

<https://sciences-physiques.neocities.org>
o.castera@free.fr

Physique Vol. 1

Notion d'espace

Olivier Castéra

Le 14 février 2026

Table des matières

1 La notion d'espace	1
1.1 Systèmes de coordonnées	1
1.2 Variétés	7
1.3 Géodésiques d'un espace	8
1.4 Plongement d'un espace	9
1.5 Courbure	10
1.5.1 Courbure positive	10
1.5.2 Courbure négative	10
1.6 Géométrie dans l'espace	11
1.7 Distance	12
2 Notations	15
2.1 Notation indicielle	15
2.2 Identités en notation indicielle	17
2.3 Symbole de Kronecker	18
2.4 Symbole d'antisymétrie	19
3 Vecteurs	21
3.1 Représentation géométrique	21
3.1.1 Opérations sur les vecteurs	21
3.1.2 Propriétés des lois de composition vectorielles	25
3.1.3 Quelques propriétés des vecteurs	26
3.1.4 Définition des espaces vectoriels	27
3.2 Représentation algébrique	29
3.2.1 Base vectorielle	31
3.2.2 Repère	32
3.2.3 Dérivée ordinaire d'un vecteur	36
3.2.4 Continuité et différentiabilité	37
3.2.5 Dérivée partielle d'un vecteur	37
3.2.6 Formules de dérivation des vecteurs	38
3.2.7 Base et repère naturels	39
3.2.8 Opérations sur les composantes	44
3.2.9 Propriétés des lois de composition vectorielles	44
3.2.10 Composantes d'un vecteur	46
4 Matrices	53
4.1 Système d'équations linéaires	53
4.2 Addition matricielle	54

4.2.1 Propriétés de l'addition matricielle	55
4.3 Multiplication matricielle	56
4.3.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire	56
4.3.2 Multiplication de deux matrices	57
4.4 Matrice colonne et matrice ligne	58
4.5 Matrice transposée	59
4.5.1 Propriétés de la transposition matricielle	60
4.6 Notation indicielle des matrices	60
4.7 Matrice identité	62
4.8 Inverse d'une matrice carrée	62
4.9 Déterminant d'une matrice carrée	63
5 Transformation de coordonnées	67
5.1 Matrice jacobienne et jacobien	67
5.2 Matrice changement de base	72
5.3 Matrice de passage	74
5.4 Changement de base naturelle	75
5.5 Changement de repère	77
5.6 Transformation des composantes d'un vecteur	78
5.6.1 Transformation des composantes contravariantes	78
5.6.2 Transformation des composantes covariantes	83
6 Formes quadratiques	89
6.1 Définitions	89
6.2 Matrice symétrique associée à une forme quadratique	92
6.3 Réduction de Gauss	94
6.4 Loi d'inertie de Sylvester	96
7 Applications linéaires	97
7.1 Définition d'une application linéaire	97
7.2 Transformations actives et passives	100
7.3 Isométrie	102
7.4 Principales transformations linéaires	103
7.4.1 Rotation	103
7.4.2 Inversion	105
7.4.3 Changement d'échelle	105
7.4.4 Réflexion ou symétrie orthogonale	105
7.4.5 Transvection	106
7.5 Transformation affine	107
7.6 Application bilinéaire	107
7.7 Application multilinéaire	108
8 Espaces euclidiens	109
8.1 Histoire de la géométrie euclidienne	109
8.2 Métrique de l'espace euclidien	111
8.2.1 Coordonnées rectangulaires ou cartésiennes normales	111
8.2.2 Coordonnées cartésiennes	113
8.2.3 Coordonnées curvilignes	114
8.2.4 Coordonnées orthogonales	114

8.2.5	Coordonnées obliques	115
8.2.6	Coordonnées polaires	115
8.2.7	Coordonnées cylindriques	116
8.2.8	Coordonnées sphériques	117
8.3	Longueur d'une courbe	118
8.4	Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires	118
8.5	Courbe régulière	121
8.6	Norme	123
8.6.1	Norme euclidienne	123
8.6.2	Définition d'une norme	124
8.6.3	Pseudo-norme	125
8.6.4	Inégalité de Cauchy-Schwarz	126
8.7	Produit scalaire	128
8.7.1	Représentation géométrique	128
8.7.2	Représentation algébrique du produit scalaire	130
8.8	Produit scalaire et norme	132
8.9	Expression analytique du produit scalaire	132
8.10	Composantes covariantes	133
8.11	Covecteurs	134
9	Espaces non euclidiens	137
9.1	La sphère	137
9.2	Métrique d'une surface	139
9.3	Longueur d'une courbe	141
9.4	Vecteur tangent à une courbe	141
10	Annexes	143
10.1	Implication et causalité	143
10.1.1	Implication	143
10.1.2	Relation de causalité	144
10.1.3	Équivalence	144
10.2	Bases non holonomiques	144

Chapitre 1

LA NOTION D'ESPACE

Sommaire

1.1 Systèmes de coordonnées	1
1.2 Variétés	7
1.3 Géodésiques d'un espace	8
1.4 Plongement d'un espace	9
1.5 Courbure	10
1.6 Géométrie dans l'espace	11
1.7 Distance	12

Disons de suite que l'on ne peut définir tous les termes, certaines notions *primitives* sont sans définition. Par exemple certaines définitions sont circulaires, elles dépendent d'autres définitions qui dépendent elles-mêmes de ce que l'on cherche à définir. La mise en place des premières notions est souvent un procédé itératif, on doit en parler avant de les avoir définies.

1.1 Systèmes de coordonnées

Dans ce qui suit on fonctionne par analogie avec notre perception de l'environnement, principalement la feuille de papier et la surface de la Terre. Les systèmes de coordonnées ont probablement pour origine les premières cartes de navigation indiquant les parallèles et les méridiens.

Définition 1.1.1 : Coordonnées

Les n valeurs ordonnées $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ aussi notées (p_i) , permettant de repérer un point P sont appelées les coordonnées de ce point.

Réciproquement, un point P est l'ensemble des n valeurs ordonnées $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Avant de définir les systèmes de coordonnées nous devons définir les espaces topologiques.

Définition 1.1.2 : Espace topologique

Un espace topologique est un ensemble de points dans lequel le voisinage (arbitrairement petit) de chaque point est défini, grâce auquel on définit les concepts de continuité, de limite et de connexité. C'est donc un espace dont les éléments sont des points, muni d'une structure appelée topologie, qui définit la notion de voisinage d'un point.

C'est l'espace le plus général dans lequel on puisse faire des mathématiques.

Définition 1.1.3 : Système de coordonnées - repère

Un ensemble de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, est un système de coordonnées (ou repère), noté $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou (x_i) , d'un espace topologique à n dimensions, si à chaque ensemble de valeurs prises par ces n variables correspond un point de cet espace.

Remarque 1.1.1

Selon cette définition, à un point de l'espace topologique peut correspondre plusieurs ensemble de valeurs d'un même système de coordonnées.

Définition 1.1.4 : Ligne de coordonnée

Dans un espace topologique à n dimensions de système de coordonnées (x_i) , une ligne de coordonnée, ou courbe-coordonnée, est le lieu des points pour lesquels seule la coordonnée x_j diffère d'un point à l'autre. Soient p un paramètre et c_i des constantes :

$$\begin{cases} x_i = c_i & \forall i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \\ x_j = x_j(p) & i = j \end{cases}$$

Remarque 1.1.2

En un point d'un espace topologique de dimension n se croisent n lignes de coordonnée.

Afin de poursuivre nous avons besoin de quelques définitions. Des êtres, aussi bien physiques (cailloux, tables, humains...) qu'objet de notre pensée (nombres, fonctions...) sont bien définis si nous possédons un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets sont soit identiques soit distincts. La notion d'ensemble correspond aux notions courantes d'ensemble, de collection, de groupement, de classe, etc. d'objets de nature quelconque, tels ceux considérés précédemment. Ces objets sont les éléments, membres, individus... de l'ensemble, de la collection, du groupement... Nous dirons qu'un ensemble est constitué d'éléments. Un ensemble est bien défini lorsque l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet, qu'il appartient ou non à l'ensemble.

Définition 1.1.5 : Application

Une application ou fonction est une relation qui à tout élément d'un ensemble de départ associe ou fait correspondre un unique élément d'un ensemble d'arrivé.

Définition 1.1.6 : Bijection

Une application bijective, bijection, correspondance biunivoque, ou encore correspondance un à un, est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée B possède exactement un antécédent dans l'ensemble de départ A . Autrement dit, à tout élément de

l'ensemble A , correspond un élément et un seul de l'ensemble B , et inversement, à tout élément de B , correspond un élément et un seul de A .

Remarque 1.1.3

D'après la déf. 1.1.5 page ci-contre d'une application, comme il s'agit d'une application tous les éléments de l'ensemble de départ ont une image par l'application bijective.

Définition 1.1.7 : Équipotence

Deux ensembles en bijection sont dits équipotents. L'ensemble A est équipotent à l'ensemble B s'il existe une bijection de A dans B , et l'on écrit

$$A \leftrightarrow B$$

La relation binaire ainsi définie s'appelle équipotence.

Définition 1.1.8 : Système de coordonnées non dégénéré

Un système de coordonnées est non dégénéré s'il assigne un unique ensemble de coordonnées à chaque point, et réciproquement un point unique à chaque ensemble de coordonnées, de sorte qu'il existe une bijection entre les deux.

Deux droites sécantes définissent un plan et peuvent servir de système de coordonnées pour ce plan. De même, trois droites non coplanaires deux à deux, sécantes en un point, définissent l'espace à trois dimensions et peuvent servir de système de coordonnées pour ce volume.

Définition 1.1.9 : Système de coordonnées cartésiennes

Un système de coordonnées dont les axes de coordonnées sont des droites toutes sécantes en un même point est appelé système de coordonnées rectilignes, ou système de coordonnées affines, ou encore système de coordonnées cartésiennes.

Le système de coordonnées cartésiennes est non dégénéré.

Exemple 1.1.1 : Système de coordonnées cartésiennes obliques du plan

Le point M a pour coordonnées (x_M^1, x_M^2) :

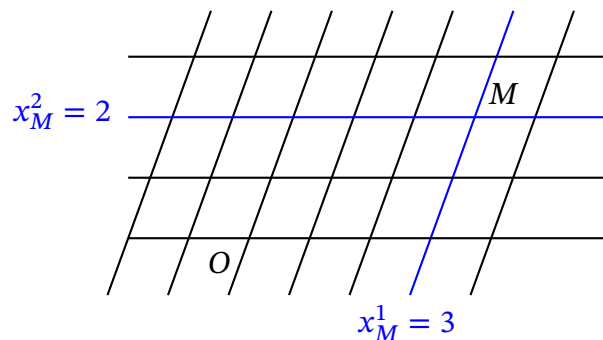


FIG. 1.1 – Lignes de coordonnées cartésiennes obliques

Remarque 1.1.4

Pour des raisons historiques de traduction des travaux du physicien et philosophe français René Descartes, partout ailleurs qu'en France le système de coordonnées cartésiennes désigne un système de coordonnées rectilignes et orthogonales, autrement dit rectangulaires. En France, le système de coordonnées cartésiennes désigne un système de coordonnées rectilignes non nécessairement orthogonales.

Définition 1.1.10 : Système de coordonnées curviligne

Lorsque les axes de coordonnées ne sont pas tous des droites mais l'un au moins est une courbe, le système est appelé système de coordonnées curviligne.

Définition 1.1.11 : Système de coordonnées dégénéré

Si la correspondance n'est pas biunivoque entre chaque point de l'espace topologique et les valeurs des coordonnées, le système de coordonnées est dit dégénéré.

Exemple 1.1.2

Le système de coordonnées polaires est un système de coordonnées curvilignes dégénéré au point origine, l'angle pouvant prendre n'importe quelle valeur en ce point. La coordonnée radiale ρ est appelé rayon. La coordonnée angulaire θ est appelée angle ou azimuth.

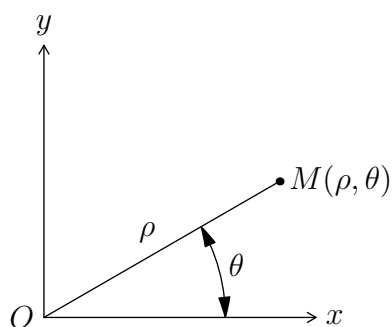


FIG. 1.2 – Système de coordonnées polaires dans le plan

Les lignes de coordonnée radiale constante, $\rho = c^{ste}$, sont des cercles centrés sur l'origine. Les lignes de coordonnée angulaire constante, $\theta = c^{ste}$, sont des demi-droites issues de l'origine. Le système de coordonnées polaires est orthogonal car les cercles coupent leurs rayons à angle droit.

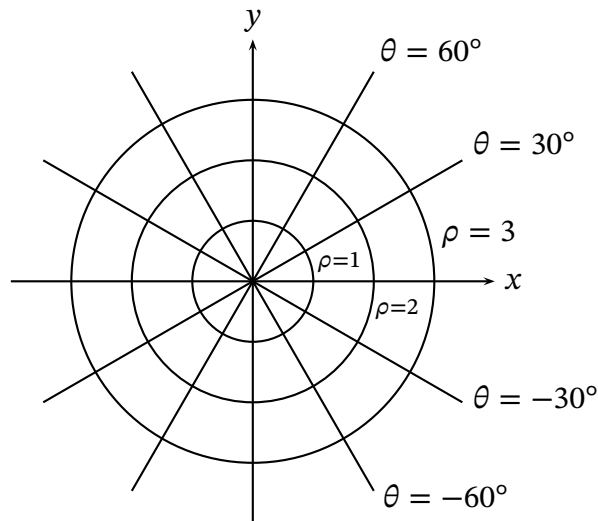


FIG. 1.3 – Lignes de coordonnées polaires

Définition 1.1.12 : Système de coordonnées rectangulaire

Lorsque les droites sont toutes perpendiculaires deux à deux, le système est appelé système de coordonnées rectangulaire ou système de coordonnées cartésiennes normales. Sinon il est appelé système de coordonnées cartésiennes obliques ou cartésiennes.

Définition 1.1.13 : Système de coordonnées direct en deux ou trois dimensions

Un système de coordonnées est direct lorsque les axes sont orientés de manière à respecter la règle de la main droite :

- le pouce pointe dans la direction de l'axe x
- l'index pointe dans la direction de l'axe y
- le majeur pointe dans la direction de l'axe z

Remarques 1.1.1

- Il existe des espaces non orientables, par exemple en deux dimensions le ruban de Möbius et en trois dimensions la bouteille de Klein
- En relativité, les orientations de l'espace et du temps sont distinctes, il n'y a pas d'orientation spatio-temporelle globale

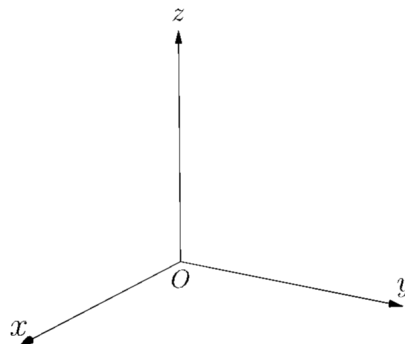


FIG. 1.4 – Système de coordonnées rectangulaires direct de l'espace en 3 dimensions

Remarque 1.1.5

Si un espace admet un système de coordonnées cartésiennes obliques alors il admet aussi un système de coordonnées rectangulaires, et réciproquement, si un espace admet un système de coordonnées rectangulaire alors il admet aussi un système de coordonnées cartésiennes obliques.

Les coordonnées cartésiennes d'un point sont obtenues par projection de ce point selon des droites parallèles aux droites de coordonnées. De ce fait, le système de coordonnées cartésiennes en deux dimensions ne peut exister que dans le plan. Réciproquement, tout plan admet une infinité de systèmes de coordonnées cartésiennes. Nous avons l'équivalence :

$$\text{plan} \Leftrightarrow \text{système de deux coordonnées cartésiennes}$$

Le plan est un espace euclidien à deux dimensions. En généralisant à un espace de plus de deux dimensions :

Définition 1.1.14 : Espace euclidien

Un espace est euclidien ssi ^a on peut y définir un système de coordonnées cartésiennes.

a. ssi est l'abréviation de « si, et seulement si » (cf. annexe 10.1 page 143).

Remarque 1.1.6

Un espace euclidien est un espace plat. Nous verrons que la réciproque est fausse, un espace plat n'est pas nécessairement euclidien. L'espace-temps de la relativité restreinte est un espace plat et pseudo-euclidien, dans lequel on définit habituellement un système de coordonnées pseudo-cartésiennes normales.

Le plan admet aussi une infinité de systèmes de coordonnées curvilignes. Un système de coordonnées a donc deux caractéristiques :

- rectiligne ou curviligne
- orthogonal ou non orthogonal

S'il est rectiligne on peut le choisir rectangulaire ou non, mais son existence implique toujours que l'espace soit euclidien.

Définition 1.1.15 : Dimension d'un espace topologique

La dimension d'un espace topologique est le nombre minimal de coordonnées nécessaires pour spécifier un point de cet espace.

Le point et la droite sont des objets mathématiques primitifs, sans définition. On les imagine *plongés* dans le plan, alors que celui-ci n'est pas défini et qu'il n'est jamais nécessaire de plonger un espace dans un autre pour le définir. Pour repérer un point sur une droite dont on a fixé l'origine, nous n'avons besoin que d'une seule coordonnée. On peut en utiliser deux si on la plonge dans un plan, mais une seule est nécessaire. Nous pouvons dire que c'est un espace topologique de dimension 1, constitué d'une succession infinie de points, sans extrémités et sans courbure. Néanmoins, la courbure n'étant pas définie, cette définition ne fait que repousser le problème à une autre définition.

Une courbe est un espace topologique de dimension 1, constitué d'une succession infinie de points, sans extrémités. Elle généralise la notion de droite, celle-ci étant une courbe particulière sans courbure. Pour repérer un point sur une courbe, seule est nécessaire la distance parcourue le long de la courbe à partir d'un point de la courbe pris pour origine, cette distance est appelée *abscisse curviligne*.

Un plan est un espace topologique de dimension 2, d'extension infinie et sans courbure. C'est un objet mathématique primitif. Le plan est l'analogue en deux dimensions de la droite. Une surface est un espace topologique de dimension 2. Elle généralise le plan, celui-ci étant une surface particulière sans courbure.

1.2 Variétés

Définition 1.2.1 : Variété

Une variété ou variété topologique, de dimension n , est un espace topologique *localement* (c.-à-d. au voisinage immédiat de chacun de ses points) équivalent à un espace euclidien de même dimension n . Nous dirons que la variété est localement homéomorphe^a ou localement topologiquement isomorphe à un espace euclidien de même dimension qu'elle. Localement, nous pouvons passer par déformation continue d'une variété à un espace euclidien de même dimension. Il existe entre ces deux espaces topologiquement équivalents, une fonction bijective continue, de réciproque continue (fonction bijective bicontinue).

a. Du grec, même forme.

Tout système de n coordonnées indépendantes $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ occupant un certain domaine constitue une variété à n dimensions. En général il n'est pas possible de couvrir une variété avec un seul système de coordonnées qui ne soit pas dégénéré (déf. 1.1.11 page 4). Lorsque l'on ne peut pas lever la dégénérescence par changement de coordonnées on couvre la variété avec des *cartes*, en référence aux cartes de géographie, chaque carte étant un système de coordonnées couvrant une région de la variété. Ces cartes sont des applications d'une région de la variété dans un espace euclidien de même dimension n . Les cartes ϕ_1 et ϕ_2 d'une variété sont compatibles si à l'endroit où elles se recouvrent, les lois de composition $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ et $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ qui sont des fonctions de $\mathbb{R}_n$ dans $\mathbb{R}_n$, sont différentiables. Comme en géographie terrestre, l'ensemble des cartes compatibles nécessaires pour couvrir toute la variété forme un *atlas*.

Définition 1.2.2 : Variété différentielle

Une variété différentielle (ou différentiable) est une variété sur laquelle on peut faire du calcul différentiel.

La plupart des variétés en physique sont des variétés différentielles, ce qui signifie qu'elles sont continues et différentiable dans le sens suivant :

- une variété est continue s'il existe au voisinage de tout point d'autres points dont les coordonnées ne diffèrent qu'infinitésimalement. Nous dirons qu'elles sont continuellement paramétrables, les paramètres étant les coordonnées de la variété
- une variété est différentiable s'il est possible de définir un champ scalaire¹ en tout point de la variété qui puisse être partout différentié

L'association des points et des valeurs des paramètres peut être vue comme une application allant des points de la variété vers les points d'un espace euclidien de même dimension. Localement, une variété ressemble donc à un espace euclidien.

1. En mathématique, un scalaire est un nombre, habituellement un réel ou un complexe. Ils sont définis au § 3.1.4 page 27.

Soient P et Q deux points d'une variété, infiniment proches, de coordonnées respectives x_i et $x_i + dx_i$. La distance infinitésimale entre P et Q détermine la géométrie locale de la variété au point P . Dans le cas le plus général, le carré de la distance est une fonction des coordonnées et de leurs différentielles :

$$ds^2 = f(x_i, dx_i)$$

La distance s'exprime dans un système de coordonnées mais c'est un *invariant* (par changement de coordonnées), sa valeur est la même dans tous les systèmes de coordonnées.

Exemple 1.2.1 : Mécanique classique

L'espace euclidien de la mécanique classique est une variété différentielle à trois dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées d'espace.

Exemple 1.2.2 : Espace-temps de la relativité restreinte

L'espace-temps de la relativité restreinte est une variété différentielle à quatre dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées d'espace et celle de temps.

Exemple 1.2.3 : Espace des configurations d'un système dynamique

L'espace des configurations d'un système dynamique à n degrés de liberté est une variété différentielle à n dimensions. À chaque point de cet espace correspond une configuration du système.

Exemple 1.2.4 : Espace des phases

L'espace des phases d'un mobile en mécanique classique est un exemple abstrait de variété différentielle à six dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées de position et les trois quantités de mouvement.

Exemple 1.2.5 : Rotations d'un système de coordonnées rectangulaires

Un autre exemple abstrait est l'ensemble des rotations d'un système de coordonnées rectangulaire dans un espace à trois dimensions. Les paramètres sont les trois angles d'Euler et l'ensemble des rotations est une variété à trois dimensions.

1.3 Géodésiques d'un espace

Les *géodésiques* sont la généralisation des droites aux espaces courbes de dimension quelconque. Ce sont les courbes de courbure minimale, elles possèdent la même courbure locale que l'espace lui-même. Sur un plan leur courbure est nulle, ce sont des droites. On réserve le terme « droite » aux espaces plats, sans courbure intrinsèque. Un arc de géodésique est aussi une géodésique. Les courbes qui minimisent la distance entre deux points, appelées *orthodromies*, sont des géodésiques mais la réciproque est fautive, toutes les géodésiques ne sont pas des orthodromies².

2. Certains auteurs définissent les géodésiques comme les courbes qui minimisent la distance entre deux points et ne font pas de distinction entre géodésique et orthodromie.

Définition 1.3.1 : Géodésique

Une courbe entre deux points a et b d'un espace quelconque est une géodésique ssi sa longueur est extrémale, c.-à-d. minimale ou maximale^a :

$$\delta \int_a^b ds = 0$$

où δ est une variation infinitésimale d'ordre un, s est l'abscisse curviligne le long de la courbe et ds est un élément de longueur de la courbe.

a. Plus précisément, la définition mathématique dit que la longueur doit être stationnaire. Elle ne précise pas que la dérivée seconde doit être non nulle, elle peut donc être un point d'inflexion sans être minimale ou maximale.

Une courbe de longueur extrémale ne peut dépendre du système de coordonnées utilisé pour la définir. Les géodésiques sont donc indépendantes du système de coordonnées, et invariantes par changement de coordonnées.

Exemple 1.3.1

Un cercle de la sphère dont le plan contenant ce cercle passe par le centre de la sphère est appelé grand cercle. Si le plan ne passe pas par le centre de la sphère il est appelé petit cercle. Sur une sphère les grands cercles et les arcs de grands cercles sont des géodésiques. Prenons deux points sur un grand cercle. S'ils ne sont pas antipodaux ils définissent un petit et un grand arc de grand cercle, qui sont tous les deux des géodésiques, mais dont seul le petit est une orthodromie.

On peut se représenter une géodésique comme un ruban pas trop large collé au mieux (avec un minimum de pliures) sur la surface. Si l'on sait tracer des géodésiques et mesurer des angles (rapport de deux longueurs), une surface est plane ssi la somme des angles de tout triangle tracé à l'aide de géodésiques sur cette surface vaut π (dans ce cas, les géodésiques sont des droites). On peut également utiliser la somme des angles d'un carré qui vaut 2π , ou l'aire de toute figure géométrique fermée, celle d'un disque de rayon r vaut πr^2 , celle d'un carré de côté r vaut r^2 , etc.

1.4 Plongement d'un espace

Bien qu'ayant une existence propre, les droites, les courbes, les plans et les surfaces sont habituellement représentés dans un espace plat de dimension supérieure, appelé *espace hôte*. Les courbes sont représentées dans le plan ou dans l'espace (à trois dimensions), les plans et les surfaces dans l'espace. S'il aide à se faire une représentation mentale, ce plongement n'a aucune nécessité. Les espaces topologiques ont une existence propre sans plongement dans un espace de dimension supérieure, sans quoi ce dernier devrait à son tour être plongé dans un espace de dimension plus grande...

1.5 Courbure

Il est important de distinguer la courbure intrinsèque de la courbure extrinsèque. Le cylindre et le cône sont des espaces topologiques euclidiens, donc plats, ils peuvent être déroulés pour en faire un plan et ont même topologie que le plan. Ils ont une courbure extrinsèque mais n'ont pas de courbure intrinsèque (qui leur est propre). En restant à la surface d'un cylindre ou d'un cône rien ne permet de mettre en évidence une quelconque courbure locale. La somme des angles d'un triangle tracé sur un cylindre ou un cône vaut π . En revanche, la courbure globale apparaît lorsque en avançant perpendiculairement à la génératrice du cylindre l'on revient sur nos pas. Dans les cas du cylindre et du cône la courbure globale est liée à leur seule courbure extrinsèque. Seule la courbure intrinsèque est utile en géométrie, la courbure extrinsèque est de moindre importance, elle est liée au plongement de la surface dans un espace de dimension supérieure. En physique, les espaces de courbure nulle sont dits plats. En mathématique ils sont dits pré-euclidiens, c.-à-d. euclidiens (physique non relativiste) ou pseudo-euclidien (relativité restreinte).

1.5.1 Courbure positive

La sphère est un espace topologique courbe, sa courbure intrinsèque fait que l'on ne peut la déplier sans déformations pour en faire un plan. Sa courbure constante positive est mise en évidence en traçant un *triangle sphérique*, dont les côtés sont des arcs de grands cercles. La somme des angles de ces triangles est comprise, selon le rapport de leur dimension par rapport à celui de la sphère, entre π et 4π . De même, l'aire du triangle sphérique est supérieure à celle d'un triangle plat. Dans le cas de la sphère, la courbure globale est la courbure intrinsèque.

Plus le triangle tracé sur une sphère est petit, plus la somme de ses angles tend vers π et son aire tend vers celle d'un triangle plat. Au voisinage infinitésimal d'un point, c.-à-d. « localement », la surface de la sphère est assimilable au plan qui lui est tangent en ce point, autrement dit à l'espace euclidien tangent de même dimension. La sphère est une variété.

1.5.2 Courbure négative

Le paraboloïde hyperbolique, ou selle de cheval, est une surface dont certaines sections planes sont des paraboles, et d'autres sections planes sont des hyperboles. Cette surface a aussi une courbure intrinsèque, négative et non constante, elle tend vers zéro à mesure que l'on s'éloigne du siège. A noter qu'une surface de courbure négative constante ne peut être réalisée dans l'espace ordinaire à trois dimensions. La somme des angles d'un *triangle hyperbolique*, dont les côtés sont des géodésiques du paraboloïde hyperbolique, est inférieure à π , et l'aire du triangle hyperbolique est inférieure à celle d'un triangle plat.

1.6 Géométrie dans l'espace

On généralise le plan à un espace à trois dimensions, plat, sans courbure. On passe ainsi de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace. Cet espace n'a pas d'existence propre, il est purement mathématique. Il permet de construire toute la physique newtonienne, c'est le modèle le plus simple d'espace physique. Pour mesurer sa courbure nulle il ne s'agit plus de tracer un triangle, même si l'on peut toujours se placer dans un plan de cet espace. Un espace de dimension trois est plat ssi en tout point le volume d'une sphère de rayon quelconque r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$, le volume d'un cube de côté r vaut r^3 , etc. On généralise à des espaces de dimension supérieure à trois grâce aux hypersphères, aux hypercubes... Ces espaces plats sont dits euclidiens (nous verrons que les espaces pseudo-euclidiens sont aussi des espaces plats). Trois droites non coplanaires sécantes en un point forment un système de coordonnées cartésiennes d'un espace à trois dimensions nécessairement plat, c.-à-d. euclidien ou pseudo-euclidien. En généralisant à un espace de dimension n , nous avons la double implication déjà vue au § 1.1 page 1 pour le plan :

espace euclidien $\Leftrightarrow$ système de coordonnées cartésiennes (déf. 1.1.9 page 3)

espace pseudo-euclidien $\Leftrightarrow$ système de coordonnées pseudo-cartésiennes

Tous les espaces euclidiens de même dimension sont isomorphes (équivalents). Il n'existe donc qu'un seul espace euclidien pour une dimension donnée. En coordonnées cartésiennes, un espace euclidien de dimension n est isomorphe au n -espace réel $\mathbb{R}_n$.

Définition 1.6.1 : Hyperplans

Les hyperplans sont des espaces topologiques sans courbure, de dimension $n - 1$ plongés dans un espace topologique de dimension n .

Définition 1.6.2 : Hypersurfaces

Les hypersurfaces sont des espaces topologiques de dimension $n - 1$ plongés dans un espace topologique de dimension n .

Définition 1.6.3 : Trajectoire

La trajectoire d'un mobile est la courbe décrite dans l'espace par le centre d'inertie de ce mobile. Dans le cas général, nous avons trois équations paramétriques $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de paramètre le temps t , appelées lois horaires. Si on élimine le temps il reste une équation qui lie les coordonnées x, y, z , par exemple $z = z(x, y)$, qui est l'équation de la trajectoire décrite par le centre d'inertie du mobile dans l'espace. Sauf précision contraire, la trajectoire n'est pas donnée en fonction du temps.

Définition 1.6.4 : Courbe paramétrique

Dans un espace topologique à n dimensions de système de coordonnées (x_i) , une courbe paramétrique de paramètre p est l'ensemble des points tels que chaque coordonnée de ces points est une fonction de p :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x_i = x_i(p)$$

Remarque 1.6.1

L'équation donnée sous la forme explicite $y = f(x)$ est équivalente aux équations paramétriques $y = f(p)$, $x = p$. En physique, pour la description d'une *trajectoire* le paramètre p est arbitraire. En revanche, pour la description d'un *mouvement* le paramètre est toujours le temps (temps propre ou temps coordonnée). Par exemple le mouvement plan de lois horaires $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Exemple 1.6.1 : Courbe paramétrique en coordonnées sphériques

Courbe $\mathcal{C}$ de paramètre p en coordonnées sphériques sur une sphère de rayon a

$$\mathcal{C}(p) : \begin{cases} r = a \\ \theta = p \\ \phi = \phi(p) \end{cases}$$

Définition 1.6.5 : Hypersurface de coordonnée

Une hypersurface de coordonnée est l'ensemble des points dont une des coordonnées reste constante :

$$x_j = c^{ste}$$

Dans un espace topologique de dimension 2, les hypersurfaces de coordonnée sont simplement les lignes de coordonnée. Par exemple l'hypersurface de coordonnée $x_1 = c_1$ se confond avec la ligne de coordonnée x_2 . Dans un espace topologique de dimension 3, les hypersurfaces de coordonnée sont les surfaces de coordonnée, elles se coupent deux à deux suivant les lignes de coordonnée.

1.7 Distance

En physique, les notions de distance et de direction, donc d'angle, sont nécessaires pour situer deux points l'un par rapport à l'autre.

Définition 1.7.1 : Distance

On appelle distance sur un ensemble $\mathcal{E}$ non vide d'éléments (habituellement des points), toute application d telle que

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- séparation : $\forall (a, b) \in \mathcal{E}^2 \quad d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- symétrie : $\forall (a, b) \in \mathcal{E}^2 \quad d(a, b) = d(b, a)$
- inégalité triangulaire : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3 \quad d(a, c) + d(c, b) \geq d(a, b)$

Une distance est toujours non négative (positive ou nulle). En effet, si $a = b$ alors l'inégalité

triangulaire et la symétrie donnent :

$$\begin{aligned}\forall (a, c) \in \mathcal{E}^2 \quad d(a, c) + d(c, a) &\geq 0 \\ 2d(a, c) &\geq 0 \\ d(a, c) &\geq 0\end{aligned}$$

Définition 1.7.2 : Espace métrique

On appelle espace métrique tout couple $(\mathcal{E}, d)$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, et où d est une distance sur $\mathcal{E}$.

Nous dirons que $\mathcal{E}$ est l'ensemble sous-jacent à $(\mathcal{E}, d)$. Dans la pratique on confond souvent $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{E}, d)$, et l'on parle de l'espace métrique $\mathcal{E}$. Ainsi l'espace métrique $\mathbb{R}$ n'est autre que $(\mathbb{R}, d)$, où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$.

Exemple 1.7.1 : Distance de Manhattan

Dans l'espace euclidien E_n , la distance de Manhattan entre les points $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ est définie par :

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$$

Pour $n = 2$ c'est la distance parcourue par un taxi dans le réseau orthogonal des rues de Manhattan.

Définition 1.7.3 : Distance euclidienne

Dans un système de coordonnées rectangulaire d'un espace euclidien E_n , soient les points $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Leur distance euclidienne s'écrit :

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

Exemple 1.7.2 : Distance en mécanique classique

Dans l'espace euclidien E_3 de la mécanique classique, la distance euclidienne entre les points $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ est définie par :

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Définition 1.7.4 : Pseudo-distance

On appelle pseudo-distance sur un ensemble $\mathcal{E}$ non vide d'éléments (habituellement des points), toute application d telle que :

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall a \in \mathcal{E}^2 \quad d(a, a) = 0$
- symétrie : $\forall (a, b) \in \mathcal{E}^2 \quad d(a, b) = d(b, a)$

- inégalité triangulaire : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{E}^3 \quad d(a, c) + d(c, b) \geq d(a, b)$

Contrairement à la définition de la distance, on peut avoir $d(a, b) = 0$ avec $a \neq b$. Une pseudo-distance est toujours non négative. En effet, si $a = b$ alors l'inégalité triangulaire et la symétrie donnent :

$$\begin{aligned} \forall (a, c) \in \mathcal{E}^2 \quad d(a, c) + d(c, a) &\geq 0 \\ 2d(a, c) &\geq 0 \\ d(a, c) &\geq 0 \end{aligned}$$

Définition 1.7.5 : Espace pseudo-métrique

Si d est une pseudo-distance sur un ensemble $\mathcal{E}$ nous dirons que le couple $(\mathcal{E}, d)$ constitue un espace pseudo-métrique.

Définition 1.7.6 : Distance relativiste

Le carré de la distance relativiste entre deux points $E(t, x, y, z)$ et $E'(t', x', y', z')$ de l'espace mathématique à quatre dimensions de la relativité restreinte s'écrit :

$$\begin{aligned} d(E, E')^2 &= \pm[(t' - t)^2 - (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2] \\ \epsilon d(E, E')^2 &= (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (\epsilon = \pm 1) \end{aligned}$$

Ce n'est pas une pseudo-distance car le carré de la distance relativiste peut être positif, nul ou négatif selon les valeurs des parties temporelle et spatiale.

Remarque 1.7.1

L'espace mathématique à quatre dimensions de la relativité restreinte est appelé espace-temps, les points de cet espace mathématique sont appelés *événements* de l'espace-temps, et la distance relativiste est appelée *intervalle*.

Chapitre 2

NOTATIONS

Sommaire

2.1 Notation indicielle	15
2.2 Identités en notation indicielle	17
2.3 Symbole de Kronecker	18
2.4 Symbole d'antisymétrie	19

2.1 Notation indicielle

Notation 2.1.1 : Les coordonnées

En notation indicielle les coordonnées x, y, z , sont notées x_1, x_2, x_3 ou x^1, x^2, x^3 .

Notation 2.1.2 : Convention sur les indices latins et grecs

Nous prenons la convention que les indices latins $i, j, k, \dots$ varient de 1 à 3 ou 4, ou parfois n , et que les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ varient de 0 à 3.

La notation 2.1.1 permet d'adopter une autre notation, appelée convention de sommation.

Notation 2.1.3 : Convention de sommation sur les indices répétés

Toutes les fois que dans un terme figure le même indice en haut et en bas, nous devons sommer tous les termes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs qu'il peut prendre.

Exemple 2.1.1 : Différentielle totale d'une fonction

La différentielle totale de la fonction $f(x, y, z)$ exprimée dans le système de coordonnées (x, y, z) s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Sous forme indicielle :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \end{aligned}$$

Avec la convention de sommation, en considérant qu'un indice haut au dénominateur compte comme un indice bas :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (i \text{ de } 1 \text{ à } 3)$$

Notation 2.1.4

La dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable d'une fonction $f(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^n)$ est notée

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^i} &\equiv \partial_i f \\ &\equiv f_{,i} \end{aligned}$$

où $\equiv$ est le symbole d'équivalence. Pour la dérivée partielle seconde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &\equiv \partial_{ij} f \\ &\equiv f_{,ij} \end{aligned}$$

Notation 2.1.5

Pour un système de coordonnées primé nous mettons le prime sur l'indice :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} &\equiv \partial_{i'} f \\ &\equiv f_{,i'} \end{aligned}$$

Dans l'écriture $x^{i'}$ il ne s'agit pas de l'indice i' mais de l'indice i et de la coordonnées x' (c.-à-d. la $i^{\text{ème}}$ coordonnée x'). L'écriture correcte serait x'^i , cependant nous écrirons $x^{i'}$ car cette notation permet au symbole $\partial_{i'}$ d'indiquer une dérivation partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de la base primée.

Exemple 2.1.2 : Notation dans un système de coordonnées primé

La différentielle totale de la fonction $f(t', x', y', z')$ exprimée dans le référentiel (t', x', y', z') , s'écrit sous forme indicielle avec la convention de sommation sur les indices

répétés :

$$\begin{aligned}
 df &= \frac{\partial f}{\partial t'} dt' + \frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' + \frac{\partial f}{\partial z'} dz' \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x^{0'}} dx^{0'} + \frac{\partial f}{\partial x^{1'}} dx^{1'} + \frac{\partial f}{\partial x^{2'}} dx^{2'} + \frac{\partial f}{\partial x^{3'}} dx^{3'} \\
 &= \partial_{\mu'} f dx^{\mu'} \quad (\mu \text{ de } 0 \text{ à } 3) \\
 &= f_{,\mu'} dx^{\mu'}
 \end{aligned}$$

2.2 Identités en notation indicielle

Notation 2.2.1

En notation indicielle la matrice colonne $[u]$ est notée u^i , la matrice carrée $[a]$ est notée a_{ij} .

Remarque 2.2.1

Par abus de langage, on donne le nom de matrice aux composantes elles-mêmes.

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad a_{ij}u^j \stackrel{\text{déf}}{=} a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + a_{i3}u^3$$

où le symbole $\stackrel{\text{déf}}{=}$ signifie « par définition », ici par définition de la notation employée.

- lorsque la matrice $[a_{ij}]$ est non symétrique, $\forall i \neq j$, $a_{ij} \neq a_{ji}$, nous avons

$$a_{ij}u^i v^j \equiv a_{ij}v^j u^i \quad \text{et} \quad a_{ij}u^i v^j \equiv a_{ji}u^j v^i$$

Nous avons également les inégalités (pour $u^i \neq v^i$) :

$$a_{ij}u^i v^j \neq a_{ij}u^j v^i \quad \text{et} \quad a_{ij}u^i v^j \neq a_{ji}u^i v^j \quad (2.1)$$

Par exemple

$$\forall i, j = 1, 2 \quad \begin{cases} a_{ij}u^i v^j \stackrel{\text{déf}}{=} a_{i1}u^1 v^1 + a_{i2}u^1 v^2 + a_{21}u^2 v^1 + a_{22}u^2 v^2 \\ a_{ij}u^j v^i \stackrel{\text{déf}}{=} a_{11}u^1 v^1 + a_{12}u^2 v^1 + a_{21}u^1 v^2 + a_{22}u^2 v^2 \end{cases}$$

À partir des inégalités (2.1) on déduit :

$$(a_{ij} + a_{ji})u^i v^j \neq 2a_{ij}u^i v^j$$

- en posant $z^j = u^j + v^j$:

$$a_{ij}(u^j + v^j) \equiv a_{ij}u^j + a_{ij}v^j$$

$$a_{ij}(z^j) = a_{ij}u^j + a_{ij}v^j$$

- grâce à $u^i u^j \equiv u^j u^i$:

$$\begin{cases} (a_{ij} + a_{ji})u^i u^j \equiv 2a_{ij}u^i u^j \\ (a_{ij} - a_{ji})u^i u^j \equiv 0 \end{cases}$$

2.3 Symbole de Kronecker

Définition 2.3.1 : Symbole de Kronecker δ_{ij}

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par exemple $\delta_{12} = 0$, $\delta_{33} = 1$.

Ce symbole permet d'utiliser la convention de sommation sur les indices répétés [2.1.3 page 15](#), en fonction du placement des indices : δ_{ij} , δ_i^j , δ_j^i , δ^{ij} .

Exemple 2.3.1 : Symbole de Kronecker et convention de sommation

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2 \\ &= \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Ici les indices du symbole de Kronecker sont en bas pour respecter la convention de sommation. C'est aussi un opérateur de substitution d'indice.

Exemple 2.3.2 : Substitution d'indice

Soit (x^i) un système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \forall i \quad x^i &= 0 \times x^1 + 0 \times x^2 + \dots + 1 \times x^i + \dots + 0 \times x^n \\ &= \delta_j^i x^j \end{aligned}$$

Exemple 2.3.3 : Équivalence du symbole de Kronecker

- Soit (x^i) un système de coordonnées :

$$\begin{cases} \forall i = j & \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1 \\ \forall i \neq j & \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \quad \text{car } x^i \text{ et } x^j \text{ sont indépendants} \end{cases} \Rightarrow \forall i, j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

- Soient (x^i) et (y^j) deux systèmes de coordonnées. Les n fonctions

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x^i = x^i(y^1, y^2, \dots, y^n)$$

sont supposées au moins de classe C^2 : les dérivées partielles secondes existent et sont continues, donc a fortiori les dérivées partielles premières. Elles sont aussi supposées indépendantes de sorte que l'on puisse résoudre les n équations en fonction des x^i ,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad y^j = y^j(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

qui sont alors aussi de classe C^2 . D'une part :

$$\begin{aligned}\forall i \quad dx^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \quad (k \text{ de } 1 \text{ à } n) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} dx^j\end{aligned}\quad (2.2)$$

D'autre part, avec l'ex. 2.3.3 page ci-contre ou en différentiant le résultat de l'ex. 2.3.2 page précédente :

$$\forall i \quad dx^i = \delta_j^i dx^j \quad (j \text{ de } 1 \text{ à } n)$$

Avec les deux égalités précédentes :

$$\forall i, j \quad \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (2.3)$$

Si l'on pose $i = j$ la somme sur k disparaît dans (2.2), et (2.3) donne bien $\delta_i^i = 1$.

2.4 Symbole d'antisymétrie

Le symbole d'antisymétrie, aussi appelé symbole de permutation, est complètement antisymétrique et ne prend que les valeurs -1 , 0 ou 1 . Les valeurs prises par ses composantes sont indépendantes du système de coordonnées choisi (ce n'est pas un tenseur). Il est noté $\varepsilon^{ijk\dots}$ ou $\varepsilon_{ijk\dots}$, où le nombre d'indices $i, j, k, \dots$ est habituellement le nombre de dimensions de l'espace vectoriel dans lequel on se trouve.

Définition 2.4.1 : Symbole d'antisymétrie bidimensionnel

Les deux indices i et j prennent les valeurs 1 et 2. Le symbole est défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon^{12} = +1 \\ \varepsilon^{21} = -1 \\ \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \end{cases}$$

Le symbole est bien antisymétrique :

$$\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$$

On vérifie que pour deux indices on a :

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(j - i)\varepsilon^{ij}$$

On peut le représenter par la matrice 2×2 antisymétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.4.1 : Déterminant d'une matrice

Grâce au symbole d'antisymétrie le déterminant d'une matrice s'écrit :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \\ &= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \\ &= \varepsilon^{ij} a_i^1 a_j^2\end{aligned}$$

Définition 2.4.2 : Symbole d'antisymétrie tridimensionnel

Les trois indices i, j et k prennent les valeurs 1, 2 et 3. Le symbole est défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijk} = +1 \text{ pour } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ \varepsilon^{ijk} = -1 \text{ pour } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \\ \varepsilon^{ijk} = 0 \text{ pour } i = j, \text{ ou } j = k, \text{ ou } k = i \end{cases}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijk} = +1 \text{ si le nombre de permutations de } (1, 2, 3) \text{ est pair} \\ \varepsilon^{ijk} = -1 \text{ si le nombre de permutations de } (1, 2, 3) \text{ est impair} \\ \varepsilon^{ijk} = 0 \text{ si deux indices au moins ont même valeur} \end{cases}$$

On vérifie que pour trois indices on a :

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

Nous pouvons représenter le symbole d'antisymétrie tridimensionnel par une hyper matrice $3 \times 3 \times 3$ bien que cela ait peu d'intérêt.

Définition 2.4.3 : Symbole d'antisymétrie quadridimensionnel

Les quatre indices i, j, k et l prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4. Le symbole d'antisymétrie noté ε^{ijkl} ou ε_{ijkl} est défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijkl} = +1 \text{ si le nombre de permutations de } (0, 1, 2, 3) \text{ est pair} \\ \varepsilon^{ijkl} = -1 \text{ si le nombre de permutations de } (0, 1, 2, 3) \text{ est impair} \\ \varepsilon^{ijkl} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut généraliser ce symbole à un nombre quelconque d'indice.

Chapitre 3

VECTEURS

Sommaire

3.1 Représentation géométrique	21
3.2 Représentation algébrique	29

Historiquement, les vecteurs modélisèrent d’abord des notions issues de la mécanique classique, principalement celles de force et de vitesse.

3.1 Représentation géométrique

Notation 3.1.1

Les vecteurs sont notés par des lettres en gras, ou par des lettres surmontées d’une flèche.

Par exemple la force est notée $\mathbf{f}$ ou $\vec{f}$. Dans l’espace physique de la mécanique classique modélisé par l’espace à trois dimensions de la géométrie classique, les vecteurs forces sont représentés par une flèche ayant une longueur proportionnelle à l’intensité (ou magnitude) de la force, une direction et un sens qui sont celui de la force, et ayant pour origine le point d’application de la force.

3.1.1 Opérations sur les vecteurs

En accord avec la notion physique de force qu’ils modélisent, on définit sur les vecteurs les deux opérations suivantes, appelées *lois de composition* :

- l’addition de deux vecteurs ayant même origine donne un vecteur appelé *résultante* des deux vecteurs. C’est la règle du parallélogramme pour la composition des forces ayant même point d’application. De même que la somme de deux forces est une force, la somme de deux vecteurs est un vecteur. Pour additionner deux forces nous devons les rapporter à une même origine. De même, nous n’additionnerons que des vecteurs ayant même origine et la théorie des espaces vectoriels sera construite sous cette hypothèse. Nous parlons de

vecteur *lié* (à un point) lorsque le point d'application du vecteur est spécifié, et de vecteur *libre* lorsque ce point n'est pas spécifié.

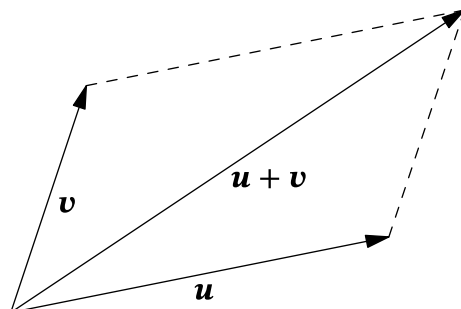


FIG. 3.1 – Addition des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$

- la multiplication d'un vecteur par un scalaire¹ donne un vecteur homothétique au vecteur de départ. Il a même direction, il est de même sens si α est positif, de sens contraire si α est négatif, et sa longueur est multipliée par $|\alpha|$.

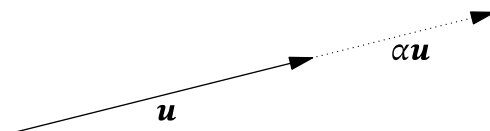


FIG. 3.2 – Multiplication du vecteur $\mathbf{u}$ par le scalaire α

Définition 3.1.1 : Combinaison linéaire

Une combinaison linéaire est une expression construite à partir d'un ensemble de termes en multipliant chaque terme par une constante et en faisant leur somme. Soient α et β deux constantes, une combinaison linéaire de x et y est une expression de la forme

$$\alpha x + \beta y$$

Les constantes α et β sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Les deux lois de composition sur les vecteurs fusionnent en une seule loi :

Définition 3.1.2 : Combinaison linéaire de vecteurs

Soient α et β deux scalaires. Le vecteur suivant est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}$$

Remarque 3.1.1

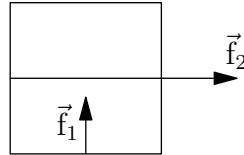
Notons que la vitesse est un vecteur et que la combinaison linéaire de deux forces ne donne jamais une vitesse. Il faudra donc toujours préciser à quel ensemble de vecteurs, c.-à-d. à quel *espace vectoriel* appartient le vecteur dont on parle. Lorsque le scalaire est un réel sans dimension physique, la multiplication par ce réel donne un vecteur du même espace vectoriel. C'est par exemple le cas lorsque l'intensité d'une force varie. Lorsque le scalaire a une dimension physique, les vecteurs de départ et d'arrivée n'appartiennent pas au même espace vectoriel, comme dans la définition du vecteur quantité de mouvement :

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m \vec{v}$$

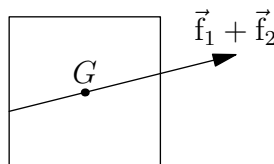
1. En mathématique, un scalaire est un nombre (habituellement réel ou complexe) qui permet de changer l'échelle (en anglais « scale ») d'un vecteur.

Exemple 3.1.1 : Addition de deux vecteurs

Imaginons un cube homogène vu de dessus sur lequel on exerce deux forces perpendiculaires aux faces :



En négligeant les frottements, sous l'action de ces deux forces le cube se déplace en translation. Pour sommer ces deux forces en une unique force nous les translatons pour qu'elles aient même origine. Pour que le cube ait un mouvement de translation sans rotation, la force résultante doit passer par le centre de gravité G du cube. On en déduit le point d'application de cette force.



Les objets mathématiques qui modélisent la physique doivent être des *objets géométriques*, c.-à-d. indépendants du système de coordonnées dans lequel on les exprime.

Définition 3.1.3 : scalaire

En physique, un scalaire est une propriété physique définie par un nombre unique, indépendant du système de coordonnées.

Remarque 3.1.2

La définition mathématique d'un scalaire est donnée plus loin, déf. 3.1.12 page 27.

Exemple 3.1.2

La masse, le temps, la distance et le volume tridimensionnel sont des scalaires en mécanique classique mais pas en relativité. La charge électrique est un scalaire en mécanique classique et relativiste.

Définition 3.1.4 : Fonction scalaire

On appelle fonction scalaire ou fonction à valeur scalaire, une fonction qui donne en sortie un scalaire.

Si en chaque point de l'espace on associe un scalaire, on parle de *champ de scalaires*. Le scalaire est alors une fonction des coordonnées.

Définition 3.1.5 : Champ de scalaires - Fonction scalaire des coordonnées

Si en tout point de coordonnées (x, y, z) d'une région R de l'espace on fait correspondre un scalaire $f(x, y, z)$, alors f est appelée fonction scalaire des coordonnées (ou fonction

scalaire de la position), et définit un champ de scalaires dans R .

$$R \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

f prend en entrée les coordonnées d'un point et donne en sortie un scalaire.

On généralise facilement à un espace de plus de trois dimensions.

Exemple 3.1.3

Dans un solide, un liquide ou un gaz, la température, la pression et la masse volumique sont des exemples de champs de scalaires.

Définition 3.1.6 : Vecteurs

Dans un espace de dimension n , un vecteur est une propriété physique indépendante du système de coordonnées, définie par ses n composantes dépendantes du système de coordonnées.

Remarque 3.1.3

C'est la définition physique d'un vecteur. La définition mathématique est donnée plus loin, déf. 3.1.11 page 27.

Définition 3.1.7 : Tenseurs

Dans un espace de dimension n , un tenseur d'ordre p est une propriété physique indépendante du système de coordonnées, définie par ses n^p composantes dépendantes du système de coordonnées.

Si en chaque point de l'espace on associe un vecteur ou un tenseur, on parle de *champ de vecteurs* ou de *champ de tenseurs*. Le vecteur ou le tenseur est alors une fonction des coordonnées.

Définition 3.1.8 : Champ de vecteurs - Fonction vectorielle de la position

Si en tout point de coordonnées (x, y, z) d'une région R de l'espace on fait correspondre un vecteur $\mathbf{v}(x, y, z)$, alors $\mathbf{v}$ est appelée fonction à valeur vectorielle ou fonction vectorielle de la position et définit un champ de vecteurs dans R .

$$R \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \mathbf{v}(x, y, z)$$

On généralise facilement à un espace de plus de trois dimensions.

Définition 3.1.9 : Fonction vectorielle

On appelle fonction vectorielle ou fonction à valeur vectorielle, une fonction qui donne en sortie un vecteur.

Exemple 3.1.4

La vitesse du vent est un exemple de champ de vecteurs, la tension dans un solide est un exemple de champ de tenseurs.

3.1.2 Propriétés des lois de composition vectorielles

Notation 3.1.2

Nous notons $\oplus$ l'addition vectorielle pour la distinguer de l'addition des réels, et $\odot$ la multiplication d'un vecteur par un scalaire pour la distinguer de la multiplication entre réels.

Supposons que nous ayons un ensemble d'éléments sur lesquels on puisse appliquer deux lois de composition. Ces éléments sont-ils des vecteurs ? Pour répondre, il faut savoir si les deux lois sont identiques à celles que nous avons définies au § 3.1.1 page 21. Elles le seront si elles vérifient les mêmes propriétés, c.-à-d. :

- pour l'addition vectorielle. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs :
 - (a) commutativité : $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ (on peut commuter les vecteurs)
 - (b) associativité : $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$ (on peut si l'on veut associer les vecteurs grâce à des parenthèses)
 - (c) existence d'un élément neutre, le vecteur nul $\mathbf{0}$, tel que : $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}$
Le vecteur nul généralise le chiffre zéro de l'addition des réels.
 - (d) pour tout vecteur $\mathbf{u}$ il existe le vecteur opposé $\bar{\mathbf{u}}$, tel que : $\mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$
L'existence d'un opposé nécessite donc l'existence d'un élément neutre.

De plus, nous définissons la soustraction vectorielle comme l'addition vectorielle avec l'opposé : $\mathbf{u} \ominus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{v}}$. On montre plus loin que $\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$.

- pour la multiplication d'un vecteur par un scalaire, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:
 - (a) associativité : $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \times \beta) \odot \mathbf{u}$
Il s'agit ici d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\odot$ du membre de gauche de l'égalité est le signe opératoire de la multiplication d'un vecteur par un réel, alors que le signe $\times$ du membre de droite est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
 - (b) distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})$$

Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $+$ du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition dans $\mathbb{R}$, alors que le signe $\oplus$ du membre de droite est celui de l'addition vectorielle.

- (c) distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})$
- (d) existence d'un élément neutre, le scalaire (réel) 1, tel que : $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

3.1.3 Quelques propriétés des vecteurs

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur et k un scalaire : $0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(0 + 0) \odot \mathbf{u} &= 0 \odot \mathbf{u} \\ 0 \odot \mathbf{u} + 0 \odot \mathbf{u} &= 0 \odot \mathbf{u} + \mathbf{0} \\ 0 \odot \mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

Soient $\mathbf{0}$ le vecteur nul et k un scalaire : $k \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}k \odot (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) &= k \odot \mathbf{0} \\ k \odot \mathbf{0} \oplus k \odot \mathbf{0} &= k \odot \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \\ k \odot \mathbf{0} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur et $\bar{\mathbf{u}}$ son opposé : $\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 0 \odot \mathbf{u} \\ k \odot \mathbf{0} &= (k - k) \odot \mathbf{u} \\ k \odot (\mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{u}}) &= [k + (-k)] \odot \mathbf{u} \\ k \odot \mathbf{u} \oplus k \odot \bar{\mathbf{u}} &= k \odot \mathbf{u} \oplus (-k) \odot \mathbf{u} \\ k \odot \bar{\mathbf{u}} &= (-k) \odot \mathbf{u} \\ 1 \odot \bar{\mathbf{u}} &= (-1) \odot \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} &= (-1) \odot \mathbf{u}\end{aligned}$$

□

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur, $\mathbf{0}$ le vecteur nul et k un scalaire :

$$k \odot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k = 0 \text{ ou } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Démonstration. Prenons les deux possibilités suivantes :

- Supposons $k = 0$:

$$0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- Supposons $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}k \odot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ k^{-1} \odot (k \odot \mathbf{u}) &= k^{-1} \odot \mathbf{0} \\ (k^{-1}k) \odot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

3.1.4 Définition des espaces vectoriels

Définition 3.1.10 : Produit cartésien d'ensembles

Soient A et B deux ensembles, leur produit cartésien noté $A \times B$ décrit un nouvel ensemble appelé ensemble produit ou produit cartésien de A par B , constitué de tous les couples ordonnés (x, y) , où $x \in A$ et $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Si $x \in A$ et $y \in B$ alors $(x, y) \in A \times B$ et $(y, x) \in B \times A$ mais en général $(y, x) \notin A \times B$. Dans le cas où $A = B$, $(x, y) = (y, x)$ ssi $x = y$, donc en général $(x, y) \neq (y, x)$.

Notation 3.1.3

$A \times B$ se lit A croix B . Le produit cartésien n fois d'un ensemble par lui-même est noté A^n , e. g. $A \times A$ est noté A^2 .

Définition 3.1.11 : Espaces vectoriels, scalaires, vecteurs

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (habituellement le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$), dont les éléments sont appelés scalaires. Considérons un ensemble non vide $\mathcal{E}$ d'éléments notés $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$. Supposons qu'il existe entre les éléments de $\mathcal{E}$ une loi de composition interne (une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$), notée $\oplus$, et une loi de composition externe à gauche sur $\mathcal{E}$ de domaine $\mathbb{K}$ (une application de $\mathbb{K} \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$), notée $\odot$, telles que :

- à deux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathcal{E}$, la loi $\oplus$ fasse correspondre un élément $\mathbf{w}$ de $\mathcal{E}$, noté $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$. En outre, la loi $\oplus$ possède les quatre propriétés du § 3.1.2 page 25.
- à un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et à un élément $\mathbf{u}$ de $\mathcal{E}$, la loi $\odot$ fasse correspondre un élément de $\mathcal{E}$, noté $\alpha \odot \mathbf{u}$. En outre, pour $\beta \in \mathbb{K}$, la loi $\odot$ possède les quatre propriétés du § 3.1.2 page 25.

Les éléments $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ sont appelés des vecteurs. La loi $\oplus$ est appelée addition vectorielle, et la loi $\odot$ multiplication par un scalaire. Le triplet $(\mathcal{E}, \oplus, \odot)$ noté E , est appelé espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $\mathcal{E}$ est le support de l'espace vectoriel E et les lois de composition constituent une structure pour $\mathcal{E}$.

Cette définition dit simplement que la combinaison linéaire de deux vecteurs est encore un vecteur. La déf. 3.1.2 page 22 définit à la fois ce qu'est une combinaison linéaire de deux vecteurs et ce que sont les vecteurs.

Remarque 3.1.4

Une conséquence de la définition des vecteurs est que tous les vecteurs ne sont pas représentables par une flèche.

Définition 3.1.12 : scalaire

En mathématique, un scalaire est un élément d'un corps $\mathbb{K}$ servant à définir un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $\mathbb{K}$ est appelé corps de base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les scalaires permettent de définir la multiplication par un scalaire, opération qui prend en entrée un vecteur et donne

en sortie un vecteur du même espace vectoriel.

Remarque 3.1.5

Les composantes d'un vecteur sont des scalaires en mathématique en tant qu'éléments du corps $\mathbb{R}$, mais pas en physique puisqu'elles ne sont pas invariantes par changement de coordonnées.

Définition 3.1.13 : Groupe

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne binaire notée $\star$, qui à chaque paire d'éléments $(a, b) \in G^2$ associe un élément $a \star b \in G$. La structure algébrique $(G, \star)$ est un groupe ssi $\forall (a, b, c) \in G^3$ les axiomes suivants sont vérifiés :

- associativité : $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c = a \star b \star c$
- existence d'un élément neutre ou élément identité e , tel que : $a \star e = e \star a = a$
- $\forall a \in G \exists \bar{a} \in G$, élément symétrique (opposé ou inverse) de a , tel que : $a \star \bar{a} = \bar{a} \star a = e$

Le groupe G est abélien (ou commutatif) ssi la loi est commutative : $a \star b = b \star a$

Exemple 3.1.5 : Les nombres entiers

L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs, négatifs ou nul), noté $\mathbb{Z}$, muni de l'addition des entiers $(\mathbb{Z}, +)$ forme un groupe. En effet $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, zéro est l'élément neutre et pour tout entier a il existe $-a$ tel que $a + (-a) = 0$. Ce groupe est abélien puisque $a + b = b + a$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des vecteurs muni de l'addition vectorielle, $(\mathcal{E}, \oplus)$, est un groupe abélien pour l'addition vectorielle. Les quatre axiomes de la loi $\odot$ définissent « l'action » du corps $\mathbb{K}$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$.

Notation 3.1.4

Pour simplifier l'écriture, l'addition vectorielle $\oplus$ est souvent notée $+$ par analogie avec l'addition des scalaires. De même, la multiplication par un scalaire $\odot$ est souvent notée $\times$, ou encore on pourra omettre le symbole, par analogie avec la multiplication des scalaires. Par convention, la loi $\odot$ est prioritaire sur la loi $\oplus$.

Si la seconde loi est définie pour tout nombre réel α , nous dirons que l'ensemble $\mathcal{E}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\odot$ est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres réels, ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, ou encore espace vectoriel réel. Si la seconde loi est définie pour tout nombre complexe α , nous dirons que l'ensemble $\mathcal{E}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\odot$ est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres complexes, ou $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, ou encore espace vectoriel complexe. Dans ce qui suit nous nous limiterons aux espaces vectoriels réels.

3.2 Représentation algébrique

Pour effectuer des calculs sur les vecteurs on dote l'espace ponctuel d'un système de coordonnées.

Exemple 3.2.1

Dans le cadre de la physique newtonienne, on dote l'espace d'un système de coordonnées habituellement rectangulaires (O, x, y, z) , déf. 1.1.12 page 5.

À l'aide des points de cet espace ponctuel, on peut construire des vecteurs de la façon suivante. À chaque point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace ponctuel on associe le vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$, et à chaque vecteur $\mathbf{a}$ on associe le point A tel que $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$. Ainsi en généralisant à n dimensions, il existe une bijection φ entre l'espace ponctuel E_n et l'espace vectoriel E_n , ils sont équipotents (déf. 1.1.6 page 2) :

$$\begin{aligned}\varphi : E_n &\rightarrow E_n \\ \mathbf{a} &\mapsto A = \varphi(\mathbf{a}) \\ \mathbf{0} &\mapsto O = \varphi(\vec{0})\end{aligned}$$

Définition 3.2.1 : Espace ponctuel

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'éléments appelés points et notés $A, B, C, \dots$. Supposons qu'à tout couple (A, B) de points de $\mathcal{E}$ pris dans cet ordre, on fasse correspondre un vecteur, noté $\mathbf{AB}$, la correspondance suivant les trois axiomes :

- Existence d'un vecteur opposé : $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$
- Relation de Chasles : $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$
- $\forall O \in \mathcal{E}, \forall \mathbf{u} \in E_n, \exists ! M \in \mathcal{E}$, tel que $\mathbf{OM} = \mathbf{u}$

Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{E}$ constitue un espace ponctuel à n dimensions, noté E_n . L'espace vectoriel E_n est appelé espace associé à E_n .

L'ensemble des points correspondant aux valeurs des n coordonnées dans un certain domaine, constitue le support d'un espace ponctuel à n dimensions. Pour obtenir un espace ponctuel, il faut structurer cet ensemble en ajoutant la correspondance que nous venons d'énoncer.

Si les axes de coordonnées portent la même unité on parle d'*espace métrique* car on peut y définir une distance (plus généralement une métrique). Dans le cas contraire on parle d'espace affine.

Exemple 3.2.2

En thermodynamique, le diagramme de Clapeyron (P, V) est un espace affine car on ne peut y définir une distance.

Remarque 3.2.1

Par abus de langage nous dirons que A est l'origine du vecteur $\mathbf{AB}$, et B son extrémité.

Les coordonnées des points A et B définissent le vecteur $\mathbf{AB}$. Dans un espace à trois dimensions, ce vecteur est associé à un ensemble de six nombres réels ordonnés $(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B)$. Nous

dirons que ce vecteur est *lié* à son point origine A . Cependant, il n'est pas utile de conserver le point origine dans la définition des vecteurs, nous supposons qu'ils ont tous même origine.

En utilisant la relation de Chasles et l'existence d'un vecteur opposé, déf. 3.2.1 page précédente :

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \mathbf{AO} + \mathbf{OB} \\ &= \mathbf{OB} - \mathbf{OA}\end{aligned}$$

Dans un espace à trois dimensions, on associe au vecteur $\mathbf{AB}$ les trois nombres réels ordonnés $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, qui sont les coordonnées du point à son extrémité lorsque le vecteur $\mathbf{AB}$ est translaté au point origine O .

Exemple 3.2.3 : Vecteur $\mathbf{f}$ dans le système de coordonnées rectangulaire (O, x, y, z)

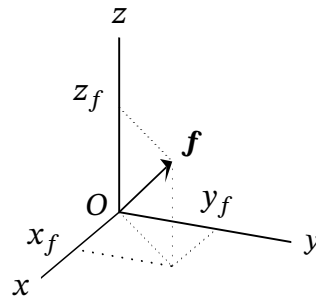


FIG. 3.3 – Coordonnées du vecteur $\mathbf{f}$

Dans le système de coordonnées rectangulaire (O, x, y, z) , le point à l'extrémité du vecteur $\mathbf{f}$ a pour coordonnées (x_f, y_f, z_f) .

Remarque 3.2.2

Par abus de langage, on parle des coordonnées d'un vecteur pour parler des coordonnées du point à son extrémité.

Les vecteurs ont une existence propre indépendante du système de coordonnées. En effet, ils modélisent la réalité alors que le choix d'un système de coordonnées est toujours arbitraire. Les coordonnées du point à l'extrémité d'un vecteur dépendent du système de coordonnées choisi et ont par conséquent le même arbitraire.

Exemple 3.2.4

Une force physique exercée sur quelque chose ne peut dépendre du système de coordonnées utilisé pour définir le vecteur qui modélise cette force.

Notation 3.2.1

Nous utiliserons la notation indicielle pour les axes et pour les coordonnées :

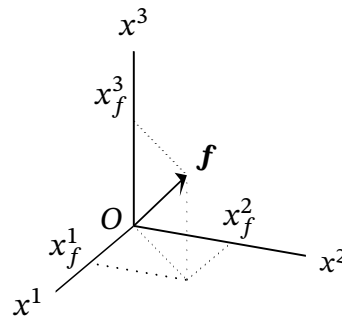


FIG. 3.4 – Notation indicielle

Dans le système de coordonnées rectangulaire (O, x^1, x^2, x^3) , le point à l'extrémité du vecteur $\mathbf{f}$ a pour coordonnées (x_f^1, x_f^2, x_f^3) .

3.2.1 Base vectorielle

Nous sommes passés par les coordonnées d'un point pour traiter de vecteurs mais nous pouvons nous abstraire momentanément de la notion de point. En effet, à chaque système de coordonnées, qu'il soit rectiligne ou curviligne, orthogonal ou non, nous pouvons associer au plus deux bases vectorielles :

- en plaçant un vecteur de base tangent à chaque ligne de coordonnées
- en plaçant un vecteur de base perpendiculaire à chaque hypersurface de coordonnées (espace pour lequel une seule coordonnée est constante)

Ces deux bases sont dites *réciroques*. Nous appellerons « base tangente » la première de ces bases, et « base réciroque » la seconde. Tous les vecteurs de l'espace associé à ce système de coordonnées peuvent s'écrire d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de l'une de ces deux bases.

Au système de coordonnées rectangulaire en trois dimensions, nous associons les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tangents aux lignes de coordonnées, qui forment la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dite base *canonique*, signifiant ici « la plus simple ». Les autres bases seront définies par rapport à la base canonique qui préexiste donc souvent de façon implicite à toute autre base. Une fois posée, nous pouvons nous abstraire du système de coordonnées rectangulaires.

Exemple 3.2.5 : Base vectorielle des vecteurs force

Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs de base unitaires (d'intensité un newton) deux à deux orthogonaux de l'espace vectoriel des forces de la physique newtonienne. Le vecteur force $\vec{f}$ s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs force $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{f} = f^1 \vec{i} + f^2 \vec{j} + f^3 \vec{k}$$

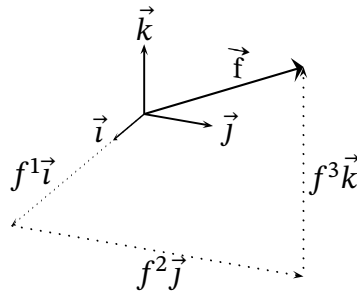


FIG. 3.5 – Le vecteur force comme combinaison linéaire de vecteurs force

Nous dirons que le vecteur force $\vec{f}$ se décompose dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace des forces, et que les nombres f^1 , f^2 et f^3 sont les composantes du vecteur force $\vec{f}$ dans cette base.

3.2.2 Repère

En tout point d'un système de coordonnées nous associons une base de vecteurs tangents aux lignes de coordonnées. La base associée au système de coordonnées rectangulaire est habituellement noté $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'ensemble d'un point et de sa base locale forme un repère.

Définition 3.2.2 : Repère

Dans un espace vectoriel, un repère est la donnée d'un point pris pour origine et d'une base de trois vecteurs. Par exemple en trois dimension $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 3.2.3 : Composantes d'un vecteur

D'après le th. 3.2.1 page 36, tout vecteur se décompose de façon unique dans une base, sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés les composantes du vecteur dans cette base.

Remarque 3.2.3

On trouve parfois le terme de « coordonnées » d'un vecteur dans une base à la place de « composantes ». Nous ferons la distinction et parlerons de coordonnées pour un point dans un système de coordonnées.

Exemple 3.2.6 : Base vectorielle tangente associée au système de coordonnées polaires

Pour toute base associée à des coordonnées curvilignes, les vecteurs de base forment un champ de vecteurs fonction des coordonnées (chaque point est l'origine d'une base). Les vecteurs de base de la base polaire tangente sont pris tangentiels aux lignes de coordonnées polaires (fig. 1.3 page 5), la base polaire est donc orthogonale et n'est pas définie au point origine $O(0, 0)$.

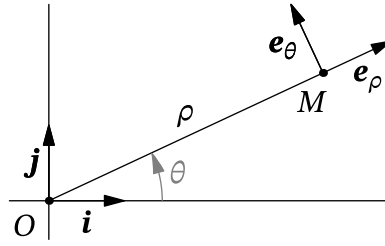


FIG. 3.6 – Vecteurs unitaires de la base polaire orthonormée au point M

Cherchons l'expression des vecteurs de base de la base polaire locale orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ en fonction des vecteurs de base de la base globale orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

a) première méthode

En se servant de la figure 3.6, exprimons les vecteurs unitaires de base $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ en fonction de ceux de la base rectangulaire normée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho(\theta) = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j} \end{cases}$$

Réciproquement, à partir de la figure 3.6, ou en multipliant par $\cos(\theta)$ l'une des égalités et par $\sin(\theta)$ l'autre égalité et en additionnant :

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{e}_\rho \cos(\theta) - \mathbf{e}_\theta \sin(\theta) \\ \mathbf{j} = \mathbf{e}_\rho \sin(\theta) + \mathbf{e}_\theta \cos(\theta) \end{cases}$$

b) seconde méthode

Soit M un point de coordonnées polaires (ρ, θ) et de coordonnées rectangulaires (x, y) . La transformation des coordonnées polaires vers rectangulaires s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 2\pi > \theta \geq 0$$

Déterminons les vecteurs unitaires de base $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ en différentiant le vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base rectangulaire normée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta) \mathbf{i} + \rho \sin(\theta) \mathbf{j} \\ d\mathbf{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right)_\theta d\rho + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right)_\rho d\theta \\ &= [\cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j}] d\rho + \rho [-\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j}] d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho(\theta) = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j} \end{cases}$$

et l'on a :

$$d\mathbf{r}(\rho, \theta) = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\theta \mathbf{e}_\theta$$

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta) \mathbf{i} + \rho \sin(\theta) \mathbf{j} \\ &= \rho [\cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j}] \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho\end{aligned}$$

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base de la base polaire orthonormée pour exprimer la vitesse et l'accélération d'un point matériel en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho(\theta) = -\dot{\theta} \sin(\theta) \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos(\theta) \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta(\theta) = -\dot{\theta} \cos(\theta) \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin(\theta) \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho \end{cases} \quad (3.1)$$

Remarque 3.2.4

Les vecteurs force, position, vitesse, accélération, champ électrique, etc. appartiennent à des espaces vectoriels différents. En physique nous ramenons tous ces vecteurs dans le même espace vectoriel, l'espace géométrique. Ceci est possible car les propriétés mathématiques de ces vecteurs sont identiques et les règles de calcul que nous verrons (p. ex. produit scalaire) y sont définies de la même manière. Seule leur nature physique distingue ces vecteurs (dimension physique), mais pas leur nature mathématique. Nous les considérons tous comme des éléments d'un même espace vectoriel. Ce faisant, nous procédons à l'assimilation d'espaces isomorphes à l'un d'entre eux.

Notation 3.2.2

En notation indicielle les vecteurs de base sont notés avec un indice en bas :

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= f^1 \mathbf{e}_1 + f^2 \mathbf{e}_2 + f^3 \mathbf{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 f^i \mathbf{e}_i \\ &= f^i \mathbf{e}_i \quad (i \text{ de } 1 \text{ à } 3)\end{aligned}$$

Remarque 3.2.5

Par abus de langage, on donne le nom de vecteur aux composantes elles-mêmes.

Il faut s'assurer que les vecteurs que l'on utilise pour former une base sont linéairement indépendants, c.-à-d. tels que l'on ne puisse pas exprimer un vecteur en fonction des autres car il serait redondant.

Définition 3.2.4 : Famille de vecteurs linéairement indépendants d'ordre p

Soient $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une famille de p vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E . Ces vecteurs forment un système linéairement indépendant d'ordre p , ou encore une famille libre d'ordre p , s'il est impossible de trouver p nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque 3.2.6

Interprétation géométrique :

Utilisons la représentation intuitive des vecteurs par des flèches. Un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant s'il n'est pas possible de construire une figure fermée avec deux ou plusieurs de ces vecteurs, même en ajustant leurs longueurs. Aucun vecteur de cet ensemble ne peut alors être exprimé comme combinaison linéaire des autres car chacun définit une nouvelle dimension.

Exemple 3.2.7 : Vecteurs linéairement indépendants

Montrons que les vecteurs $\mathbf{u}_1(a, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2(b, c, 0)$, $\mathbf{u}_3(0, 0, d)$ sont linéairement indépendants :

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0} \\ \lambda_1 (a, 0, 0) + \lambda_2 (b, c, 0) + \lambda_3 (0, 0, d) &= (0, 0, 0) \\ (\lambda_1 a + \lambda_2 b, \lambda_2 c, \lambda_3 d) &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

La seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ par conséquent les vecteurs sont linéairement indépendants.

Il faut également s'assurer que la famille de vecteur que l'on a choisi pour former une base de l'espace vectoriel permet bien de générer tous les vecteurs de cet espace. Nous dirons que cette famille est génératrice, et que chaque vecteur de l'espace vectoriel se décompose sur les vecteurs de cette famille, ou encore que tout vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Définition 3.2.5 : Famille génératrice

Soient $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une famille de p vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E . Ces vecteurs forment une famille génératrice ssi

$$\forall \mathbf{v} \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} / \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p$$

Nous pouvons maintenant donner une définition précise de la notion de base :

Définition 3.2.6 : Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel E , une famille libre et génératrice de E .

Une définition alternative est possible. Dans un espace vectoriel le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants (c.-à-d. l'ordre maximal d'après la déf. 3.2.4 page précédente) est appelé dimension de cet espace. Par exemple pour une droite $n = 1$, pour un plan $n = 2$, pour un volume $n = 3$.

Définition 3.2.7 : Dimension d'un espace vectoriel

L'ordre maximal d'un espace vectoriel est appelé dimension de cet espace vectoriel.

Notation 3.2.3

Un espace vectoriel de dimension n , donc d'ordre maximal n , est noté E_n . Ainsi, E_1 est une droite vectorielle, E_2 est un plan vectoriel.

Définition 3.2.8 : Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel, tout système libre de vecteurs d'ordre maximal.

Notation 3.2.4

Soit un espace vectoriel E_n , sa base canonique est notée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ ou $(\mathbf{e}_i)$.

Théorème 3.2.1

La décomposition d'un vecteur dans une base est unique.

Démonstration. Soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E_n et soit $\mathbf{u}$ un vecteur de E_n . La base étant par définition génératrice de E_n , le vecteur $\mathbf{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \dots + u^n \mathbf{e}_n$$

Supposons l'existence d'une autre décomposition :

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \dots + u^n \mathbf{e}_n$$

Par soustraction :

$$(u^1 - u^1) \mathbf{e}_1 + (u^2 - u^2) \mathbf{e}_2 + \dots + (u^n - u^n) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

La base étant libre par définition (les vecteurs de base sont indépendants) :

$$u^1 = u^1, u^2 = u^2, \dots, u^n = u^n$$

La décomposition est donc unique. □

Définition 3.2.9 : Vecteur-coordonnée

Le n -tuple $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ est appelé vecteur-coordonnée du vecteur $\mathbf{u}$ sur la base $(\mathbf{e}_i)$. On le note $[u]_{\mathbf{e}}$.

3.2.3 Dérivée ordinaire d'un vecteur

Soit $\mathbf{v}(\lambda)$ un vecteur fonction de la variable λ , si l'on note $\Delta\lambda$ l'accroissement de λ alors l'accroissement de $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)$$

Par conséquent

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\lambda} = \frac{\mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

Si la limite existe, la dérivée ordinaire du vecteur $\mathbf{v}(\lambda)$ par rapport à λ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\lambda} \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)}{\Delta\lambda} \end{aligned}$$

Notation 3.2.5

Les notations suivantes n'ont pas le même sens :

$$\frac{\Delta \mathbf{v}(\lambda)}{\Delta \lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \lambda}(\lambda)$$

La première indique que le vecteur que l'on dérive est fonction de λ , la seconde que le vecteur dérivée est fonction de λ .

Lorsque la dérivée est à nouveau une fonction de λ nous pouvons considérer sa dérivée. Si elle existe elle est notée $\frac{d^2 \mathbf{v}}{d\lambda^2}$. Les dérivées d'ordre n sont notées $\frac{d^n \mathbf{v}}{d\lambda^n}$.

3.2.4 Continuité et différentiabilité

a) une fonction scalaire $f(x)$ (déf. 3.1.4 page 23) est continue en x si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

De façon équivalente, une fonction scalaire $f(x)$ est continue en x si pour tout nombre positif ε donné *a priori*, en particulier lorsque ce nombre est très petit, nous pouvons toujours trouver une variation très petite de la variable telle que la différence de valeurs de la fonction soit inférieure à ce nombre ε donné :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |\Delta x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) une fonction vectorielle

$$\mathbf{v}(\lambda) = v^1(\lambda)\mathbf{e}_1 + v^2(\lambda)\mathbf{e}_2 + v^3(\lambda)\mathbf{e}_3$$

(déf. 3.1.9 page 24) est continue en λ si les trois fonctions $v^1(\lambda)$, $v^2(\lambda)$, $v^3(\lambda)$ sont continues en λ , ou si

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \mathbf{v}(\lambda + \Delta \lambda) = \mathbf{v}(\lambda)$$

De façon équivalente, une fonction vectorielle $\mathbf{v}(\lambda)$ est continue en λ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |\Delta \lambda| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}(\lambda + \Delta \lambda) - \mathbf{v}(\lambda)| < \varepsilon$$

Une fonction de la variable λ , scalaire ou vectorielle, est *différentiable* d'ordre n si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ existe. Une fonction différentiable est nécessairement continue mais la réciproque est fausse.

3.2.5 Dérivée partielle d'un vecteur

Soit $\mathbf{v}(x, y)$ un vecteur fonction de deux variables scalaires. Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de $\mathbf{v}(x, y)$ par rapport à chacune des variables s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{v}(x, y, z)}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(x, y + \Delta y, z) - \mathbf{v}(x, y, z)}{\Delta y}$$

La continuité et la différentiabilité sont étendues aux fonctions de plusieurs variables.

a) une fonction scalaire $f(x, y)$ est continue en (x, y) si

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$$

De façon équivalente, une fonction scalaire $f(x, y)$ est continue en (x, y) si pour tout nombre positif donné *a priori*, en particulier lorsque ce nombre est très petit, nous pouvons toujours trouver une variation très petite des variables telle que la différence de valeurs de la fonction soit inférieure à ce nombre donné :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |\Delta x| < \delta \text{ et } |\Delta y| < \delta \Rightarrow |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$$

b) une fonction vectorielle

$$\mathbf{v}(\lambda, \mu) = v^1(\lambda, \mu)\mathbf{e}_1 + v^2(\lambda, \mu)\mathbf{e}_2 + v^3(\lambda, \mu)\mathbf{e}_3$$

est continue en (λ, μ) si les trois fonctions $v^1(\lambda, \mu)$, $v^2(\lambda, \mu)$, $v^3(\lambda, \mu)$ sont continues en (λ, μ) , ou si

$$\lim_{\Delta \lambda, \Delta \mu \rightarrow 0} \mathbf{v}(\lambda + \Delta \lambda, \mu + \Delta \mu) = \mathbf{v}(\lambda, \mu)$$

De façon équivalente, une fonction vectorielle $\mathbf{v}(\lambda, \mu)$ est continue en (λ, μ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |\Delta \lambda| < \delta \text{ et } |\Delta \mu| < \delta \Rightarrow |\mathbf{v}(\lambda + \Delta \lambda, \mu + \Delta \mu) - \mathbf{v}(\lambda, \mu)| < \varepsilon$$

Une fonction des variables λ, μ , scalaire ou vectorielle, est *différentiable* d'ordre n si ses dérivées $n^{\text{ème}}$ partielles existent et sont continues.

Les dérivées partielles d'ordre supérieur s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu} \right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda} \right)$$

Lorsque les dérivées partielles secondes mixtes existent et sont continues, elles commutent (théorème de Schwarz) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu \partial \lambda}$$

3.2.6 Formules de dérivation des vecteurs

Soient $\mathbf{a}(\lambda)$, $\mathbf{b}(\lambda)$, $\mathbf{c}(\lambda)$ trois vecteurs fonction de la variable scalaire λ , et soit $\phi(\lambda)$ une fonction scalaire de λ également :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} + \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} + \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} + \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \times \mathbf{b}$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\phi \mathbf{a}) = \phi \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} + \frac{d\phi}{d\lambda} \mathbf{a}$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{d\lambda} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} \times \mathbf{c} + \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\frac{d}{d\lambda}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \mathbf{a} \times \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{d\lambda} \right) + \mathbf{a} \times \left(\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} \times \mathbf{c} \right) + \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

3.2.7 Base et repère naturels

Il n'existe pas de base globale lorsque le système de coordonnées est curviligne. Il est alors naturel d'utiliser les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées pour définir une base locale en chaque point.

Définition 3.2.10 : Base naturelle

Soit $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ un système de coordonnées quelconques, curvilignes ou rectilignes, orthogonales ou non. En un point M , les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées définissent une base locale appelée base naturelle au point M :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbf{e}_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i}$$

Remarque 3.2.7

Les bases naturelles sont aussi appelées bases coordonnées ou bases holonomiques.

À l'exception de la base naturelle des coordonnées cartésiennes, les bases naturelles ne sont pas normées. Les vecteurs de la base unitaire $(\mathbf{e}_i)$ sont donnés par :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} = \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_i = h_i \mathbf{e}_i$$

Définition 3.2.11 : Facteurs de proportionnalité

Les $h_i \stackrel{\text{déf}}{=} \|\mathbf{e}_i\|$ sont appelés facteurs de proportionnalité.

Remarque 3.2.8

En coordonnées curvilignes, $(\mathbf{e}_i)$ désigne à la fois la base naturelle du système de coordonnées (x_i) en un point, et le champ de bases naturelles en chaque point de l'espace considéré.

Définition 3.2.12 : Repère naturel

$(M, \mathbf{e}_i)$ est le repère naturel au point M .

Notation 3.2.6

Soient O et O' deux points fixes et M un point susceptible de se déplacer. Utilisons la relation de Chasles (3.2) page 29 :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M} \\ d\mathbf{OM} &= d\mathbf{OO'} + d\mathbf{O'M} \\ &= d\mathbf{O'M} \end{aligned}$$

Puisque le point O n'a pas d'importance, nous utiliserons la notation :

$$d\mathbf{OM} \equiv d\mathbf{M}$$

Exemple 3.2.8 : Base naturelle associée aux coordonnées cartésiennes

La base naturelle des coordonnées rectangulaires (x, y, z) est la base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
La base naturelle des coordonnées cartésiennes (x, y, z) est la base normée $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Exemple 3.2.9 : Base naturelle associée aux coordonnées polaires (ρ, θ)

En général les vecteurs de base de la base naturelle ne sont pas de norme unité et n'ont pas tous la même dimension physique. C'est ce qui distingue la base tangente normée de la base naturelle.

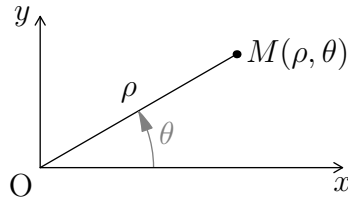


FIG. 3.7 – Coordonnées polaires (ρ, θ)

Pour trouver l'expression des vecteurs de la base naturelle polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ en fonction des vecteurs de la base (naturelle) rectangulaire $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, il nous faut la transformation des coordonnées polaires en rectangulaires.

Notation 3.2.7

Cette transformation est notée

$$(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$$

Elle s'écrit :

$$T : \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 2\pi > \theta \geq 0 \quad (3.2)$$

Avec la déf. 3.2.10 page précédente d'une base naturelle :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \left(\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho} \right)_\theta \\ \mathbf{e}_\theta = \left(\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} \right)_\rho \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{j} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta = -\rho \sin(\theta) \mathbf{i} + \rho \cos(\theta) \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta = \rho \mathbf{e}_\theta \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

La déf. 3.2.11 page précédente donne les facteurs de proportionnalité suivants :

$$\begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\theta = \rho \end{cases}$$

Le rayon ρ ayant la dimension d'une longueur, les vecteurs $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ n'ont pas la même dimension.

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \rho & \partial y / \partial \rho \\ \partial x / \partial \theta & \partial y / \partial \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

Cette matrice des dérivées partielles s'appelle matrice jacobienne de la transformation de coordonnées $(x, y) \rightarrow (\rho, \theta)$. La base naturelle polaire n'est pas normée :

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\theta) + \rho^2 \cos^2(\theta)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = 1 \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \rho \end{cases}$$

En revanche, elle est orthogonale :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta &= [\cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j}] \cdot [-\rho \sin(\theta) \mathbf{i} + \rho \cos(\theta) \mathbf{j}] \\ &= -\cos(\theta) \rho \sin(\theta) + \sin(\theta) \rho \cos(\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

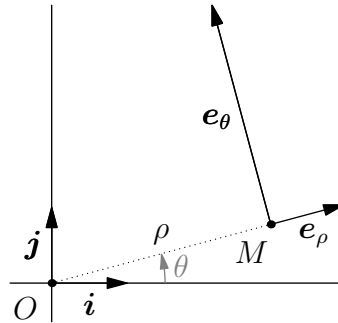


FIG. 3.8 – Base naturelle en M en coordonnées polaires (ρ, θ)

Au point de coordonnées polaires $(3, 30^\circ)$, la base polaire a pour expression :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ -3 \sin(30^\circ) & 3 \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

Notez bien que pour $\rho = 3$, $\|\mathbf{e}_\rho\| = 1$ et $\|\mathbf{e}_\theta\| = 3$.

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base naturelle polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \theta) &= \rho \mathbf{e}_\rho \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base de la base naturelle pour exprimer la vitesse et l'accélération d'un point matériel en coordonnées polaires. À partir des relations (3.1) page 34 et (3.3) page 40 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta = \rho \mathbf{e}_\theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\mathbf{e}}_\rho \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\rho} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\mathbf{e}}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\rho} \mathbf{e}_\theta - \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\rho \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta}{\rho} \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\dot{\rho} \mathbf{e}_\theta}{\rho} - \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\rho \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 3.2.10 : Base naturelle associée aux coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

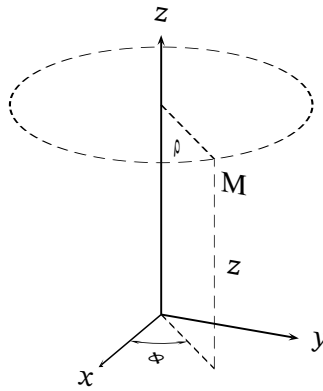


FIG. 3.9 – Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

La coordonnée ρ est appelée distance radiale, rayon ou module, ϕ est appelée angle ou azimut, z est appelée hauteur ou cote. Par analogie aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\phi) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\phi = -\rho \sin(\phi) \mathbf{i} + \rho \cos(\phi) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\rho \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

La norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| &= 1 \\ \|\mathbf{e}_\phi\| &= \rho \\ \|\mathbf{e}_z\| &= 1 \end{cases}$$

Exemple 3.2.11 : Base naturelle associée aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

La coordonnée ρ est appelée distance radiale, rayon ou module, θ est appelée colatitude, ϕ est appelée longitude. À partir de l'expression du vecteur position,

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{i} + r \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{j} + r \cos(\theta) \mathbf{k} \end{aligned}$$

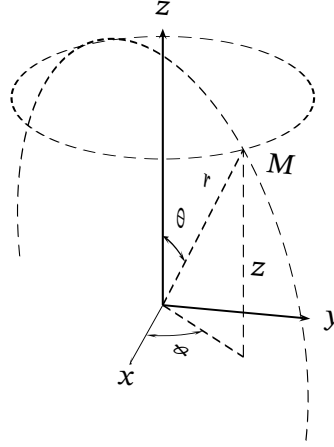


FIG. 3.10 – Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{M} \\ \mathbf{e}_\theta = \partial_\theta \mathbf{M} \\ \mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \mathbf{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{j} + \cos(\theta) \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta = r \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{i} + r \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{j} - r \sin(\theta) \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\phi = -r \sin(\theta) \sin(\phi) \mathbf{i} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \mathbf{j} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \\ r \cos(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

La norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_r\| = \sqrt{\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_r\| = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{r^2 \sin^2(\theta)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_r\| = 1 \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = r \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = r |\sin(\theta)| \end{cases}$$

Sauf précision contraire, on se placera toujours dans la base naturelle du système de coordonnées.

Remarque 3.2.9

En annexe 10.2 page 144, on montre l'existence de bases *non holonomiques* qui ne peuvent être la base naturelle d'aucun système de coordonnées.

3.2.8 Opérations sur les composantes

On définit l'addition vectorielle des composantes et la multiplication des composantes d'un vecteur par un scalaire de sorte que l'on retrouve les propriétés de la représentation géométrique, § 3.1 page 21.

- l'addition vectorielle consiste à additionner les composantes respectives des vecteurs :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= (u^1, u^2, u^3) \oplus (v^1, v^2, v^3) \\ &= (u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3) \\ &= (w^1, w^2, w^3) \\ &= \mathbf{w}\end{aligned}$$

- la multiplication d'un vecteur par un scalaire α consiste à multiplier chaque composante du vecteur par ce scalaire :

$$\begin{aligned}\alpha \odot \mathbf{u} &= \alpha \odot (u^1, u^2, u^3) \\ &= (\alpha u^1, \alpha u^2, \alpha u^3) \\ &= (v^1, v^2, v^3) \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

3.2.9 Propriétés des lois de composition vectorielles

Nous retrouvons effectivement les propriétés des lois de composition du § 3.1.2 page 25 :

- pour l'addition vectorielle. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs

1) commutativité :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= (u^1, u^2, u^3) \oplus (v^1, v^2, v^3) \\ &= (u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3) \\ &= (v^1 + u^1, v^2 + u^2, v^3 + u^3) \\ &= (v^1, v^2, v^3) \oplus (u^1, u^2, u^3) \\ &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}\end{aligned}$$

2) associativité :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) &= (u^1, u^2, u^3) \oplus [(v^1, v^2, v^3) \oplus (w^1, w^2, w^3)] \\ &= (u^1, u^2, u^3) \oplus (v^1 + w^1, v^2 + w^2, v^3 + w^3) \\ &= (u^1 + v^1 + w^1, u^2 + v^2 + w^2, u^3 + v^3 + w^3) \\ &= (u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3) \oplus (w^1, w^2, w^3) \\ &= [(u^1, u^2, u^3) \oplus (v^1, v^2, v^3)] \oplus (w^1, w^2, w^3) \\ &= (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} \\ &= \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}\end{aligned}$$

3) existence d'un élément neutre appelé vecteur nul et noté $\mathbf{0}$, tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} &= (u^1, u^2, u^3) \oplus (0, 0, 0) \\ &= (u^1 + 0, u^2 + 0, u^3 + 0) \\ &= (u^1, u^2, u^3) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

4) pour tout vecteur $\mathbf{u}$ il existe le vecteur opposé noté $-\mathbf{u}$, tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) &= (u^1, u^2, u^3) \oplus (-u^1, -u^2, -u^3) \\ &= (u^1 - u^1, u^2 - u^2, u^3 - u^3) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

De plus, nous définissons la soustraction vectorielle comme étant l'addition vectorielle avec l'opposé :

$$\mathbf{u} \ominus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v})$$

• pour la multiplication par un scalaire. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1) associativité :

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) &= \alpha \odot [\beta \odot (u^1, u^2, u^3)] \\ &= \alpha \odot (\beta u^1, \beta u^2, \beta u^3) \\ &= (\alpha \beta u^1, \alpha \beta u^2, \alpha \beta u^3) \\ &= (\alpha \times \beta) \odot (u^1, u^2, u^3) \\ &= (\alpha \times \beta) \odot \mathbf{u}\end{aligned}$$

2) distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} &= (\alpha + \beta) \odot (u^1, u^2, u^3) \\ &= ((\alpha + \beta)u^1, (\alpha + \beta)u^2, (\alpha + \beta)u^3) \\ &= (\alpha u^1 + \beta u^1, \alpha u^2 + \beta u^2, \alpha u^3 + \beta u^3) \\ &= (\alpha u^1, \alpha u^2, \alpha u^3) \oplus (\beta u^1, \beta u^2, \beta u^3) \\ &= [\alpha \odot (u^1, u^2, u^3)] \oplus [\beta \odot (u^1, u^2, u^3)] \\ &= (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})\end{aligned}$$

3) distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \alpha \odot [(u^1, u^2, u^3) \oplus (v^1, v^2, v^3)] \\ &= \alpha \odot (u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3) \\ &= [\alpha (u^1 + v^1), \alpha (u^2 + v^2), \alpha (u^3 + v^3)] \\ &= (\alpha u^1 + \alpha v^1, \alpha u^2 + \alpha v^2, \alpha u^3 + \alpha v^3) \\ &= (\alpha u^1, \alpha u^2, \alpha u^3) \oplus (\alpha v^1, \alpha v^2, \alpha v^3) \\ &= [\alpha \odot (u^1, u^2, u^3)] \oplus [\alpha \odot (v^1, v^2, v^3)] \\ &= (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})\end{aligned}$$

4) existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :

$$\begin{aligned} 1 \odot \mathbf{u} &= 1 \odot (u^1, u^2, u^3) \\ &= (1u^1, 1u^2, 1u^3) \\ &= (u^1, u^2, u^3) \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

3.2.10 Composantes d'un vecteur

Pour introduire les vecteurs nous nous sommes servi d'objets *géométriques* représentés par une flèche, mais tous les vecteurs ne sont pas représentables par une flèche. Par exemple les matrices carrées d'ordre deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des vecteurs, elles suivent bien la déf. 3.1.11 page 27. En revanche, tout vecteur peut s'exprimer comme une liste ordonnée de nombres qui sont ses composantes dans une base.

D'après le § 3.2.1 page 31, à partir d'un système de coordonnées cartésiennes obliques, nous pouvons construire deux bases réciproques. Choisissons l'une de ces deux bases, un vecteur peut y être projeté de deux façons : parallèlement ou perpendiculairement aux vecteurs de base. En projetant

- parallèlement on obtient les composantes *contravariantes* du vecteur dans cette base
- perpendiculairement on obtient les composantes *covariantes* du vecteur dans cette base

Remarques 3.2.1

- les composantes contravariantes dans une base sont égales aux composantes covariantes dans la base réciproque. Ceci est dû au fait que prendre la parallèle à la perpendiculaire à une droite, est équivalent à prendre la perpendiculaire à la parallèle à cette droite
- les composantes contravariantes et covariantes sont confondues ssi la base est orthonormée

Notation 3.2.8

En écriture indicielle, les composantes

- contravariantes sont notées avec l'indice en haut
- composantes covariantes sont notées avec l'indice en bas

Théorème 3.2.2

Soit E_n un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$. Alors E_n et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes. On écrit $E_n \cong \mathbb{K}^n$.

Démonstration. Le th. 3.2.1 page 36 montre qu'à chaque vecteur $\mathbf{u} \in E_n$, il correspond relativement à une base donnée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, un n -tuple $[u]_{\mathbf{e}}$ de $\mathbb{K}^n$.

Réciproquement, si $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique vecteur $\mathbf{u}$ de la forme $u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \dots + u^n \mathbf{e}_n$. La base $(\mathbf{e}_i)$ détermine une correspondance biunivoque entre les vecteurs de E_n et les n -tuples de $\mathbb{K}^n$. De plus cette correspondance conserve la structure d'espace vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \dots + u^n \mathbf{e}_n && \text{correspond} && (u^1, u^2, \dots, u^n) \text{ c.-à-d. } [u]_{\mathbf{e}} \\ \mathbf{v} &= v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + \dots + v^n \mathbf{e}_n && \text{correspond} && (v^1, v^2, \dots, v^n) \text{ c.-à-d. } [v]_{\mathbf{e}} \end{aligned}$$

alors à

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u^1 + v^1) \mathbf{e}_1 + (u^2 + v^2) \mathbf{e}_2 + \cdots + (u^n + v^n) \mathbf{e}_n \quad \text{correspond} \quad [u]_e + [v]_e \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \mathbf{u} &= (\alpha u^1) \mathbf{e}_1 + (\alpha u^2) \mathbf{e}_2 + \cdots + (\alpha u^n) \mathbf{e}_n \quad \text{correspond} \quad \alpha [u]_e \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} [u]_e + [v]_e &= [u + v]_e \\ k[u]_e &= [ku]_e \end{aligned}$$

□

Se donner une base et se donner des composantes contravariantes ou covariantes est équivalent à se donner un vecteur. Réciproquement, se donner un vecteur c'est se donner une base et des composantes contravariantes ou covariantes.

La covariance ou la contravariance des nombres d'une suite ordonnée est une condition nécessaire et suffisante pour former un vecteur. Nous pouvons donner une nouvelle définition des vecteurs : un vecteur est une suite ordonnée de nombres covariants ou contravariants par changement de coordonnées. Nous énoncerons cela plus précisément au th. 8.10.1 page 134.

Dans une base donnée, nous avons l'équivalence :

$$(u^1, u^2, u^3) \equiv (u_1, u_2, u_3)$$

Remarques 3.2.2

Lorsque l'on décrit un vecteur en composantes covariantes on parle de covecteur ou de vecteur covariant. C'est un abus de langage, il n'existe qu'une sorte de vecteur, dont on peut exprimer les composantes de deux façons différentes dans une base donnée.

Notation 3.2.9

Les notations $\mathbf{v}$ et $\vec{v}$ ne donnent pas d'information sur la variance (le fait d'être contravariantes ou covariantes) des composantes. Nous noterons donc souvent les vecteurs par leurs composantes, contravariantes ou covariantes :

$$v^i \quad \text{ou} \quad v_i$$

Exemple 3.2.12 : Système de coordonnées et composantes contravariantes

Au système de coordonnées cartésiennes obliques de la fig. 1.1 page 3 nous associons le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ tel que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée et les vecteurs de base pris le long des droites de coordonnées.

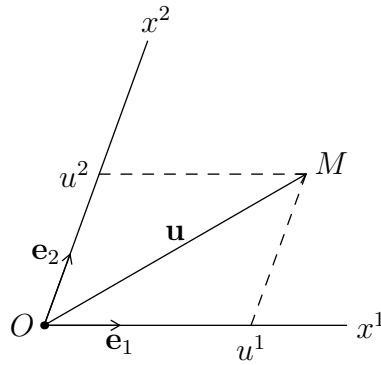


FIG. 3.11 – Composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u}$

Dans cette base, le vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{OM}$ a pour composantes contravariantes u^1 et u^2 :

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes obliques, les coordonnées d'un point et les composantes contravariantes du vecteur associé sont confondues ssi la base est normée :

$$\begin{cases} u^1 = x_M^1 \\ u^2 = x_M^2 \end{cases}$$

Définition 3.2.13 : Composantes contravariantes d'un vecteur

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base quelconque d'un espace vectoriel E_n . On appelle composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u}$ dans cette base, les quantités $u^1, u^2, \dots, u^n$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \dots + u^n \mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \mathbf{e}_i \\ &= u^i \mathbf{e}_i \quad (i \text{ de } 1 \text{ à } n) \end{aligned}$$

D'après la notation 3.2.8 page 46, les composantes contravariantes sont représentées au moyen d'un indice supérieur.

Les vecteurs ont une existence propre, ils sont indépendants de la base dans laquelle on les exprime : leur norme, direction et sens ne varient pas par changement de base. Ils sont *invariants* par changement de base, seules leurs composantes changent. Pour assurer cette invariance, lorsqu'on les écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base, leurs composantes contravariantes (les coefficients u^i) doivent se transformer de façon « contraire » aux vecteurs de base $\mathbf{e}_i$.

Remarque 3.2.10

Les indices de sommation sont dits *muets*, nous pouvons les remplacer par d'autres lettres :

$$u^i \mathbf{e}_i = u^j \mathbf{e}_j$$

Les autres indices sont dits *libres* ou *réels*.

La décomposition d'un vecteur en composantes contravariantes est unique dans chaque base et réciproquement, les composantes contravariantes $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ représentent un unique vecteur dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Exemple 3.2.13 : Composantes contravariantes par changement de base

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes (x, y, z) dans la base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Déterminons ses composantes contravariantes (u^1, u^2, u^3) dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ avec $\mathbf{e}_1(a, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2(b, c, 0)$, $\mathbf{e}_3(0, 0, d)$.

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 \\ &= u^1a\mathbf{i} + u^2(b\mathbf{i} + c\mathbf{j}) + u^3d\mathbf{k} \\ &= (u^1a + u^2b)\mathbf{i} + u^2c\mathbf{j} + u^3d\mathbf{k} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{cases} u^1a + u^2b = x \\ u^2c = y \\ u^3d = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = y/c \\ u^3 = z/d \\ u^1 = (x - by/c)/a \end{cases}$$

Exemple 3.2.14 : Base orthogonale non normée

Soit un point M de coordonnées $(6, 2)$. Considérons la base orthogonale non normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ telle que $\|\mathbf{e}_1\| = 2$ et $\|\mathbf{e}_2\| = 1$.

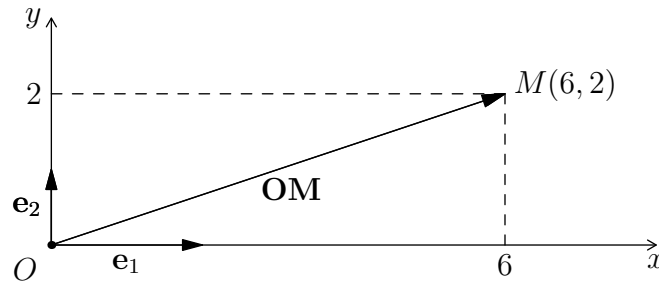


FIG. 3.12 – Coordonnées et composantes contravariantes

Dans cette base :

$$\mathbf{OM} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

Les coordonnées $(6, 2)$ du point M et les composantes contravariantes $(3, 2)$ du vecteur $\mathbf{OM}$ dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont différentes. En coordonnées rectangulaires les vecteurs de base doivent être normés pour que les coordonnées et les composantes contravariantes soient confondues.

Dans ce qui suit, toute base vectorielle est liée à un système de coordonnées. Un changement de système de coordonnées implique un changement de base. En revanche, un changement de base est dû

- soit à un changement de système de coordonnées en un point donné
- soit à un changement d'origine de cette base dans ce même système de coordonnées

Remarque 3.2.11

En physique, le choix d'un système de coordonnées est nécessaire mais les équations de la physique doivent être indépendantes de ce choix.

La différentielle du vecteur position $\mathbf{OM}$ est un vecteur, qui s'écrit dans la base locale :

$$d\mathbf{OM} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i} dx^i$$

Avec la déf. 3.2.10 page 39 de la base naturelle et avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$d\mathbf{OM} = dx^i \mathbf{e}_i \quad (3.4)$$

Remarque 3.2.12

Dans la base naturelle d'un système de coordonnées, et uniquement dans cette base, les éléments différentiels dx^i sont à la fois :

- les différentielles des coordonnées du point M dans le système de coordonnées (O, x^i)
- les composantes contravariantes du vecteur différentiel $d\mathbf{OM}$ dans le repère naturel $(O, \mathbf{e}_i)$ associé au système de coordonnées (x^i) de centre O .

Exemple 3.2.15 : Vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire

En coordonnées polaires, le point M a pour coordonnées (ρ, θ) . Nous avons :

- dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{OM} &= d(\rho \mathbf{e}_\rho) \\ &= d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\mathbf{e}_\rho \\ \frac{d\mathbf{OM}}{dt} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

- dans la base naturelle polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$, en utilisant (3.4) de la présente page,

$$\begin{aligned} d\mathbf{OM} &= d\rho \mathbf{e}_\rho + d\theta \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Dans la base naturelle polaire les composantes du vecteur vitesse ont pour dimensions $m s^{-1}$ et s^{-1} .

Remarque 3.2.13

En comparant les deux expressions de la vitesse on retrouve (3.3) page 40. Notez que l'on a aussi :

$$\begin{aligned} d\mathbf{OM} &= d(\rho \mathbf{e}_\rho) \\ &= d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho \end{aligned}$$

et l'on retrouve également :

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta}{\rho}$$

À partir de l'expression du vecteur vitesse dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$, le

vecteur accélération s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \\ &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_\rho \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

Dans la base naturelle polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$, il s'écrit :

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{2\dot{\rho} \dot{\theta}}{\rho} + \ddot{\theta} \right) \mathbf{e}_\theta$$

Chapitre 4

MATRICES

Sommaire

4.1	Système d'équations linéaires	53
4.2	Addition matricielle	54
4.3	Multiplication matricielle	56
4.4	Matrice colonne et matrice ligne	58
4.5	Matrice transposée	59
4.6	Notation indicielle des matrices	60
4.7	Matrice identité	62
4.8	Inverse d'une matrice carrée	62
4.9	Déterminant d'une matrice carrée	63

4.1 Système d'équations linéaires

Définition 4.1.1 : Équation linéaire

Une équation linéaire à coefficients réels ou complexes est une expression de la forme

$$A_1u^1 + A_2u^2 + \cdots + A_nu^n = a$$

où les coefficients A_i et la constante a sont des scalaires de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou d'un corps $\mathbb{K}$), et où les u^i sont n inconnues, ou indéterminées ou variables.

Une équation est linéaire ssi elle s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire (déf. 3.1.1 page 22) des inconnues. Soit le système de m équations linéaires à n inconnues suivant :

[illegible]

où par convention, dans le terme A_{ij} le premier indice i est celui de la ligne, le second indice j est celui de la colonne. Il est inutile de réécrire les inconnues pour chaque ligne. Simplifions l'écriture de ce système en définissant le nouvel opérateur $\boxtimes$:

Définition 4.1.2 : Opérateur de multiplication matricielle

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Remarque 4.1.1

Si toutes les constantes a_i sont nulles, le système est dit *homogène*.

Définition 4.1.3 : Matrice

Le tableau d'éléments $[A_{ij}]$ est appelé *matrice* A .

L'écriture des inconnues u^i en colonne plutôt qu'en ligne est justifiée au § 4.3 page 56. Les propriétés des matrices découlent naturellement de cette notation et des propriétés des systèmes d'équations linéaires. Un système d'équations est représentable sous forme matricielle ssi les équations sont linéaires.

Notation 4.1.1 : Notation ligne-colonne ou « li co »

Par convention, le premier indice d'un élément de matrice A_{ij} est son numéro de ligne, le second est son numéro de colonne. Cette notation est dite li co. Lorsque l'élément de matrice est noté A_j^i l'indice haut i est celui de la ligne, et l'indice bas j est celui de la colonne, notation $\begin{smallmatrix} \text{li} \\ \text{co} \end{smallmatrix}$

Définition 4.1.4 : Dimension d'une matrice

La dimension ou taille d'une matrice est son nombre de lignes et de colonnes.

La matrice $[A_{ij}]_{mn}$ est de dimension $m \times n$ ou (m, n) , où son nombre de lignes m est sa hauteur, et son nombre de colonnes n est sa largeur.

4.2 Addition matricielle

Nous ne considérons que les systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues, $m = n$, qui donnent alors des matrices carrées et qui admettent une solution unique ou aucune solution.

Définition 4.2.1 : Ordre d'une matrice

Une matrice carrée est d'ordre n si elle est de dimension $n \times n$.

Le raisonnement sur des matrices d'ordre deux est facilement généralisable aux matrices d'ordre

supérieur à deux. Soient les deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{11}u^1 + B_{12}u^2 = b_1 \\ B_{21}u^1 + B_{22}u^2 = b_2 \end{cases}$$

Ces systèmes s'écrivent en notation matricielle

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Additionnons ligne à ligne les deux systèmes de départ :

$$\begin{cases} (A_{11} + B_{11})u^1 + (A_{12} + B_{12})u^2 = a_1 + b_1 \\ (A_{21} + B_{21})u^1 + (A_{22} + B_{22})u^2 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Définissons un nouvel opérateur :

Définition 4.2.2 : Opérateur d'addition matricielle $\boxplus$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

ainsi que :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

On définit de même la soustraction matricielle par :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxminus \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11} & A_{12} - B_{12} \\ A_{21} - B_{21} & A_{22} - B_{22} \end{bmatrix}$$

Remarque 4.2.1

L'addition et la soustraction de deux matrices de dimensions différentes ne sont pas définies.

4.2.1 Propriétés de l'addition matricielle

Soient A, B, C trois matrices :

1) associativité :

$$A \boxplus (B \boxplus C) = (A \boxplus B) \boxplus C$$

- 2) existence d'un élément neutre appelé matrice nulle, notée 0 , dont tous les éléments sont nuls et telle que :

$$A \boxplus 0 = A$$

- 3) pour toute matrice A il existe une matrice opposée notée $\bar{A}$ telle que :

$$A \boxplus \bar{A} = 0$$

L'existence d'une matrice opposée nécessite donc l'existence d'une matrice nulle. De plus la soustraction matricielle est l'addition matricielle avec la matrice opposée :

$$A \boxminus \bar{B} = A \boxplus B$$

- 4) commutativité :

$$A \boxplus B = B \boxplus A$$

Notation 4.2.1

L'addition matricielle est habituellement notée $+$ et la soustraction $-$ par analogie avec les scalaires.

4.3 Multiplication matricielle

4.3.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Reprenons le système d'équations linéaires (4.1) page 53. Nous pouvons multiplier chaque équation par le scalaire α . Le produit matriciel de la matrice A par le scalaire α sera noté :

$$\alpha \boxtimes [A_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}$$

Le scalaire α est une matrice à un seul élément.

4.3.1.1 Propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

- 1) associativité :

$$\alpha \boxtimes (\beta \boxtimes A) = (\alpha \times \beta) \boxtimes A$$

C'est un abus de langage, il n'y a pas associativité car le signe $\boxtimes$ du membre de gauche de l'égalité est le signe opératoire de la multiplication d'une matrice par un scalaire, alors que le signe $\times$ du membre de droite est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

2) distributivité par rapport à l'addition des réels :

$$(\alpha + \beta) \boxtimes A = (\alpha \boxtimes A) \boxplus (\beta \boxtimes A)$$

C'est ici aussi un abus de langage, il n'y a pas distributivité car le signe + du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition dans $\mathbb{R}$, alors que le signe $\boxplus$ du membre de droite est celui de l'addition matricielle.

3) distributivité à gauche et à droite par rapport à l'addition des matrices :

$$\alpha \boxtimes (A \boxplus B) = (A \boxplus B) \boxtimes \alpha = (\alpha \boxtimes A) \boxplus (\alpha \boxtimes B)$$

4) existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :

$$1 \boxtimes A = A$$

5) commutativité :

$$\alpha \boxtimes A = A \boxtimes \alpha$$

4.3.2 Multiplication de deux matrices

Soient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{11}v^1 + B_{12}v^2 = u^1 \\ B_{21}v^1 + B_{22}v^2 = u^2 \end{cases}$$

Injectons le second dans le premier :

$$\begin{cases} A_{11}(B_{11}v^1 + B_{12}v^2) + A_{12}(B_{21}v^1 + B_{22}v^2) = a_1 \\ A_{21}(B_{11}v^1 + B_{12}v^2) + A_{22}(B_{21}v^1 + B_{22}v^2) = a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})v^1 + (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22})v^2 = a_1 \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21})v^1 + (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22})v^2 = a_2 \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Or nous avons aussi :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

En injectant la seconde relation dans la première :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \left\{ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

On constate l'associativité du produit matriciel et l'on a donc :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Chaque élément de la matrice produit est la multiplication d'une ligne de A par une colonne de B . Par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour multiplier deux matrices dans l'ordre AB est que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B . Les matrices sont alors dites *compatibles*. On justifie ainsi l'écriture en colonne des inconnues (4.2) page 54.

Notation 4.3.1

La multiplication matricielle est souvent posée comme suit :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

4.3.2.1 Propriétés de la multiplication matricielle

1) associativité :

$$A \boxtimes (B \boxtimes C) = (A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes B \boxtimes C$$

2) distributivité à gauche et à droite par rapport à l'addition matricielle :

$$A \boxtimes (B \boxplus C) = A \boxtimes B \boxplus A \boxtimes C$$

$$(B \boxplus C) \boxtimes A = B \boxtimes A \boxplus C \boxtimes A$$

3) en général non commutativité :

$$A \boxtimes B \neq B \boxtimes A$$

Notation 4.3.2

Par analogie avec la multiplication des scalaires, la multiplication matricielle est souvent notée $\times$, ou encore on pourra omettre le symbole.

4.4 Matrice colonne et matrice ligne

Notation 4.4.1

Nous noterons les matrices colonnes et les matrices lignes avec des parenthèses plutôt qu'avec des crochets.

Les éléments de ces matrices sont les composantes covariantes ou contravariantes d'un vecteur. Les inconnues u_1, u_2 forment un vecteur. Nous avons les deux possibilités suivantes :

— on pré-multiplie A par une matrice ligne

$$(u_1 \ u_2) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = (A_{11}u_1 + A_{21}u_2 \quad A_{12}u_1 + A_{22}u_2)$$

Le couple u_1, u_2 forme une matrice ligne et le résultat est aussi une matrice ligne.

— on post-multiplie A par une matrice colonne

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 \end{pmatrix}$$

Le couple u_1, u_2 forme une matrice colonne et le résultat est aussi une matrice colonne.

Toute matrice carrée peut prendre en entrée un vecteur colonne (respectivement ligne) et donner en sortie un autre vecteur colonne (respectivement ligne), autrement dit peut transformer un vecteur en un autre vecteur du même type. Notez que nous n'obtenons pas le même système d'équations linéaires selon que l'on pré-multiplie ou que l'on post-multiplie.

Remarque 4.4.1

La notation 4.3.1 page précédente adoptée pour la multiplication matricielle implique que les deux écritures suivantes

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} (u_1 \ u_2) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

n'ont pas de sens car les matrices ne sont pas compatibles.

4.5 Matrice transposée

Définition 4.5.1 : Matrice transposée

Soit A_{ij} un élément de la matrice A . La matrice B est la transposée de A ssi :

$$\forall i, j \quad B_{ij} = A_{ji}$$

Notation 4.5.1

La transposée de A est notée A^T .

Si A est une matrice $m \times n$ alors A^T est une matrice $n \times m$. Par conséquent la transposée d'une matrice colonne donne une matrice ligne et réciproquement.

4.5.1 Propriétés de la transposition matricielle

Soit k un scalaire :

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(kA)^T = kA^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Si $A^T = A$ alors A est symétrique, si $A^T = -A$ alors A est antisymétrique.

Exemple 4.5.1 : Transposée d'une matrice 2×2

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 & A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \right\}^T &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Nous retrouvons la propriété $(AB)^T = B^T A^T$.

4.6 Notation indicielle des matrices

L'addition matricielle est notée :

$$\forall i, j \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Pour la multiplication matricielle (de A par B) nous utilisons la convention de notation ligne-colonne pour les éléments des matrices. Elle est alors notée :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad C_{ij} &= \sum_k A_{ik} B_{kj} \\ &= \sum_k B_{kj} A_{ik} \end{aligned}$$

Remarque 4.6.1

Pour la multiplication matricielle, soit le dernier indice de la première matrice est égal au premier indice de la seconde matrice, soit le premier indice de la première matrice est égal au dernier indice de la seconde matrice.

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A_{ij}u^j = a_i &\Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\vec{u} = \vec{a} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} A_{ji}u^j = b_i &\Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}u^1 + A_{21}u^2 = b_1 \\ A_{12}u^1 + A_{22}u^2 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{21}u^2 \\ A_{12}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T\vec{u} = \vec{b} \end{aligned}$$

Les matrices A_{ij} et A_{ji} sont transposées l'une de l'autre. Grâce à la notation indicielle, démontrons une propriété de la transposition matricielle.

Théorème 4.6.1

Soient $A = [A]_{mn}$ et $B = [B]_{np}$ alors :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Démonstration. D'une part :

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\sum_k A_{ik} B_{kj} \right)^T \\ &= [C_{ij}]_{mp}^T \\ &= [C_{ji}]_{pm} \end{aligned}$$

D'autre part, en posant

$$\begin{cases} B^T = D = [D_{ij}]_{pn} \\ A^T = E = [E_{ij}]_{nm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{ij} = B_{ji} \\ E_{ij} = A_{ji} \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} B^T A^T &= DE \\ &= \sum_k (D_{ik} E_{kj}) \\ &= \sum_k (B_{ki} A_{jk}) \\ &= \sum_k (A_{jk} B_{ki}) \\ &= [C_{ji}]_{pm} \end{aligned}$$

□

4.7 Matrice identité

Définition 4.7.1 : Matrice identité

La matrice identité ou matrice unité, notée I , est une matrice carrée d'ordre n , telle que pour toute matrice carrée A du même ordre :

$$AI = IA = A$$

Notation 4.7.1

En notation indicielle, la matrice identité d'ordre n s'écrit :

$$I = [\delta_{ij}]_{nn}$$

4.8 Inverse d'une matrice carrée

Définition 4.8.1 : Matrice inverse

Une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice carrée B de même ordre, appelée inverse de A , telle que :

$$AB = BA = I$$

Notation 4.8.1

En notation indicielle :

$$\sum_k A_{ik} B_{kj} = \sum_k B_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

Notation 4.8.2

La matrice inverse de A est notée A^{-1} .

L'inversion matricielle a les propriétés suivantes. Soit k un scalaire non nul :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Théorème 4.8.1

La matrice inverse est unique.

Démonstration. Supposons $B \neq C$ telles que :

$$\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases}$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

□

Théorème 4.8.2

Soient $A = [A]_{mn}$ et $B = [B]_{np}$ alors :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration. Par associativité du produit matriciel :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

De même :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

□

Théorème 4.8.3

Si A est inversible alors A^T est inversible et les opérations de transposition et d'inversion commutent :

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ (AA^{-1})^T &= I^T \\ (A^{-1})^T A^T &= I \\ [(A^{-1})^T A^T] (A^T)^{-1} &= I (A^T)^{-1} \\ (A^{-1})^T [A^T (A^T)^{-1}] &= (A^T)^{-1} \\ (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \end{aligned}$$

Si A^{-1} existe alors on peut prendre sa transposée et $(A^{-1})^T$ existe, donc $(A^T)^{-1}$ existe.

□

4.9 Déterminant d'une matrice carrée

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = a_1 & L_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = a_2 & L_2 \end{cases}$$

On résout par substitution :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = a_1 & L_1 \\ A_{11}x_1 + \frac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}x_2 = \frac{A_{11}}{A_{21}}a_2 & L_2 \times \frac{A_{11}}{A_{21}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(A_{12} - \frac{A_{11}A_{22}}{A_{21}} \right) x_2 = a_1 - \frac{A_{11}}{A_{21}} a_2 & L_1 - L_2 \\ x_1 = \frac{a_2}{A_{21}} - \frac{A_{22}}{A_{21}} x_2 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}) x_2 = A_{21}a_1 - A_{11}a_2 & L_1 \times A_{21} \\ x_1 = \frac{a_2}{A_{21}} - \frac{A_{22}}{A_{21}} \frac{A_{21}a_1 - A_{11}a_2}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{A_{21}a_1 - A_{11}a_2}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \\ x_1 = \frac{A_{12}a_2 - A_{22}a_1}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{A_{22}a_1 - A_{12}a_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\ x_2 = \frac{A_{11}a_2 - A_{21}a_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \end{cases}$$

L'expression au dénominateur $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$, appelée *déterminant* de la matrice A , doit être non nulle pour que le système soit soluble.

Notation 4.9.1

Le déterminant de la matrice A est noté :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \end{aligned}$$

On remarque que l'on a alors :

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_1 & A_{12} \\ a_2 & A_{22} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad x_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & a_1 \\ A_{21} & a_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Pour trouver l'expression du déterminant d'une matrice carrée 3×3 nous définissons d'abord un mineur d'une matrice.

Définition 4.9.1 : Mineur d'une matrice carrée

Le mineur $_{ij}(A)$ est le déterminant obtenu à partir de la matrice carrée A en supprimant sa i^e ligne et sa j^e colonne.

Exemple 4.9.1 : Mineur d'une matrice 3×3

Soit la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Le mineur $_{23}(A)$ est le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = A_{11}A_{32} - A_{31}A_{12}$$

Nous définissons à présent un cofacteur d'une matrice carrée.

Définition 4.9.2 : Cofacteur d'une matrice carrée

$$C_{ij}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{i+j} \text{mineur}_{ij}(A)$$

Exemple 4.9.2 : Cofacteur d'une matrice 3×3

En reprenant la matrice de l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} C_{23}(A) &= (-1)^{5} \text{mineur}_{23}(A) \\ &= A_{31}A_{12} - A_{11}A_{32} \end{aligned}$$

Notation 4.9.2

En notation indicielle, le déterminant de la matrice carrée A d'ordre n s'écrit :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n A_{ij} C_{ij}(A) \\ &= \sum_{j=1}^n A_{ij} C_{ij}(A) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le déterminant de la matrice carrée 3×3 peut s'écrire de 6 façons, correspondant au choix d'une ligne parmi trois ou d'une colonne parmi trois :

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{11} C_{11} + A_{12} C_{12} + A_{13} C_{13} \\ &= A_{21} C_{21} + A_{22} C_{22} + A_{23} C_{23} \\ &= A_{31} C_{31} + A_{32} C_{32} + A_{33} C_{33} \\ &= A_{11} C_{11} + A_{21} C_{21} + A_{31} C_{31} \\ &= A_{12} C_{12} + A_{22} C_{22} + A_{32} C_{32} \\ &= A_{13} C_{13} + A_{23} C_{23} + A_{33} C_{33} \end{aligned}$$

Exemple 4.9.3 : Déterminant d'une matrice 3×3

En reprenant la matrice de l'exemple précédent

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

La différentielle du déterminant n'est pas le déterminant de la différentielle de la matrice. La différentielle du déterminant (4.3) de la présente page donne :

$$\begin{aligned} d \det(A) &= \sum_{j=1}^n [dA_{ij} C_{ij}(A) + A_{ij} dC_{ij}(A)] \\ &= \sum_{j=1}^n dA_{ij} C_{ij}(A) + \sum_{j=1}^n A_{ij} dC_{ij}(A) \end{aligned}$$

Pour une matrice 3×3 :

$$\begin{aligned}
 d \det(A) &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} + A_{11}dC_{11} + A_{12}dC_{12} + A_{13}dC_{13} \\
 &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} \\
 &\quad + A_{11}d(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{12}d(A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33}) + A_{13}d(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}) \\
 &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} \\
 &\quad + dA_{21}(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) + dA_{22}(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) + dA_{23}(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) \\
 &\quad + dA_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}) + dA_{32}(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) + dA_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\
 &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} \\
 &\quad + dA_{21}C_{21} + dA_{22}C_{22} + dA_{23}C_{23} \\
 &\quad + dA_{31}C_{31} + dA_{32}C_{32} + dA_{33}C_{33}
 \end{aligned}$$

Notation 4.9.3

En notation indicielle et en généralisant à une matrice d'ordre n :

$$d \det(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}(A) dA_{ij}$$

Chapitre 5

TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

Sommaire

5.1 Matrice jacobienne et jacobien	67
5.2 Matrice changement de base	72
5.3 Matrice de passage	74
5.4 Changement de base naturelle	75
5.5 Changement de repère	77
5.6 Transformation des composantes d'un vecteur	78

5.1 Matrice jacobienne et jacobien

Pour des raisons de lisibilité, dans ce chapitre on se place dans un espace à trois dimensions. La généralisation à n dimensions est immédiate. Soit T la transformation de l'ancien système de coordonnées (x^i) vers le nouveau système de coordonnées $(x^{j'})$:

$$T : \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad x^{j'} = x^{j'}(x^1, x^2, x^3) \quad (5.1)$$

Notation 5.1.1

La transformation T est aussi notée $(x^i) \rightarrow (x^{j'})$.

Si cette transformation est bijective, c.-à-d. si à tout vecteur de son domaine de définition elle fait correspondre un unique vecteur de son ensemble d'arrivée, alors $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ est aussi un système de coordonnées. Les différentielles des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes s'écrivent :

$$\begin{cases} dx^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} dx^3 \\ dx^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} dx^3 \\ dx^{3'} = \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} dx^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Définition 5.1.1 : Matrice jacobienne d'une transformation

La matrice carrée 3×3 des dérivées partielles premières des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes, est appelée matrice jacobienne de la transformation $(x^i) \rightarrow (x^{j'})$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Notation 5.1.2

La matrice jacobienne est aussi notée $J \left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right]_{33}$.

En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas [2.1.3](#) page [15](#) :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, 2, 3 \quad dx^{j'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} dx^i \\ &= J_i^{j'} dx^i \end{aligned}$$

Remarque 5.1.1

Lorsque l'on utilise la convention de sommation [2.1.3](#) page [15](#) il n'y a plus de notation indicielle ligne-colonne [4.1.1](#) page [54](#) car l'indice sur lequel on somme est toujours l'indice de colonne, et sa position dépend du terme qui suit.

En prenant le déterminant de chaque terme de [\(5.2\)](#) page précédente :

$$\begin{aligned} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} &= \det(J) dx^1 dx^2 dx^3 \\ \prod_{i=1}^3 dx^{i'} &= \det(J) \prod_{i=1}^3 dx^i \end{aligned}$$

Notation 5.1.3

On utilisera la notation suivante :

$$\prod_{i=1}^n dx^i \stackrel{\text{déf}}{=} d\Omega$$

Le produit des différentielles des coordonnées est aussi parfois noté $d^n x$. En coordonnées rectangulaires uniquement, $d\Omega$ se confond avec l'hypervolume élémentaire de l'espace dV .

Avec cette notation :

$$d\Omega' = \det(J) d\Omega$$

Exemple 5.1.1

En coordonnées rectangulaires et cylindriques :

$$\begin{aligned} dx dy dz &= d\rho \rho d\phi dz \\ dV &= \rho d\Omega \end{aligned}$$

ρ est le jacobien de la transformation des coordonnées cylindriques en coordonnées rectan-

gulaires.

Définition 5.1.2 : Jacobien d'une transformation

Le déterminant de la matrice Jacobienne est appelé jacobien de la transformation T .

$$\det(J) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{vmatrix}$$

En utilisant le symbole d'antisymétrie déf. 2.4.1 page 19 :

$$\begin{aligned} \det(J) &\stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon_{i'j'k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^3} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Définition 5.1.3 : Transformation des coordonnées

Soit (x^1, x^2, x^3) un système de coordonnées de l'espace ponctuel E_3 . Les 3 équations (5.1) page 67 sont la transformation de coordonnées T vers le nouveau système de coordonnées $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ de l'espace ponctuel E_3 , ssi la transformation est de classe C^2 et le jacobien de la transformation est non nul (la transformation T est alors bijective)

$$\det(J) \neq 0$$

Le jacobien étant non nul, nous pouvons inverser la transformation

$$T^{-1} : \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

T^{-1} a pour matrice jacobienne :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En notation indicielle :

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \quad K_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

Notation 5.1.4

La matrice jacobienne est aussi notée $K \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right]_{33}$.

À partir des relations (2.3) page 19,

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \delta_i^j \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} = \delta_i^j$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$JK = KJ = I$$

où I est la matrice identité. La matrice K est aussi notée J^{-1} . La matrice jacobienne de la transformation inverse est égale à l'inverse de la matrice jacobienne de la transformation.

Les matrices jacobienes étant inverses l'une de l'autre, il s'en suit que les jacobiens sont également inverses l'un de l'autre :

$$\det(K) = [\det(J)]^{-1}$$

Si la transformation est entre repères rectilignes alors les $\frac{\partial x}{\partial y}$ sont tous constants et le jacobien est constant. En repères curvilignes le jacobien est fonction des coordonnées du point.

Exemple 5.1.2 : Matrice jacobienne d'une transformation

La matrice jacobienne de la transformation $(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$ s'écrit :

$$J \begin{bmatrix} \partial_\rho x & \partial_\theta x \\ \partial_\rho y & \partial_\theta y \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Elle a pour déterminant :

$$\begin{aligned} \det(J) &= \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) \\ &= \rho \end{aligned}$$

Cette transformation est bijective pour $\det(J) \neq 0$, donc pour $\rho \neq 0$, c.-à-d. pour le plan privé du point origine.

La matrice jacobienne de la transformation inverse $(x, y) \rightarrow (\rho, \theta)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} K \begin{bmatrix} \partial_x \rho & \partial_y \rho \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta \end{bmatrix} &= K \begin{bmatrix} x(x^2 + y^2)^{-1/2} & y(x^2 + y^2)^{-1/2} \\ -y(x^2 + y^2)^{-1} & x(x^2 + y^2)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= K \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Elle a pour déterminant :

$$\begin{aligned} \det(K) &= \frac{\cos^2(\theta)}{\rho} + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

Exemple 5.1.3 : Vecteurs orthonormés

En coordonnées rectangulaires :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \cos(\theta) - \frac{4}{5} \sin(\theta) \\ \frac{3}{5} \sin(\theta) + \frac{4}{5} \cos(\theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 &= \delta_{ij} u^i u^j = \left[\frac{3}{5} \cos(\theta) - \frac{4}{5} \sin(\theta) \right]^2 + \left[\frac{3}{5} \sin(\theta) + \frac{4}{5} \cos(\theta) \right]^2 \\ &= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \cos(\theta) - \frac{3}{5} \sin(\theta) \\ \frac{-4}{5} \sin(\theta) + \frac{3}{5} \cos(\theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2 &= \delta_{ij} v^i v^j = \left[\frac{-4}{5} \cos(\theta) - \frac{3}{5} \sin(\theta) \right]^2 + \left[\frac{-4}{5} \sin(\theta) + \frac{3}{5} \cos(\theta) \right]^2 \\ &= \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= g_{ij} u^i v^j = \delta_{ij} u^i v^j \\ &= \left[\frac{3}{5} \cos(\theta) - \frac{4}{5} \sin(\theta) \right] \left[\frac{-4}{5} \cos(\theta) - \frac{3}{5} \sin(\theta) \right] \\ &\quad + \left[\frac{3}{5} \sin(\theta) + \frac{4}{5} \cos(\theta) \right] \left[\frac{-4}{5} \sin(\theta) + \frac{3}{5} \cos(\theta) \right] \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0\end{aligned}$$

Exemple 5.1.4 : Espace de Poincaré-Minkowski

Passer dans l'espace de Poincaré-Minkowski revient à effectuer la transformation :

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \\ x^4 = it \end{cases}$$

Cette transformation a pour jacobien :

$$\det(J) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = i$$

5.2 Matrice changement de base

Tout changement de coordonnées induit un changement de la base associée au système de coordonnées, donc une transformation des vecteurs de base. Lors d'une transformation de coordonnées, les vecteurs de base sont les seuls à se transformer, les autres vecteurs restent identiques à eux-mêmes.

Exemple 5.2.1 : Vecteur vitesse par changement de base

Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ d'un mobile ne dépend pas de la base naturelle du système de coordonnées dans laquelle on l'exprime (mais il dépend du référentiel). Dans le cas où ce vecteur est unitaire vertical dirigé vers le haut, il ne doit pas être confondu avec le vecteur de base $\mathbf{e}_2$ qui lui subira un vrai changement pour devenir $\mathbf{e}_{2'}$. Lors du changement de base les composantes du vecteur vitesse se transforment de manière à ce que le vecteur reste identique à lui-même.

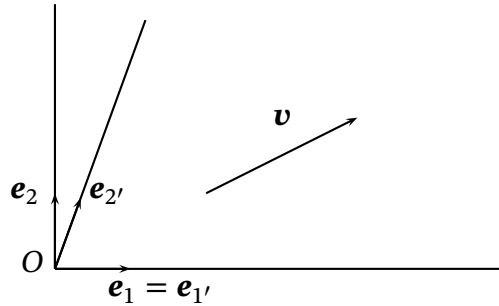


FIG. 5.1 – Changement de base

Définition 5.2.1 : Matrice changement de base

Soient $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{e}_{j'})$ deux bases d'un espace vectoriel E_3 où par convention les indices de la nouvelle base sont primés. A est appelée matrice changement de base $(\mathbf{e}_i) \rightarrow (\mathbf{e}_{j'})$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = A_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{e}_2 + A_{1'}^3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{2'} = A_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{e}_2 + A_{2'}^3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{3'} = A_{3'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{3'}^2 \mathbf{e}_2 + A_{3'}^3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & A_{1'}^3 \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & A_{2'}^3 \\ A_{3'}^1 & A_{3'}^2 & A_{3'}^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & A_{1'}^3 \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & A_{2'}^3 \\ A_{3'}^1 & A_{3'}^2 & A_{3'}^3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} A \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_{1'})_{e_i} \\ (\mathbf{e}_{2'})_{e_i} \\ (\mathbf{e}_{3'})_{e_i} \end{bmatrix}$$

où $(\mathbf{e}_{j'})_{e_i}$ est le vecteur $\mathbf{e}_{j'}$ exprimé dans la base $(\mathbf{e}_i)$. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

où les éléments des vecteurs sont eux-mêmes des vecteurs. Avec la convention de sommation 2.1.3 page 15 :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_{j'} = A_{j'}^i \mathbf{e}_i \quad (5.6)$$

Remarque 5.2.1

La matrice jacobienne et la matrice changement de base ne sont pas des tenseurs, elles ne se transforment pas lors d'un changement de base. Leurs indices ne sont pas des indices de variance, nous pouvons les placer en haut ou en bas pour utiliser la convention de sommation.

Le changement de base inverse s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = B_1^{1'} \mathbf{e}_{1'} + B_1^{2'} \mathbf{e}_{2'} + B_1^{3'} \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_2 = B_2^{1'} \mathbf{e}_{1'} + B_2^{2'} \mathbf{e}_{2'} + B_2^{3'} \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_3 = B_3^{1'} \mathbf{e}_{1'} + B_3^{2'} \mathbf{e}_{2'} + B_3^{3'} \mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix}$$

En notation indicienne,

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_i = B_i^{j'} \mathbf{e}_{j'} \quad (5.7)$$

Les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= AB \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$AB = I$$

Faisons de même en notation indicienne. En changeant les indices muets,

$$\begin{cases} \forall j = 1, 2, 3 & \mathbf{e}_{j'} = A_{j'}^i \mathbf{e}_i \\ \forall i = 1, 2, 3 & \mathbf{e}_i = B_i^{k'} \mathbf{e}_{k'} \end{cases}$$

d'une part,

$$\begin{aligned}\forall j = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_{j'} &= A_j^i \mathbf{e}_i \\ &= A_j^i B_i^{k'} \mathbf{e}_{k'} \\ &= B_i^{k'} A_j^i \mathbf{e}_{k'}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_{j'} = \delta_{j'}^{k'} \mathbf{e}_{k'}$$

Par conséquent :

$$\forall k, j = 1, 2, 3 \quad B_i^{k'} A_j^i = \delta_{j'}^{k'}$$

5.3 Matrice de passage

La matrice de passage donne la transformation des composantes des vecteurs autres que les vecteurs de bases, de la nouvelle base vers l'ancienne base.

Exemple 5.3.1

Pour le vecteur vitesse par changement de base (mais pas par changement de référentiel) :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}' \\ v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 &= v^{1'} \mathbf{e}_{1'} + v^{2'} \mathbf{e}_{2'} + v^{3'} \mathbf{e}_{3'} \\ &= v^{1'} (A_1^1 \mathbf{e}_1 + A_1^2 \mathbf{e}_2 + A_1^3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad + v^{2'} (A_2^1 \mathbf{e}_1 + A_2^2 \mathbf{e}_2 + A_2^3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad + v^{3'} (A_3^1 \mathbf{e}_1 + A_3^2 \mathbf{e}_2 + A_3^3 \mathbf{e}_3) \\ &= (v^{1'} A_1^1 + v^{2'} A_2^1 + v^{3'} A_3^1) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (v^{1'} A_1^2 + v^{2'} A_2^2 + v^{3'} A_3^2) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (v^{1'} A_1^3 + v^{2'} A_2^3 + v^{3'} A_3^3) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{cases} v^1 = v^{1'} A_1^1 + v^{2'} A_2^1 + v^{3'} A_3^1 \\ v^2 = v^{1'} A_1^2 + v^{2'} A_2^2 + v^{3'} A_3^2 \\ v^3 = v^{1'} A_1^3 + v^{2'} A_2^3 + v^{3'} A_3^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \\ v^{3'} \end{pmatrix}$$

Notation 5.3.1

$(\mathbf{e}_{j'})_{\mathbf{e}_i}$ est le vecteur $\mathbf{e}_{j'}$, exprimé dans la base $(\mathbf{e}_i)$.

Définition 5.3.1 : Matrice de passage

La transposée de A est appelée matrice de passage du changement de base $(\mathbf{e}_i) \rightarrow (\mathbf{e}_{j'})$:

$$P \stackrel{\text{déf}}{=} A^T$$

On a :

$$P \left[(\mathbf{e}_{1'})_{\mathbf{e}_i} \quad (\mathbf{e}_{2'})_{\mathbf{e}_i} \quad (\mathbf{e}_{3'})_{\mathbf{e}_i} \right]$$

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad v^i = P_{j'}^i v^{j'}$$

5.4 Changement de base naturelle

La transformation des vecteurs de base est due à un changement de coordonnées ou à un déplacement de l'origine de la base dans un système de coordonnées curviligne. Nous nous placerons souvent dans la base naturelle du système de coordonnées.

$$\begin{aligned} \forall j = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_{j'} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^{j'}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i \quad (5.8)$$

Ces relations ne sont valables que pour un changement de base naturelle à base naturelle.

Remarque 5.4.1

Ces relations et (5.6) page 73 donnent l'expression des éléments de la matrice changement de base entre deux bases naturelles :

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \quad A_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{2'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{3'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

C'est la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne (5.3) page 69 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = K^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

Remarque 5.4.2

Pour des bases naturelles $A = (J^{-1})^T$.

Les transformations inverses s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_i &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i = 1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'}} \quad (5.9)$$

Remarque 5.4.3

Ces relations et (5.7) page 73 donnent l'expression des éléments de la matrice B entre deux bases naturelles :

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \quad B_i^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Nous avons aussi

$$B = J^T$$

Exemple 5.4.1 : Rotation d'une base

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthonormée du plan. Une rotation d'angle α du système de coordonnées transforme cette base en une nouvelle base orthonormée du plan, $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$:

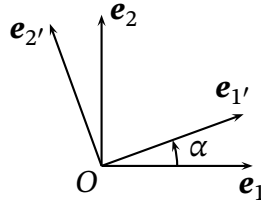


FIG. 5.2 – Rotation d'une base

Déterminons la transformation $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \rightarrow (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \cos(\alpha) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\sin(\alpha) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha) \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit les coefficients $A_{j'}^i = \partial x^i / \partial x^{j'}$:

$$A_{1'}^1 = \cos(\alpha), \quad A_{1'}^2 = \sin(\alpha), \quad A_{2'}^1 = -\sin(\alpha), \quad A_{2'}^2 = \cos(\alpha)$$

Le déterminant de la matrice A vaut l'unité :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1\end{aligned}$$

Déterminons la transformation inverse $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) \rightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. On trouve directement :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(\alpha) \mathbf{e}_{1'} - \sin(\alpha) \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_2 = \sin(\alpha) \mathbf{e}_{1'} + \cos(\alpha) \mathbf{e}_{2'} \end{cases}$$

On peut aussi multiplier par cosinus et sinus :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) \mathbf{e}_{1'} = \cos^2(\alpha) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha) \sin(\alpha) \mathbf{e}_2 \\ \sin(\alpha) \mathbf{e}_{2'} = -\sin^2(\alpha) \mathbf{e}_1 + \sin(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e}_{1'} = \cos(\alpha) \mathbf{e}_1 - \sin(\alpha) \mathbf{e}_2$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha) \mathbf{e}_{1'} = \sin(\alpha) \cos(\alpha) \mathbf{e}_1 + \sin^2(\alpha) \mathbf{e}_2 \\ \cos(\alpha) \mathbf{e}_{2'} = \cos(\alpha) \sin(\alpha) \mathbf{e}_1 + \cos^2(\alpha) \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e}_{2'} = \sin(\alpha) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha) \mathbf{e}_2$$

ou calculer l'inverse de la matrice A . Puisque le déterminant vaut l'unité, l'inverse est égale à sa transposée :

$$B \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

On en déduit les coefficients $B_i^{j'} = \partial x^{j'} / \partial x^i$:

$$B_1^{1'} = \cos(\alpha), \quad B_1^{2'} = -\sin(\alpha), \quad B_2^{1'} = \sin(\alpha), \quad B_2^{2'} = \cos(\alpha)$$

5.5 Changement de repère

Soient $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}_{j'})$ deux repères d'un espace ponctuel. Quelles sont les relations entre les coordonnées d'un point M exprimées dans chacun de ces repères ? Nous avons,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO'} = \alpha^i \mathbf{e}_i \\ \overrightarrow{O'O} = \alpha^{j'} \mathbf{e}_{j'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i \\ \overrightarrow{O'M} = x^{j'} \mathbf{e}_{j'} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\begin{aligned}x^i \mathbf{e}_i &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x^{j'} \mathbf{e}_{j'} \\ &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x^{j'} A_{j'}^i \mathbf{e}_i \\ &= (\alpha^i + x^{j'} A_{j'}^i) \mathbf{e}_i\end{aligned}$$

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad x^i = \alpha^i + x^{j'} A_{j'}^i$$

Par symétrie :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad x^{j'} = \alpha^{j'} + x^i B_i^{j'}$$

Pour un changement de repère naturel, les bases sont reliées par (5.8) et (5.9) page 76 :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, 3 & x^i = \alpha^i + x^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^{j'}} \\ \forall j = 1, 2, 3 & x^{j'} = \alpha^{j'} + x^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial \alpha^i} \end{cases}$$

5.6 Transformation des composantes d'un vecteur

5.6.1 Transformation des composantes contravariantes

Les vecteurs ont une signification absolue indépendante de la base dans laquelle on les exprime, mais les nombres (les composantes) qui les décrivent dépendent de la base utilisée :

$$u^{j'} \mathbf{e}_{j'} = u^i \mathbf{e}_i$$

Remarque 5.6.1

Nous suivons la notation 2.1.5 page 16 du prime sur l'indice. Il ne s'agit pas de l'indice j' mais de la j^e composante du vecteur dans la base primée.

À partir du changement de base (5.7) page 73 :

$$u^{j'} \mathbf{e}_{j'} = u^i B_i^{j'} \mathbf{e}_{j'}$$

Les composantes contravariantes se transforment par changement de base selon les relations :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad u^{j'} = B_i^{j'} u^i \quad (5.10)$$

Par rapport à la relation précédente, la sommation à lieu sur l'indice bas et non plus sur l'indice haut, on a donc pris la transposée de B . En composantes contravariantes par changement de base :

$$\mathbf{u}'_{\text{con}} = B^T \mathbf{u}_{\text{con}}$$

Lors d'un changement de base, les composantes contravariantes se transforment par la transposée de la matrice inverse de A , de façon « contraire » aux vecteurs de base (5.5) page 73. On a également

$$\mathbf{u}_{\text{con}} = A^T \mathbf{u}'_{\text{con}}$$

Exemple 5.6.1

Soit la matrice changement de base suivante :

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminons les nouvelles composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (A^{-1})^T \mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

S'il s'agit d'un changement de base naturelle, avec (5.9) page 76 :

$$u^{j'} \mathbf{e}_{j'} = u^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'}$$

Par changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment selon :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u^i \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} u^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} u^3 \\ u^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} u^3 \\ u^{3'} = \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} u^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

En composantes contravariantes par changement de base naturelle :

$$\mathbf{u}'_{\text{con}} = J \mathbf{u}_{\text{con}} \quad (5.12)$$

Lors d'un changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment comme les différentielles des coordonnées, par la matrice jacobienne J . Donc, dans le cas d'un changement de base naturelle :

$$(A^{-1})^T = J$$

À partir du changement de base naturelle (5.8) page 75 :

$$\begin{aligned}
 u^i \mathbf{e}_i &= u^{j'} \mathbf{e}_{j'} \\
 &= u^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i \\
 \forall i = 1, 2, 3 \quad u^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u^{j'}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

En notation matricielle, en composantes contravariantes :

$$\mathbf{u}_{\text{con}} = K \mathbf{u}'_{\text{con}}$$

Remarques 5.6.1

- $\mathbf{u}'$ n'est autre que $\mathbf{u}$ (exprimé dans la base primée). Le prime désigne ici le même objet géométrique. Par contre $\mathbf{e}'_i$ (noté $\mathbf{e}_{i'}$) n'est pas $\mathbf{e}_i$. Le prime désigne ici deux objets géométriques différents
- Dans (5.8) page 75 et (5.13) de la présente page, les matrices de dérivées partielles $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i$ et $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u^{j'}$ sont transposées l'une de l'autre. La sommation se faisant sur l'indice répété, elle dépend du terme qui suit

Exemple 5.6.2 : Changement de base normée

Soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ deux bases normées quelconques (Fig. 5.3).

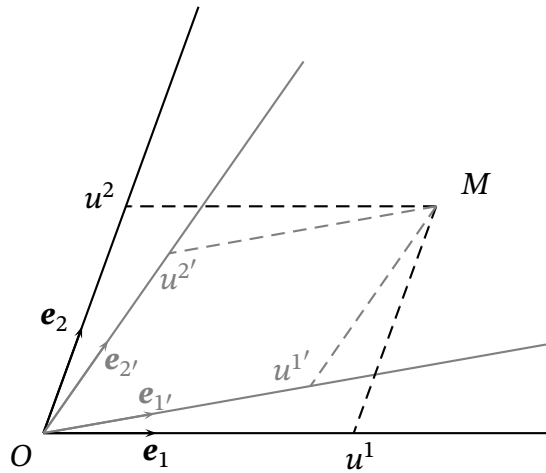


FIG. 5.3 – Transformation des composantes contravariantes

Écrivons l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en composantes contravariantes dans chaque base :

$$\begin{aligned}
 u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} &= u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \\
 &= u^1 (B_1^{1'} \mathbf{e}_{1'} + B_1^{2'} \mathbf{e}_{2'}) + u^2 (B_2^{1'} \mathbf{e}_{1'} + B_2^{2'} \mathbf{e}_{2'}) \\
 &= (u^1 B_1^{1'} + u^2 B_2^{1'}) \mathbf{e}_{1'} + (u^1 B_1^{2'} + u^2 B_2^{2'}) \mathbf{e}_{2'}
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} u^{1'} = B_1^{1'} u^1 + B_2^{1'} u^2 \\ u^{2'} = B_1^{2'} u^1 + B_2^{2'} u^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{1'} & B_2^{1'} \\ B_1^{2'} & B_2^{2'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{aligned} u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 &= u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} \\ &= u^{1'} (A_1^1 \mathbf{e}_1 + A_1^2 \mathbf{e}_2) + u^{2'} (A_2^1 \mathbf{e}_1 + A_2^2 \mathbf{e}_2) \\ &= (u^{1'} A_1^1 + u^{2'} A_2^1) \mathbf{e}_1 + (u^{1'} A_1^2 + u^{2'} A_2^2) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} u^1 = A_1^1 u^{1'} + A_2^1 u^{2'} \\ u^2 = A_1^2 u^{1'} + A_2^2 u^{2'} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix}$$

Exemple 5.6.3 : Changement de base par rotation

Soit le vecteur $\overrightarrow{OM} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2$, déterminons ses composantes contravariantes dans la nouvelle base $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ définie dans l'exercice de rotation d'une base 5.4.1 page 76. En utilisant les coefficients $\partial x^{i'}/\partial x^j$ déjà calculés :

$$\begin{cases} u^{1'} = B_1^{1'} u^1 + B_2^{1'} u^2 \\ u^{2'} = B_1^{2'} u^1 + B_2^{2'} u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{1'} = \cos(\alpha) u^1 + \sin(\alpha) u^2 \\ u^{2'} = -\sin(\alpha) u^1 + \cos(\alpha) u^2 \end{cases}$$

Nous pouvons aussi les déterminer en remplaçant les vecteurs de l'ancienne base :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \\ &= u^1 [\cos(\alpha) \mathbf{e}_{1'} - \sin(\alpha) \mathbf{e}_{2'}] + u^2 [\sin(\alpha) \mathbf{e}_{1'} + \cos(\alpha) \mathbf{e}_{2'}] \\ &= [\cos(\alpha) u^1 + \sin(\alpha) u^2] \mathbf{e}_{1'} + [-\sin(\alpha) u^1 + \cos(\alpha) u^2] \mathbf{e}_{2'} \\ &= u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} \end{aligned}$$

Exemple 5.6.4 : Changement de système de coordonnées

Dans la base naturelle associée au système de coordonnées (x^1, x^2) , soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de composantes contravariantes $u^1 = x^2$ et $u^2 = x^1$. Quelles sont ses composantes contravariantes $(u^{1'}, u^{2'})$ lors du changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} x^{1'} = (x^2)^2 \\ x^{2'} = x^1 x^2 \end{cases}$$

- en notation indicielle

$$\begin{aligned} u^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} u^2 \\ &= 2x^2 u^2 \\ &= 2x^2 x^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} u^2 \\ &= x^2 u^1 + x^1 u^2 \\ &= (x^2)^2 + (x^1)^2 \end{aligned}$$

- en notation matricielle

La déf. 5.1.1 page 68 de la matrice jacobienne, $J \left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right]_{22}$, et (5.12) page 79, $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$, donnent :

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\det(J) \neq 0$ implique $x^2 \neq 0$ donc $x^{1'} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 x^2 \\ (x^2)^2 + (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

Par exemple, si $\mathbf{u}$ est un vecteur de composantes contravariantes (1, 1), alors :

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.6.5 : Changement de coordonnées, de rectangulaires à polaires

Dans la base naturelle orthonormée associée au système de coordonnées rectangulaire (x, y) , soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes contravariantes (u^x, u^y) . Quelles sont ses composantes contravariantes (u^ρ, u^θ) lors d'une transformation en coordonnées polaires (ρ, θ) ?

- en notation indicielle, (5.11) page 79 donnent :

$$\begin{cases} u^\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} u^x + \frac{\partial \rho}{\partial y} u^y \\ u^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} u^x + \frac{\partial \theta}{\partial y} u^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^\rho = u^x \cos(\theta) + u^y \sin(\theta) \\ u^\theta = \frac{-u^x \sin(\theta) + u^y \cos(\theta)}{\rho} \end{cases}$$

- en notation matricielle, (5.12) page 79 donne :

$$\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^x \cos(\theta) + u^y \sin(\theta) \\ (-u^x \sin(\theta) + u^y \cos(\theta)) / \rho \end{pmatrix}$$

Si $u^x = 1$ et $u^y = 1$ alors au point de coordonnées polaires $(3, 30^\circ)$:

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

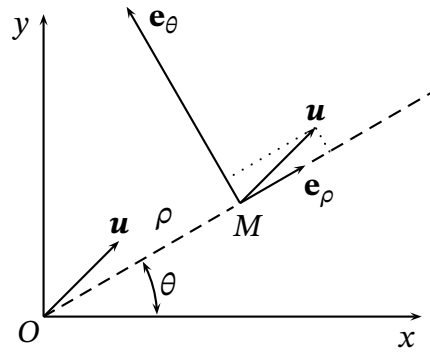


FIG. 5.4 – Changement de coordonnées, de rectangulaires à polaires

Si $\mathbf{u}$ est le vecteur position alors $u^x = \rho \cos(\theta)$ et $u^y = \rho \sin(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) \sin(\theta) \\ (-\rho \cos(\theta) \sin(\theta) + \rho \sin(\theta) \cos(\theta)) / \rho \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.6.2 Transformation des composantes covariantes

À partir du changement de base (5.10) page 78 :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, 2, 3 \quad u_{j'} &= \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_{j'} \\ &= \overrightarrow{OM} \cdot A_{j'}^i \mathbf{e}_i \\ &= A_{j'}^i (\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

Par changement de base, les composantes covariantes se transforment selon :

$$\boxed{\forall j = 1, 2, 3 \quad u_{j'} = A_{j'}^i u_i}$$

Par changement de base naturelle, les composantes covariantes se transforment selon :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad u_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u_i$$

$$\begin{cases} u_{1'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} u_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} u_3 \\ u_{2'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} u_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} u_3 \\ u_{3'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} u_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \\ u_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \\ u_{3'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

En composantes covariantes :

$$\mathbf{u}'_{\text{cov}} = A \mathbf{u}_{\text{cov}} \quad (5.14)$$

Les composantes covariantes se transforment comme les vecteurs de base, (5.5) page 73. De même :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3 \quad u_i &= \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'} \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} (\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_{j'}) \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad u_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u_{j'}$$

En notation matricielle, en composantes covariantes :

$$\mathbf{u}_{\text{cov}} = B \mathbf{u}'_{\text{cov}}$$

Exemple 5.6.6 : Changement de base normée

Soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ deux bases normées quelconques (Fig. 5.5). En utilisant la déf. 8.10.1 page 134 des composantes covariantes :

$$\begin{cases} u_{1'} = \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_{2'} \end{cases}$$

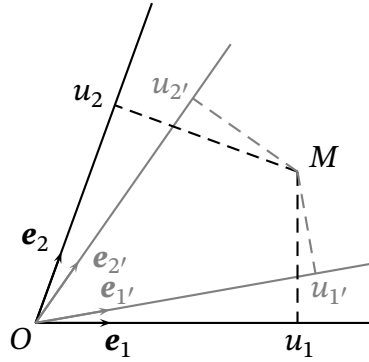


FIG. 5.5 – Transformation des composantes covariantes

$$\begin{cases} u_{1'} = \overrightarrow{OM} \cdot (A_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{e}_2) \\ u_{2'} = \overrightarrow{OM} \cdot (A_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{e}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = A_{1'}^1 \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_1 + A_{1'}^2 \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_2 \\ u_{2'} = A_{2'}^1 \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_1 + A_{2'}^2 \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = A_{1'}^1 u_1 + A_{1'}^2 u_2 \\ u_{2'} = A_{2'}^1 u_1 + A_{2'}^2 u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} \\ = A^{-1} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix}$$

Dans une base non normée ou non orthogonale, les composantes covariantes et contravariantes (selon comment on projette le vecteur sur la base) ne se transforment pas de la même manière par changement de base.

Exemple 5.6.7 : Transformation des composantes par changement de base

Dans la base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de l'espace vectoriel euclidien E_3 , on considère les deux vecteurs $\mathbf{u}(u^1, u^2, u^3)$ et $\mathbf{v}(v^1, v^2, v^3)$. La base étant orthonormée les composantes contravariantes et covariantes sont confondues. Effectuons le changement de base qui passe à la nouvelle base non orthogonale et non normée $\{\mathbf{e}_1(1, 1, 1), \mathbf{e}_2(0, 1, 1), \mathbf{e}_3(0, 0, 1)\}$, et déterminons les nouvelles composantes contravariantes et covariantes de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Pour les nouvelles composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} u^1 \mathbf{i} + u^2 \mathbf{j} + u^3 \mathbf{k} &= u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'} \\ &= u^{1'} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + u^{2'} (\mathbf{j} + \mathbf{k}) + u^{3'} \mathbf{k} \\ &= u^{1'} \mathbf{i} + (u^{1'} + u^{2'}) \mathbf{j} + (u^{1'} + u^{2'} + u^{3'}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^1 = u^{1'} \\ u^2 = u^{1'} + u^{2'} \\ u^3 = u^{1'} + u^{2'} + u^{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{1'} = u^1 \\ u^{2'} = u^2 - u^1 \\ u^{3'} = u^3 - u^2 \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} v^{1'} = v^1 \\ v^{2'} = v^2 - v^1 \\ v^{3'} = v^3 - v^2 \end{cases}$$

Pour les nouvelles composantes covariantes, en utilisant la déf. 8.10.1 page 134 :

$$\begin{cases} u_{1'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = (u^1, u^2, u^3) \cdot (1, 1, 1) \\ u_{2'} = (u^1, u^2, u^3) \cdot (0, 1, 1) \\ u_{3'} = (u^1, u^2, u^3) \cdot (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^1 + u^2 + u^3 \\ u_{2'} = u^2 + u^3 \\ u_{3'} = u^3 \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} v_{1'} = v^1 + v^2 + v^3 \\ v_{2'} = v^2 + v^3 \\ v_{3'} = v^3 \end{cases}$$

Si on a calculé le tenseur métrique de la nouvelle base, une seconde méthode consiste à passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes :

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} & \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'} & \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{1'} & \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{2'} & \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{1'} & \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{2'} & \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{3'} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{1'} = (u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'}) \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = (u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'}) \cdot \mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = (u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'}) \cdot \mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^{1'} \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = u^{1'} \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{2'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{2'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = u^{1'} \mathbf{e}_{1'} \cdot \mathbf{e}_{3'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{3'} + u^{3'} \mathbf{e}_{3'} \cdot \mathbf{e}_{3'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^{1'} g_{1'1'} + u^{2'} g_{2'1'} + u^{3'} g_{3'1'} \\ u_{2'} = u^{1'} g_{1'2'} + u^{2'} g_{2'2'} + u^{3'} g_{3'2'} \\ u_{3'} = u^{1'} g_{1'3'} + u^{2'} g_{2'3'} + u^{3'} g_{3'3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = 3u^{1'} + 2u^{2'} + u^{3'} \\ u_{2'} = 2u^{1'} + 2u^{2'} + u^{3'} \\ u_{3'} = u^{1'} + u^{2'} + u^{3'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = 3u^1 + 2u^2 - 2u^1 + u^3 - u^2 \\ u_{2'} = 2u^1 + 2u^2 - 2u^1 + u^3 - u^2 \\ u_{3'} = u^1 + u^2 - u^1 + u^3 - u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u_1 + u_2 + u_3 \\ u_{2'} = u_2 + u_3 \\ u_{3'} = u_3 \end{cases}$$

Déterminons le produit scalaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Dans la base d'origine (les composantes contravariantes et covariantes sont confondues) :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Dans la nouvelle base :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_{i'} v^{i'} \\
 &= u_{1'} v^{1'} + u_{2'} v^{2'} + u_{3'} v^{3'} \\
 &= (u_1 + u_2 + u_3) v_1 + (u_2 + u_3) (v_2 - v_1) + u_3 (v_3 - v_2) \\
 &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3
 \end{aligned}$$

ou bien,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u^{i'} v_{i'} \\
 &= u^{1'} v_{1'} + u^{2'} v_{2'} + u^{3'} v_{3'} \\
 &= u^1 (v_1 + v_2 + v_3) + (u_2 - u_1) (v_2 + v_3) + (u_3 - u_2) v_3 \\
 &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3
 \end{aligned}$$

et le produit scalaire est bien invariant.

Exemple 5.6.8 : Champ de vecteurs en composantes covariantes

Dans le système de coordonnées (x^1, x^2) , soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de composantes covariantes $u_1 = x^2$ et $u_2 = x^1$. Quelles sont ses composantes covariantes $(u_{1'}, u_{2'})$ lors du changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x^{1'} = (x^2)^2 \\ x^{2'} = x^1 x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \epsilon \sqrt{x^{1'}} \\ x^1 = \epsilon x^{2'} / \sqrt{x^{1'}} \end{cases}$$

où l'on a posé $\epsilon = \pm 1$.

- en notation indicielle

$$\begin{cases} u_{1'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} u_2 \\ u_{2'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = \frac{-\epsilon x^{2'}}{2(\sqrt{x^{1'}})^3} (\epsilon \sqrt{x^{1'}}) + \frac{\epsilon}{2\sqrt{x^{1'}}} \frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} = 0 \\ u_{2'} = \frac{\epsilon}{\sqrt{x^{1'}}} (\epsilon \sqrt{x^{1'}}) + 0 \times \frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} = 1 \end{cases}$$

- en notation matricielle

1) première méthode

D'après (5.14) page 84, $\mathbf{u}'_{\text{cov}} = (J^{-1})^T \mathbf{u}$, avec $J^{-1} \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right]_{22}$:

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\epsilon x^{2'}}{2(\sqrt{x^{1'}})^3} & \frac{\epsilon}{2\sqrt{x^{1'}}} \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{x^{1'}}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \sqrt{x^{1'}} \\ \frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) seconde méthode

On inverse J donné dans l'ex. 5.6.4 page 81 puis on prend la transposée. Nous obtenons $(J^{-1})^T$ en fonction de x^1 et x^2 :

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x^1}{2(x^2)^2} & \frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.6.9 : Transformation des coordonnées rectangulaires en polaires

Dans la base naturelle orthonormée associée au système de coordonnées rectangulaire (x, y) , soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes covariantes (u_x, u_y) . Quelles sont ses composantes covariantes (u_ρ, u_θ) lors d'une transformation en coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$T : \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 2\pi > \theta \geq 0$$

D'après (5.4) page 70 :

$$J = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix}$$

(5.14) page 84 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_{\text{cov}} &= (J^{-1})^T \mathbf{u} \\ \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \\ -u_x \rho \sin(\theta) + u_y \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple, si $u_x = 1$ et $u_y = 1$ alors au point de coordonnées polaires $(3, 30^\circ)$:

$$\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_\rho = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\rho \\ u_\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{e}_\rho\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{e}_\rho) \\ u_\theta = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{e}_\theta\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{e}_\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \sqrt{2} \times 1 \times \cos(15^\circ) \\ u_\theta = \sqrt{2} \times 3 \times \cos(75^\circ) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ u_\theta = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ u_\theta = \frac{3\sqrt{3}-3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Chapitre 6

FORMES QUADRATIQUES

Sommaire

6.1 Définitions	89
6.2 Matrice symétrique associée à une forme quadratique	92
6.3 Réduction de Gauss	94
6.4 Loi d'inertie de Sylvester	96

6.1 Définitions

Les carrés des éléments de longueur sont des formes quadratiques (différentielles) dont nous allons donner la définition.

Exemple 6.1.1 : Carré de l'élément de longueur dans le plan

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Définition 6.1.1 : Monôme

Un monôme est un produit de puissances de variables, d'exposants entiers non négatifs, multiplié par un coefficient non nul réel ou complexe.

Exemple 6.1.2

$5x^7y$ est un monôme à deux variables x, y , de coefficient 5.

Définition 6.1.2 : Degré d'un monôme

Le degré d'un monôme est la somme des exposants de ses variables.

Exemple 6.1.3

Le monôme $5x^6y^2$ est de degré 8.

Définition 6.1.3 : Polynôme

Un polynôme est une somme dont chaque terme est un monôme.

Exemple 6.1.4

$5x^6y^2z^3 - 2y^4 + 3$ est un polynôme.

Définition 6.1.4 : Degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes.

Exemple 6.1.5

$\deg(5x^6y^2z^3 - 2y^4 + 3) = 11$.

Définition 6.1.5 : Polynôme homogène ou forme algébrique

Un polynôme est homogène de degré r si chacun de ses termes est de degré r .

Exemple 6.1.6

Le polynôme $4x^5z^2 + 3x^3y^4 - xy^3z^3$ est homogène de degré 7.

Définition 6.1.6 : Forme linéaire

On appelle forme linéaire ou fonctionnelle linéaire tout polynôme homogène de degré 1 par rapport à ses n variables $u^1, u^2, \dots, u^n$:

$$f(u^1, u^2, \dots, u^n) = a_1u^1 + a_2u^2 + \dots + a_nu^n$$

Exemple 6.1.7

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto ax + by + cz \end{aligned}$$

est une forme linéaire par rapport à ses trois variables x, y, z . Les scalaires a, b, c sont les coefficients de la forme linéaire.

Définition 6.1.7 : Forme quadratique

On appelle forme quadratique tout polynôme homogène de degré deux par rapport à ses n variables $u^1, u^2, \dots, u^n$:

$$\begin{aligned} Q(u^1, \dots, u^n) = & a_{11}u^1u^1 + a_{12}u^1u^2 + \dots + a_{1n}u^1u^n + a_{21}u^2u^1 + a_{22}u^2u^2 + \dots + a_{2n}u^2u^n \\ & + \dots + a_{n1}u^nu^1 + a_{n2}u^nu^2 + \dots + a_{nn}u^nu^n \end{aligned}$$

Nous ne considérerons que les formes quadratiques sur le corps des réels, c.-à-d. telles que leurs coefficients a_{ij} soient des réels. Les formes quadratiques ne doivent pas être confondues avec les équations du second degré, ces dernières n'ont qu'une seule variable et les termes sont de degré

deux ou moins. Nomenclature des formes quadratiques :

Forme quadratique unaire	$Q(x) = ax^2$
Forme quadratique binaire	$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$
Forme quadratique ternaire	$Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$

Définition 6.1.8 : Forme quadratique définie

Si le vecteur nul $\mathbf{0}$ est le seul vecteur tel que $Q(\mathbf{0}) = 0$ alors Q est définie ou anisotrope. Les signes de Q sont tous positifs ou tous négatifs.

Définition 6.1.9 : Forme quadratique indéfinie

S'il existe un vecteur non nul $\mathbf{v}$ tel que $Q(\mathbf{v}) = 0$ alors Q est indéfinie, et Q et $\mathbf{v}$ sont isotropes. Q contient à la fois des signes positifs et des signes négatifs.

Définition 6.1.10 : Forme quadratique positive

Si pour tout vecteur $\mathbf{u}$ le scalaire $Q(\mathbf{u})$ est positif ou nul, alors Q est positive :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad Q(\mathbf{u}) \geq 0$$

Définition 6.1.11 : Forme quadratique négative

Si pour tout vecteur $\mathbf{u}$ le scalaire $Q(\mathbf{u})$ est négatif ou nul, alors Q est négative :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad Q(\mathbf{u}) \leq 0$$

Définition 6.1.12 : Forme quadratique définie positive

Une forme quadratique est définie positive ssi elle est définie et positive :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{0} & : Q(\mathbf{0}) = 0 \\ \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} & : Q(\mathbf{u}) > 0 \end{aligned}$$

Exemple 6.1.8

Dans un système de coordonnées quelconque, le carré de la distance est une forme quadratique définie positive.

Définition 6.1.13 : Forme quadratique définie négative

Une forme quadratique est définie négative ssi elle est définie et négative :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{0} & : Q(\mathbf{0}) = 0 \\ \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} & : Q(\mathbf{u}) < 0 \end{aligned}$$

Une forme quadratique est donc définie ssi elle est définie positive ou définie négative.

Définition 6.1.14 : Forme quadratique semi définie

Une forme quadratique est semi définie ssi elle est positive ou négative :

$$\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{u}) > 0 \quad \text{ou} \quad Q(\mathbf{u}) < 0$$

Exemple 6.1.9 : Forme quadratique définie positive

Montrons que la forme différentielle quadratique Q suivante est définie positive :

$$\begin{aligned} Q &= dx^2 + 3dxdy + \frac{9}{4}dy^2 + \frac{7}{4}dy^2 + dz^2 \\ &= \left(dx + \frac{3}{2}dy\right)^2 + \frac{7}{4}dy^2 + dz^2 \end{aligned}$$

Tous les termes sont des carrés de coefficients positifs, donc Q est positive et n'est nulle que lorsque $dx = dy = dz = 0$, par conséquent elle est définie positive.

Exemple 6.1.10 : Forme quadratique non définie positive

La forme quadratique

$$Q(x, y, z) = 3x^2 - 5xy + y^2 + z^2$$

n'est pas définie positive car $Q(1, 1, 0) = -1$

6.2 Matrice symétrique associée à une forme quadratique

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ax + by/2 \\ bx/2 + cy \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

Toute forme quadratique peut s'écrire sous forme matricielle

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u}$$

et sous forme indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}u^j \\ a_{2j}u^j \\ \vdots \\ a_{nj}u^j \end{pmatrix}$$

$$= u^i (a_{ij}u^j)$$

$$= a_{ij}u^i u^j$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = a_{ij}u^i u^j$$

Montrons que l'on peut toujours remplacer la matrice A par une matrice symétrique. L'égalité $u^i u^j = u^j u^i$ permet d'écrire :

$$Q = a_{11}u^1u^1 + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})u^1u^2 + \cdots + \frac{1}{2}(a_{1n} + a_{n1})u^1u^n$$

$$+ \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})u^2u^1 + \cdots + \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{n2})u^2u^n + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}(a_{1n} + a_{n1})u^nu^1 + \cdots + a_{nn}u^nu^n$$

Posons la matrice symétrique $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$:

$$b_{11} = a_{11}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), \quad \text{etc.}$$

Nous avons

$$Q = b_{11}u^1u^1 + b_{12}u^1u^2 + \cdots + b_{1n}u^1u^n$$

$$+ b_{12}u^2u^1 + \cdots + b_{2n}u^2u^n + \cdots$$

$$+ b_{1n}u^nu^1 + \cdots + b_{nn}u^nu^n$$

et :

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

avec $\forall i, j, b_{ij} = b_{ji}$.

Plus généralement, tout polynôme P des $2n$ variables $u^1, u^2, \dots, u^n$ et $v^1, v^2, \dots, v^n$,

$$P = a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^1v^2 + \dots + a_{1n}u^1v^n + a_{21}u^2v^1 + \dots + a_{2n}u^2v^n + \dots + a_{n1}u^nv^1 + \dots + a_{nn}u^nv^n$$

peut s'écrire sous forme matricielle,

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \dots & v^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u} \end{aligned}$$

et sous forme indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}v^j \\ a_{2j}v^j \\ \vdots \\ a_{nj}v^j \end{pmatrix} \\ &= u^i (a_{ij}v^j) \\ &= a_{ij}u^i v^j \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = a_{ij}u^i v^j$$

6.3 Réduction de Gauss

Par changement de variables, toute forme quadratique réelle (de coefficients réels) peut s'écrire comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires X_i :

$$Q = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \dots + \lambda_n X_n^2$$

où les coefficients λ_i valent $+1$ ou -1 , et la matrice symétrique associée est diagonale.

Exemple 6.3.1 : Réduction de Gauss d'une forme quadratique binaire

Soit la forme quadratique binaire :

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} xy + \frac{b^2}{4a^2} y^2 - \frac{b^2}{4a^2} y^2 \right) + cy^2 \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} y \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) y^2 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} X = \sqrt{|a|} \left[x + \frac{b}{2a} y \right] \\ Y = \sqrt{\left| c - \frac{b^2}{4a} \right|} y \end{cases} \Rightarrow Q(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

Exemple 6.3.2 : Réduction de Gauss d'une forme quadratique ternaire

Soit la forme quadratique ternaire :

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= xy + yz + xz \\ &= x(y + z) + yz \\ &= (x + z)(y + z) - z^2 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} A = x + z \\ B = y + z \end{cases} \Rightarrow Q(A, B, z) = AB - z^2$$

Puis on pose

$$\begin{cases} A = X - Y \\ B = X + Y \end{cases} \Rightarrow Q(X, Y, z) = (X - Y)(X + Y) - z^2$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(A + B) \\ Y = \frac{1}{2}(B - A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}(x + y + 2z) \\ Y = \frac{1}{2}(y - x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= \frac{1}{2}[(x + y + 2z) - (y - x)] \times \frac{1}{2}[(x + y + 2z) + (y - x)] - z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x + y + 2z)^2 - \frac{1}{4}(y - x)^2 - z^2 \end{aligned}$$

6.4 Loi d'inertie de Sylvester

Définition 6.4.1 : Indices d'inertie

Le nombre p de coefficients $+1$, et le nombre q de coefficients -1 d'une forme quadratique réelle sont appelés indices d'inertie de cette forme quadratique.

Théorème 6.4.1 : Loi d'inertie de Sylvester

Les nombres p et q sont des invariants de la forme quadratique réelle : ils ne dépendent pas du choix des variables.

Définition 6.4.2 : Signature d'une forme quadratique réelle

Le couple (p, q) est appelé signature de la forme quadratique.

Définition 6.4.3 : Rang d'une forme quadratique réelle

La somme $p + q$ est appelée rang de la forme quadratique.

Une forme quadratique définie positive a pour signature $(p, 0)$, une forme quadratique définie négative a pour signature $(0, q)$.

Exemple 6.4.1 : Forme quadratique non définie positive

La forme quadratique

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= 3x^2 - 5xy + y^2 + z^2 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy\right) + y^2 + z^2 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \frac{5^2}{6^2}y^2 - \frac{5^2}{6^2}y^2\right) + y^2 + z^2 \\ &= 3\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + \left(1 - \frac{75}{36}\right)y^2 + z^2 \\ &= 3X^2 - \left(\frac{13}{12}\right)y^2 + z^2 \end{aligned}$$

a pour indices d'inertie $p = 2$ et $q = 1$, pour rang 4 et pour signature $(2, 1)$.

Chapitre 7

APPLICATIONS LINÉAIRES

Sommaire

7.1 Définition d'une application linéaire	97
7.2 Transformations actives et passives	100
7.3 Isométrie	102
7.4 Principales transformations linéaires	103
7.5 Transformation affine	107
7.6 Application bilinéaire	107
7.7 Application multilinéaire	108

7.1 Définition d'une application linéaire

On formalise ici la déf. 1.1.5 page 2 d'une application :

Définition 7.1.1 : Application

Soient A et B deux ensembles quelconques. f est une fonction ou une application de A dans B si chaque élément a de l'ensemble de départ A possède une image et une seule b par f dans l'ensemble d'arrivée B :

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) = b \end{aligned}$$

Notation 7.1.1

Si a est un élément quelconque de A on écrira $a \in A$.

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Définition 7.1.2 : Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire f de E dans F est une application (ou transformation linéaire ou opérateur linéaire) de E dans F

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ \mathbf{u} &\mapsto f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

qui est linéaire :

- additive : $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \quad f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$
- homogène de degré un : $\forall \mathbf{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \odot \mathbf{u}) = \lambda \odot f(\mathbf{u})$

Remarque 7.1.1

Les deux conditions de linéarité peuvent être remplacées par la seule condition suivante :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \lambda \odot f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$$

Notation 7.1.2

L'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans E est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel, ou le même. Les espaces de départ et d'arrivée ne sont plus quelconques, ce sont des espaces vectoriels. Elle prend en entrée un vecteur et donne en sortie un vecteur, en conservant les deux opérations de base d'un espace vectoriel, l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire, déf. 3.1.11 page 27.

Les applications linéaires préservent la structure d'espace vectoriel. Elles préservent les opérations de combinaison linéaire des vecteurs (déf. 3.1.2 page 22) car peu importe qu'elles soient appliquées avant ou après l'addition vectorielle ou la multiplication par un scalaire.

Définition 7.1.3 : Morphisme - Homomorphisme ¹

Un morphisme ou homomorphisme est une application entre deux ensembles structurés par des lois (deux structures algébriques), ces ensembles étant de même type, qui préserve la structure.

Soient deux ensembles munis de lois de composition internes, $(E, \star)$ et $(F, \diamond)$. Une application f est un homomorphisme ssi

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ \forall(x, y) \in E^2, \quad f(x \star y) &\mapsto f(x) \diamond f(y) \end{aligned}$$

Une application linéaire est donc un homomorphisme d'espace vectoriel. Un homomorphisme bijectif est un isomorphisme.

Définition 7.1.4 : Isomorphisme ²

Un isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui préserve la structure, et dont la réciproque préserve aussi la structure.

Les ensembles entre lesquels existe un isomorphisme sont dits isomorphes ou équivalents, ils sont structurellement identiques et ne diffèrent que par leur nomenclature. Dans le cas des espaces vectoriels, les isomorphismes sont les applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel dans l'autre. Une application linéaire bijective de E dans F est donc un isomorphisme de E sur F .

Définition 7.1.5 : Endomorphisme

Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme ^a de E .

a. « Endo » signifiant « dans ».

Dans la condition d'homogénéité de degré un, posons $\lambda = 0$. En utilisant 3.1.3 page 26 :

$$\begin{aligned} f(0 \odot \mathbf{u}) &= 0 \odot f(\mathbf{u}) \\ f(\mathbf{0}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Si f est linéaire alors $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Autrement dit, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ est une condition nécessaire pour que f soit linéaire. Toute application linéaire donne du vecteur nul une image qui est le vecteur nul.

Nous n'avons besoin que de transformer les vecteurs de base. En effet, la transformation linéaire d'un vecteur $\mathbf{u}$ quelconque s'écrit :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f(u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + u^n \mathbf{e}_n) \\ &= u^1 f(\mathbf{e}_1) + u^2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + u^n f(\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

Exemple 7.1.1 : Homothétie vectorielle

Soit α un scalaire. L'homothétie vectorielle de rapport α ,

$$\begin{aligned} h : E &\rightarrow E \\ \mathbf{x} &\mapsto \alpha \odot \mathbf{x} \end{aligned}$$

est une application linéaire. En effet :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \alpha \odot \mathbf{x} \\ h(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) &= \alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \\ &= (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y}) \\ &= h(\mathbf{x}) \oplus h(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} h(\lambda \odot \mathbf{x}) &= \alpha \odot (\lambda \odot \mathbf{x}) \\ &= \alpha \lambda \odot \mathbf{x} \\ &= \lambda \odot (\alpha \odot \mathbf{x}) \\ &= \lambda \odot h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Exemple 7.1.2 : Application dérivation

Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables, et soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application dérivation,

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\mapsto f'\end{aligned}$$

qui à toute fonction f de $\mathcal{D}$ associe sa dérivée f' de $\mathcal{F}$, est linéaire. En effet, la dérivée de la somme de deux fonctions est la somme de leur dérivée,

$$(f + g)' = f' + g'$$

et la dérivée d'une fonction multipliée par un scalaire est égale à ce scalaire multiplié par la dérivée de cette fonction :

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Exemple 7.1.3 : Application intégration

Soit $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ intégrables, et soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. L'application intégration indéfinie avec un point de départ d'intégration a fixé,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{D} \\ f(x) &\mapsto \int_a^x f(t) dt\end{aligned}$$

qui à toute fonction de $\mathcal{I}$ associe son intégrale indéfinie de a à x , est linéaire. En effet,

$$\int_a^x [f(t) + g(t)] dt = \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt$$

et :

$$\int_a^x [\lambda f(t)] dt = \lambda \int_a^x f(t) dt$$

7.2 Transformations actives et passives

Tout système d'équations linéaires (déf. 4.1.1 page 53),

$$\begin{cases} a_{11} u^1 + a_{12} u^2 = v^1 \\ a_{21} u^1 + a_{22} u^2 = v^2 \end{cases}$$

est une application linéaire de chaque vecteur $\mathbf{u}(u^1, u^2)$ vers son vecteur image $\mathbf{v}(v^1, v^2)$. Sous forme matricielle, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Sous forme indicielle :

$$\forall j \quad a_{ij}u^i = v^j$$

On vérifie que l'on a bien les propriétés d'additivité et d'homogénéité de degré un qui caractérisent les applications linéaires :

$$A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A(\mathbf{u}_1) + A(\mathbf{u}_2) \quad \text{et} \quad A(\lambda \mathbf{u}) = \lambda A(\mathbf{u})$$

L'application étant bijective :

$$\det A \neq 0$$

Les transformations linéaires peuvent être interprétées de deux façons. Pour donner une représentation graphique à l'action d'une matrice sur un vecteur, nous supposons que les inconnues sont les composantes contravariantes d'un vecteur, c.-à-d. les coordonnées des points aux extrémités des vecteurs.

a) transformation ponctuelle linéaire

(v^1, v^2) sont les coordonnées du point Q image du point $P(u^1, u^2)$ dans le même système de coordonnées. On parle de l'aspect *alibi*³ de la transformation, ou bien d'une *transformation active*. La plupart du temps on supposera que l'on effectue cette transformation.

Exemple 7.2.1 : Transformation d'un vecteur - aspect alibi

Le système d'équations

$$\begin{cases} v^1 = \frac{1}{2}u^1 - 4u^2 \\ v^2 = \frac{1}{3}u^1 + u^2 \end{cases}$$

transforme le vecteur $P(2, 1)$ en son image $Q(-3, 5/3)$.

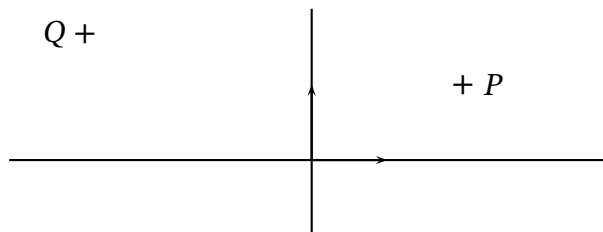


FIG. 7.1 – Transformation active : le point P passe ailleurs, en Q

b) changement de système de coordonnées

(v^1, v^2) sont les coordonnées du même point P dans un nouveau système de coordonnées. On parle alors de l'aspect *alias*⁴ de la transformation, ou bien d'une transformation *passive*. Les deux systèmes de coordonnées sont reliés par la relation $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$.

Exemple 7.2.2 : Transformation d'un vecteur - aspect alias

Pour trouver dans l'ancien système de coordonnées, les composantes du vecteur de

3. du latin « ailleurs ».

4. du latin « autrement ».

base $(1, 0)$ de ce nouveau système, on résoud le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}u^1 - 4u^2 \\ 0 = \frac{1}{3}u^1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)u^1 \\ u^2 = -\frac{1}{3}u^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{6}{11} \\ u^2 = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

Pour trouver le vecteur de base de coordonnées $(0, 1)$ on résoud le système :

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}u^1 - 4u^2 \\ 1 = \frac{1}{3}u^1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = 8u^2 \\ 1 = \left(\frac{8}{3} + 1\right)u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{24}{11} \\ u^2 = \frac{3}{11} \end{cases}$$

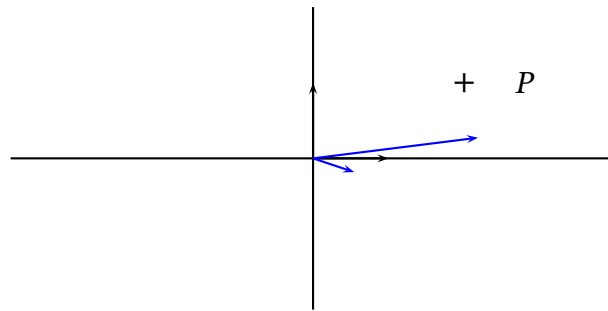


FIG. 7.2 – Transformation passive : P vu autrement

Remarque 7.2.1

Un changement de système de coordonnées est une transformation de coordonnées passive et n'est pas une transformation de coordonnées active. Changement (de système) de coordonnées et transformation de coordonnées ne sont donc pas synonymes.

En appliquant une transformation linéaire à un système de coordonnées rectangulaires, on obtient un système de coordonnées dont les lignes de coordonnées sont rectilignes et, le plus souvent (lorsque la transformation n'est pas une simple rotation), obliques (Fig. 7.2).

7.3 Isométrie

Une isométrie ou transformation orthogonale est une transformation linéaire qui conserve la norme des vecteurs :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{u} &= \mathbf{v}^T \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}^T A^T A \mathbf{u} \\ &= A^T A \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

La matrice A est donc telle que :

$$A A^T = A^T A = I$$

La transposée de A est donc égale à son inverse :

$$\begin{cases} AA^T = I \\ AA^{-1} = I \end{cases} \Rightarrow A^T = A^{-1}$$

Définition 7.3.1 : Matrice orthogonale

Une matrice est orthogonale ssi elle est inversible et son inverse est égale à sa transposée.

Montrons que le déterminant d'une matrice orthogonale est de carré unité :

$$AA^T = I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \end{cases}$$

La réciproque est fausse, il existe des matrices de déterminant ± 1 qui ne sont pas orthogonales.

- si $\det A = +1$ la matrice est dite *directe*. Par exemple les matrices identité et les matrices rotation d'un angle θ autour d'un axe Δ quelconque sont des matrices directes.
- si $\det A = -1$ la matrice est dite *indirecte*.

Le signe du déterminant d'une matrice orthogonale est appelée sa signature.

7.4 Principales transformations linéaires

Les principales transformations linéaires sont les rotations, les inversions, les changements d'échelle, les réflexions, les transvections, et toutes les combinaisons des ces transformations, que l'on obtient par multiplication matricielle (généralement non commutative).

7.4.1 Rotation

Une rotation est toujours dans un plan.

- transformation passive : rotation d'une base

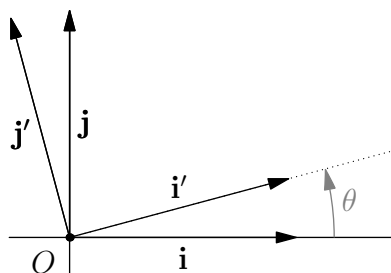


FIG. 7.3 – Rotation d'une base autour du point O d'un angle θ dans le sens trigonométrique

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos(\theta) + \mathbf{j} \sin(\theta) \\ \mathbf{j}' = -\mathbf{i} \sin(\theta) + \mathbf{j} \cos(\theta) \end{cases}$$

La matrice $R_O(\theta)$ rotation autour du point O s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

La matrice $R_z(\theta)$ rotation d'une base d'un angle θ dans le sens trigonométrique autour de l'axe des z s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les rotations sont des isométries de signature $\det(R) = 1$.

- transformation active : rotation d'un vecteur

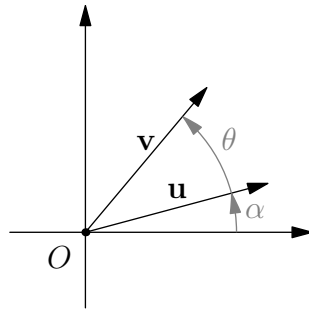


FIG. 7.4 – Rotation d'un vecteur autour d'un point O d'un angle θ dans le sens trigonométrique

$$\begin{aligned} \begin{cases} v^1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha + \theta) \\ v^2 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha + \theta) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v^1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) \cos(\theta) - \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha) \sin(\theta) \\ v^2 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha) \cos(\theta) + \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) \sin(\theta) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v^1 = u^1 \cos(\theta) - u^2 \sin(\theta) \\ v^2 = u^2 \cos(\theta) + u^1 \sin(\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

En notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

On retrouve le fait qu'une rotation d'angle θ d'une base correspond à une rotation d'angle $-\theta$ des autres vecteurs.

7.4.2 Inversion

Une inversion ou symétrie centrale est une symétrie par rapport à un point fixe appelé centre de symétrie. Elle est définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} \\ -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les inversions sont des isométries de signature $\det(Inv) = -1$.

7.4.3 Changement d'échelle

Elle est définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{i} \\ \beta \mathbf{j} \\ \gamma \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les changements d'échelle ne sont pas des isométries, elles ne conservent pas la norme des vecteurs.

7.4.4 Réflexion ou symétrie orthogonale

En deux dimensions, la réflexion ou symétrie axiale est une symétrie par rapport à une droite. En trois dimensions, la réflexion ou miroir est une symétrie par rapport à un plan.

Exemple 7.4.1

Symétrie par rapport à l'axe des x :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} i \\ -j \end{pmatrix}$$

Symétrie par rapport à la droite $y = x$:

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$$

Symétrie par rapport au plan (x, y) :

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} i \\ j \\ -k \end{pmatrix}$$

Les réflexions sont des isométries de signature $\det(Ref) = -1$.

7.4.5 Transvection

Une transvection ou cisaillement est définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x + my \\ y \end{pmatrix}$$

7.5 Transformation affine

En combinant une transformation linéaire et une translation on obtient une transformation affine :

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$$

où $\mathbf{b}$ est un vecteur constant. Pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ce n'est donc pas une transformation linéaire. Cependant nous pouvons quand même l'écrire sous forme matricielle.

Exemple 7.5.1

Dans le cas d'une simple translation, la transformation linéaire est la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b^1 \\ 0 & 1 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 + b^1 \\ u^2 + b^2 \\ u^3 + b^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées $(u^1, u^2, u^3, 1)$ sont appelées coordonnées homogènes.

7.6 Application bilinéaire

Définition 7.6.1 : Application bilinéaire

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est une application qui a deux vecteurs, $\mathbf{u}$ dans E et $\mathbf{v}$ dans F , associe un vecteur $\mathbf{w}$ dans G ,

$$f : E \times F \rightarrow G$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

qui est linéaire pour chacun de ses arguments. $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, (\mathbf{w}, \mathbf{x}) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$

- 1) B est linéaire pour son premier argument,
 - a) additive : $B(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
 - b) homogène de degré un : $B(\lambda \odot \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
- 2) B est linéaire pour son second argument :
 - a) additive : $B(\mathbf{u}, \mathbf{w} \oplus \mathbf{x}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{x})$

b) homogène de degré un : $B(\mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{w}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

Notation 7.6.1

L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F; G)$. Lorsque $E = F$ il est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^2(E; G)$.

7.7 Application multilinéaire

Définition 7.7.1 : Application multilinéaire

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F , $n + 1$ espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application multilinéaire, ici n -linéaire, φ de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans F est une application qui à n vecteurs $\mathbf{u}_1 \in E_1, \mathbf{u}_2 \in E_2, \dots, \mathbf{u}_n \in E_n$, associe un vecteur $\mathbf{v} \in F$,

$$\begin{aligned} f &: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F \\ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n &\mapsto \varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

qui est linéaire pour chacun de ses n arguments.

Notation 7.7.1

L'ensemble des applications n -linéaires de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$. Lorsque $E_1 = E_2 = \dots = E_n$ il est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^n(E; F)$

Chapitre 8

ESPACES EUCLIDIENS

Sommaire

8.1 Histoire de la géométrie euclidienne	109
8.2 Métrique de l'espace euclidien	111
8.3 Longueur d'une courbe	118
8.4 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires	118
8.5 Courbe régulière	121
8.6 Norme	123
8.7 Produit scalaire	128
8.8 Produit scalaire et norme	132
8.9 Expression analytique du produit scalaire	132
8.10 Composantes covariantes	133
8.11 Covecteurs	134

8.1 Histoire de la géométrie euclidienne

Vers 300 av. J.-C., le mathématicien grec Euclide d'Alexandrie rédige un traité de mathématique constitué de 13 livres, intitulé *Éléments de géométrie*, dans lequel, entre autres, il axiomatise la géométrie du plan. Il fonde ainsi ce qui à partir du XVII^e siècle sera appelée « géométrie pure » ou « géométrie synthétique », c.-à-d. la géométrie sans l'utilisation d'un système de coordonnées. Son système axiomatique est un ensemble de

- notions primitives, qui sont des objets mathématiques tels que les points, les lignes ou les plans, qui n'ont pas de propriétés intrinsèques et dont les définitions importent peu, si ce n'est pour se faire une représentation mentale. En revanche, leurs relations mutuelles sont d'importance pour la théorie
- 5 axiomes (et 5 notions communes qui sont aussi des axiomes) qui sont des propositions concernant les notions primitives, ces propositions étant supposées vraies et non démontrables dans le système en question. Ce sont des abstractions issues du monde physique. Le 5^e axiome est appelé axiome des parallèles et énonce que « Pour une droite donnée et un

point n'appartenant pas à cette droite, il n'existe qu'une seule droite passant par ce point ne coupant pas la droite donnée »

- postulats (ou conjectures) qui sont des propositions démontrables ou non dans le système axiomatique, c.-à-d. qui sont soit des théorèmes du système, soit des indécidables du système
- définitions
- propositions démontrées, ou théorèmes

En 1899, dans « Grundlagen der Geometrie ¹ », le mathématicien allemand David Hilbert donne une formulation rigoureuse et moderne de la géométrie euclidienne. Il montre qu'il faut en fait 20 axiomes pour la géométrie d'Euclide, les axiomes manquants étant contenus implicitement dans les définitions et figures des *Éléments*.

On attend d'un système axiomatique qu'il soit *consistant*, on dit aussi *cohérent*. Il l'est s'il est impossible d'y démontrer une proposition et son contraire, autrement dit si le système ne se contredit pas. Dès lors qu'un système contient une contradiction (ou incohérence) logique, tout peut y être démontré, et ce système perd toute utilité. On souhaite également qu'un système axiomatique soit *complet*, ce qui signifie que pour toute proposition P énonçable et compréhensible dans le système, l'on puisse démontrer P ou non-P, c.-à-d., si ses axiomes nous permettent d'engendrer toutes les vérités logiques (tautologies) exprimables dans ce système.

Un *indécidable* d'un système axiomatique S est un énoncé formulable dans S mais dont S ne peut démontrer s'il est vrai ou faux (du type « Je mens. », ou « Cette phrase est fausse. »). S est donc complet s'il ne contient pas d'indécidable. Lorsque l'on découvre un indécidable I dans un système axiomatique S, on peut l'ajouter aux axiomes de ce système et créer ainsi un nouveau système axiomatique S' dans lequel I n'est plus un indécidable.

Vers 1824, les mathématiciens Carl Friedrich Gauss, János Bolyai et Nikolai Ivanovich Lobachevsky développent la *géométrie hyperbolique* dans laquelle le 5^e axiome d'Euclide est remplacé par « Pour une droite donnée et un point n'appartenant pas à cette droite, il existe plus d'une droite passant par ce point et qui ne coupe pas la droite donnée ». En 1868, Eugenio Beltrami montre que la consistance de la géométrie euclidienne implique la consistance de la géométrie hyperbolique, et réciproquement. Si la géométrie euclidienne est consistante alors la géométrie hyperbolique l'est aussi. Par conséquent l'axiome des parallèles est indépendant des autres axiomes, il n'est donc pas nécessaire pour former un système axiomatique, en le supprimant on crée la *géométrie absolue*. Dans cette géométrie, l'axiome des parallèles peut être énoncé mais ne peut être démontré, c'est un indécidable. La géométrie absolue est donc incomplète.

En 1931, Kurt Gödel démontre les deux théorèmes qui portent son nom. Le premier théorème de Gödel énonce que tout système formel (dont les systèmes axiomatiques) effectif (dont le nombre d'axiomes est fini) assez puissant (dans lequel on puisse faire de l'arithmétique) est soit inconsistant donc inintéressant puisque tout y est vrai et faux à la fois, soit incomplet, donc contient au moins un indécidable. Les systèmes formels ne peuvent être à la fois consistants et complets. Le second théorème de Gödel énonce que la consistance d'un système formel fait partie de ses indécidables, autrement dit un système consistant ne peut savoir qu'il l'est (un homme saint d'esprit ne peut savoir qu'il l'est, mais il peut le poser comme axiome, ce que fera également un fou). Gödel a donc universalisé l'incomplétude déjà connue pour la géométrie absolue.

Si donc on ajoute un indécidable comme axiome à un système S pour en faire un système S', il existera au moins un autre indécidable I' dans S', qui est aussi un indécidable de S.

1. Fondements de la géométrie

En 1637 René Descartes introduit le système de coordonnées rectilignes appelé système de coordonnées cartésien, et montre que les problèmes de géométrie peuvent se résoudre par l’algèbre, fondant ainsi la *géométrie analytique*. Si on identifie un point à une paire de nombres réels ordonnés (x_1, x_2) , et la distance entre deux points (x_1, x_2) et (y_1, y_2) par $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, alors tous les axiomes d’Euclide peuvent être démontrés, ils deviennent des théorèmes de la théorie des nombres réels. En 1870 Félix Klein fait de même et construit une géométrie analytique pour la géométrie hyperbolique. Ce n’est qu’en 1957 qu’Emil Artin démontrera que les approches synthétique et analytique sont équivalentes.

L’étape suivante consiste à remplacer les points par des vecteurs (chapitre 3 page 21) et à introduire un produit scalaire (chapitre 8.7 page 128) pour avoir une distance et un angle. Nous formons alors les espaces vectoriels qui permettent de définir les espaces pré-euclidiens (euclidiens et pseudo-euclidiens) qui sont des espaces plats, sans passer par les axiomes d’Euclide. Rappelons que la notion de vecteur position dans un espace n’est applicable que si cet espace est plat.

8.2 Métrique de l’espace euclidien

8.2.1 Coordonnées rectangulaires ou cartésiennes normales

Dans ce système de coordonnées les lignes de coordonnées sont des droites qui se coupent à angle droit. Ces systèmes de coordonnées ne sont possibles que dans les espaces plats, c.-à-d. pré-euclidien (euclidiens ou pseudo-euclidiens).

Dans le plan, en coordonnées rectangulaires (x, y) le carré de la longueur, appelée *métrique*, est donné par le théorème de Pythagore :

$$s^2 = x^2 + y^2$$

C’est la *forme quadratique associée au plan en coordonnées rectangulaires* :

$$Q(x, y) = x^2 + y^2$$

D’après le § 6.4 page 96, cette forme quadratique a pour signature $(2, 0)$ et pour rang 2. D’après la déf. 6.1.12 page 91, elle est définie positive. La loi d’inertie de Sylvester nous dit qu’elle sera définie positive quel que soit le système de coordonnées employé. La métrique s’écrit :

$$s^2 = g_{xx}x^2 + g_{yy}y^2$$

Les coefficients de la métrique, $g_{xx} = 1$ et $g_{yy} = 1$, sont les composantes du *tenseur métrique* du plan en coordonnées rectangulaires. En notation matricielle :

$$s^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notation 8.2.1

En notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$s^2 = \delta_{ij} x^i x^j$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (déf. 2.3.1 page 18).

Un tenseur métrique dont toutes les composantes sont constantes n'est possible que dans les espaces plats (euclidiens et pseudo-euclidiens).

On généralise à l'espace à trois dimensions, en coordonnées rectangulaires (x, y, z) la métrique est donnée par la double application du théorème de Pythagore, d'abord dans un plan puis dans l'espace :

$$\begin{aligned} s^2 &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= g_{xx}x^2 + g_{yy}y^2 + g_{zz}z^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \delta_{ij} x^i x^j \end{aligned}$$

g_{xx}, g_{yy}, g_{zz} sont les composantes du tenseur métrique de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires. La forme quadratique associée à l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

a pour signature $(3, 0)$ et pour rang 3. La signature est souvent donnée sous forme explicite $(+ + +)$. Elle est définie positive. La métrique de l'espace de la physique newtonienne est donc une forme quadratique définie positive. Pour pouvoir l'intégrer le long d'une courbe, la métrique est donnée sous forme différentielle :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ds^2 est le carré de l'élément de longueur (élémentaire dans le sens de infinitésimal).

Remarque 8.2.1

L'opérateur carré est prioritaire sur celui de différentiation ou de dérivation. Ainsi $dx^2 = d(x^2)$ et non $(dx)^2$, et l'on a par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{dx} &= 2x \\ dx^2 &= 2x dx \end{aligned}$$

dx^2 est donc un infiniment petit du premier ordre. En toute rigueur il faudrait donc écrire

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

pour le carré de la distance infinitésimale qui est un infiniment petit du deuxième ordre (alors que ds est un infiniment petit du premier ordre). Néanmoins nous supprimons les parenthèses pour alléger la notation, la confusion étant peu probable.

8.2.2 Coordonnées cartésiennes

Dans ce système de coordonnées cartésiennes (rectilignes), les lignes de coordonnées sont des droites. Dans l'espace ponctuel E_n , soit M un point de coordonnées $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Supposons que l'on puisse écrire les n équations suivantes,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad x^i = f^i(y^1, y^2, \dots, y^n)$$

où les n fonctions f (et par conséquent les n fonctions g qui suivent) sont des fonctions continument différentiables des n variables y . Supposons également que le déterminant fonctionnel de ce système d'équation soit non nul, autrement dit supposons que ces fonctions soient indépendantes les unes des autres de sorte que l'on puisse résoudre les n équations précédentes et écrire :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad y^i = g^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

Si les fonctions f sont toutes linéaires alors les systèmes de coordonnées (x^i) et (y^i) sont rectilignes, sinon, au moins l'un des deux systèmes est curviligne.

Montrons ici que ces systèmes de coordonnées peuvent toujours se ramener par changement de variables à un système de coordonnées rectangulaires. Rappelons que les coordonnées cartésiennes ne sont possibles que dans les espaces plats c.-à-d. pré-euclidiens (euclidiens et pseudo-euclidiens).

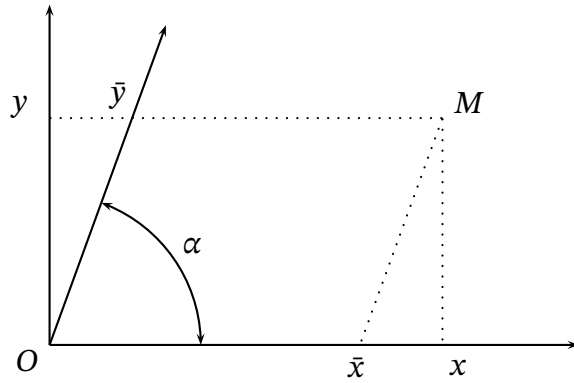


FIG. 8.1 – Coordonnées rectangulaires (x, y) et cartésiennes $(\bar{x}, \bar{y})$

Transformation des coordonnées cartésiennes en rectangulaires

$$T : \begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y} \cos(\alpha) \\ y = \bar{y} \sin(\alpha) \end{cases}$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en cartésiennes

$$\bar{T} : \begin{cases} \bar{x} = x - \frac{y}{\tan(\alpha)} \\ \bar{y} = \frac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = x - \frac{y}{\tan(\alpha)} \\ \bar{y} = \frac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes la métrique du plan s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} d\bar{y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} d\bar{y} \right)^2 \\ &= [d\bar{x} + \cos(\alpha)d\bar{y}]^2 + [\sin(\alpha)d\bar{y}]^2 \\ &= d\bar{x}^2 + 2\cos(\alpha)d\bar{x}d\bar{y} + \cos^2(\alpha)d\bar{y}^2 + \sin^2(\alpha)d\bar{y}^2 \\ &= d\bar{x}^2 + 2\cos(\alpha)d\bar{x}d\bar{y} + d\bar{y}^2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

En coordonnées cartésiennes (et cartésiennes normales), la métrique est une somme à coefficients constants, ici 1 puis $2\cos(\alpha)$ et à nouveau 1. Une conséquence de la réduction de Gauss est que la métrique en coordonnées cartésiennes peut toujours se ramener à une métrique en coordonnées rectangulaires.

Sous forme différentielle, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = g_{\bar{x}\bar{x}}d\bar{x}^2 + 2g_{\bar{x}\bar{y}}d\bar{x}d\bar{y} + g_{\bar{y}\bar{y}}d\bar{y}^2$$

$g_{\bar{x}\bar{x}}, g_{\bar{x}\bar{y}}, g_{\bar{y}\bar{y}}$ sont les composantes (constantes, c.-à-d. non fonction des coordonnées) du tenseur métrique du plan en coordonnées cartésiennes.

8.2.3 Coordonnées curvilignes

Dans ce système de coordonnées qui peut être orthogonal ou oblique, les lignes de coordonnées ne sont pas des droites. Au moins un coefficient de la métrique (une composante du tenseur métrique) est fonction des coordonnées. La métrique ne peut être donnée que sous forme différentielle car elle varie d'un point à l'autre.

8.2.4 Coordonnées orthogonales

Dans ce système de coordonnées qui peut être rectiligne ou curviligne, les lignes de coordonnées se coupent à angle droit. La métrique ne contient que des carrés, elle n'a pas de terme croisé (ou rectangle), du type xy .

8.2.5 Coordonnées obliques

Dans ce système de coordonnées qui peut être rectiligne ou curviligne, les lignes de coordonnées ne se coupent pas à angle droit. La métrique contient au moins un terme croisé.

8.2.6 Coordonnées polaires

C'est l'archétype des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales du plan. En faisant varier la distance radiale à l'origine ρ et l'angle θ on parcourt l'ensemble des points du plan. Les coordonnées polaires (ρ, θ) forment donc un système de coordonnées pour le plan. Pour le mettre en place, il faut se donner les mêmes éléments que pour le système de coordonnées rectangulaires en deux dimensions, c.-à-d. deux points du plan (le centre du système et une direction) et une unité de longueur. Il n'est pas nécessaire de se donner une unité d'angle car le tour et ses fractions sont des unités naturelles, en revanche il faut se donner une orientation (un sens de parcours positif pour les angles). Ce système de coordonnées est dégénéré (déf. 1.1.11 page 4) à l'origine des coordonnées, en ce point l'angle θ est indéterminé, cependant la dégénérescence est facilement levée en passant en coordonnées rectangulaires.

La transformation des coordonnées polaires en rectangulaires est donnée en (3.2) page 40. La transformation des coordonnées rectangulaires en polaires s'écrit :

$$\bar{T} : \begin{cases} \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta(x, y) = \text{atan2}(y, x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \text{indéfinie} & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

En coordonnées polaires la métrique du plan s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \right)^2 \\ &= [\cos(\theta)d\rho - \rho \sin(\theta)d\theta]^2 + [\sin(\theta)d\rho + \rho \cos(\theta)d\theta]^2 \\ &= \cos^2(\theta)d\rho^2 + \rho^2 \sin^2(\theta)d\theta^2 - 2\rho \cos(\theta) \sin(\theta)d\rho d\theta \\ &\quad + \sin^2(\theta)d\rho^2 + \rho^2 \cos^2(\theta)d\theta^2 + 2\rho \cos(\theta) \sin(\theta)d\rho d\theta \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &= g_{\rho\rho} d\rho^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

$g_{\rho\rho} = 1$ et $g_{\theta\theta} = \rho^2$ sont les composantes du tenseur métrique du plan en coordonnées polaires. La composante $g_{\theta\theta}$ est fonction de la coordonnée ρ . Le changement de coordonnées polaires

en rectangulaires (3.2) page 40 permet de retrouver un tenseur métrique avec des composantes constantes, caractéristiques d'un espace plat.

8.2.7 Coordonnées cylindriques

Elles sont identiques aux coordonnées polaires, avec la coordonnée supplémentaire z . C'est un système de coordonnées curvilignes orthogonales pour l'espace plat à trois dimensions. Lorsqu'on l'utilise en deux dimensions pour une surface cylindrique en fixant ρ , le centre du système de coordonnées n'appartient pas au cylindre. Pour que le centre du système de coordonnées soit sur la surface cylindrique, on peut la dérouler pour en faire un plan, et utiliser les coordonnées rectangulaires ou polaires à sa surface. Les lignes de coordonnées sont alors des droites du plan, mais aussi des courbes dans l'espace à trois dimensions dans lequel est plongé le cylindre.

Transformation des coordonnées cylindriques en rectangulaires

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \\ z = z' \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z' < +\infty$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en cylindriques

$$\bar{T} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \text{atan2}(y, x) \\ z' = z \end{cases}$$

La surface de coordonnée $\rho = c^{ste}$ est le cylindre d'axe z .

La surface de coordonnée $\phi = c^{ste}$ est le demi-plan limité par l'axe z .

La surface de coordonnée $z' = c^{ste}$ est le plan parallèle au plan (x, y) .

En coordonnées cylindriques la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial z'} dz' \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial z'} dz' \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial z}{\partial z'} dz' \right)^2 \\ &= [\cos(\phi)d\rho - \rho \sin(\phi)d\phi]^2 + [\sin(\phi)d\rho + \rho \cos(\phi)d\phi]^2 + dz'^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz'^2 \end{aligned}$$

8.2.8 Coordonnées sphériques

C'est aussi un système de coordonnées curvilignes orthogonales pour l'espace plat à trois dimensions. Lorsqu'on l'utilise en deux dimensions sur une sphère en fixant le rayon r , le centre du système de coordonnées n'appartient pas à la sphère. Contrairement au cylindre, nous ne pouvons pas dérouler la sphère pour en faire un plan.

Transformation des coordonnées sphériques en rectangulaires

$$T : \begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en sphériques

$$\bar{T} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{atan2}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \\ \phi = \text{atan2}(y, x) \end{cases}$$

Pour trouver l'expression de la métrique en coordonnées sphériques, partons de son expression en coordonnées rectangulaires :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En différentiant la transformation T :

$$\begin{cases} dx = \partial_r x dr + \partial_\theta x d\theta + \partial_\phi x d\phi \\ dy = \partial_r y dr + \partial_\theta y d\theta + \partial_\phi y d\phi \\ dz = \partial_r z dr + \partial_\theta z d\theta + \partial_\phi z d\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{cases}$$

La somme des carrés donne l'expression cherchée :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (8.3)$$

Transformation des coordonnées sphériques en cylindriques, et cylindriques en sphériques

$$\begin{cases} \rho = r \sin(\theta) \\ z = r \cos(\theta) \\ \phi = \phi \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \text{atan2}(\rho, z) \\ \phi = \phi \end{cases}$$

Dans un système de coordonnées générales, la métrique de l'espace euclidien en trois dimensions s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 \\ &= g_{ij}dx^i dx^j \end{aligned}$$

g_{ij} est ici le tenseur métrique euclidien.

8.3 Longueur d'une courbe

Dans l'espace euclidien de dimension trois, la longueur Γ d'une courbe décrite par un point M entre les abscisses curvilignes s_0 et s_1 telles que $s_1 > s_0$ est donnée par l'intégrale de l'élément de métrique ds de l'espace euclidien. En coordonnées rectangulaires (x, y, z) :

$$\begin{aligned}\Gamma &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{s_0}^{s_1} ds \\ &= s_1 - s_0 \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\end{aligned}$$

8.4 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires

À partir de la déf. 1.3.1 page 9, montrons que les géodésiques du plan sont des droites.

Exemple 8.4.1

Dans le plan cherchons l'équation $y = y(x)$ d'une géodésique entre les points A et B :

$$\begin{aligned}\delta \int_A^B ds &= 0 \\ \delta \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2(x)} &= 0 \\ \delta \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \frac{dy^2(x)}{dx^2}} dx &= 0 \\ \frac{dy^2(x)}{dx^2} &= c^{ste} \\ y(x) &= ax + b\end{aligned}$$

où a et b sont des constantes.

Cherchons l'équation de la géodésique sous forme paramétrique, de paramètre p :

$$\begin{aligned}\delta \int_A^B ds(p) &= 0 \\ \delta \int_A^B \sqrt{dx^2(p) + dy^2(p)} &= 0 \\ \delta \int_{p_A}^{p_B} \sqrt{\frac{dx^2(p)}{dp^2} + \frac{dy^2(p)}{dp^2}} dp &= 0\end{aligned}$$

Si l'intégrale d'une fonction est extrémale, il en va de même du carré de cette fonction ou de n'importe quelle puissance de cette fonction :

$$\delta \int_A^B F dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int_A^B F^2 dp = 0$$

Remarque 8.4.1

De façon générale, on peut remplacer la fonction dans l'intégrale par une fonction monotone (fonction croissante ou décroissante) de cette fonction sur l'intervalle $[A, B]$:

$$\delta \int_A^B F dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int_A^B f(F) dp = 0$$

Notation 8.4.1

Dans ce qui suit nous désignons par un point la dérivée par rapport à un paramètre p quelconque.

Posons $x = x^1$ et $y = x^2$, et prenons le lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) \\ &= (\dot{x}^1)^2(p) + (\dot{x}^2)^2(p) \end{aligned}$$

en conservant la condition $\mathcal{L} \geq 0$. Nous obtenons le système des deux équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2 \quad \frac{d}{dp} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{d}{dp} (2\dot{x}^i) &= 0 \\ \ddot{x}^i &= 0 \end{aligned}$$

L'accélération par rapport au paramètre p est nulle. Pas celle par rapport au temps t car le temps peut être une fonction quelconque de p . Soient a, b, c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes :

$$\begin{aligned} x &= c_1 p + c_2 \quad \text{et} \quad y = c_3 p + c_4 \\ p &= \frac{x - c_2}{c_1} \\ y &= c_3 \frac{x - c_2}{c_1} + c_4 \\ &= ax + b \end{aligned}$$

Une trajectoire, une fois parcourue, n'est ni fonction du temps, ni fonction de l'abscisse curviligne. N'importe quel paramètre permet de la définir. L'intérêt du paramètre temps est d'utiliser les instants initial et final, l'intérêt de l'abscisse curviligne est d'utiliser les positions initiale et finale.

Exemple 8.4.2 : Divers paramétrisations d'une fonction

La fonction $y = \sin(x^2 + 1)$ peut être paramétrée de plusieurs façons :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sin(t^2 + 1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin(x + 1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \sin(x) \end{cases}$$

Définition 8.4.1 : Vecteur tangent à une courbe

Soit $\mathbf{r}(x^i)$ le vecteur position à n composantes d'un point d'une courbe $\mathcal{C}$. Si les coordonnées $x^i(p)$ de ce vecteur sont fonction d'un paramètre p , son vecteur dérivée par rapport à ce paramètre s'écrit :

$$\mathbf{u}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}}{dp}$$

Il a pour composantes

$$\forall i = 1, \dots, n \quad u^i(p) = \frac{dx^i(p)}{dp}$$

Définition 8.4.2 : Arc de courbe

Un arc de courbe est une portion de courbe délimitée par deux points distincts de cette courbe. C'est un sous-ensemble connexe de la courbe.

Définition 8.4.3 : Courbe nulle en un point

Une courbe est nulle au point de paramètre p_0 ssi en ce point l'abscisse curviligne $s(p)$ cesse de croître ou de décroître avec le paramètre p :

$$\left. \frac{ds}{dp} \right|_{p_0} = 0$$

Exemple 8.4.3

En cinématique classique, soit un mobile décrivant une trajectoire en fonction du temps avec une vitesse décroissante. La trajectoire est nulle au point où la vitesse s'annule. En ce point la distance parcourue par le mobile cesse de croître ou de décroître avec le temps. C'est soit un stop-and-go, soit une inversion du sens du vecteur vitesse.

Le vecteur tangent à la courbe en ce point est nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(p) &= \frac{d\mathbf{r}}{dp} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Définition 8.4.4 : Courbe nulle

Une courbe est nulle ssi l'un de ses arcs est de longueur nulle. Un arc représente plus d'un point, et correspond à un intervalle $c \geq p \geq d$ du paramètre p , avec $c > d$.

Exemple 8.4.4

En cinématique classique, la trajectoire d'un mobile est nulle si le mobile observe un arrêt complet pendant un temps non nul sur une partie de sa trajectoire.

Pour une métrique définie positive, l'abscisse curviligne est bien définie comme une fonction strictement croissante du paramètre de la courbe. Réciproquement, ce paramètre est lui aussi une fonction strictement croissante de l'abscisse curviligne. Nous pouvons librement passer de l'un de ces paramètres à l'autre. En relativité, la métrique n'est pas définie positive, pour les courbes nulles l'abscisse curviligne ne peut plus être définie.

Définition 8.4.5 : Ensemble nul d'une courbe

L'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles les arcs de courbe sont nuls s'appelle l'ensemble nul de la courbe.

Une courbe peut être nulle sans que sa longueur soit nulle, il suffit en effet que l'un de ses arcs soit de longueur nulle. En revanche, une courbe de longueur nulle est nécessairement nulle.

8.5 Courbe régulière

Définition 8.5.1 : Courbe régulière

Une courbe est régulière si elle n'a pas de point nul, c.-à-d. si en tout point

$$\frac{ds}{dp} \neq 0 \quad \text{avec} \quad \frac{ds}{dp} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dp} < 0$$

Exemple 8.5.1

En cinématique classique, la trajectoire d'un mobile est régulière si la vitesse du mobile n'est jamais nulle.

Soit une courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne :

$$\mathcal{C}(s) : \forall \alpha \ x^\alpha = x^\alpha(s)$$

Soit $\mathbf{r}(x^\alpha)$ le vecteur position d'un point de $\mathcal{C}(s)$, dont les composantes $x^\alpha(p)$ sont fonction du paramètre p :

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dp} \frac{dp}{ds}$$

Remarque 8.5.1

Pour une courbe nulle la dérivée $\frac{dp}{ds}$ n'est pas définie.

Avec la définition 8.4.1 page précédente du vecteur tangent à une courbe :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{\mathbf{u}(p)}{\|\mathbf{u}(p)\|} \\ &= \mathbf{t}(p) \end{aligned}$$

$\mathbf{t}(dx^\alpha/ds)$ est le vecteur tangent unitaire en chaque point de $\mathcal{C}$. Lorsque le paramètre p est le temps propre du mobile qui décrit la courbe, $\mathbf{t}(\tau)$ est sa quadrivitesse unitaire (déf. 8.4.1 page 120).

Lorsque la courbe est régulière nous passons librement d'un paramètre quelconque à une paramétrisation par l'abscisse curviligne. Prenons le point origine en p_0 , soit $s(p_0) = 0$. Elle a alors pour expression en fonction du paramètre p

$$s(p) = \int_{p_0}^p \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}} dp$$

et la courbe entre p_0 et p_1 a pour longueur :

$$\Gamma = s(p_1)$$

Le passage du paramètre p à l'abscisse curviligne s s'effectue grâce à la relation :

$$\frac{ds}{dp} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}}$$

Exemple 8.5.2 : Changement de paramètre d'une courbe

Soit la courbe paramétrique de paramètre t :

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3 \\ \dot{y} = 4 \end{cases}$$

où le point désigne la dérivation par rapport à t .

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{3^2 + 4^2} dt \\ &= 5t \end{aligned}$$

Cette relation permet de paramétrer la courbe avec l'abscisse curviligne :

$$\begin{cases} x = \frac{3s}{5} - 1 \\ y = \frac{4s}{5} + 2 \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes, supposons que les coordonnées x et y soient fonction du paramètre t . (8.1) page 114 donne la longueur d'une courbe $\mathcal{C} : x = x(t); y = y(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{dx^2(t) + 2 \cos(\alpha) dx(t) dy(t) + dy^2(t)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2 \cos(\alpha) \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} dt \end{aligned}$$

En coordonnées polaires, supposons que les coordonnées ρ et θ soient fonction du paramètre t . La longueur d'une courbe $\mathcal{C} : \rho = \rho(t); \theta = \theta(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{d\rho^2(t) + \rho^2 d\theta^2(t)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2} dt \end{aligned}$$

8.5.0.1 Angle entre deux vecteurs

En partant de la définition géométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \end{aligned}$$

Pour un espace euclidien, donc de métrique définie positive, à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz 8.6.3 page 126 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &\leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \\ \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \\ -1 &\leq \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 1 \end{aligned}$$

L'angle $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$ des deux vecteurs existe, est unique et compris entre 0 et π :

$$0 \leq (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) \leq \pi$$

8.6 Norme

8.6.1 Norme euclidienne

Dans un système de coordonnées rectangulaire d'un espace vectoriel euclidien E_n , le théorème de Pythagore donne la longueur d'un vecteur quelconque $\mathbf{u}(u^1, u^2, \dots, u^n)$, appelée *norme euclidienne* de ce vecteur et notée $\|\cdot\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + \dots + (u^n)^2} \\ &= \sqrt{\delta_{ij} u^i u^j} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Dans l'espace vectoriel euclidien en coordonnées quelconques :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{g_{ij}u^i u^j}$$

Posons $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$. On retrouve la distance euclidienne déf. 1.7.3 page 13 avec (8.4) en posant $d(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$ (une égalité vraie dans un système de coordonnées et vraie dans tout système de coordonnées).

8.6.2 Définition d'une norme

On définit une norme par ses propriétés.

Définition 8.6.1 : Norme

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'application :

$$\begin{aligned} N : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{u} &\mapsto N(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

est une norme si elle satisfait aux propriétés suivantes :

- séparation : $\forall \mathbf{u} \in E, \quad N(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- positive homogénéité de degré un : $\forall (\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times E, \quad N(\alpha \odot \mathbf{u}) = |\alpha| \times N(\mathbf{u})$
- inégalité triangulaire : $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \quad N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v}) \geq N(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})$

Remarque 8.6.1

La définition de la norme ne nécessite pas l'existence d'un produit scalaire.

Théorème 8.6.1

La norme du vecteur zéro est nulle.

Démonstration. À partir de l'homogénéité, pour $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} N(0 \odot \mathbf{u}) &= |0| \times N(\mathbf{u}) \\ N(\vec{0}) &= 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 8.6.2

La norme est toujours positive ou nulle.

Démonstration. À partir de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité, nous tirons la propriété de non-négativité :

$$\begin{aligned} N(\mathbf{u}) + N(-\mathbf{u}) &\geq N(\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u})) \\ N(\mathbf{u}) + |-1|N(\mathbf{u}) &\geq N(\mathbf{0}) \\ N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{u}) &\geq 0 \\ N(\mathbf{u}) &\geq 0 \end{aligned}$$

□

On vérifie que la norme euclidienne $\| \cdot \|$ est bien une norme :

- séparation

$$\begin{aligned}\| \mathbf{u} \| &= 0 \\ \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} &= 0 \\ u^1 = u^2 = u^3 &= 0 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

- homogénéité

$$\begin{aligned}\| \alpha \odot \mathbf{u} \| &= \sqrt{(\alpha \times u^1)^2 + (\alpha \times u^2)^2 + (\alpha \times u^3)^2} \\ &= |\alpha| \times \| \mathbf{u} \|\end{aligned}$$

- inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\| \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \|^2 &= (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 \\ &= \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &\leq \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 + 2\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \\ &\leq (\| \mathbf{u} \| + \| \mathbf{v} \|)^2\end{aligned}$$

Définition 8.6.2 : Vecteur normé

On appelle vecteur normé ou vecteur unitaire, un vecteur de norme unité. En divisant un vecteur $\mathbf{u}$ par sa norme, on obtient un vecteur normé :

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{\mathbf{u}}{\| \mathbf{u} \|} \\ \| \mathbf{e} \| &= 1\end{aligned}$$

8.6.3 Pseudo-norme

Dans un espace vectoriel pseudo-euclidien, le pseudo-produit scalaire est indéfini, le carré de la norme d'un vecteur peut être positif, négatif ou nul, nous parlerons alors de *pseudo-norme*. Dans ces espaces nous devons distinguer les vecteurs nuls du vecteur zéro, alors qu'ils sont confondus dans les espaces euclidiens.

Définition 8.6.3 : Vecteur zéro

On appelle vecteur zéro, et on note $\mathbf{0}$, le vecteur dont toutes les composantes sont nulles

$$\mathbf{0}(0, 0, \dots)$$

La norme du vecteur zéro est nulle : $\| \mathbf{0} \| = 0$

Définition 8.6.4 : Vecteur nul

On appelle vecteur nul, tout vecteur différent du vecteur zéro, dont la norme est nulle

$$\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \| \mathbf{u} \| = 0$$

Exemple 8.6.1 : Quadri-norme relativiste

Dans un système de coordonnées rectangulaire de l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte, la 4-norme d'un vecteur quelconque $\mathbf{x}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{|(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2|} \\ &= \sqrt{\varepsilon [(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]}\end{aligned}$$

où ε est la fonction indicatrice qui vaut ± 1 de sorte que le terme dans la racine carrée soit positif. Cette définition nous assure que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, mais il est possible d'avoir $\|\mathbf{x}\| = 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. La 4-norme est donc une pseudo-norme.

Par exemple, soit a une constante. Si

$$x^0 = a, \quad x^1 = a, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0$$

alors la 4-norme est nulle et $\mathbf{x}$ est un vecteur nul :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{a^2 - a^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

8.6.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 8.6.3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E_n :

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Démonstration. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$, formons le carré de la norme du vecteur $\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}(\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 &= (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \\ &= \lambda \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \\ &= (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \cdot \lambda \mathbf{u} + (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \lambda \mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \lambda^2 \mathbf{u}^2 + 2\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2\end{aligned}\tag{8.5}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 &\geq 0 \\ \mathbf{u}^2 \lambda^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \lambda + \mathbf{v}^2 &\geq 0\end{aligned}$$

C'est un trinôme de degré deux en λ , où λ est ici la variable et non un paramètre. Il a pour signe celui de $-\lambda^2$, donc négatif, entre les racines λ_1 et λ_2 . Donc il est positif ou nul ssi son discriminant

est négatif (pas de racine) ou nul (une racine double). Prenons le discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta' &\leq 0 \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 &\leq 0 \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 &\leq \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 \\ |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &\leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

□

Si de plus $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont proportionnels :

$$\begin{aligned}\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 &= 0 \\ \mathbf{u}^2 \lambda^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \lambda + \mathbf{v}^2 &= 0\end{aligned}$$

λ étant unique, le discriminant réduit est nul :

$$\begin{aligned}\Delta' &= 0 \\ |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

Réciproquement, en partant de l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 &= 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}^2 \lambda^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \lambda + \mathbf{v}^2 &= 0 \text{ avec } \Delta' = 0\end{aligned}$$

Avec (8.5) page ci-contre :

$$\begin{aligned}\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 &= 0 \\ \lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Les vecteurs sont proportionnels.

Théorème 8.6.4 : Inégalité triangulaire ou de Minkowski

$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E_n^2 :$

$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Démonstration. Prenons (8.5) page précédente pour $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 &= \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2 \\ &\leq \mathbf{u}^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + \mathbf{v}^2\end{aligned}$$

Majorons $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, th. 8.6.3 page ci-contre :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 &\leq \mathbf{u}^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \mathbf{v}^2 \\ &\leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \\ \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| &\leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

□

8.7 Produit scalaire

8.7.1 Représentation géométrique

Tout comme les vecteurs, le produit scalaire est une notion issue de la mécanique classique. Il permet d'exprimer le *travail* d'une force. En notant f l'intensité d'une force, d le déplacement du point d'application de cette force sous l'effet de cette force, et θ l'angle que font la force et le déplacement, le travail W (work) de la force lors de ce déplacement a pour expression :

$$W = fd \cos(\theta)$$

Remarque 8.7.1

Le travail est une forme d'énergie. C'est une mesure de l'effet mécanique d'une force en l'absence de déformations. À l'origine il permettait d'évaluer l'énergie fournie par un cheval pour tirer une charge ou labourer un champ. La force exercée par le cheval pour tirer la charrue multipliée par la distance parcourue donne le travail effectué par le cheval. Si l'on divise par le temps mis pour parcourir la distance en question, on trouve la puissance du cheval, environ un cheval-vapeur. C'est la puissance permettant d'élever 75 kg d'un mètre chaque seconde :

$$\begin{aligned} 1 \text{ ch} &= 75 \text{ kg} \times 9,806 \text{ 65 m s}^{-2} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ s}^{-1} \\ &= 735,498 \text{ 75 W} \end{aligned}$$

La notion de travail suggère de définir une nouvelle opération sur les vecteurs.

Notons $\mathbf{d}$ le vecteur déplacement. Le produit scalaire de la force par le déplacement est la projection du vecteur force sur le vecteur déplacement :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{d} = fd \cos(\mathbf{f}, \mathbf{d})$$

Remarque 8.7.2

En physique on effectue le produit scalaire de vecteurs qui n'appartiennent pas toujours au même espace vectoriel.

Considérons l'espace ordinaire de la géométrie classique appliquée à la physique. À tout couple de vecteurs non nuls $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, la multiplication scalaire fait correspondre un nombre noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, appelé leur produit scalaire, tel que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si l'un des deux vecteurs au moins est nul. Dans le cas particulier où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont même direction,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

et le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de sa norme euclidienne :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

Notation 8.7.1

Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est noté :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^2$$

Propriété 8.7.1 : Produit scalaire euclidien

1) Symétrie :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \\ &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| \cos(-\theta) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

2) Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

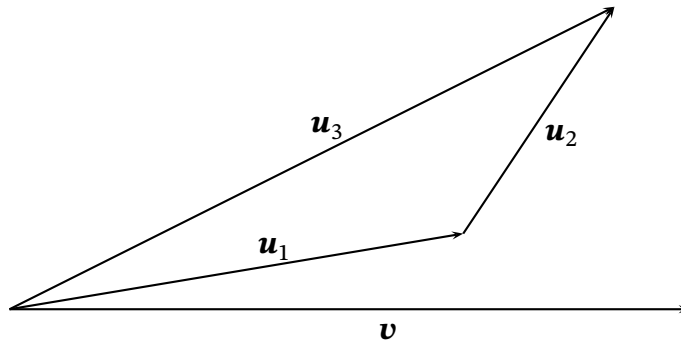


FIG. 8.2 – Distributivité du produit scalaire

Posons $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}_3\| \|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_3}) \\ &= \|\mathbf{u}_3\| \|\mathbf{v}\| \cos[(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) + (\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3})] \\ &= \|\mathbf{u}_3\| \|\mathbf{v}\| [\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) \cos(\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3}) - \sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) \sin(\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3})] \\ &= \|\mathbf{u}_3\| \|\mathbf{v}\| \left[\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) \frac{\|\mathbf{u}_1\| + \|\mathbf{u}_2\| \cos(\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2})}{\|\mathbf{u}_3\|} - \sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) \frac{\|\mathbf{u}_2\| \sin(\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2})}{\|\mathbf{u}_3\|} \right] \\ &= \|\mathbf{v}\| [\|\mathbf{u}_1\| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) + \|\mathbf{u}_2\| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) \cos(\widehat{\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_2}) - \|\mathbf{u}_2\| \sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) \sin(\widehat{\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_2})] \\ (\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}_1\| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) + \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}_2\| \cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_2}) \\ &= \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Il s'agit d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $\oplus$ du membre de gauche est le signe opérateur de l'addition vectorielle, alors que le signe $+$ du membre de droite est celui de l'addition dans $\mathbb{R}$.

3) Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire

Posons $\alpha \odot \mathbf{u} = \mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} (\alpha \odot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \\ &= \alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \\ &= \alpha \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\odot$ du membre de gauche est le signe opératoire de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, alors que le signe $\times$ du membre de droite est la multiplication dans $\mathbb{R}$.

4) Définie : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{u}}) &= 0 \\ \|\mathbf{u}\|^2 &= 0 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

5) Positive : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$

8.7.2 Représentation algébrique du produit scalaire

Par la suite, le produit scalaire a été défini de façon purement algébrique par ses propriétés.

Définition 8.7.1 : Produit scalaire euclidien

Soient λ et μ deux scalaires, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E . Supposons qu'il existe une loi de composition externe, de E^2 dans $\mathbb{R}$, notée $\cdot$, telle qu'à tout couple $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de vecteurs de E elle fasse correspondre un scalaire de $\mathbb{R}$, noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ayant les propriétés suivantes :

1) symétrie : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

On trouve parfois le terme « commutativité » bien que ce terme soit réservé aux lois de composition internes, l'application produit scalaire étant une opération externe.

2) bilinéarité, c.-à-d. :

a) distributivité à gauche par rapport à l'addition vectorielle :

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

La symétrie implique la distributivité à droite.

b) multiplication à gauche par un scalaire :

$$(\lambda \odot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

La symétrie implique la multiplication à droite.

a) et b) sont équivalents à la linéarité à gauche :

$$\mathbf{u} \cdot (\lambda \odot \mathbf{v} \oplus \mu \odot \mathbf{w}) = \lambda \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mu \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$$

La symétrie implique la linéarité à droite. La bilinéarité regroupe la linéarité à droite et à gauche.

3) définie : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

4) positive : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$

Cette loi s'appelle multiplication scalaire euclidienne de $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$ sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , et le scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ est appelé produit scalaire euclidien des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Remarque 8.7.3

Le produit scalaire n'est pas associatif car $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ n'a pas de sens mathématique, le terme entre parenthèses étant un scalaire.

On parle de *produit scalaire* (tout court) lorsque les propriétés 3) et 4) sont remplacées par la propriété :

3) non dégénérescence : $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Montrons que cette propriété est moins contraignante en montrant que si la loi est définie alors elle est non-dégénérée. Remarquons d'abord que par contraposée nous avons :

$$\text{définie} \Rightarrow \text{non-dégénérée} \quad \Leftrightarrow \quad \text{dégénérée} \Rightarrow \text{indéfinie}$$

Supposons la loi dégénérée :

$$\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} / \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

En particulier pour $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ la loi est indéfinie :

$$\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} / \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

On parle de *pseudo-produit scalaire* lorsque les propriétés 3) et 4) sont remplacées par les propriétés :

3) non dégénérescence : $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

4) indéfinie : $\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} / \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$

Exemple 8.7.1

En relativité restreinte, le produit scalaire de Minkowski est un pseudo-produit scalaire.

8.8 Produit scalaire et norme

Théorème 8.8.1 : Norme euclidienne d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, l'application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \end{aligned}$$

est une norme sur E . C'est la norme euclidienne du § 8.6.1 page 123.

Démonstration. Le produit scalaire euclidien d'un vecteur avec lui-même est toujours positif ou nul, donc l'application est de E dans $\mathbb{R}_+$.

- séparation : si $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = 0$ alors $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ donc $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ puisque par définition le produit scalaire euclidien est défini, propriété 3) de la déf. 8.7.1 page 130.
- homogénéité : $\forall (\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times E$, $\sqrt{(\alpha \odot \mathbf{u}) \cdot (\alpha \odot \mathbf{u})} = \sqrt{\alpha^2 \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} = |\alpha| \times \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$
- d'après l'inégalité triangulaire, th. 8.6.4 page 127,
 $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2$, $\sqrt{(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})} \leq \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} + \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ □

Notation 8.8.1

On écrira :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{\mathbf{u}^2} \end{aligned}$$

8.9 Expression analytique du produit scalaire

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel pré-euclidien E_2 , exprimés en composantes contravariantes dans une base quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u^1 \mathbf{e}_1 \oplus u^2 \mathbf{e}_2) \cdot (v^1 \mathbf{e}_1 \oplus v^2 \mathbf{e}_2) \\ &= (v^1 \mathbf{e}_1 \oplus v^2 \mathbf{e}_2) \cdot u^1 \mathbf{e}_1 + (v^1 \mathbf{e}_1 \oplus v^2 \mathbf{e}_2) \cdot u^2 \mathbf{e}_2 \\ &= u^1 \mathbf{e}_1 \cdot (v^1 \mathbf{e}_1 \oplus v^2 \mathbf{e}_2) + u^2 \mathbf{e}_2 \cdot (v^1 \mathbf{e}_1 \oplus v^2 \mathbf{e}_2) \\ &= u^1 \mathbf{e}_1 \cdot v^1 \mathbf{e}_1 + u^1 \mathbf{e}_1 \cdot v^2 \mathbf{e}_2 + u^2 \mathbf{e}_2 \cdot v^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \cdot v^2 \mathbf{e}_2 \\ &= u^1 v^1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u^1 v^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u^2 v^1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u^2 v^2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Généralisons à un espace vectoriel pré-euclidien à n dimensions E_n :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u^i \mathbf{e}_i \cdot v^j \mathbf{e}_j \\ &= u^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Cette relation est valable que la base soit orthogonale ou non, normée ou non, car nous n'avons pas fait d'hypothèse. Lorsque la base est orthonormée :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \delta_{ij} u^i v^j$$

Définition 8.9.1 : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Notez bien que deux vecteurs sont orthogonaux pour un produit scalaire donné.

8.10 Composantes covariantes

Le produit scalaire permet de définir les composantes covariantes. À partir d'un système de coordonnées cartésiennes obliques (x^1, x^2) , construisons une base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En projetant le vecteur $\mathbf{u}$ perpendiculairement aux vecteurs de base, nous obtenons ses composantes covariantes.

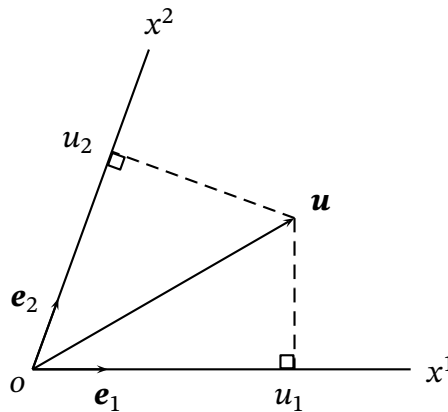


FIG. 8.3 – Composantes covariantes du vecteur $\mathbf{u}$

Nous avons :

$$\begin{cases} u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 \\ u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Bien que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée :

$$\mathbf{u} \neq u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$$

Remarque 8.10.1

À chaque axe de coordonnée on associe un vecteur de base tangent normé, sur lequel on définit deux composantes, l'une contravariante, l'autre covariante. La variance ne s'applique qu'aux composantes.

Remarque 8.10.2

Bien qu'ayant un indice supérieur, les coordonnées ne sont ni contravariantes ni covariantes. Les coordonnées du point à l'extrémité d'un vecteur se confondent avec ses composantes contravariantes, ce qui justifie la position haute de leur indice.

Remarque 8.10.3

La représentation du produit scalaire comme projection orthogonale donnée figure 8.3 ne s'applique plus lorsque le produit scalaire n'est pas euclidien. Par exemple, dans la base pseudo-orthonormée de l'espace pseudo-euclidien de la relativité restreinte, les composantes contravariantes et covariantes ne sont pas confondues.

Définition 8.10.1 : Composantes covariantes d'un vecteur

Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E_n . On appelle composantes covariantes d'un vecteur $\mathbf{u}$, les n scalaires u_i tels que :

$$\forall i \quad u_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$$

Elles sont représentées au moyen d'indices inférieurs.

Remarque 8.10.4

Lorsqu'un vecteur de base est multiplié par un nombre réel, la composante covariante correspondante des vecteurs l'est aussi, d'où l'adjectif « covariante ».

Remarque 8.10.5

La position de l'indice de numérotation des vecteurs de base $(\mathbf{e}_i)$ indique un lien avec la covariance.

Théorème 8.10.1

Pour que n quantités ordonnées rapportées à une base d'un espace vectoriel soient les composantes d'un vecteur, il faut et il suffit que ces quantités soient toutes covariantes ou toutes contravariantes par changement de base.

Une égalité entre deux vecteurs est indépendante de la base dans laquelle on l'exprime puisque les termes de l'égalité (les vecteurs) sont invariants par changement de base. Une égalité entre deux vecteurs qui est vraie dans une base, est vraie dans toutes les bases.

8.11 Covecteurs

À tout vecteur $\mathbf{u}$ on peut associer son covecteur $\underline{u} = (u_1, u_2)$, qui n'est autre que le vecteur $\mathbf{u}$ exprimé en composantes covariantes.

Notation 8.11.1

Les covecteurs sont aussi notés $\tilde{u}$ ou u^* .

Représentons $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ et projetons perpendiculairement ces vecteurs sur les axes de coordonnées x^1 et x^2 :

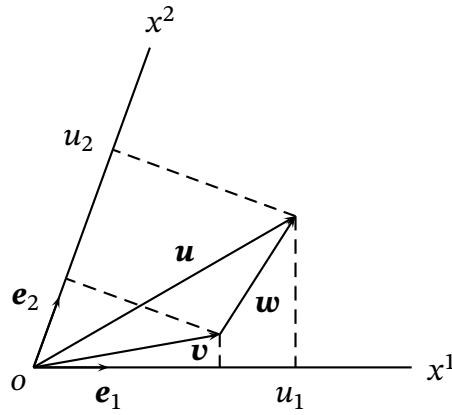


FIG. 8.4 – Composantes covariantes

Dans la base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ associée au système de coordonnées :

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1, u_2) \\ \underline{v} \oplus \underline{w} &= \underline{u} \end{aligned}$$

et :

$$\alpha \odot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

Les lois de compositions sont similaires à celles écrites en composantes contravariantes (§ 3.2.8 page 44). En effet, d'après les définitions 3.1.11 page 27, ces lois définissent les vecteurs, et les vecteurs sont indépendants du choix de la base, donc du choix des composantes puisque des composantes contravariantes dans une base sont covariantes dans la base réciproque.

Chapitre 9

ESPACES NON EUCLIDIENS

Sommaire

9.1 La sphère	137
9.2 Métrique d'une surface	139
9.3 Longueur d'une courbe	141
9.4 Vecteur tangent à une courbe	141

9.1 La sphère

La sphère est l'archétype de l'espace non euclidien de dimension 2. Elle est paramétrable par les deux angles θ et ϕ , ce dernier angle étant dégénéré aux pôles (fig. 3.10 page 43). Bien entendu la sphère n'a pas de pôles, le problème est uniquement dû au système de coordonnées utilisé. Au mieux il existe un système de coordonnées n'ayant qu'un seul pôle. Par conséquent il n'existe pas de système de coordonnées qui couvre la sphère sans dégénérescence, l'atlas d'une sphère comprend au minimum deux cartes.

Sur une sphère de rayon r , utilisons les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec r constant. La métrique donnée par (8.3) page 117 avec $dr = 0$, s'écrit :

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Le carré de la métrique est positif quelles que soient les valeurs prises par les coordonnées θ et ϕ , la métrique est réelle. À partir de la métrique nous retrouvons toutes les propriétés de la sphère, les géodésiques sont des grands cercles et sa surface vaut $4\pi r^2$. Ici $g_{\theta\theta} = r^2$ avec r constant, $g_{\theta\phi} = 0$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$ est fonction de la coordonnée θ . Il n'existe pas de système de coordonnées global à la surface de la sphère pour lequel $g_{ij} = \delta_{ij}$, la courbure de la sphère est intrinsèque, contrairement à celle du cylindre. Localement en chaque point on peut définir un espace tangent de même dimension que la sphère, un plan, pour lequel $g_{ij} = \delta_{ij}$. La sphère est un espace non euclidien, dit *sphérique*.

Remarque 9.1.1

Sur un cylindre de rayon ρ , utilisons les coordonnées cylindrique (ρ, ϕ, z) avec ρ constant. La métrique s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

Les coefficients de la métrique sont bien des constantes, sa signature est $(++)$. La courbure du cylindre est extrinsèque.

Passons en coordonnées polaires sphériques (ρ, ϕ) à la surface de la sphère. On pose $\rho = \theta r$ le déplacement à la surface de la sphère ($\rho = \pi r$ d'un pôle à l'autre) :

$$\begin{aligned}\rho &= \theta r \\ d\rho &= r d\theta \\ d\rho^2 &= r^2 d\theta^2\end{aligned}$$

La métrique de la sphère s'écrit :

$$\begin{aligned}ds^2 &= d\rho^2 + r^2 \sin^2(\rho/r) d\phi^2 \\ &= g_{\rho\rho} d\rho^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2\end{aligned}$$

où $g_{\rho\rho} = 1$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\rho/r)$ sont les composantes du tenseur métrique de la sphère en coordonnées polaires sphériques. Elles sont différentes des composantes du tenseur métrique du plan en coordonnées polaires ((8.2) page 115). La métrique (et le tenseur métrique associé) détermine la courbure intrinsèque d'un espace, mais dépend du système de coordonnées employé. Nous chercherons une fonction du tenseur métrique et de ses dérivées qui donne la courbure de l'espace mais qui ne dépende pas du système de coordonnées. Nous verrons également les conditions pour qu'une matrice soit effectivement un tenseur métrique.

Remplaçons la coordonnée θ par la coordonnée rectangulaire z en effectuant la transformation de coordonnées :

$$\begin{aligned}z &= r \cos(\theta) \\ z^2 &= r^2 \cos^2(\theta) \\ &= r^2(1 - \sin^2(\theta)) \\ r^2 - z^2 &= r^2 \sin^2(\theta)\end{aligned}$$

La transformation inverse s'écrit :

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos(z/r) \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{-1/r}{\sqrt{1 - z^2/r^2}} \\ d\theta &= \frac{-dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \\ d\theta^2 &= \frac{dz^2}{r^2 - z^2}\end{aligned}$$

Dans ces nouvelles coordonnées (z, ϕ) , la métrique s'écrit :

$$ds^2 = \frac{r^2 dz^2}{r^2 - z^2} + (r^2 - z^2) d\phi^2$$

La coordonnée z n'est pas sur la surface de la sphère et permet d'en sortir. Pour $|z| < r$ nous sommes sur la sphère de rayon r et $ds^2 > 0$, en revanche pour $|z| > r$ nous sommes en dehors de la sphère de rayon r et $ds^2 < 0$, la métrique est imaginaire. Un ds^2 négatif indique que l'on est dans l'espace dans lequel est plongé l'objet géométrique mais en dehors de l'objet.

9.2 Métrique d'une surface

Soit une surface non plane plongée dans un espace euclidien de dimension trois. Cette surface est un exemple général d'espace non euclidien de dimension deux. Une surface est l'ensemble des point P de coordonnées rectangulaires (x^1, x^2, x^3) (nous utilisons le théorème de Pythagore plus loin) satisfaisant la relation

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0$$

Sous certaines conditions que l'on suppose réalisées, on peut réécrire cette relation sous la forme

$$x^3 = h(x^1, x^2) \quad (9.1)$$

qui montre le caractère bidimensionnel de la surface (habituellement la coordonnée x^3 est la hauteur z au-dessus du plan (x^1, x^2)). Les coordonnées x^1 et x^2 varient librement dans le plan $x^3 = 0$ et la fonction h donne la valeur de x^3 . La situation est donc asymétrique et de plus la fonction h ne permet pas de représenter toutes les surfaces, par exemple les surfaces fermées. Par analogie avec (9.1) on introduit deux paramètres u^1 et u^2 qui varient dans un domaine Δ . Les trois fonctions

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad x^i = x^i(u^1, u^2) \quad (9.2)$$

forment un sous-ensemble bidimensionnel de points dans l'espace euclidien de dimension trois en coordonnées cartésiennes (x^i) . Les fonctions $x^i(u^1, u^2)$ sont supposées suffisamment différentiables dans le domaine de définition Δ . La situation est à nouveau symétrique et les surfaces fermées ont une équation. C'est la représentation d'une surface en paramètres de Gauss. On peut concevoir u^1 et u^2 comme des coordonnées curvilignes de la surface. Le choix des paramètres de Gauss est sans limites, nous pouvons changer de paramètres en posant les deux relations inversibles suivantes :

$$\forall j = 1, 2 \quad v^j = v^j(u^1, u^2)$$

u^1 et u^2 sont aussi des coordonnées pour la surface. Supposons donc que l'on ait les trois relations (9.2), cela nous place de fait sur la surface. La métrique de la surface peut toujours s'écrire localement (au voisinage infinitésimal d'un point) grâce au théorème de Pythagore en trois dimensions. En coordonnées rectangulaires :

$$\begin{aligned} ds^2(u^1, u^2) &= [dx^1(u^1, u^2)]^2 + [dx^2(u^1, u^2)]^2 + [dx^3(u^1, u^2)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 [dx^i(u^1, u^2)]^2 \end{aligned}$$

Remarque 9.2.1

Les coefficients de la métrique $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ sont constants, pour autant la surface n'est pas plane, car il nous faut écrire la métrique avec seulement deux coordonnées.

Elle contient toute l'information concernant la courbure intrinsèque de la surface, autrement dit toute l'information dont on a besoin concernant la surface. De façon générale, dans le domaine dans lequel elle est définie la métrique contient toute l'information géométrique et topologique de l'espace qu'elle décrit. Nous n'avons pas besoin de plonger la surface dans un espace de dimension supérieure pour étudier sa courbure intrinsèque. Choisissons la position du système

de coordonnées (x^1, x^2, x^3) de sorte qu'au point considéré de la surface l'on ait $x^3 = 0$, et l'orientation de sorte que le plan (x^1, x^2) soit tangent à la surface. Nous ne pouvons effectuer ce choix qu'une fois et en un seul point. La métrique locale de la surface peut alors s'écrire en coordonnées rectangulaires grâce au théorème de Pythagore en deux dimensions (et non plus en trois) :

$$ds^2(u^1, u^2) = \sum_{i=1}^2 [dx^i(u^1, u^2)]^2$$

Passons des éléments différentiels dx^1 et dx^2 aux éléments différentiels du^1 et du^2 :

$$\begin{aligned} ds^2(u^1, u^2) &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^2 \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \right)^2 (du^1)^2 + 2 \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^1 du^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^2} \right)^2 (du^2)^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x^i}{\partial u_j} \frac{\partial x^i}{\partial u_k} du^j du^k \\ &= g_{11} du^1 du^1 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} du^2 du^2 \end{aligned}$$

ds^2 est appelée première forme quadratique fondamentale de la surface considérée.

$$ds^2(u^1, u^2) = g_{jk} du^j du^k \quad (9.3)$$

où l'objet géométrique à deux indices et quatre composantes

$$g_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \quad (9.4)$$

est appelé tenseur métrique. Il est symétrique

$$g_{jk} = g_{kj}$$

Le nombre d'indices est appelé l'ordre du tenseur, le tenseur métrique est donc d'ordre deux. Dans un espace de dimension n , le tenseur métrique a n^2 composantes, non indépendantes étant donnée sa symétrie. L'égalité possible en un seul point du système de coordonnées (x^1, x^2)

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

montre que les termes carrés g_{11} et g_{22} du tenseur métrique indiquent le carré de l'échelle qui a été appliquée en chaque point au système de coordonnées rectangulaires. Le terme rectangle g_{12} apparait lorsque le système de coordonnées u^i est oblique. Le tenseur métrique donne en quelque sorte l'écart au système de coordonnées orthonormées.

Exemple 9.2.1 : Échelle d'un système de coordonnées

Si le système de coordonnées (u^1, u^2) est tel que

$$\begin{cases} x^1(u^1) = 2u^1 \\ x^2(u^2) = u^2 \end{cases}$$

alors un point de coordonnée $u^1 = 1$ a aussi pour coordonnée $x^1 = 2$. L'échelle u^1 est

deux fois plus grande que l'échelle x^1 . D'après (9.4) page précédente

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1} \right)^2 = 4$$

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = 4(du^1)^2 + (du^2)^2$$

9.3 Longueur d'une courbe

D'après (9.3) page ci-contre, si les coordonnées de Gauss sont fonction du paramètre p , la longueur d'une courbe entre les points d'abscisse curviligne $s_0 = s(p=0)$ et $s_1 = s(p=1)$ avec $s_1 > s_0$ a pour expression :

$$\begin{aligned} L &= \int_{s_0}^{s_1} ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{jk} du^j du^k} \\ &= \int_0^1 \sqrt{g_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial p} \frac{\partial u^k}{\partial p}} dp \end{aligned}$$

Notez que lorsque la variation de L est nulle, $\delta L = 0$, le trajet entre les points d'abscisses curvilignes s_0 et s_1 est extrémal.

9.4 Vecteur tangent à une courbe

Dans l'espace non euclidien E_n , soit la courbe paramétrée $\mathcal{C} : \forall i = 1, \dots, n \ x^i = x^i(p)$. Soit $\mathbf{r}(x^i)$ le vecteur position de chaque point de $\mathcal{C}$. Le vecteur $\mathbf{u}$ tangent à $\mathcal{C}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}}{dp} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dp} \\ &= \frac{dx^i}{dp} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Le vecteur tangent appartient à l'espace hôte de E_n , et en chaque point de la courbe il appartient également à l'espace tangent à la courbe en ce point. Si l'on change pour le paramètre λ avec

$\lambda = \lambda(p)$ on obtient le nouveau vecteur tangent :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \\ &= \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dp} \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{u} \frac{d\lambda}{dp}\end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, la reparamétrisation change la norme du vecteur mais pas sa direction, celui-ci reste tangent à $\mathcal{C}$. Si l'on prend pour paramètre l'abscisse curviligne s de $\mathcal{C}$, alors le vecteur tangent est unitaire :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ \|\mathbf{u}\| &= \frac{\|d\mathbf{r}\|}{ds} \\ &= 1\end{aligned}$$

Chapitre 10

ANNEXES

Sommaire

10.1 Implication et causalité	143
10.2 Bases non holonomiques	144

10.1 Implication et causalité

10.1.1 Implication

Les phrases suivantes expriment la même idée et sont notées $A \Rightarrow B$.

- A /implique/entraîne/donc/par conséquent/ B. C'est un diamant implique que c'est dur
- De A on déduit B. Du fait que ce soit un diamant on déduit que c'est dur
- Si A alors B. Si c'est un diamant alors c'est dur
- B /si/est la conséquence de/est une condition nécessaire pour avoir/ A. C'est dur si c'est un diamant
- A /seulement si/que si/est une condition suffisante pour avoir/ B. Être un diamant est une condition suffisante pour être dur
- Il suffit de A pour avoir B. Il suffit que ce soit un diamant pour être dur
- Il /faut/est nécessaire d'avoir/ B pour avoir A. Il faut que ce soit dur pour être un diamant

10.1.2 Relation de causalité

En prenant cette fois une relation de causalité, l'ordre temporel intervient, A d'abord, B ensuite. Par exemple les frottements créent de la chaleur¹, alors que chauffer ne crée pas de frottements.

- Les frottements /implique la/sont une condition suffisante pour avoir/ création de chaleur
- Il y a des frottements /donc/par conséquent/seulement si/ création de chaleur
- Si il y a des frottements alors de la chaleur est créée
- De la chaleur est créée s'il y a des frottements
- La création de chaleur est /la conséquence/une condition nécessaire pour avoir/ des frottements
- Il suffit qu'il y ait des frottements pour avoir création de chaleur
- Il faut la création de chaleur pour avoir des frottements

10.1.3 Équivalence

Les phrases suivantes expriment la même idée et sont notées $A \Leftrightarrow B$.

- A si et seulement si B (noté A ssi B)
- A implique B et B implique A
- A est une condition nécessaire et suffisante pour avoir B (noté A cns B)
- B est une condition nécessaire et suffisante pour avoir A
- Il faut et il suffit de A pour avoir B
- Il faut et il suffit de B pour avoir A

10.2 Bases non holonomiques

Considérons la base polaire normée. Ses vecteurs de base ont pour expression :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\dot{\rho}} = \mathbf{e}_{\rho} \\ \mathbf{e}_{\dot{\theta}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{\dot{\rho}} = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_{\dot{\theta}} = -\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j} \end{cases}$$

Existe-t-il un système de coordonnées (ξ, η) tel que $(\mathbf{e}_{\dot{\rho}}, \mathbf{e}_{\dot{\theta}})$ en soit une base naturelle ?

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\dot{\rho}} = \mathbf{e}_{\xi} \\ \mathbf{e}_{\dot{\theta}} = \mathbf{e}_{\eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{\dot{\rho}} = x_{,\xi} \mathbf{i} + y_{,\xi} \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_{\dot{\theta}} = x_{,\eta} \mathbf{i} + y_{,\eta} \mathbf{j} \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \cos(\theta), & y_{,\xi} &= \sin(\theta) \\ x_{,\eta} &= -\sin(\theta), & y_{,\eta} &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

1. « chaleur » est pris ici dans son sens commun, pas dans son sens thermodynamique de transfert d'énergie.

Les dérivées partielles croisées donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \eta} = \frac{\partial(-\sin(\theta))}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \xi} \end{cases}$$

Il est plus simple de passer par la base duale normée.

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \mathbf{e}^{\rho} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \rho \mathbf{e}^{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \mathbf{j} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = -\sin(\theta) \mathbf{i} + \cos(\theta) \mathbf{j} \end{cases}$$

Existe-t-il un système de coordonnées (ξ, η) tel que $(\mathbf{e}^{\hat{\rho}}, \mathbf{e}^{\hat{\theta}})$ en soit la base duale de la base naturelle ?

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \mathbf{e}^{\xi} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \mathbf{e}^{\eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \xi_{,x} \mathbf{i} + \xi_{,y} \mathbf{j} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \eta_{,x} \mathbf{i} + \eta_{,y} \mathbf{j} \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \xi_{,x} &= \cos(\theta), & \xi_{,y} &= \sin(\theta) \\ \eta_{,x} &= -\sin(\theta), & \eta_{,y} &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Les dérivées partielles croisées donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial y} = \frac{\partial \sin(\theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-\sin(\theta))}{\partial y} = \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial x} \end{cases}$$

Réécrivons la dernière relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sin(\theta)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Le système de coordonnées (ξ, η) n'existe donc pas.

Index

- Angle entre deux vecteurs, 123
- Application
 - bijective, 2
 - bilinéaire, 107
 - définition, 2, 97
 - linéaire, 98
 - multilinéaire, 108
- Base
 - coordonnées, 39
 - d'un espace vectoriel, 35, 36
 - holonomique, 39
 - naturelle
 - définition, 39
 - polaire, 40
 - non holonomique, 144
 - réciproque, 31
 - vectorielle, 31
- Bijection définition, 2
- Champ
 - de scalaires, 23
 - de vecteurs, 24
- Combinaison linéaire, 22
 - de vecteurs, 22
- Composantes
 - contravariantes
 - d'un vecteur, 48
 - covariantes
 - d'un vecteur, 134
 - d'un vecteur, 32
- Convention
 - de sommation sur les indices répétés, 15
- Coordonnées
 - affines, 3
 - cartésiennes, 3, 111
 - normales, 5, 111
 - obliques, 5, 46, 48, 133
 - curvilignes, 4, 114
 - cylindriques, 42, 116
 - définition, 1
 - obliques, 115
 - orthogonales, 114
 - polaires, 32, 40, 42, 50, 115
 - rectangulaires, 5, 111
 - rectilignes, 3, 111
 - sphériques, 42
- Courbe
 - arc de, 120
 - ensemble nul d'une, 121
 - nulle, 120
 - nulle en un point, 120
 - paramétrique définition, 11
 - régulière, 121
- Courbure, 10
 - négative, 10
 - positive, 10
- Covecteur, 134
- Diagramme
 - de Clapeyron, 29
- Dimension
 - d'un espace topologique, 6
 - d'un espace vectoriel, 35
 - d'une matrice, 54
- Distance
 - définition, 12
 - relativiste, 14
- Droite, 8, 109
 - de coordonnées, 47
 - vectorielle, 35
- Ensemble produit, 27
- Équipotence définition, 3
- Espace
 - affine, 29
 - des phases, 8
 - euclidien, 8, 11, 110, 112
 - euclidien définition, 6
 - métrique, 13
 - non euclidien, 137
 - ponctuel, 29

- pré-euclidien, 111
 - pseudo-métrique, 14
 - topologique, 2
 - vectorel
 - définition, 27
- Facteur
 - de proportionnalité, 39
- Fonction
 - scalaire, 23
 - scalaire des coordonnées, 23
 - vectorielle, 24
 - vectorielle de la position, 24
- Forme
 - linéaire, 90
 - quadratique, 90
 - binaire, 95
 - de l'espace euclidien, 112
 - du plan, 111
 - définie, 91
 - définie négative, 91
 - définie positive, 91, 92
 - fondamentale, 140
 - forme matricielle, 93
 - indéfinie, 91
 - matrice symétrique associée, 92
 - nomenclature, 91
 - non définie positive, 92, 96
 - négative, 91
 - positive, 91
 - réelle, 94
 - semi définie, 92
 - ternaire, 95
 - unaire, 91
- Géodésique(s)
 - de l'espace euclidien
 - en coordonnées rectangulaires, 118
 - définition, 9
- Groupe définition, 28
- Homomorphisme définition, 98
- Hyperplan définition, 11
- Hypersurface
 - de coordonnée, 12
 - définition, 11
- Inégalité
 - de Cauchy-Schwarz, 126
 - triangulaire, 127
- Isomorphisme, 98
- Jacobien d'une transformation, 69
- Ligne
 - de coordonnée, 2
- Loi
 - d'inertie de Sylvester, 96, 111
 - de composition
 - interne, 130
 - de multiplication
 - scalaire euclidienne, 131
- Longueur
 - d'une courbe, 118, 141
- Matrice, 53
 - addition, 54
 - changement de base, 72
 - cofacteur, 65
 - de passage, 74, 75
 - déterminant, 20
 - identité, 62
 - inverse
 - définition, 62
 - unicité, 62
 - jacobienne, 68
 - mineur, 64
 - ordre, 54
 - transposée, 59
- Métrique
 - de l'espace euclidien, 111
 - du plan, 115
- Monôme
 - définition, 89
- Monôme
 - degré, 89
- Norme
 - définition, 124
 - euclidienne, 132
- Notation indicielle, 15
- Plongement, 9
- Polynôme, 90
 - degré, 90
 - homogène, 90
- Produit
 - cartésien d'ensembles, 27
 - scalaire
 - d'une force par un déplacement, 128

- euclidien, 130, 131
- expression analytique, 132
- lien avec les composantes covariantes, 133
- non dégénéré, 131
- origine du, 128
- propriétés, 129, 131
- représentation algébrique, 130
- Pseudo
 - norme, 125, 126
 - produit scalaire, 131
 - Distance définition, 13
- Quadri
 - norme d'un vecteur, 126
- Rang
 - d'une forme quadratique, 96
- Repère, 2, 32
- Repère naturel, 39
- Scalaire(s)
 - définition
 - mathématique, 27
 - physique, 23
- Signature
 - d'une forme quadratique, 96
 - euclidienne, 111, 112
- Sphère, 137
- Symbole(s)
 - d'antisymétrie, 19
 - de Kronecker, 18
- Système
 - de coordonnées
 - direct, 5
- Système(s)
 - d'équations linéaires, 53
 - de coordonnées
 - définition, 2
 - dégénéré, 4
 - non dégénéré, 3
- Tenseur
 - métrique, 112, 140
 - de la sphère, 138
 - du plan, 115
- Théorème
 - de décomposition unique d'un vecteur, 36
 - de Gödel, 110
- de Pythagore, 111, 112
 - sur les composantes d'un vecteur, 134
- Topologie, 2
- Trajectoire définition, 11
- Transformation
 - des coordonnées, 69
- Variété
 - définition, 7
 - différentielle, 7, 8
- Vecteur(s)
 - combinaison linéaire de, 22
 - définition, 27
 - normé, 125
 - nul, 125
 - opérations sur les, 21
 - orthogonaux, 133
 - position, 33
 - propriétés, 26
 - propriétés des lois de composition, 25
 - représentation
 - algébrique, 29
 - géométrique, 21
 - tangent à une courbe, 120
 - zéro, 125

