_1 \Gamma^2_{21} + \partial_1 \Gamma^3_{31} \\
 &= \frac{1}{2} \partial_r \alpha' + \frac{1}{2} \partial_r \beta' + \partial_r \frac{1}{r} + \partial_r \frac{1}{r} \\
 &= \frac{1}{2} \alpha'' + \frac{1}{2} \beta'' - \frac{2}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{11} \Gamma^r_{rk} &= \Gamma^0_{11} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{11} \Gamma^r_{r1} + \Gamma^2_{11} \Gamma^r_{r2} + \Gamma^3_{11} \Gamma^r_{r3} \\
 &= \Gamma^0_{11} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{11} \Gamma^r_{r1} \\
 &= \Gamma^0_{11} (\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) + \Gamma^1_{11} (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \\
 &= \Gamma^0_{11} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{11} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11} \Gamma^2_{21} + \Gamma^1_{11} \Gamma^3_{31} \\
 &= \frac{1}{4} \dot{\beta} \dot{\alpha} e^{\beta-\alpha} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} + \frac{1}{4} \beta' \alpha' + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{2r} \beta' + \frac{1}{2r} \beta' \\
 &= \frac{1}{4} \beta' \alpha' + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{r} \beta' + \left(\frac{1}{4} \dot{\beta} \dot{\alpha} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 \right) e^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{r1} \Gamma^r_{1k} &= \Gamma^0_{r1} \Gamma^r_{10} + \Gamma^1_{r1} \Gamma^r_{11} + \Gamma^2_{r1} \Gamma^r_{12} + \Gamma^3_{r1} \Gamma^r_{13} \\
 &= \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{10} + \Gamma^0_{21} \Gamma^2_{10} + \Gamma^0_{31} \Gamma^3_{10} \\
 &\quad + \Gamma^1_{01} \Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{21} \Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{31} \Gamma^3_{11} \\
 &\quad + \Gamma^2_{01} \Gamma^0_{12} + \Gamma^2_{11} \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{21} \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{31} \Gamma^3_{12} \\
 &\quad + \Gamma^3_{01} \Gamma^0_{13} + \Gamma^3_{11} \Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{21} \Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{31} \Gamma^3_{13} \\
 &= \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{01} \Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{31} \Gamma^3_{13} \\
 &= \frac{1}{4} \alpha'^2 + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} + \frac{1}{4} \dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \\
 &= \frac{1}{4} \alpha'^2 + \frac{1}{4} \beta'^2 + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{1}{2}\beta'' + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha} - \frac{1}{2}\alpha'' - \frac{1}{2}\beta'' + \frac{2}{r^2} \\
 &\quad + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{4}\beta'^2 + \frac{1}{r}\beta' + \left(\frac{1}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2\right)e^{\beta-\alpha} \\
 &\quad - \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\beta'^2 - \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} \\
 &= -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha}
 \end{aligned}$$

Calculons la composante R_{22} :

$$R_{22} = \partial_r \Gamma^r_{22} - \partial_2 \Gamma^r_{r2} + \Gamma^k_{22} \Gamma^r_{rk} - \Gamma^k_{r2} \Gamma^r_{2k}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_r \Gamma^r_{22} &= \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22} \\
 &= \partial_1 \Gamma^1_{22} \\
 &= \partial_r (-re^{-\beta}) \\
 &= -e^{-\beta} + r\beta' e^{-\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_2 \Gamma^r_{r2} &= \partial_2 \Gamma^0_{02} + \partial_2 \Gamma^1_{12} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_2 \Gamma^3_{32} \\
 &= \partial_2 \Gamma^3_{32} \\
 &= \partial_\theta \cot(\theta) \\
 &= -1 - \cot^2(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{22} \Gamma^r_{rk} &= \Gamma^0_{22} \Gamma^r_{r0} + \Gamma^1_{22} \Gamma^r_{r1} + \Gamma^2_{22} \Gamma^r_{r2} + \Gamma^3_{22} \Gamma^r_{r3} \\
 &= \Gamma^1_{22} (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \\
 &= -re^{-\beta} \left(\frac{1}{2}\alpha' + \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}r(\alpha' + \beta')e^{-\beta} - 2e^{-\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^k_{r2} \Gamma^r_{2k} &= \Gamma^0_{r2} \Gamma^r_{20} + \Gamma^1_{r2} \Gamma^r_{21} + \Gamma^2_{r2} \Gamma^r_{22} + \Gamma^3_{r2} \Gamma^r_{23} \\
 &= \Gamma^1_{r2} \Gamma^r_{21} + \Gamma^2_{r2} \Gamma^r_{22} + \Gamma^3_{r2} \Gamma^r_{23} \\
 &= \Gamma^1_{02} \Gamma^0_{21} + \Gamma^1_{12} \Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{21} \Gamma^2_{21} + \Gamma^1_{31} \Gamma^3_{21} \\
 &\quad + \Gamma^2_{02} \Gamma^0_{22} + \Gamma^2_{12} \Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{22} \Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{32} \Gamma^3_{22} \\
 &\quad + \Gamma^3_{02} \Gamma^0_{23} + \Gamma^3_{12} \Gamma^1_{23} + \Gamma^3_{22} \Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{32} \Gamma^3_{23} \\
 &= \Gamma^1_{12} \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{12} \Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{32} \Gamma^3_{23} \\
 &= \frac{1}{r} \times -re^{-\beta} + \frac{1}{r} \times -re^{-\beta} + \cot(\theta) \cot(\theta) \\
 &= -2e^{-\beta} + \cot^2(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= -e^{-\beta} + r\beta' e^{-\beta} + 1 + \cot^2(\theta) - \frac{1}{2}r(\alpha' + \beta')e^{-\beta} - 2e^{-\beta} + 2e^{-\beta} - \cot^2(\theta) \\
 &= -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1
 \end{aligned}$$

En résumé, les composantes covariantes du tenseur de Ricci s'écrivent :

$$\begin{cases} R_{00} = -\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta} \\ R_{10} = \frac{\dot{\beta}}{r} \\ R_{11} = -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha} \\ R_{22} = -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1 \end{cases}$$

On applique les équations du champ gravitationnel dans le cas extérieur (7.12) page 135 :

$$\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} = 0$$

soit,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta} = 0 \\ \frac{\dot{\beta}}{r} = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha} = 0 \\ -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha' = 0 \\ \dot{\beta} = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 = 0 \\ 1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta') = e^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' + \beta' = 0 \\ \beta = \beta(r) \\ 1 - r\beta' = e^{\beta} \\ 1 + r\alpha' = e^{\beta} \end{cases}$$

Cherchons les expressions de e^{α} et de e^{β} . On pose

$$\begin{aligned} y &= e^{-\beta} \\ y' &= -\beta' e^{-\beta} \\ y + ry' &= e^{-\beta} - r\beta' e^{-\beta} \\ &= (1 - r\beta') e^{-\beta} \end{aligned}$$

La troisième relation s'écrit

$$\begin{aligned} (1 - r\beta') e^{-\beta} &= 1 \\ y + ry' &= 1 \end{aligned}$$

y est de la forme $y = Ar^{-1} + B$:

$$\begin{aligned} Ar^{-1} + B + r\left(\frac{r_s}{r^2}\right) &= 1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

donc A est homogène à r , une longueur. Revenons à la variable de départ :

$$\begin{aligned} y &= Ar^{-1} + 1 \\ e^{-\beta} &= Ar^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Cherchons l'expression de e^α :

$$\begin{aligned}\alpha' + \beta' &= 0 \\ \alpha + \beta &= \kappa(t)\end{aligned}$$

Comme α et β , κ est sans dimension.

$$\begin{aligned}e^{\alpha+\beta} &= e^\kappa \\ e^\alpha &= e^\kappa e^{-\beta}\end{aligned}$$

Pour déterminer la constante κ , remarquons que lorsque l'on s'éloigne à l'infini de la distribution de masse qui crée le champ gravitationnel, la métrique doit redevenir euclidienne :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} e^\alpha = 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} e^\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \kappa = 1 \Rightarrow e^\alpha = e^{-\beta} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = 0$$

Pour trouver l'expression de la constante A remarquons qu'à la limite des champs gravitationnels faibles, nous devons retrouver (7.3) page 122 :

$$\begin{aligned}g_{00} &\approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ \frac{A}{r} + 1 &\approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ A &\approx r \frac{2\phi}{c^2}\end{aligned}$$

Soit ϕ le modèle de potentiel du champ gravitationnel (Cf. Vol. 2 Mécanique classique), où M étant la masse qui crée le champ. On pose

$$\begin{aligned}r_s &= -A \\ &= \frac{2\mathcal{G}M}{c^2}\end{aligned} \tag{9.3}$$

le *rayon de Schwarzschild* de la masse M qui crée le champ gravitationnel, de dimension une longueur.

Remarque 9.6.1

Deux corps de masse m et M peuvent se libérer de leur attraction gravitationnelle mutuelle si leur vitesse radiale relative en éloignement est suffisamment élevée. Dans le cadre de la mécanique classique, supposons $m \ll M$ et supposons la conservation de l'énergie mécanique de m :

$$\begin{aligned}E_i &= E_f \\ E_{ci} + E_{pi} &= E_{cf} + E_{pf}\end{aligned}$$

À mesure que m s'éloigne de M , son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle à l'infini. Prenons l'origine de l'énergie potentielle à l'infini :

$$\begin{aligned}E_{ci} + E_{pi} &= 0 \\ \frac{mv_l^2}{2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} &= 0 \\ v_l &= \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}}\end{aligned}$$

Calculons le rayon maximum, appelé rayon de Schwarzschild, que doit faire le corps de masse M pour que sa vitesse de libération

associée soit égale ou supérieure à la vitesse limite c :

$$c = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r_s}}$$

$$r_s = \frac{2\mathcal{G}M}{c^2}$$

Le rayon de Schwarzschild est aussi appelé rayon du trou noir.

Par conséquent

$$e^\alpha = 1 - \frac{r_s}{r} \quad \text{et} \quad e^\beta = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$$

La métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

Le temps coordonné t est mesuré loin de toute masse-énergie, donc loin de M , autrement dit pour $r \gg r_s$. Comme les distances radiales varient fortement dans le champ gravitationnel, la coordonnée radiale r n'est pas la distance physique au centre de la masse M , mais correspond à la circonférence divisée par 2π d'une sphère de centre M , sur laquelle le champ gravitationnel est homogène. La métrique de Schwarzschild n'est pas définie en $r = 0$, point de l'espace-temps appelé *singularité gravitationnelle*. En revanche, l'hypersurface $r = r_s$ n'est pas une singularité gravitationnelle, c'est une *singularité de coordonnées* car un changement de coordonnées approprié permet de définir la métrique de Schwarzschild en r_s . Cette hypersurface qui ne peut être traversée que dans un sens est appelée *horizon des événements*.

Pour $r \gg r_s$ on vérifie que la métrique de Schwarzschild est asymptotique à la métrique de Lorentz de la relativité restreinte en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

Les symboles de Christoffel de 2^e espèce s'écrivent :

$$\left\{ \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} \alpha' \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} \beta' \\ \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \\ \Gamma^1_{22} = -r e^{-\beta} \\ \Gamma^1_{33} = -r \sin^2(\theta) e^{-\beta} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^3_{32} = \cot(\theta) \end{array} \right.$$

9.7 Équation de la trajectoire d'un corps de faible masse

Le corps d'épreuve suit une géodésique de l'espace-temps courbé par une masse supposée beaucoup plus grande que la sienne, d'équation (7.9) page 133 :

$$\forall \lambda = 0, \dots, 3 \quad \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Remarque 9.7.1

Un corps de masse plus importante suit aussi une géodésique de l'espace-temps mais contribue à la courbure de celui-ci.

Notons par un point la dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s .

1) $\lambda = 0$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée temporelle $x^0 = ct$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^0 + \Gamma^0_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma^0_{01} \dot{x}^0 \dot{x}^1 + \Gamma^0_{11} \dot{x}^1 \dot{x}^1 &= 0 \\ \ddot{x}^0 + \frac{1}{2} \eta' \dot{x}^0 \dot{x}^1 &= 0\end{aligned}$$

Or nous avons trouvé au § 9.1 page 147 précédent pour un corps à symétrie sphérique :

$$\begin{aligned}\begin{cases} e^\alpha = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \\ e^\beta = 1 - \frac{r_s}{r} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (e^\alpha)' = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \frac{r_s}{r^2} \\ (e^\beta)' = \frac{r_s}{r^2} \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha' e^\alpha = -\frac{r_s}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2} \\ \beta' e^\beta = \frac{r_s}{r^2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha' = -\frac{r_s}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \\ \beta' = \frac{r_s}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{c^2 d^2 t}{ds^2} + \frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{c dt}{ds} \frac{dr}{ds} &= 0 \\ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{c dt}{ds} \right] &= 0 \\ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{c dt}{ds} &= \alpha\end{aligned}\tag{9.4}$$

où α est constante sur la trajectoire.

2) $\lambda = 1$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée radiale r :

$$\begin{aligned}\ddot{x}^1 + \Gamma^1_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^1 + \Gamma^1_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma^1_{11} \dot{x}^1 \dot{x}^1 + \Gamma^1_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 + \Gamma^1_{33} \dot{x}^3 \dot{x}^3 &= 0 \\ \ddot{x}^1 + \frac{1}{2} \alpha' e^{\alpha-\beta} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \frac{1}{2} \beta' \dot{x}^1 \dot{x}^1 - r e^{-\beta} \dot{x}^2 \dot{x}^2 - r \sin^2(\theta) e^{-\beta} \dot{x}^3 \dot{x}^3 &= 0 \\ \frac{d^2 r}{ds^2} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{c dt}{ds}\right)^2 - \frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 & \\ - r \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 &= 0\end{aligned}$$

3) $\lambda = 2$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée angulaire θ :

$$\begin{aligned}\ddot{x}^2 + \Gamma^2_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^2 + 2\Gamma^2_{12} \dot{x}^1 \dot{x}^2 + \Gamma^2_{33} \dot{x}^3 \dot{x}^3 &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 &= 0\end{aligned}\tag{9.5}$$

4) $\lambda = 3$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée angulaire ϕ :

$$\begin{aligned}\ddot{x}^3 + \Gamma^3_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^3 + 2\Gamma^3_{13} \dot{x}^1 \dot{x}^3 + \Gamma^3_{23} \dot{x}^2 \dot{x}^3 &= 0 \\ \frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2 \cot(\theta) \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} &= 0\end{aligned}\quad (9.6)$$

Prenons pour condition initiale $\theta = \pi/2$, le point de départ est dans le plan xoy . Prenons une vitesse initiale contenue dans le plan xoy , donc telle que $d\theta/ds = 0$. (9.5) page précédente donne comme équation paramétrique pour θ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{ds^2} &= 0 \\ \theta &= C_1 s + C_2 \\ \frac{d\theta}{ds} &= C_1\end{aligned}$$

Or nous avons pris comme condition initiale $d\theta/ds = 0$, donc $C_1 = 0$ et $\theta = C_2 = \pi/2$. La trajectoire reste dans le plan xoy . (9.6) de la présente page donne :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\phi}{ds} \right) &= 0 \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} &= \beta\end{aligned}\quad (9.7)$$

où β est une constante, qui est la constante de aires au facteur c près :

$$\begin{aligned}\beta &= r^2 \frac{d\phi}{c d\tau} \\ c\beta &= r^2 \dot{\phi}\end{aligned}$$

τ est le temps propre du corps de faible masse. Avec les conditions initiales, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \\ 1 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{c dt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\end{aligned}$$

Éliminons dt et ds à l'aide des relations (9.4) page précédente et (9.7) de la présente page :

$$\begin{aligned}1 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \alpha^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \\ 1 - \frac{r_s}{r} &= \alpha^2 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \\ \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\end{aligned}$$

Le changement de variable,

$$u = \frac{1}{r}\quad (9.8)$$

implique

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\phi} &= \frac{d(u^{-1})}{d\phi} \\ &= -u^{-2} \frac{du}{d\phi} \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= u^{-4} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \\ \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2\end{aligned}$$

Remplaçons le rayon de Schwarzschild par son expression, (9.3) page 155 :

$$\frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - u^2 \left(1 - \frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right)$$

Dérivons par rapport à ϕ :

$$\begin{aligned}-\frac{2\mathcal{G}M}{c^2\beta^2} \frac{du}{d\phi} &= -2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} - 2u \frac{du}{d\phi} \left(1 - \frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right) + u^2 \frac{2\mathcal{G}M}{c^2} \frac{du}{d\phi} \\ -\frac{\mathcal{G}M}{c^2\beta^2} &= -\frac{d^2u}{d\phi^2} - u \left(1 - \frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right) + u^2 \frac{\mathcal{G}M}{c^2} \\ \frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{\mathcal{G}M}{c^2\beta^2} + \frac{3\mathcal{G}Mu^2}{c^2}\end{aligned}\tag{9.9}$$

En posant

$$p = \frac{c^2\beta^2}{\mathcal{G}M}$$

nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M}{c^2} u^2$$

En mécanique classique, le problème de Kepler conduit à l'équation différentielle d'une ellipse

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}$$

où $p = r^4\dot{\theta}^2/(\mathcal{G}M)$ est le *paramètre* de l'ellipse et M est la masse du corps qui crée le champ.

Remarque 9.7.2

L'équation d'une ellipse en coordonnées polaires (r, ϕ) de centre l'un des foyers s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

où p est le paramètre et e est l'excentricité. Pour un cercle $e = 0$ et pour une ellipse $0 < e < 1$. En posant $u = 1/r$ l'équation s'écrit

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\phi - \phi_0)$$

Cette équation est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin(\phi - \phi_0) \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e}{p} \cos(\phi - \phi_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}$$

En relativité générale il s'introduit le terme correctif $3\mathcal{G}M_{\odot}u^2/c^2$. L'équation de la trajectoire n'admet pas de solution périodique dans l'espace, lorsque ϕ varie de 2π l'inverse du rayon vecteur u ne reprend pas les mêmes valeurs. En conséquence, la trajectoire ne se referme pas après un tour. Nous savons aussi par les observations de Mercure que la solution n'est pas périodique car sa trajectoire elliptique n'est pas fermée.

9.8 Avance du périhélie de Mercure

Remarque 9.8.1

Toutes les planètes du système solaire ont une avance de leur périhélie, point de leur trajectoire le plus proche du Soleil. L'avance du périhélie de Mercure est plus importante, sa proximité avec le Soleil la place dans un champ gravitationnel plus intense dans lequel les effets relativistes sont plus marqués. Plus généralement, tous les astres et satellites en orbite ont une avance de leur périastre.

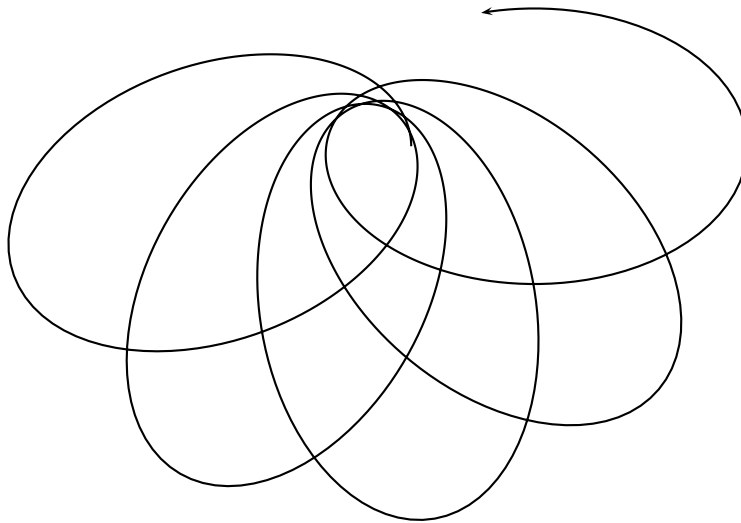


FIG. 9.1 – Avance du périhélie

On vérifie que le terme quadratique correctif est petit devant u en faisant leur rapport :

$$\frac{3\mathcal{G}M_{\odot}u^2}{c^2u} = \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{rc^2}$$

Prenons les valeurs numériques :

Masse du Soleil : $M_{\odot} = 1,998\,5 \times 10^{30}$ kg

Constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6,674\,30 \times 10^{-11}$ m³/kg/s²

Vitesse limite : $c = 299\,792\,458$ m/s

Demi-grand axe : $a_{\text{♁}} = 57\,909\,083 \times 10^3 \text{ m}$

Distance minimale : $r_{\min\text{♁}} = 46\,001\,200 \times 10^3 \text{ m}$

Distance maximale : $r_{\max\text{♁}} = 69\,816\,900 \times 10^3 \text{ m}$

Excentricité : $e_{\text{♁}} = 0,205\,63$

Période de révolution : $T_{\text{♁}} = 7\,442\,203 \text{ s}$

$$\begin{aligned} \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{rc^2} &= \frac{3 \times 6,674\,30 \times 10^{-11} \times 1,998\,5 \times 10^{30}}{57\,909\,050 \times 10^3 \times 299\,792\,458^2} \\ &= 7,65 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

En première approximation l'équation différentielle du mouvement s'écrit sans le terme quadratique et donne une trajectoire ayant pour équation l'ellipse de la mécanique classique. Cette solution est injectée dans l'équation différentielle du mouvement pour remplacer le terme quadratique, elle devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{p^2c^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)] \\ &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{p^2c^2} [1 + 2e \cos(\phi - \phi_0) + e^2 \cos^2(\phi - \phi_0)] \\ &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{p^2c^2} + \frac{6\mathcal{G}M_{\odot}}{p^2c^2} e \cos(\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

où e^2 est d'autant plus petit devant e que l'orbite est proche d'un cercle. On compare les deux premiers termes en faisant leur rapport :

$$\begin{aligned} \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{pc^2} &\approx \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{rc^2} \\ &\approx 7,65 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

Le deuxième terme est donc négligeable devant le premier :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{6\mathcal{G}M_{\odot}}{p^2c^2} e \cos(\phi - \phi_0)$$

On pose $w = u - 1/p$:

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w \approx \frac{6\mathcal{G}M_{\odot}}{pc^2} w$$

En posant la constante

$$\alpha = 1 - \frac{6\mathcal{G}M_{\odot}}{pc^2}$$

nous avons l'équation différentielle

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + \alpha^2 w \approx 0$$

qui a pour solution :

$$\begin{aligned} w &= \beta \cos[\alpha(\phi - \phi_0)] \\ u &= \frac{1}{p} + \beta \cos[\alpha(\phi - \phi_0)] \end{aligned}$$

On identifie β avec e/p pour retrouver le cas non relativiste, et l'on a

$$r = \frac{p}{1 + e \cos[\alpha(\phi - \phi_0)]}$$

Le rayon vecteur reprend sa valeur lorsque

$$\begin{aligned}\alpha\phi &= 2\pi \\ \phi &= 2\pi/\alpha\end{aligned}$$

autrement dit, puisque $\alpha < 1$, après un tour complet. Le périhélie avance. La différence d'angle avec un tour complet ($\phi = 2\pi$) vaut

$$\begin{aligned}\delta &= 2\pi/\alpha - 2\pi \\ &= 2\pi \left[\left(1 - \frac{6\mathcal{G}M_\odot}{pc^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &\approx \frac{6\pi\mathcal{G}M_\odot}{pc^2}\end{aligned}$$

Pour faire intervenir des grandeurs directement mesurables, on utilise la relation classique suivante, qui lie le paramètre de l'ellipse, son demi grand axe a et son excentricité e ,

$$p = a(1 - e^2)$$

et la troisième loi de Kepler

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mathcal{G}M_\odot$$

où T est la période de révolution et m la masse qui crée le champ gravitationnel. Avec ces relations, l'avance du périhélie de Mercure devient

$$\begin{aligned}\delta_\text{☿} &= \frac{6\pi \times 4\pi^2 a_\text{☿}^3}{a_\text{☿} (1 - e_\text{☿}^2) T_\text{☿}^2 c^2} \\ &= \frac{24\pi^3 a_\text{☿}^2}{(1 - e_\text{☿}^2) T_\text{☿}^2 c^2} \\ &= \frac{24 \times 3,141\,592^3 \times (57\,909\,083 \times 10^3)^2}{(1 - 0,205\,632^2) 7\,442\,203^2 \times 299\,792\,458^2} \\ &= 5,234 \times 10^{-7} \text{ rad}\end{aligned}$$

En secondes d'arc ($1^\circ = 3\,600''$) pour un siècle :

$$\begin{aligned}\delta_\text{☿} &= \frac{5,234 \times 10^{-7} \times 180 \times 3600 \times 100 \times 365.2422}{\pi \times 87.9693} \\ &= 44,8'' \text{ par siècle}\end{aligned}$$

9.9 Déviation des rayons lumineux

Cherchons l'équation d'une géodésique au voisinage immédiat du Soleil, c.-à-d. l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux lorsqu'il passe au voisinage immédiat du Soleil, si l'on suppose que la masse du photon est nulle et que ce dernier se propage à la vitesse limite c . Reprenons l'équation du mouvement (9.9) page 159 :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2\beta^2} + \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}u^2}{c^2}$$

(9.7) page 158 donne :

$$\frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2\beta^2} = \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2r^4} \left(\frac{ds}{d\phi} \right)^2$$

Or, pour tout ce qui se propage à la vitesse limite $s = 0$ donc $ds/d\phi = 0$. L'équation devient :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}u^2}{c^2}$$

Avec (9.8) page 158 $r = 1/u$:

$$r^2 \gg r \quad \Leftrightarrow \quad u^2 \ll u$$

Si l'on suppose le terme correctif négligeable devant u , l'équation approchée s'écrit

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2\beta^2}$$

On résoud l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$$

On cherche une solution de la forme $u_0 = a + b \cos(\phi)$:

$$\frac{du_0}{d\phi} = -b \sin(\phi)$$

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} = -b \cos(\phi)$$

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u = a$$

Donc $a = 0$ et

$$\begin{aligned} b \cos(\phi) &= \frac{1}{r_0} \\ b \cos(\pi/2) &= \frac{1}{r_{min}} \\ b &= \frac{1}{r_{min}} \end{aligned}$$

si bien que

$$u_0 = \frac{\cos(\phi)}{r_{min}}$$

Revenons à l'équation complète en cherchant une solution de la forme $u_0 + u_1$ avec $u_1 \ll u_0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(u_0 + u_1)}{d\phi^2} + u_0 + u_1 &= \frac{3\mathcal{G}M_\odot(u_0 + u_1)^2}{c^2} \\ \frac{d^2u_0}{d\phi^2} + \frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_0 + u_1 &= \frac{3\mathcal{G}M_\odot(u_0^2 + 2u_0u_1 + u_1^2)}{c^2} \\ \frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 &= \frac{3\mathcal{G}M_\odot u_0^2}{c^2} \\ &= \frac{3\mathcal{G}M_\odot \cos^2(\phi)}{c^2 r_{min}^2} \end{aligned}$$

On cherche une solution de la forme $a + b \cos^2(\phi)$:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\phi} &= -2b \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \frac{d^2u_1}{d\phi^2} &= -2b [-\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)] \\ &= -2b [2 \cos^2(\phi) - 1] \\ \frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 &= -4b \cos^2(\phi) + 2b + a + b \cos^2(\phi) \\ &= 2b + a - 3b \cos^2(\phi) \\ &= -3b \cos^2(\phi) \end{aligned}$$

où l'on a posé $a = -2b$.

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2} \\ u_1 &= \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2} [2 - \cos^2(\phi)] \\ &= \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2} [1 + \sin^2(\phi)] \end{aligned}$$

D'où la solution :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ &= \frac{\cos(\phi)}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2} [1 + \sin^2(\phi)] \end{aligned}$$

Pour calculer la déviation subie par le rayon lumineux, on considère les deux asymptotes aux deux branches infinies de la trajectoire hyperbolique du rayon. À l'infini le rayonnement « suit » la première asymptote, après avoir été dévié, à l'infini il « suit » la seconde asymptote. L'angle δ de déviation est l'angle entre les deux asymptotes. Par symétrie du problème, nous n'avons besoin que de l'angle ϕ_{asy} que fait l'une des asymptotes avec l'axe focale de l'hyperbole :

$$\phi_{asy} = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$$

u tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\phi_{asy})}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2 r_{min}^2} [1 + \sin^2(\phi_{asy})] &= 0 \\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta_{\odot}}{2}\right)}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2 r_{min}^2} \left[1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta_{\odot}}{2}\right)\right] &= 0 \\ \frac{-\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2 r_{min}^2} \left[1 + \cos^2\left(\frac{\delta_{\odot}}{2}\right)\right] &= 0\end{aligned}$$

L'angle $\delta_{\odot}$ étant petit, on effectue un développement limité à l'ordre un des fonctions sinus et cosinus au voisinage de zéro, $\sin(x) \approx x$ et $\cos(x) \approx 1$:

$$\begin{aligned}-\frac{\delta_{\odot}}{2r_{min}} + \frac{2\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2 r_{min}^2} &= 0 \\ \delta_{\odot} &\approx \frac{4\mathcal{G}M_{\odot}}{c^2 r_{min}}\end{aligned}$$

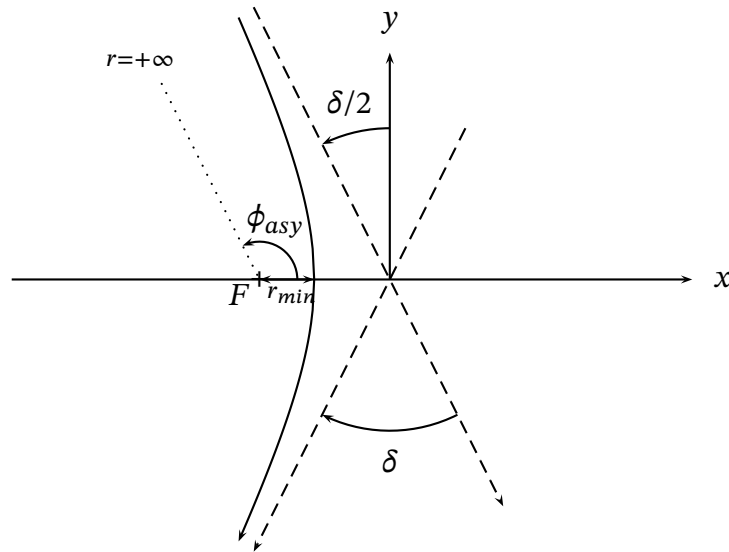


FIG. 9.2 – Trajectoire hyperbolique du rayon lumineux

En prenant pour r_{min} le rayon du Soleil $r_{\odot} = 696\,342 \times 10^3$ m :

$$\begin{aligned}\delta_{\odot} &\approx \frac{4 \times 6,674\,30 \times 10^{-11} \times 1,988\,5 \times 10^{30}}{299\,792\,458^2 \times 696\,342 \times 10^3} \\ &\approx 8,48 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ &\approx 1,75''\end{aligned}$$

Index

- Avance du périhélie de Mercure, 160
- Base
 - naturelle
 - polaire, 15
- Champ
 - de tenseurs, 13
 - de vecteurs, 51
 - gravitationnel
 - faible, 120
- Composantes
 - contravariantes
 - du vecteur différentielle absolue, 28
 - covariantes
 - du vecteur différentielle absolue, 29
 - du vecteur dérivée covariante, 31
 - mixtes du vecteur dérivée covariante, 31
- Constante
 - cosmologique, 135, 143
 - gravitationnelle, 127
- Coordonnées
 - localement géodésiques, 78
 - rectilignes, 5, 61, 77
- Courbure
 - de Ricci, 89
- Différentielle
 - absolue, 39
 - d'un tenseur, 51
 - d'un vecteur, 27
 - des composantes d'un tenseur, 36
- Divergence, 44, 91
 - d'un champ de tenseurs, 42
 - du tenseur d'Einstein, 91, 140
 - du tenseur énergie-impulsion, 134
 - nulle, 58, 134
- Divergence d'un champ de vecteurs, 41
- Droite
 - en coordonnées polaires, 8
- Décalage gravitationnel vers le rouge, 126
- Dérivée
 - absolue
 - d'un champ de scalaire, 30
 - d'une multiplication tensorielle, 40
 - covariante
 - d'un tenseur, 37, 39
 - d'un vecteur, 30
 - d'une somme de deux vecteur, 39
 - seconde d'un vecteur, 38
 - particulaire, 106
- Déviation des rayons lumineux, 163
- Élément linéaire
 - de l'espace de configuration, 94
 - de l'espace euclidien, 1
 - de l'espace-temps de configuration, 101
 - en coordonnées curvilignes, 13
 - en coordonnées géodésiques, 79
 - en coordonnées rectangulaires, 53
 - en coordonnées sphériques, 2
 - sur une sphère, 64
- Équation(s)
 - de la dynamique
 - des milieux continus, 110
 - lagrangienne, 96
 - relativiste des milieux continus, 114
 - de la trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel, 131
 - de Lagrange, 34
 - du champ gravitationnel
 - cas extérieur, 135
 - cas intérieur, 133
 - du mouvement sous forme tensorielle, 115
- Forme
 - quadratique
 - du carré de l'intervalle élémentaire, 60
- Géodésique(s)
 - d'un espace riemannien, 60
 - de l'espace euclidien
 - en coordonnées curvilignes, 4
 - théorème

- dans l'espace euclidien, 4
 - dans un espace riemannien, 60
- Gradient, 106
 - d'un champ de scalaires, 41
 - de vitesse, 111
- Gravitation
 - relativiste, 119
- Hamilton principe de, 8
- Hypercône de lumière, 119
- Lagrangien, 7, 8, 64, 65, 95, 104
 - dans un champ gravitationnel, 122
 - du champ gravitationnel, 140
- Laplacien, 131
 - d'un champ de scalaires, 44
- Loi
 - de dérivation covariante de la multiplication contractée, 40
 - de Kepler, 162
- Mach Principe de, 56
- Masse
 - solaire, 127
- Métrique
 - de la relativité générale, 119
 - de Schwarzschild, 147, 148
 - euclidienne
 - de raccordement, 67
 - tangente, 46
 - stationnaire, 120
- Mouvement inertiel définition, 57
- Métrique
 - d'un champ gravitationnel, 127
- Opérateur
 - divergence, 41
 - rotationnel, 43
- Principe
 - de Hamilton, 8
 - de Mach, 56
 - de moindre action, 131
 - en relativité générale, 137
- Quadri
 - tenseur
 - énergie-impulsion, 117, 131
- Quasi-parallélogramme, 71
- Rayon
 - solaire moyen, 127
- Rotationnel d'un champ de vecteurs, 43
- Signature
 - lorentzienne
 - (+ - - -), 122, 131
- Symbole(s)
 - de Christoffel
 - de première espèce, 15
 - de seconde espèce, 15
 - en fonction de la métrique, 18
 - en métrique de Schwarzschild, 149
- Système(s)
 - de coordonnées
 - localement géodésiques, 77
 - holonomes
 - à liaisons rhéonomes, 101
 - à liaisons scléronomes, 94
- Temps
 - coordonnées, 120
 - dans un champ gravitationnel, 124
 - impropre, 120
- Tenseur
 - d'Einstein, 91
 - d'un espace riemannien, 49
 - de courbure d'un espace riemannien, 70
 - de Ricci, 87
 - pour la métrique de Schwarzschild, 150
 - de Riemann-Christoffel
 - de première espèce, 76
 - de seconde espèce, 74, 75
 - des contraintes, 106
 - différentielle absolue d'un tenseur, 36
 - métrique
 - de Schwarzschild, 148
- Théorème
 - d'analyse vectorielle, 9
 - d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, 2
 - de la divergence, 91, 110, 111, 139, 141, 144
 - de Ricci, 37, 142
 - du quotient, 75
- Transport parallèle, 55
 - en espace courbe, 54
- Variété
 - différentielle, 94
 - riemannienne, 45, 119

INDEX

Vecteur(s)

différentielle

absolue d'un vecteur, [27](#)

équipollents, [55](#)

parallèle, [24](#), [54](#)

Vitesse

de la lumière, [127](#)

