

o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

Physique Vol. 2

Mécanique Classique

Olivier Castéra

Le 20 février 2026

Table des matières

1	Notions intuitives et définitions	1
1.1	Temps	1
1.2	Espace	2
1.3	Corps	2
1.4	Force	2
1.5	Vitesse	2
1.6	Accélération	3
1.7	Champ gravitationnel	3
2	Cinématique	5
2.1	Vecteurs vitesse et accélération	5
2.2	Référentiels	5
2.3	Référentiels galiléens	6
2.4	Principe de relativité	7
2.5	Principe d'équivalence	9
2.6	Référentiels inertiels	10
2.7	Principe de Mach	11
2.8	Forces de marée	13
3	Mouvement rectiligne	15
3.1	Inertie du mouvement rectiligne	15
3.2	Masse inerte et quantité de mouvement	17
3.3	Moment de masse	27
3.4	Modèle de force	28
3.5	Relation fondamentale de la dynamique	29
3.5.1	Définition d'une force	29
3.5.2	Action-réaction	31
3.5.3	Relation fondamentale de la dynamique (RFD)	31
3.6	Masse grave et force de gravitation	32
3.7	Énergie	41
3.7.1	Travail d'une force	41
3.7.2	Énergie cinétique	42
3.7.3	Énergie potentielle	43
3.7.4	Énergie mécanique	47
4	Mouvement de rotation	51
4.1	Inertie en rotation	51
4.2	Moment cinétique	52

4.3	Moment de force	55
4.4	Un seul axiome pour la mécanique	58
5	Loi de conservation	61
5.1	Opérateur divergence	61
5.2	Théorème de Gauss	63
5.3	Hypothèse d'un milieu continu	64
5.3.1	Densité numérique - Nombre volumique	64
5.3.2	Courant - débit	65
5.3.3	Équation de conservation	66
5.4	Opérateur nabla	68
6	Gravitation newtonienne	71
6.1	Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire	71
6.2	Champ gravitationnel créé par une sphère homogène	74
6.3	Champ gravitationnel créé par une boule homogène	76
6.4	Équations de Poisson et de Laplace	76
6.4.1	Loi de Gauss pour la gravitation	77
7	Les forces fictives	79
7.1	Loi de composition des vitesses	79
7.2	Loi de composition des accélérations	84
7.3	Forces dans un référentiel non galiléen	87
7.4	Exemple de force fictive : la force centrifuge	88
7.4.1	Dans le référentiel galiléen	88
7.4.2	Dans le référentiel non galiléen	89
8	Le pendule balistique	91
8.1	Description	91
8.2	Théorème du moment cinétique	92
8.3	Conservation de l'énergie mécanique	94
8.4	Conservation de l'énergie totale	95
8.5	Condition pour annuler la percussion	96
9	Le problème de Kepler	97
9.1	Coordonnées polaires	97
9.1.1	Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée	97
9.1.2	Expression du vecteur position	98
9.1.3	Dérivée des vecteurs de base	98
9.1.4	Expression du vecteur vitesse	99
9.1.5	Expression du vecteur accélération	99
9.2	Force centrale - Cas général	99
9.2.1	Centre d'inertie	99
9.2.2	Masse réduite	100
9.2.3	Relation fondamentale de la dynamique (RFD)	100
9.2.4	Conservation du moment cinétique	103
9.2.5	Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique	104
9.2.6	Intégration de l'équation différentielle du mouvement	105
9.2.7	Potentiel effectif	106

9.2.8 Étude de la trajectoire	106
9.2.9 Cas où le rayon vecteur tend vers zéro	108
9.3 Force de gravitation	108
9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique	108
9.3.2 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique	109
9.3.3 Intégration de l'équation différentielle du mouvement	110
9.4 Étude de la trajectoire	112
9.4.1 L'excentricité e	112
9.4.2 L'ellipse	113
9.4.3 Orientation de l'ellipse	114
9.4.4 Demi-grand axe a	116
9.4.5 Demi-petit axe b	117
9.4.6 Période de révolution T	117
9.5 Equations paramétriques	118
9.5.1 Angle en fonction du temps	118
9.5.2 Rayon en fonction du temps	119
10 Le tenseur d'inertie	123
10.1 Moment d'inertie	123
10.2 Tenseur d'inertie	124
10.3 Repère principal d'inertie	127
10.3.1 Moments principaux d'inertie	127
10.3.2 Axes principaux d'inertie	128
10.3.3 Ellipsoïde d'inertie	131
10.3.4 Théorème de Huygens	131
10.4 Moment cinétique	132
10.4.1 Moment cinétique par rapport à un point	132
10.4.2 Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation	135
10.4.3 Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie	136
10.5 Énergie cinétique d'un solide en rotation	136
11 Annexes	139
11.1 Premier théorème d'analyse vectorielle	139
11.2 Deuxième théorème d'analyse vectorielle	140
11.3 Troisième théorème d'analyse vectorielle	141

Chapitre 1

NOTIONS INTUITIVES ET DÉFINITIONS

Sommaire

1.1 Temps	1
1.2 Espace	2
1.3 Corps	2
1.4 Force	2
1.5 Vitesse	2
1.6 Accélération	3
1.7 Champ gravitationnel	3

À partir d'expériences et d'observations, la physique consiste à établir des hypothèses¹ pour modéliser la nature, et à en tirer des conséquences² par une démonstration³. La mécanique générale peut être construite à partir d'axiomes⁴ successifs de plus en plus puissants, le dernier incluant tous ceux qui le précèdent.

Les notions de temps, d'espace, de corps, de force, de vitesse et d'accélération sont supposées intuitives, c.-à-d. issues de notre expérience quotidienne. Nous les prendrons dans leurs sens commun avant de les définir plus précisément.

1.1 Temps

Le temps n'a pas d'existence propre, c'est un modèle de la réalité créé par notre cerveau. Par exemple, ce modèle est probablement très différent pour les insectes. En physique newtonienne le modèle de temps est celui très simple de la vie de tous les jours, indépendant de la vitesse de l'observateur et de la présence de matière ou d'énergie. Nous prenons la définition du temps donnée par Newton⁵ :

1. Raisonnement par induction.
2. Raisonnement par déduction.
3. Succession d'inférences logiques.
4. Un axiome est une proposition non démontrable, à la base d'un système hypothético-déductif. Dans le langage courant, axiome est synonyme d'hypothèse, de principe, ou de postulat.
5. Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, 1687.

Définition 1.1.1 : Temps

Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, s'écoule uniformément et s'appelle durée.

Pour nous repérer dans le temps, nous utiliserons une horloge.

1.2 Espace

Comme pour le temps, l'espace n'a pas d'existence propre, c'est aussi un modèle de la réalité créé par notre cerveau. En physique newtonienne on prend le modèle le plus simple, celui de la vie de tous les jours, indépendant de la vitesse de l'observateur et de la présence de matière ou d'énergie. Le modèle mathématique le plus simple est l'espace plat de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

1.3 Corps

Définition 1.3.1 : Corps

Un corps est un objet matériel caractérisé par ses propriétés physiques.

1.4 Force

Définition 1.4.1 : Force

On appelle force toute cause capable de déformer un corps et/ou de modifier le mouvement de ce corps.

En mécanique classique, les corps dont la trajectoire est courbe subissent une force centripète dirigée vers le centre de courbure instantané de la trajectoire. La force courbe leur trajectoire qui sans cela serait rectiligne.

1.5 Vitesse

Dans le langage courant la vitesse est un nombre, c'est la distance parcourue divisée par le temps de parcours. La vitesse n'est jamais ressentie, elle n'est qu'observée, donc relative. Cela signifie que parler de vitesse n'a de sens que si l'on précise par rapport à quoi. Par exemple, la vitesse d'un conducteur est nulle par rapport à son véhicule.

1.6 Accélération

Dans le langage courant l'accélération est aussi un nombre, c'est la variation de vitesse divisée par le temps mis pour cette variation.

1.7 Champ gravitationnel

Le champ gravitationnel d'un astre n'est pas uniforme car non seulement il converge vers le centre de gravité de l'astre, mais son intensité est maximale à la surface de l'astre et tend vers zéro à l'infini et au centre de l'astre.

Définition 1.7.1 : Lignes de champ

Les lignes de champ sont les courbes en tout point tangentes au champ de vecteurs.

Les lignes du champ de gravitation d'un corps convergent vers le centre de gravité de ce corps.

Définition 1.7.2 : Équipotentielle de champ

Une équipotentielle de champ est une région de l'espace dans laquelle les points sont au même potentiel.

Les équipotentielles terrestres sont appelées surfaces de niveau ou géoïdes. Les équipotentielles et les lignes de champ sont perpendiculaires.

Chapitre 2

CINÉMATIQUE

2.1 Vecteurs vitesse et accélération

En physique la vitesse est modélisée par un vecteur ayant une norme, une direction et un sens. Lorsque l'on représente un vecteur par une flèche, sa longueur est proportionnelle à la norme du vecteur. L'accélération est aussi un vecteur, c'est le vecteur variation dans le temps du vecteur vitesse. Un changement de norme du vecteur vitesse est une accélération, un changement de direction du vecteur vitesse est aussi une accélération. Pour faire du calcul vectoriel nous aurons besoin d'une base et d'un repère. En physique, une base est un ensemble de trois vecteurs distincts, non proportionnels.

2.2 Référentiels

À partir des notions de temps et d'espace, on définit un référentiel.

Définition 2.2.1 : Référentiel

Un référentiel est un système de coordonnées et une mesure du temps (une horloge).

Un référentiel est donc une référence spatiale et une référence temporelle. On peut associer un référentiel à tout observateur, et réciproquement, un observateur à tout référentiel. Les observateurs se distinguent les uns des autres par leur état de mouvement relatif, modélisé par un vecteur vitesse relatif fonction du temps. Nous dirons qu'un observateur change de référentiel pour dire qu'il change son état de mouvement.

La définition d'un référentiel en mécanique classique sous-entend l'existence préalable d'un espace absolu et d'un temps absolu, identiques pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement relatif. Un changement de référentiel n'est alors qu'un changement d'instruments de mesure de cet espace et de ce temps.

En physique newtonienne l'espace et le temps sont absolus. N'ayant pas les mêmes unités il n'y a

pas à proprement parler d'espace-temps car on ne pourrait y définir une distance. On note alors l'espace et le temps par le produit cartésien $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Définition 2.2.2 : Centrale inertielle

Une centrale inertielle est l'ensemble de six instruments de mesure, trois accéléromètres selon trois axes indépendants, et trois gyromètres également selon trois axes indépendants.

Définition 2.2.3 : Référentiel propre

Un référentiel dans lequel un mobile (observateur, particule, horloge atomique, centrale inertielle, etc.) est immobile est appelé référentiel propre de ce mobile.

Expérience 2.2.1

Le physicien Galilée^a note qu'aucune expérience effectuée dans la cale d'un navire ne permet de mettre en évidence la vitesse du navire, si celle-ci est constante en norme et en direction par rapport aux étoiles lointaines.

^a. Galileo Galilei, *Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde*, 1632.

Remarque 2.2.1

Le mouvement, sous-entendu à vitesse constante en norme et en direction, est comme rien, disait Galilée en s'appuyant sur les écrits et travaux de son contemporain Giordano Bruno^a qui avait compris la relativité du mouvement et l'inexistence du mouvement absolu : une pierre qui tombe du haut du mât d'un navire arrive au pied du mât, quelle que soit la vitesse (constante en norme et en direction) du navire.

^a. Giordano Bruno, *Le Banquet des cendres*, 1584.

2.3 Référentiels galiléens

L'expérience de pensée de Galilée nous amène à définir une classe de référentiels particuliers (« classe » pris dans le sens d'un ensemble d'individus ou d'objets ayant des caractères communs, comme une classe d'élèves par exemple), appelés référentiels galiléens.

Définition 2.3.1 : Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen ssi il se déplace d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport aux étoiles (autres que le Soleil)^a.

^a. On parle aussi d'étoiles lointaines ou d'étoiles « fixes », faisant appel à la notion moyenâgeuse de sphère des (étoiles) fixes.

Remarque 2.3.1

Cette définition est partiellement opératoire, dans le sens qu'on peut la mettre en partie en oeuvre en vérifiant à chaque instant l'absence de mouvement par rapport aux étoiles. En revanche il faut un accéléromètre pour vérifier l'absence d'accélération rectiligne. Il serait plus juste de parler d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au reste de l'univers, mais cette définition ne serait alors plus du tout opératoire.

Les référentiels galiléens se déplacent

- libres dans l'espace profond loin de toute masse, sans tourner sur eux-même par rapport aux étoiles lointaines
- non libres dans un champ de pesanteur lorsqu'une force de réaction s'oppose exactement à la force gravitationnelle. Leur trajectoire est une équipotentielle du champ gravitationnel (trajectoire du navire), qui est approximée localement dans l'espace par une trajectoire rectiligne, et dans le temps par une vitesse constante

Définition 2.3.2 : Observateur galiléen

Un observateur fixe dans un référentiel galiléen est appelé observateur galiléen.

En tout point d'un référentiel galiléen le vecteur vitesse est constant, autrement dit le vecteur accélération est nul. Reprenons les définitions d'une trajectoire (courbe suivie par le centre d'inertie d'un mobile) et d'une géodésique (courbe de longueur extrémale) : un mobile suit une trajectoire géodésique ssi son centre d'inertie a une trajectoire géodésique.

Théorème 2.3.1

Dans l'espace euclidien de la mécanique classique, un référentiel est galiléen seulement s'il suit une trajectoire géodésique (une droite).

La réciproque est fausse, un référentiel dont la norme du vecteur vitesse varie peut se déplacer en ligne droite. Un référentiel qui suit une géodésique n'est donc pas toujours galiléen. Cela est dû au fait que dans l'espace euclidien de la mécanique classique, la notion de géodésique ne s'applique qu'aux coordonnées spatiales, la coordonnée temporelle reste indépendante. Par conséquent, la durée de parcours de la géodésique n'est pas fixée.

Remarque 2.3.2

En relativité, la notion de géodésique s'applique à l'espace-temps et non à l'espace seul, un référentiel est galiléen ssi il suit une trajectoire géodésique dans l'espace-temps de Minkowski.

2.4 Principe de relativité

L'expérience de pensée de Galilée permet d'énoncer le premier axiome de la mécanique :

Axiome 2.4.1 : Principe de relativité

Parmi tous les référentiels possibles, il existe un ensemble infini continu de référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme fonctionnelle.

Même forme fonctionnelle signifie même fonction mathématique, les variables étant, elles, différentes. La physique ne permet donc aucune distinction entre ces référentiels.

Définition 2.4.1 : Référentiels équivalents

Des référentiels sont dits équivalents ssi les lois de la physique s'y écrivent sous la même forme fonctionnelle.

Les relations d'équivalence généralisent la relation d'égalité.

Définition 2.4.2 : Relation d'égalité

La relation d'égalité sur un ensemble E est une relation binaire, c.-à-d. de la forme $R\{x, y\}$ à deux variables x et y , que l'on écrit :

$$x = y$$

Elle se lit « x égale y », ou « x et y sont égaux » et satisfait les quatre propriétés suivantes (a et b sont des valeurs prises par x et y) :

- réflexivité : $\forall a \in E, a = a$
- symétrie : $\forall (a, b) \in E^2, \text{ si } a = b, \text{ alors } b = a$
- transitivité : $\forall (a, b, c) \in E^3, \text{ si } a = b \text{ et } b = c, \text{ alors } a = c$
- compatibilité : Pour toute relation $R\{x\}$ de la théorie axiomatique, $\forall (a, b) \in E^2, \text{ si } R\{a\} \text{ et } a = b, \text{ alors } R\{b\}$. Autrement dit, deux éléments égaux ont les mêmes propriétés.

Ces quatre propriétés sont les axiomes de caractérisation égalitaire.

Définition 2.4.3 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence R sur un ensemble E est une relation binaire que l'on écrit :

$$x \equiv y \quad (\text{mod } R)$$

Nous dirons que x est équivalent à y (ou congru à y) modulo R , ou encore x et y sont équivalents modulo R . La relation d'équivalence satisfait les trois propriétés suivantes :

- réflexivité : $\forall a \in E, a \equiv a$
- symétrie : $\forall (a, b) \in E^2, \text{ si } a \equiv b, \text{ alors } b \equiv a$
- transitivité : $\forall (a, b, c) \in E^3, \text{ si } a \equiv b \text{ et } b \equiv c, \text{ alors } a \equiv c$

Des relations d'équivalences R_i divisent l'ensemble E en classes d'équivalence, où chaque classe regroupe les éléments qui sont équivalents entre eux modulo R_i . Nous ne pouvons pas dire que certains référentiels sont égaux entre eux pour l'écriture des lois de la physique, en revanche nous pouvons dire que certains référentiels sont équivalents modulo l'écriture des lois de la physique, et forment une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence « écriture des lois de la physique ».

Exemple 2.4.1

- L'égalité est une relation d'équivalence, compatible avec toutes les relations R de la théorie.
- L'équipotence (existence d'une bijection) est une relation d'équivalence car elle possède les trois propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité.
- Dans l'espace géométrique, on définit arbitrairement mais une fois pour toutes une origine O . Tous les vecteurs peuvent être ramenés à cette origine par simple translation. Chaque vecteur ayant son origine en O est le représentant d'une classe d'équivalence. La relation d'équivalence des vecteurs modulo une translation est appelée *équipollence*, ces vecteurs sont dits équipollents.

Remarque 2.4.1

Dans l'expérience de pensée de Galilée les référentiels équivalents sont les référentiels liés au navire et au port.

Définir les référentiels équivalents c'est poser le principe de relativité, et poser le principe de relativité c'est définir des référentiels équivalents.

Axiome 2.4.2 : Principe de relativité galiléenne

Dans l'espace euclidien de la mécanique classique, les référentiels galiléens sont équivalents pour l'écriture des lois de la physique.

Comme nous allons le voir, la réciproque est fautive, tous les référentiels équivalents ne sont pas galiléens.

2.5 Principe d'équivalence

On énonce le principe d'équivalence dans le cadre de la mécanique classique.

Expérience 2.5.1

Un vaisseau spatial hors de l'atmosphère terrestre, moteur éteint, tombe en chute libre en direction du centre de gravité d'un astre. L'équipage observe son accélération par rapport à l'astre en le voyant se rapprocher de plus en plus vite, mais il ne ressent aucune force, indiquant que le vaisseau est en chute libre et ne tourne pas sur lui-même. Ce sentiment est confirmé par la centrale inertielle embarquée dont les accéléromètres et gyromètres n'indiquent aucune accélération.

Quelle que soit la trajectoire d'un vaisseau libre dans un champ gravitationnel, qu'elle soit circulaire, elliptique, parabolique, hyperbolique ou rectiligne, en l'absence de rotation du vaisseau sur lui-même la centrale inertielle à bord n'indique aucune accélération. L'équipage ne ressent pas de force gravitationnelle qui pourtant courbe leur trajectoire et accélère le vaisseau vers le centre de gravité de l'astre. Aucune expérience locale à bord du vaisseau ne peut mettre en évidence son accélération vers l'astre.

En mécanique classique, au centre d'inertie d'un corps, la force d'inertie axifuge qui s'exerce sur ce corps est exactement égale et opposée à la force de gravitation qui s'exerce sur ce même corps.

Remarque 2.5.1

On parlera de forces axifuges, qui fuient l'axe instantané de rotation, et non de forces centrifuges, qui fuient le centre instantané de rotation. En effet, les systèmes physiques ayant une extension spatiale en trois dimensions, chaque partie du système subit une force d'inertie en éloignement de l'axe de rotation. Le système « voit » une force axifuge.

Expérience 2.5.2

Un vaisseau spatial est posé sur le sol terrestre, la centrale inertielle embarquée mesure une accélération constante de $1g$. Sans données extérieures et en négligeant les forces fictives dues à la rotation de la Terre, l'équipage ne peut savoir s'il n'est pas dans l'espace profond, moteur allumé avec une accélération constante de $1g$. Aucune expérience locale à bord du vaisseau ne permet de distinguer ces deux cas.

De façon générale, l'équipage d'un vaisseau qui n'est pas libre dans un champ gravitationnel ressent en partie ou totalement le champ gravitationnel local. Si le vaisseau est fixe par rapport à l'astre, l'équipage ressent l'intégralité du champ gravitationnel créé par celui-ci en cet endroit.

Axiome 2.5.1 : Principe d'équivalence

Dans ce qui suit l'équivalence est toujours locale dans l'espace et dans le temps :

- *un référentiel libre dans un champ gravitationnel (dit « en chute libre ») est équivalent à un référentiel libre dans l'espace profond, loin de toute masse-énergie.*
- *un référentiel non libre dans un champ gravitationnel est équivalent à un référentiel en rotation autour d'un axe lointain.*
- *un référentiel non libre dans un champ gravitationnel d'intensité g est équivalent à un référentiel uniformément accéléré avec l'accélération g .*

En mécanique classique, la modélisation de la gravitation par une force a des limites, elle n'est ressentie et mesurable que lorsque le corps n'est pas libre, par exemple un corps posé sur une balance. À bord d'un vaisseau en orbite, moteur éteint, la force de gravitation et la force axifuge s'annulent. En relativité générale ces deux forces n'existent pas, l'espace-temps est déformé par la présence de matière-énergie et le vaisseau suit une géodésique de l'espace-temps.

2.6 Référentiels inertiels

Les expériences de pensée précédentes montrent que les référentiels galiléens ne sont pas les seuls référentiels équivalents pour l'écriture des lois de la physique. Les référentiels dont la centrale inertielle n'indique aucune accélération sont aussi des référentiels équivalents pour l'écriture des lois de la physique. Nous donnons la définition opératoire suivante :

Définition 2.6.1 : Référentiel inertiel

Un référentiel est inertiel ssi une centrale inertielle fixe dans ce référentiel n'indique aucune accélération.

Dans un référentiel inertiel il n'y a pas de force fictive (pseudo-force ayant pour origine le mouvement même de l'observateur). Les observateurs inertiels sont dits libres ou en chute libre dans le champ de gravitation local vide de toute autre matière. Ils ne subissent pas d'interaction autre que gravitationnelle et se déplacent dans le vide sans système de propulsion. Les centres des référentiels inertiels suivent les géodésiques de l'espace-temps courbe ou plat, cette condition étant nécessaire mais non suffisante, il faut encore préciser la rotation sur soi du référentiel.

Définition 2.6.2 : Mobile inertiel

Un mobile est inertiel ssi son centre de gravité et chacune de ses parties suivent une géodésique.

Par conservation du moment cinétique, un mobile libre peut avoir et conserver un mouvement de rotation sur lui-même. Un mobile peut être libre et non inertiel.

Expérience 2.6.1

Un référentiel ayant pour centre celui de la Terre et tournant sur lui-même en même temps que celle-ci est non inertiel car le Terre ne montre pas la même face au Soleil.

L'axiome suivant généralise l'axiome 2.4.2 page 9 du principe de relativité galiléenne, des référentiels galiléens aux référentiels inertiels :

Axiome 2.6.1 : Principe de relativité généralisé

Un référentiel est équivalent pour l'écriture des lois de la physique ssi il est inertiel.

Les référentiels inertiels sont aussi appelés référentiels lorentziens. En l'absence de champ gravitationnel, les référentiels inertiels et galiléens sont confondus. En présence d'un champ gravitationnel, ils sont différents, leur mouvement n'est pas le même et dans les référentiels galiléens existe une force gravitationnelle.

Une conséquence du principe d'équivalence est la courbure de la lumière dans un champ gravitationnel.

Expérience 2.6.2

Dans une fusée d'accélération constante $1g$, un rayon LASER part horizontalement de la paroi de gauche. Le temps d'arriver sur la paroi de droite, la fusée a changé de vitesse, pour un passager de la fusée le rayon LASER décrit une parabole.

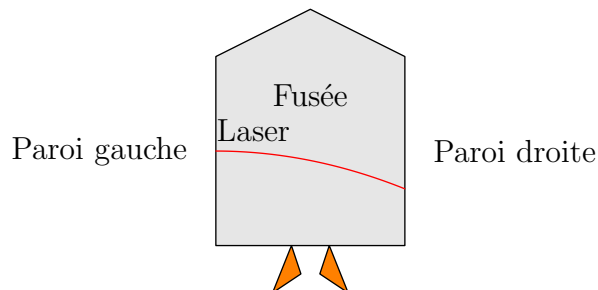


FIG. 2.1 – Trajectoire d'un rayon LASER à bord d'une fusée

En appliquant le principe d'équivalence locale entre référentiel accéléré et champ gravitationnel, on en conclue que la lumière est courbée par la gravitation.

2.7 Principe de Mach

La rotation sur eux-mêmes des observateurs et de leurs référentiels associés est modélisée par un pseudovecteur vitesse angulaire porté par l'axe de rotation. La rotation n'est pas ressentie sur l'axe de rotation ($r = 0$). Elle n'est pas symétrique, ce que j'observe en tournant sur moi-même n'est pas ce que vous observez en me regardant tourner sur moi-même.

Expérience 2.7.1

Par une nuit sans nuages, si une personne tourne sur elle-même en tenant des poids dans les mains, elle observera les étoiles tourner en sens inverse de sa rotation, et ressentira une force d'inertie axifuge qui éloigne ses bras de son corps. Plus la personne tourne vite, plus cette force est importante.

Axiome 2.7.1 : Principe de Mach

Le physicien Mach^a énonce le principe qui porte désormais son nom : « l'accélération est ressentie par rapport au reste de l'univers ».

a. Ernst Mach, *La mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, 1883.

Expérience 2.7.2

Imaginons deux satellites identiques gravitant dans le même plan autour d'un astre, en décrivant dans le même sens une trajectoire circulaire de même rayon. Ils se suivent donc sur la même trajectoire.

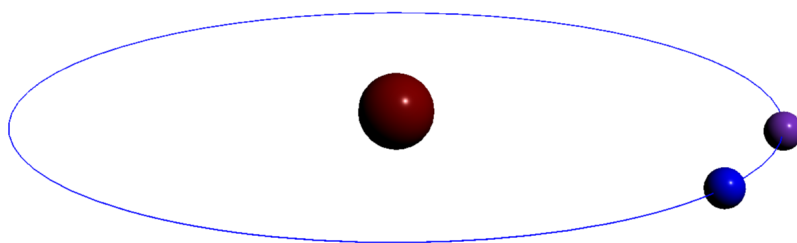


FIG. 2.2 – Deux satellites sur une même orbite

Relions-les par une barre rigide pour qu'ils ne constituent qu'un seul et même satellite. Ce satellite montre toujours la même face à l'astre, il tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines, ou au reste de l'univers observable. Pour autant ce satellite est inertiel, aucune expérience locale réalisée à bord ne permet de mettre en évidence sa rotation par rapport aux étoiles lointaines. Cette expérience de pensée montre qu'un mobile inertiel (et son référentiel inertiel associé) dans un champ gravitationnel tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines. Une centrale inertielle au centre d'inertie de ce satellite n'indiquerait aucune accélération, ni en déplacement, ni en rotation.

Un référentiel inertiel tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines lorsqu'il est dans un champ gravitationnel en dehors d'une ligne de champ.

2.8 Forces de marée

Expérience 2.8.1

À bord d'un vaisseau spatial en orbite circulaire autour d'un astre, les passagers observent que deux masses initialement sur la même

- ligne de champ s'éloignent l'une de l'autre, elles se déplacent l'une par rapport à l'autre sur leur équipotentielle de champ respective. La force axifuge est croissante en r , alors que la force gravitationnelle est décroissante en $1/r^2$. Par conséquent la masse la plus proche de l'astre a une période de révolution circulaire plus courte que l'autre masse, de la même manière que les planètes du système solaire proches du Soleil tournent plus vite.
- équipotentielle n'ont pas de mouvement relatif

Expérience 2.8.2

À bord d'un vaisseau spatial en chute libre vers le centre de gravité d'un astre, les passagers observent que deux masses initialement sur la même

- ligne de champ s'éloignent l'une de l'autre en restant sur cette ligne de champ, car l'intensité du champ est plus importante pour la masse la plus proche de l'astre
- équipotentielle se rapprochent car les lignes du champ gravitationnel convergent vers le centre de gravité de l'astre

L'inhomogénéité des champs gravitationnels, c.-à-d. leur décroissance vers zéro à l'infini et leur convergence, est à l'origine des forces de marée qui s'exercent sur tous les mobiles dont l'extension spatiale est non nulle. Ces forces n'existent pas dans un référentiel accéléré ni dans un référentiel en rotation, car les forces exercées sont des pseudo-forces fictives (le mobile observé n'est pas accéléré et n'est pas en rotation, c'est l'observateur qui l'est). Pour que deux masses initialement au repos conservent approximativement leur position relative, le référentiel doit être suffisamment petit et la durée de l'observation suffisamment courte. Le référentiel est alors dit « local », dans le sens qu'il ne s'applique que dans une petite région de l'espace, pendant un court instant.

Chapitre 3

MOUVEMENT RECTILIGNE

Définition 3.0.1 : Corps isolé

Un corps isolé n'a aucune interaction avec l'extérieur. Il n'échange ni matière, ni rayonnement, et ne subit aucune force (de contact, gravitationnelle, électromagnétique, etc.).

Définition 3.0.2 : Corps pseudo-isolé

Un corps pseudo-isolé n'échange ni matière, ni rayonnement, et la somme des forces qui s'exercent dessus est nulle.

3.1 Inertie du mouvement rectiligne

Expérience 3.1.1

Pour un observateur galiléen, lorsqu'un corps est mis en mouvement sur une surface plane, la distance parcourue par rapport à l'observateur est d'autant plus grande que les frottements sont petits. Nous supposons que lorsque les frottements de contact et les frottements de l'air tendent vers zéro, la distance parcourue par le corps tend vers l'infini et sa vitesse reste constante par rapport à l'observateur.

Remarque 3.1.1

Dans son mouvement rectiligne uniforme le corps observé peut être en rotation sur lui-même, son mouvement n'est pas obligatoirement en translation.

Cette expérience permet d'observer l'inertie d'un corps pseudo-isolé (le poids du corps et la réaction de la surface plane s'annulent) en mouvement rectiligne, donc *a fortiori* d'un corps isolé.

Nous pouvons énoncer le principe d'inertie des corps isolés en mouvement rectiligne par rapport aux étoiles lointaines :

Axiome 3.1.1 : Principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne

Tout corps isolé se déplace à vecteur vitesse constant ou nul pour un observateur ssi ce dernier est galiléen :

$$\vec{v}_{\text{corps isolé}} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{C}^{\text{ste}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Cet axiome issu de l'observation n'a de valeur que la précision de cette observation. Il énonce un principe et en même temps définit les référentiels galiléens. Le symbole $\stackrel{\text{déf}}{=}$ rappelle qu'il s'agit d'une définition. Il faut lire « le référentiel d'un observateur est par définition galiléen ssi le vecteur vitesse d'un corps isolé est constant ». Si on observe l'inertie du mouvement rectiligne d'un corps isolé alors notre référentiel est galiléen. Réciproquement, si notre référentiel est galiléen alors on observe l'inertie du mouvement rectiligne d'un corps isolé. Nous pouvons donner une définition alternative à la déf. 2.3.1 page 6 d'un référentiel galiléen :

Définition 3.1.1 : Référentiel galiléen

Un observateur est galiléen ssi il peut observer le principe d'inertie d'un corps isolé.

Notez que définir les référentiels galiléens c'est poser le principe d'inertie d'un système isolé (qui n'interagissent pas avec leur environnement) en mouvement rectiligne, et réciproquement poser le principe d'inertie d'un système isolé en mouvement rectiligne c'est définir les référentiels galiléens. Le principe d'inertie et la définition des référentiels galiléens disent la même chose, « le mouvement rectiligne uniforme est comme rien ».

Nous verrons que cet axiome peut être remplacé par des axiomes plus puissants, et, bien qu'il devienne alors un théorème¹, nous continuerons de l'appeler « principe » pour des raisons historiques. Les axiomes suivants seront à leur tour remplacés par des axiomes plus puissants au fur et à mesure que nous construirons la mécanique. Présentés comme des axiomes, ils deviendront des théorèmes, excepté le dernier. Au § 4 page 51 le principe d'inertie du mouvement rectiligne est remplacé par un principe plus général d'inertie en rotation.

Expérience 3.1.2

Lorsque nous nous déplaçons dans un train, notre vitesse par rapport à la gare est la somme vectorielle de notre vitesse dans le train et de la vitesse du train par rapport à la gare.

En cinématique classique nous supposons l'additivité vectorielle des vitesses. Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et soit $\mathcal{R}'$ un autre référentiel galiléen en mouvement de translation rectiligne uniforme à vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$ constante dans $\mathcal{R}$. Pour tout corps, isolé ou non :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(t) \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{v}'_{\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_{\mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} \quad (3.1)$$

Cette égalité suppose qu'il n'existe pas de vitesse limite. De plus elle est observationnelle, elle ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure.

Remarque 3.1.2

Le symbole $\stackrel{\text{obs}}{=}$ rappelle que cette égalité est observationnelle, ce n'est pas une égalité mathématique absolument vraie, des observations plus précises pourraient la remettre en question. En physique il existe plusieurs sortes d'égalité, qui seront précisées par des symboles différents.

1. Un théorème est une proposition démontrable à partir d'axiomes.

Il faut lire « l'observation montre que le vecteur vitesse d'un corps dans $\mathcal{R}$ est la somme de son vecteur vitesse dans $\mathcal{R}'$ et du vecteur vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ ».

D'après l'axiome 3.1.1 page précédente, pour un même corps isolé vu de deux référentiels galiléens :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{corps isolé}} &\stackrel{\text{déf}}{=} \vec{C}_{\mathcal{R}}^{\text{ste}} \\ \vec{v}'_{\text{corps isolé}} &\stackrel{\text{déf}}{=} \vec{C}_{\mathcal{R}'}^{\text{ste}}\end{aligned}$$

L'additivité des vitesses est cohérente avec le principe d'inertie du mouvement rectiligne dans les référentiels galiléens, tous les termes de (3.1) page ci-contre sont des constantes. Cela ne signifie pas que le principe d'inertie valide l'additivité des vitesses, d'autres lois de composition des vitesses pourraient aussi être cohérentes avec le principe d'inertie².

3.2 Masse inerte et quantité de mouvement

La masse inerte m_i est un coefficient que l'on associe à tout corps, donc *a priori* à la quantité de matière et à la matière constitutive de ce corps. On mesure la masse inerte d'un corps

- par comparaison directe en désignant un corps de référence de masse inerte unité, avec lequel les masses inertes d'autres corps sont comparées par interaction autre que gravitationnelle, par exemple par choc
- par comparaison indirecte, en passant par une valeur intermédiaire. Avec une balance inertielle par mesure de la fréquence des oscillations dans le plan horizontal d'une masse attachée à un ressort. Par mesure de la force centrifuge. Une masse attachée à un dynamomètre grâce à une corde, tourne dans le plan horizontal. Le dynamomètre mesure la force axifuge qui dépend de la masse inerte. À vitesse angulaire et longueur de corde fixes, on compare les masses inertes des différents corps grâce aux valeurs indiquées par le dynamomètre

Expérience 3.2.1

Dans un référentiel galiléen, faisons interagir deux corps précédemment isolés. Le choc peut être élastique (choc dur de boules de billard), ou inélastique (choc mou de boules de pâte à modeler). Il peut aussi s'agir d'une interaction électrostatique entre corps chargés, ou d'une interaction magnétique entre deux aimants.

Si l'interaction est sans échange de matière entre les deux corps on peut les désigner par les indices 1 et 2 avant et après l'interaction. Nous observons que, quelle que soit la matière constituant ces corps, les variations des vecteurs vitesses des corps sont proportionnelles et opposées. Pour un observateur galiléen les vecteurs variation de vitesse $\Delta \vec{v}_1$ et $\Delta \vec{v}_2$ sont donc colinéaires :

$$\Delta \vec{v}_1^{\text{obs}} = -k \Delta \vec{v}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Le coefficient k est un réel positif, *a priori* fonction de la vitesse relative avant le choc $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$ et des quantités de matière mises en jeu. En mécanique classique (à faible

2. L'additivité des vitesses n'est plus vérifiée en relativité restreinte mais les référentiels galiléens se déplacent quand même avec des vitesses relatives constantes en norme et en direction.

vitesse devant c) on observe que le coefficient k n'est fonction que des quantités de matière mises en jeu^a.

Prenons le corps 1 comme corps de référence et faisons le interagir avec d'autres corps. Notons b la première expérience, c la deuxième, etc. Les coefficients de proportionnalité sont alors notés k_b, k_c, k_d , etc. :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v}_1^{\text{obs}} &= -k_b \Delta \vec{v}_2 & \text{pour tout observateur galiléen} \\ \Delta \vec{v}_1^{\text{obs}} &= -k_c \Delta \vec{v}_3 \\ \Delta \vec{v}_1^{\text{obs}} &= -k_d \Delta \vec{v}_4 \\ &\vdots\end{aligned}\tag{3.2}$$

Dans ces relations les $\Delta \vec{v}_1$ ne sont pas égaux mais correspondent à des expériences différentes. Lorsque l'on fait interagir les corps 2 et 3, l'expérience montre le fait remarquable suivant :

$$k_b \Delta \vec{v}_2^{\text{obs}} = -k_c \Delta \vec{v}_3 \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

a. Cela ne vaut que ce que vaut la qualité de l'observation, d'où le symbole $\overset{\text{obs}}{=}$. En relativité, k est fonction de la norme de la vitesse relative $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$ avant l'interaction.

Nous pouvons alors associer les coefficients de proportionnalité aux différents corps. En mécanique classique, ces coefficients sont appelés masses inertes ou masses inertiellles ou masses dynamiques³. On note ce coefficient m_i (« i » pour inerte) ou parfois simplement m . La masse inerte du corps 1 de référence est posée égale à l'unité

$$m_1 \overset{\text{déf}}{=} 1$$

La masse inerte du corps 2 est alors $m_2 = k_b$, celle du corps 3 est $m_3 = k_c$, etc.

Définition 3.2.1 : Masse inerte

La masse inerte d'un corps est un coefficient propre à ce corps, qui mesure la résistance à la modification de son état de mouvement.

Avec $m_1 = 1$ et en notant $\vec{v}_i$ la vitesse avant le choc et $\vec{v}_f$ la vitesse après le choc, l'équation (3.2) de la présente page devient :

$$\begin{aligned}m_1 \Delta \vec{v}_1^{\text{obs}} &= -m_2 \Delta \vec{v}_2 & \text{pour tout observateur galiléen} \\ m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) &\overset{\text{obs}}{=} -m_2(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) \\ m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} &\overset{\text{obs}}{=} m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}\end{aligned}\tag{3.3}$$

La définition de la masse inerte permet d'écrire que la somme initiale des produits des masses inertes avec leur vitesse respective se conserve lors de toute interaction, et réciproquement, la conservation de la somme des produits des coefficients avec leur vitesse respective définit la masse inerte. La définition de la masse inerte et la conservation de la somme du produit ces masses inertes avec leur vitesse respective lors de toute interaction sont une seule et même notion.

3. En relativité ces coefficients sont appelés inertie.

Expérience 3.2.2

À partir d'un corps de masse inerte m_1 et d'un corps de masse inerte m_2 , formons un nouveau corps de masse inerte m_3 . Par interaction avec un autre corps de masse inerte connue, l'expérience montre que la masse inerte de ce nouveau corps est la somme des masses inertes de départ

$$m_3 = m_1 + m_2$$

Les masses inertes semblent donc additives. Cette loi de conservation des masses inertes est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure.

Expérience 3.2.3

Quelle que soit la matière (or, argent, plomb, verre, sable, sel, eau, etc.), si l'on double une quantité de matière homogène en doublant son volume, on constate lors d'une interaction que la masse inerte est double. La masse inerte et la quantité de matière semblent donc proportionnelles (reliées par une fonction linéaire car sans matière pas de masse inerte et la fonction passe par le point (0, 0), et avec deux fois plus de matière la masse inerte est multipliée par deux) :

$$\text{Quantité de matière} \propto m_i$$

À nouveau, cette loi est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure.

Expérience 3.2.4

S'il y a échange de matière lors de l'interaction, les corps 1 et 2 donnent les corps 3 et 4. L'expérience montre que

$$m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \stackrel{\text{obs}}{=} m_3 \vec{v}_{1i} + m_4 \vec{v}_{2i}$$

avec

$$m_1 + m_2 \stackrel{\text{obs}}{=} m_3 + m_4$$

La masse inerte totale $m_1 + m_2$ se conserve lors de toute interaction :

$$\sum_i m_i \stackrel{\text{obs}}{=} c^{ste} \text{ lors de toute interaction}$$

Cette loi de conservation est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Elle n'est plus vérifiée en relativité.

Il nous reste à voir les deux cas extrêmes suivants :

a) les deux corps fusionnent pendant l'interaction :

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_f$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} &\stackrel{\text{obs}}{=} m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ &\stackrel{\text{obs}}{=} (m_1 + m_2) \vec{v}_f \end{aligned}$$

Posons Δm le gain de masse inerte du corps 1, et m la masse inerte finale :

$$\begin{cases} \Delta m = m_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases} \Rightarrow m_1 = m - \Delta m$$

$$\begin{aligned} (m - \Delta m)\vec{v}_{1i} + \Delta m\vec{v}_{2i} &\stackrel{\text{obs}}{=} m\vec{v}_f \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ \Delta m(\vec{v}_{2i} - \vec{v}_{1i}) &\stackrel{\text{obs}}{=} m(\vec{v}_f - \vec{v}_{1i}) \\ \vec{v}_{\text{choc}}\Delta m &\stackrel{\text{obs}}{=} m\Delta\vec{v} \end{aligned} \quad (3.4)$$

b) un corps se scinde en deux :

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{2i} = \vec{v}_i$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} &\stackrel{\text{obs}}{=} m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ &\stackrel{\text{obs}}{=} (m_1 + m_2)\vec{v}_i \end{aligned}$$

Posons Δm la perte de masse inerte du corps 1, et m la masse inerte initiale :

$$\begin{cases} \Delta m = m_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases} \Rightarrow m_1 = m - \Delta m$$

$$\begin{aligned} (m - \Delta m)\vec{v}_{1f} + \Delta m\vec{v}_{2f} &\stackrel{\text{obs}}{=} m\vec{v}_i \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ m(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_i) &\stackrel{\text{obs}}{=} \Delta m(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}) \\ m\Delta\vec{v} &\stackrel{\text{obs}}{=} -\vec{v}_{\text{éjection de } \Delta m}\Delta m \end{aligned} \quad (3.5)$$

Définition 3.2.2 : Quantité de mouvement

Le produit de la masse inerte m_i d'un corps par sa vitesse $\vec{v}(t)$ mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, est appelé sa quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{p}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} m_i\vec{v}(t)$$

Remarques 3.2.1

- Le symbole $\stackrel{\text{déf}}{=}$ rappelle que cette égalité est une simple définition. Si l'on compare avec l'axiome 3.1.1 page 16 du principe d'inertie d'un corps en mouvement rectiligne, ici nous n'introduisons pas de nouveau concept
- Pour être plus précis, nous devrions parler de « quantité de mouvement rectiligne », car nous verrons au § 4.2 page 52 qu'il existe une « quantité de mouvement en rotation »
- Tout comme la vitesse, la quantité de mouvement est toujours relative, parler de quantité de mouvement n'a de sens que si l'on précise par rapport à quoi, c-à-d le référentiel

D'après la déf. 3.0.2 page 15 d'un corps pseudo-isolé, et d'après l'expérience 3.2.2 page précédente, la masse inerte d'un corps isolé est constante. L'axiome 3.1.1 page 16 du principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne se réécrit :

Axiome 3.2.1 : Principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne

Tout corps isolé se déplace à vecteur quantité de mouvement constant ou nul pour un observateur galiléen :

$$\vec{p}_{\text{corps isolé}} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{C}^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

En notant $\vec{p}^{init}$ la quantité de mouvement avant le choc et $\vec{p}^{fin}$ celle après le choc, (3.3) page 18 devient :

$$\vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin\text{ obs}} = \vec{p}_1^{init} + \vec{p}_2^{init} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \quad (3.6)$$

La somme des quantités de mouvement du système isolé formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps lorsque mesurée dans un référentiel galiléen, elle est identique avant, pendant et après l'interaction entre les deux corps. Cette relation n'est valable que si l'on retrouve les corps 1 et 2 après l'interaction, autrement dit lorsqu'il n'y a pas d'échange de matière.

Définir la masse inerte c'est poser la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé pour un observateur galiléen, et réciproquement poser la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé c'est définir la masse inerte.

Définition 3.2.3 : Système

En physique on désigne par système l'objet de notre étude. Habituellement, un système est un ensemble quelconque de corps, en interaction entre-eux ou non.

Un système est

- isolé s'il n'a aucune interaction avec l'extérieur. Il n'échange ni matière ni rayonnement et ne subit aucune force (de contact, gravitationnelle, électromagnétique, etc.)
- libre s'il ne subit que des forces gravitationnelles
- pseudo-isolé s'il n'échange ni matière ni rayonnement et si la somme des forces qui s'exercent dessus est nulle
- fermé s'il n'échange ni matière ni rayonnement mais sur lequel peuvent agir des forces
- ouvert s'il évolue dans le temps en recevant ou en perdant de la matière ou de l'énergie, des forces pouvant agir sur lui

Référentiel et système sont des notions distinctes bien que l'on puisse associer un référentiel à tout système. L'observateur est fixe dans le référentiel, ce qui est observé est le système.

La variation de quantité de mouvement d'un système est possible par variation de sa vitesse et/ou de sa masse :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= \Delta(m_i \vec{v}) \\ &= m_i \Delta \vec{v} + \vec{v} \Delta m_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

Remarque 3.2.1

Cette égalité est une égalité mathématique, toujours vraie, on utilise le symbole « = ».

Dans le premier terme du membre de droite, $\Delta \vec{v}$ est la variation de vitesse du système. Dans le second terme, $\vec{v}$ est la vitesse relative de Δm_i et m_i . C'est le vecteur vitesse du choc ou de

l'éjection de Δm_i avec m_i ((3.4) et (3.5) page 20). Lorsque la masse varie le système est ouvert, il évolue dans le temps et n'est plus lié à un ou plusieurs corps physiques (ex. 3.2.1 page suivante, au départ le système est la fusée et son plein de propergol, à l'arrivée le système est la fusée seule).

Lorsque la masse inerte du système est constante :

$$\Delta \vec{p} = m_i \Delta \vec{v}$$

La relation (3.2) page 18 dans laquelle $m_{i1} = 1$, devient :

$$\Delta \vec{p}_1^{\text{obs}} = -\Delta \vec{p}_2 \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

L'interaction entre deux corps correspond donc à un transfert de quantité de mouvement car la variation de quantité de mouvement du corps 1 est égale et opposée à la variation de quantité de mouvement du corps 2.

Les quantités de mouvement étant des vecteurs, la somme de deux quantités de mouvement est encore une quantité de mouvement. Appelons *quantité de mouvement totale* d'un système, notée $\vec{p}_{\text{système}}$, la somme des quantités de mouvement des corps constituant ce système :

$$\vec{p}_{\text{système}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^2 \vec{p}_j$$

L'expérience a donc montré que la quantité de mouvement totale de ce système isolé constitué de deux corps se conserve pour un observateur galiléen,

$$\vec{p}_{\text{système}}^{\text{fin}} \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{p}_{\text{système}}^{\text{init}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions dans le système (sans quoi tout se conserve lorsqu'il ne se passe rien). En considérant l'interaction de ce système avec un troisième corps, puis un quatrième, etc., nous formons un nouveau système à n corps tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \vec{p}_j^{\text{fin}} &\stackrel{\text{obs}}{=} \sum_{j=1}^n \vec{p}_j^{\text{init}} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ \sum_{j=1}^n \vec{p}_j &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{\text{ste}} \end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer l'axiome suivant :

Axiome 3.2.2 : Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé

La quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps,

$$\vec{p}_{\text{système isolé}} \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{\text{ste}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions entre les corps constituant le système isolé.

À partir d'une nouvelle expérience, nous avons obtenu ce nouvel axiome de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé. Il inclut le principe 3.2.1 page précédente d'inertie d'un système constitué d'un unique corps.

Exemple 3.2.1

Dans l'espace, une fusée allume son réacteur avec un débit de gaz $\mu(t)$. La vitesse $\vec{v}_{\text{gaz}}$ d'éjection des gaz relativement à la fusée est supposée constante. Quelle est l'accélération de la fusée ? Quelle est la vitesse maximale atteinte ?

Pour pouvoir appliquer l'axiome 3.2.2, l'observateur doit être galiléen et le système considéré doit être isolé. Nous supposons que nous sommes un observateur dans un référentiel galiléen particulier, on précisera par la suite lequel. La fusée n'est pas un système isolé car elle éjecte du gaz, en revanche la fusée, le propergol et le gaz constituent un système isolé (le seul). Dans notre référentiel galiléen, la quantité de mouvement de ce système isolé se conserve au cours du temps :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{p}_{\text{fusée}} + \vec{p}_{\text{propergol}} + \vec{p}_{\text{gaz}}) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{0} \\ \frac{d\vec{p}_{\text{fusée}}}{dt} + \frac{d\vec{p}_{\text{propergol}}}{dt} + \frac{d\vec{p}_{\text{gaz}}}{dt} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le système étant isolé, sa masse inerte se conserve. On note cependant que les différentes parties du système n'ont pas la même vitesse ni une masse constante. Le gaz n'a pas la même vitesse que la fusée et le propergol, et le propergol et le gaz ont des masses variables. Le premier terme s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{fusée}}}{dt} = m_{\text{fusée}} \frac{d\vec{v}_{\text{fusée}}}{dt} + v_{\text{fusée}}(t) \frac{dm_{\text{fusée}}}{dt}$$

La masse de la fusée sans propergol étant constante :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{fusée}}}{dt} = m_{\text{fusée}} \frac{d\vec{v}_{\text{fusée}}}{dt}$$

Le second terme s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{propergol}}}{dt} = m_{\text{propergol}}(t) \frac{d\vec{v}_{\text{propergol}}}{dt} + \vec{v}_{\text{propergol}}(t) \frac{dm_{\text{propergol}}}{dt}$$

Choisissons pour notre référentiel galiléen celui qui à l'instant t_0 est confondu avec celui non galiléen de la fusée. Une fois fixé notre référentiel galiléen nous ne pouvons plus en changer. De même on se fixe à l'instant t_0 , lorsque la vitesse du propergol est nulle dans notre référentiel :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{p}_{\text{propergol}}}{dt} \right|_{t_0} &= m_{\text{propergol}}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{\text{propergol}}}{dt} \right|_{t_0} + \vec{v}_{\text{propergol}}(t_0) \left. \frac{dm_{\text{propergol}}}{dt} \right|_{t_0} \\ &= m_{\text{propergol}}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{\text{propergol}}}{dt} \right|_{t_0} \end{aligned}$$

À l'instant t_0 le troisième terme s'écrit :

$$\left. \frac{d\vec{p}_{\text{gaz}}}{dt} \right|_{t_0} = m_{\text{gaz}}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{\text{gaz}}}{dt} \right|_{t_0} + \vec{v}_{\text{gaz}}(t_0) \left. \frac{dm_{\text{gaz}}}{dt} \right|_{t_0}$$

Remarque 3.2.2

Si la vitesse d'éjection des gaz est supposée constante par rapport à la fusée, alors dans notre référentiel elle varie dans le temps. En effet, soit $\vec{a}(t)$ l'accélération de la fusée à l'instant t , alors dans notre référentiel

$$\vec{v}_{gaz}(t) = \vec{v}_{gaz}(t_0) - \vec{a}(t)t$$

où t est le temps qui s'écoule après t_0 :

$$\left. \frac{d\vec{v}_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = -\vec{a}(t_0)$$

La masse de gaz à l'instant t_0 est nulle :

$$\left. \frac{d\vec{p}_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0}$$

Dans notre référentiel à l'instant t_0 , la relation (3.8) page précédente devient :

$$m_{fusée} \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} + m_{propergol}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{propergol}}{dt} \right|_{t_0} + \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} = \vec{0}$$

Isoler le terme concernant la fusée c'est la prendre pour système :

$$m_{fusée} \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} = -m_{propergol}(t_0) \left. \frac{d\vec{v}_{propergol}}{dt} \right|_{t_0} - \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0}$$

Le terme de droite est non nul, la fusée n'est donc pas un système isolé. La vitesse du propergol est égale à celle de la fusée, nous pouvons regrouper deux termes. Le système devient la fusée et le propergol encore à son bord :

$$(m_{fusée} + m_{propergol}(t_0)) \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} = -\vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{gaz}}{dt} \right|_{t_0} \quad (3.9)$$

On retrouve (3.5) page 20. Nous voyons avec cet exemple que $\vec{v}dm/dt$ est bien une force. La masse du système (fusée plus propergol) est variable, le système est ouvert. Au départ le système c'est la fusée avec le plein de propergol, à chaque instant il est redéfini avec moins de propergol, à la fin le système c'est la fusée seule. Le système n'est pas lié à des corps physiques.

$\mu(t) = dm_{gaz}/dt$ est le débit de gaz éjecté par la fusée à l'instant t :

$$\vec{a}_{fusée}(t_0) = -\frac{\mu(t_0)\vec{v}_{gaz}(t_0)}{m_{fusée+propergol}(t_0)}$$

ce qui répond à la première question. Comme on pouvait s'y attendre, l'accélération est proportionnelle au débit et à la vitesse d'éjection des gaz, et inversement proportionnelle à la masse restante à l'instant t_0 .

Pendant le temps dt , la masse de propergol diminue, il se transforme en gaz

$$dm_{propergol} = -dm_{gaz}$$

où la variation infinitésimale de masse $dm_{propergol}$ est négative puisque le propergol perd de la masse et dm_{gaz} est positive puisque du gaz est créé.

$$dm_{fusée+propergol} = -dm_{gaz}$$

car $dm_{fusée}$ est nulle. En reprenant (3.9) page ci-contre :

$$(m_{fusée} + m_{propergol}(t_0)) \left. \frac{d\vec{v}_{fusée}}{dt} \right|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{fusée+propergol}}{dt} \right|_{t_0}$$

$$d\vec{v}_{fusée}|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0) \left. \frac{dm_{fusée+propergol}}{m_{fusée+propergol}} \right|_{t_0}$$

Cette relation est valable pour toutes les valeurs du paramètre t_0 . Nous pouvons intégrer la relation pour t_0 variant entre 0 et T (le paramètre t_0 est noté comme une variable t) :

$$\int_0^T d\vec{v} = \int_0^T \vec{v}_{gaz}(t) \frac{dm_{fusée+propergol}}{m_{fusée+propergol}(t)}$$

Pour pouvoir intégrer il nous faut la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. Elle est supposée constante :

$$[\vec{v}(t)]_0^T = \vec{v}_{gaz} [\ln(m_{fusée+propergol})]_0^T$$

$$\vec{v}(T) - \vec{v}(0) = \vec{v}_{gaz} \ln \left(\frac{m_{fusée} + m_{propergol}(T)}{m_{fusée} + m_{propergol}(0)} \right)$$

Si à l'instant T tout le propergol est consommé, $m_{propergol}(T) = 0$ et la vitesse est maximale :

$$\vec{v}_{max} = \vec{v}(0) + \vec{v}_{gaz} \ln \left(\frac{m_{fusée}}{m_{fusée} + m_{propergol}(0)} \right)$$

$$= \vec{v}(0) - \vec{v}_{gaz} \ln \left(1 + \frac{m_{fusée}}{m_{propergol}(0)} \right)$$

La vitesse maximale est proportionnelle à la vitesse d'éjection des gaz et dépend de la quantité de propergol embarquée. En revanche elle est indépendante du débit de gaz. Le signe négatif est dû au fait que les gaz sont de sens opposé à celui de la fusée.

Exemple 3.2.2

On considère le choc parfaitement frontal d'une boule de masse connue m_1 avec une boule de masse connue m_2 .

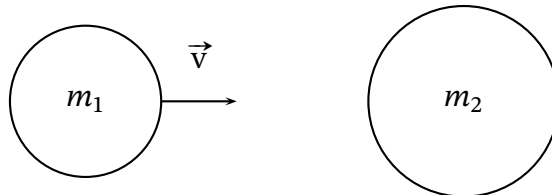


FIG. 3.1 – Choc de deux boules

La conservation de la quantité de mouvement donne une seule équation (selon la direction du choc) pour deux inconnues v_{1f} et v_{2f} . On se place dans le référentiel de repos de la masse m_2 :

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i}$$

La seconde équation est fournie par la conservation de l'énergie. Supposons qu'il n'y ait pas création de chaleur^a lors du choc, on écrit la conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$$

Notons les paramètres par des lettres majuscules $A = m_1$, $B = m_2$, $C = v_{1i}$, et les variables par des lettres minuscules $x = v_{1f}$ et $y = v_{2f}$. Soit donc le système à résoudre :

$$\begin{aligned} \begin{cases} Ax + By = AC \\ Ax^2 + By^2 = AC^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = C - \frac{B}{A}y \\ \left(C - \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{B}{A}y^2 = C^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = C - \frac{B}{A}y \\ C^2 - \frac{2BC}{A}y + \frac{B^2}{A^2}y^2 + \frac{B}{A}y^2 = C^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = C - \frac{B}{A}y \\ \left(\frac{B^2}{A^2} + \frac{B}{A}\right)y = \frac{2BC}{A} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = C - \frac{B}{A}y \\ \left(\frac{B(B+A)}{A^2}\right)y = \frac{2BC}{A} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = C - \frac{2BC}{A+B} \\ y = \frac{2AC}{A+B} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $A = 1$, $B = 2$ et $C = 1$ on obtient $x = -\frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$.

a. Le terme « chaleur » est à prendre ici comme énergie d'agitation thermique, pas dans son sens thermodynamique de transfert d'énergie sous forme désordonnée.

Exemple 3.2.3

Dans l'exemple précédent, si les deux corps restent liés après le choc il n'y a plus qu'une seule inconnue v_f , seule est nécessaire l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} m_1v_f + m_2v_f &= m_1v_{1i} \\ v_f &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{aligned}$$

On peut calculer l'énergie d'agitation thermique créée lors du choc. L'énergie cinétique finale a pour expression :

$$\begin{aligned} E_{cf} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1i}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 \end{aligned}$$

La « chaleur » produite est la perte d'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} Q &= E_{ci} - E_{cf} \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 \end{aligned}$$

Pour $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ et $v_{1i} = 1$ on obtient $v_f = \frac{1}{3}$, $E_{ci} = \frac{1}{2}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

3.3 Moment de masse

Soient deux mobiles isolés, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = \vec{v}_1 t + \vec{r}_{01} \\ \vec{r}_2(t) = \vec{v}_2 t + \vec{r}_{02} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{r}_1(t) - t \vec{p}_1 = \vec{r}_{01} \\ m_2 \vec{r}_2(t) - t \vec{p}_2 = \vec{r}_{02} \end{cases}$$

Si les deux mobiles sont sans interaction, on a bien sûr :

$$m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t) - t(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{r}_{01} + \vec{r}_{02} \quad (3.10)$$

Si les deux mobiles ont une interaction, par conservation de la quantité de mouvement avant et après l'interaction

$$\vec{p}_1^{init} + \vec{p}_2^{init} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}$$

si bien qu'avec interaction on a encore la relation (3.10). Pour N mobiles, en notant ci leur centre d'inertie :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j(t) - t \sum_{j=1}^N \vec{p}_j &= \vec{C}^{ste} \\ M \vec{r}_{ci}(t) - t \vec{p}_{ci} &= \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

On pose la définition :

Définition 3.3.1 : Moment de masse

$$\vec{N} = t \vec{p}_{ci} - M \vec{r}_{ci}(t)$$

Le moment de masse d'un système isolé se conserve.

3.4 Modèle de force

Définition 3.4.1 : Modèle de force

On appelle modèle de force la représentation théorique d'une force physique réelle.

Exemple 3.4.1

Une masse au repos est fixée à un ressort vertical.

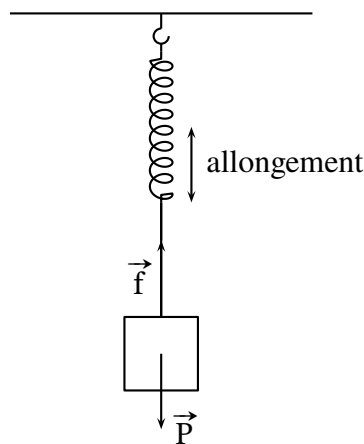


FIG. 3.2 – Masse suspendue par un ressort

Pour rester dans les limites élastiques du ressort, la masse n'est ni trop lourde ni trop légère. Si l'on double la masse, donc le poids, on double la force exercée sur le ressort. On constate que dans cette nouvelle position de repos, l'allongement du ressort a à peu près doublé. Or, lorsqu'un système est au repos la somme des forces exercées sur lui est nulle. On peut donc modéliser la force de rappel $\vec{F}$ du ressort par un vecteur force proportionnel et de sens contraire à l'allongement du ressort par rapport à sa position de repos :

$$\vec{F}^{\text{mod}} = -k \vec{x} \quad (3.11)$$

Le symbole $^{\text{mod}}$ rappelle que $-k \vec{x}$ n'est pas la force physique réelle exercée par le ressort, c'est un modèle. Il faut lire « la force de rappel est modélisée par $-k \vec{x}$ ». Ce modèle donne une oscillation sinusoïdale sans amortissement, très loin de la réalité. C'est le travail du physicien ou de l'ingénieur de trouver un bon modèle de force pour le problème posé, tout en restant conscient des limites du modèle choisi. Le modèle de force peut dépendre explicitement ou implicitement des coordonnées, du vecteur vitesse, du vecteur accélération, du temps, ou de tout autre paramètre, température, pression, angle, surface, volume, etc.

$$\vec{F} = \vec{F}(x, \vec{v}, \vec{a}, t, T, \alpha, S, V, \text{etc.})$$

Lorsque la masse attachée au ressort oscille sans frottements sur une surface horizontale, le modèle de force du ressort reste celui donné par (3.11).

Notation 3.4.1

La force réelle (impossible à connaître) est notée $\vec{f}$, son modèle est noté $\vec{F}$.

Remarque 3.4.1

Dans l'ex. 3.2.1 page 23 de la fusée, nous n'avons pas eu besoin de modéliser de force. En revanche nous avons utilisé une théorie physique avec ses limites, par exemple la masse inerte supposée indépendante de la vitesse relative.

3.5 Relation fondamentale de la dynamique

3.5.1 Définition d'une force

D'après l'axiome 3.2.2 page 22, la quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps lorsqu'elle est mesurée par un observateur galiléen. Lorsque nous agissons sur un système isolé, qui *de facto* n'est plus isolé, par exemple en le poussant ou en le tirant, nous faisons varier sa quantité de mouvement dans le temps et nous le déformons.

Nous dirons que nous exerçons une *force* sur ce système, cette force étant extérieure au système. Réciproquement, lorsque la quantité de mouvement d'un système précédemment isolé varie ce ne peut être que parce qu'une force s'exerce sur lui.

La variation de quantité de mouvement d'un système isolé et la déformation qu'il subit sont indépendantes. Nous ne nous intéresserons pas ici à la déformation du système.

Lorsque la somme des forces exercées sur un système est nulle, le système n'est pas isolé mais pseudo-isolé, sa quantité de mouvement se conserve et le système est le plus souvent assimilable à un système isolé.

Considérons un système isolé, donc de masse constante. Avec (3.7) page 21 :

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= m_i d\vec{v} + \vec{v} dm_i \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= m_i \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{p} &= m_i \vec{a} \end{aligned}$$

Remarque 3.5.1

Dès l'instant où une force s'exerce sur un système, celui-ci n'est plus isolé. Dans la suite nous écrirons « isolé » en lieu et place de « précédemment isolé ».

Nous posons la définition suivante :

Définition 3.5.1 : Force s'exerçant sur un système isolé

On appelle force s'exerçant sur un système isolé, toute action faisant varier dans le temps sa quantité de mouvement pour un observateur galiléen :

$$\vec{f} \stackrel{\rightarrow}{=} m_i \vec{a}_{\text{système isolé}}$$

Nous n'écrivons pas cette définition avec le signe $\stackrel{\text{déf}}{=}$ comme nous l'avons fait pour définir la quantité de mouvement, déf. 3.2.2 page 20. Le symbole $\vec{f}$ n'est pas une façon simple et rapide de désigner $\vec{p}$, comme c'est le cas pour $\vec{p}$ qui désigne $m_i \vec{v}$. Ce n'est pas une égalité mais une relation de causalité, la force est la cause et la variation de la quantité de mouvement est la conséquence de cette cause. L'ordre temporel intervient car la cause a lieu avant sa conséquence. Il faut lire « toute force exercée sur un système isolé provoque la variation de sa quantité de mouvement dans le temps et, seule une force extérieure peut provoquer la variation de quantité de mouvement dans le temps d'un système isolé ».

Remarque 3.5.2

Une relation de causalité n'est pas une implication au sens mathématique.

La définition précédente de force peut quand même s'écrire sous la forme d'une double implication si-alors en conservant l'ordre temporel : « Si une force s'exerce sur un système isolé alors elle provoque la variation de sa quantité de mouvement, si la quantité de mouvement d'un système isolé varie alors une force s'est exercée dessus. »

La phrase suivante est une implication au sens mathématique du terme : « si c'est un diamant alors c'est dur ». Ce n'est pas une relation de causalité car l'ordre temporel n'intervient pas.

Les variations de quantités de mouvement étant des vecteurs, nous n'avons d'autre choix que de modéliser les forces par des vecteurs. Ce faisant nous supposons que les forces s'additionnent.

Axiome 3.5.1 : Indépendance des forces

Quand plusieurs forces sont appliquées à un même système, chacune d'elles produit le même effet que si elle était seule.

Soient q forces s'exerçant sur un système isolé, de quantité de mouvement $\vec{p}$:

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots + \vec{f}_q \stackrel{\rightarrow}{=} \frac{d_1 \vec{p}}{dt} + \frac{d_2 \vec{p}}{dt} + \dots + \frac{d_q \vec{p}}{dt}$$

où $d_1 \vec{p}$, $d_2 \vec{p}$, ..., $d_q \vec{p}$ sont q différentielles de $\vec{p}$ distinctes. La somme des forces extérieures exercées sur un système isolé fait varier dans le temps sa quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \vec{f}_j &\stackrel{\rightarrow}{=} \sum_{j=1}^q \frac{d_j \vec{p}}{dt} \\ &\stackrel{\rightarrow}{=} \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système isolé}} \end{aligned}$$

La somme des forces extérieures fait varier dans le temps la quantité de mouvement totale du système isolé.

Définition 3.5.2 : Forces s'exerçant sur un système isolé

On appelle forces s'exerçant sur un système isolé de masse inerte m_i , toute action faisant varier dans le temps sa quantité de mouvement pour un observateur galiléen :

$$\sum \vec{f} \stackrel{\rightarrow}{=} m_i \vec{a}_{\text{système isolé}}$$

3.5.2 Action-réaction

L'axiome 3.2.2 page 22 de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé donne pour un système constitué de deux corps :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{0}$$

Si la somme des effets est nulle alors la somme des causes est nulle :

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{0}$$

où $\vec{f}_1$ est la force exercée par le corps 1 sur le corps 2, et $\vec{f}_2$ est la force exercée par le corps 2 sur le corps 1. Pour le système isolé constitué des corps 1 et 2, la somme des forces *intérieures* au système est nulle. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.5.1 : Loi de l'action-réaction

Lors de toute interaction, la force exercée par le corps 1 sur le corps 2 est égale et opposée à celle exercée par le corps 2 sur le corps 1 :

$$\vec{f}_1 \stackrel{\text{obs}}{=} -\vec{f}_2$$

Pour un système de plusieurs corps, en les considérant deux à deux on en déduit le théorème :

Théorème 3.5.2

La somme des forces intérieures à tout système, isolé ou non, est nulle.

$$\sum_{j=1}^n \vec{f}_j \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{0}$$

Il peut y avoir des forces à l'intérieur d'un système, mais elles s'annulent toutes.

3.5.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Lorsque l'on remplace la somme des forces réelles $\sum \vec{f}$ par la somme des modèles de force $\sum \vec{F}$, la déf. 3.5.2 page ci-contre devient une équation dont on peut chercher une solution.

Remarque 3.5.3

De la même façon, la définition de la vitesse $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} d\vec{x}/dt$ devient une équation lorsque l'on remplace la trajectoire réelle par une trajectoire théorique donc approximative, d'équation mathématique $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

De plus on généralise aux systèmes non isolés. Une force fait toujours varier dans le temps la quantité de mouvement d'un système, qu'il soit isolé ou non :

Axiome 3.5.2 : Relation fondamentale de la dynamique

Pour tout système de masse inerte m_i

$$\sum \vec{F}^{ext} \Rightarrow m_i \vec{a}_{\text{système à masse constante}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

C'est une relation de causalité d'où le symbole $\Rightarrow$. Le membre de gauche, la « cause », est un modèle de force. Le membre de droite, la « conséquence », est issue de l'observation du principe d'inertie et de l'expérience sur les interactions permettant de définir la masse inerte et la quantité de mouvement. Une fois les forces modélisées, la RFD est posée comme une égalité stricte. C'est une équation différentielle que l'on résout mathématiquement pour obtenir l'équation du mouvement. Celle-ci permet de valider ou d'invalider les modèles de force choisis (ex. 3.4.1 page 28 du ressort).

Remarque 3.5.4

On mesure parfois la variation de quantité de mouvement pour en déduire le modèle de force. Cela ne signifie pas que la relation de causalité soit inversée, c'est toujours la force qui crée la variation de quantité de mouvement lorsque le système est isolé.

Dans le cas particulier d'un système à masse variable (ex. 3.2.1 page 23, 3.6.3 page 38 et 3.6.4 page 39), l'axiome 3.5.2 de la présente page de la RFD s'écrit :

Axiome 3.5.3 : Relation fondamentale de la dynamique

Pour tout système de masse inerte m_i variable au cours du temps

$$\sum \vec{F}^{ext} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système à masse inerte variable}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Elle inclut l'axiome 3.2.2 page 22 de conservation de la quantité de mouvement. En effet, lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur un système sa quantité de mouvement se conserve dans tout référentiel galiléen :

$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{p}^{obs} = \vec{C}^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

La RFD est valable dans tout référentiel galiléen, elle est donc covariante c.-à-d. invariante de forme par changement de référentiel galiléen, en accord avec le principe de relativité galiléenne 2.6.1 page 11.

3.6 Masse grave et force de gravitation

Comme pour la masse inerte, la masse grave m_g ou masse pesante ou encore charge gravitationnelle, est un coefficient que l'on associe à tout corps, donc *a priori* à la quantité de matière et à la matière constitutive ce corps. Ce coefficient se mesure :

- par comparaison directe de deux masses, par exemple grâce à une balance de Roberval (balance à deux fléaux), ou une balance romaine (balance à un fléau)
- par comparaison indirecte grâce à une balance piezoélectrique (compression d'un cristal), ou un peson à ressort (ou dynamomètre, par élancement ou compression d'un ressort)

La balance de Roberval donne le rapport des poids des corps indépendamment de l'endroit où l'on se trouve. Pour que la masse grave soit un coefficient intrinsèque au corps, autrement dit pour qu'il ne dépende pas des conditions extérieures mais seulement du corps considéré, nous définissons le rapport des masses graves de deux corps comme égal au rapport de leurs poids lorsqu'ils sont pesés au même endroit :

$$\frac{m_{g1}}{m_{g2}} = \frac{P_1}{P_2}$$

On désigne un corps de référence qui aura une masse grave unité. Par équilibrage de la balance de Roberval, on crée autant de masse unité que l'on souhaite, avec lesquelles on compare les masses graves des autres corps.

Remarque 3.6.1

Les deux raisonnements suivants sont fallacieux :

- une pierre chutant dans le champ de pesanteur terrestre peut être considérée comme étant formée de deux parties accolées tombant à la même vitesse. La vitesse de chute n'est par conséquent pas fonction de la masse de l'objet
- la matière posée sur l'un des plateaux en équilibre d'une balance de Roberval peut être considérée comme étant formée de deux parties identiques accolées. Par symétrie chaque partie contribue pour moitié à abaisser le plateau. Quantité de matière et masse grave sont donc parfaitement proportionnelles

Prenons un exemple où la fonction est avec certitude non linéaire. Sur un drap tendu horizontalement, plaçons deux boules de pétanques identiques. Par symétrie chaque boule est responsable de la moitié de la déformation du drap. La conclusion fautive serait de dire que la déformation du drap est une fonction linéaire de la masse grave posée dessus, car il faudrait sortir l'une des deux boules pour savoir quelle déformation provoque l'autre boule lorsqu'elle est seule.

Définition 3.6.1 : Masse grave

Dans son rôle actif, la masse grave m_g d'un corps mesure l'intensité du champ gravitationnel créé par ce corps. Dans son rôle passif, elle mesure la réponse de ce corps aux champs gravitationnels créés par d'autres corps.

Appelons *vecteur position* d'un système (ou d'un corps unique) dans un référentiel galiléen de centre O , le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OG}$ où G est le centre de gravité du système. Appelons *rayon vecteur* le vecteur reliant deux centres de gravité.

Soient deux corps de masse gravitationnelle m_{g1} et m_{g2} , et $\vec{r}_{12}$ le rayon vecteur dirigé de la masse 1 vers la masse 2. L'expérience montre que la *force de gravitation* s'exerçant entre deux corps a pour direction la droite passant par les deux corps et est proportionnelle aux masses. En suivant l'intuition de Robert Hooke, la force d'attraction gravitationnelle est supposée inversement proportionnelle à la distance au carré. Il reste à déterminer le sens de la force, autrement dit son signe. m_1 , m_2 , et la constante de proportionnalité sont positifs, et l'expérience montre que la force de gravitation est attractive :

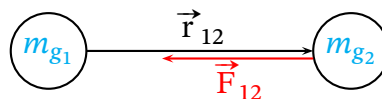


FIG. 3.3 – Détermination du signe de la force de gravitation

La force est de sens opposé à $\vec{r}_{12}$, donc le signe est négatif. Le modèle de force exercée par un

corps 1 (rôle actif) sur un corps 2 (rôle passif) est alors

$$\vec{F}_{12}^{\text{mod}} = -\mathcal{G} \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r} \quad (3.12)$$

où la constante de proportionnalité $\mathcal{G}$ est appelée *constante gravitationnelle*. $\vec{r}_{12}/r$ est un vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

La loi de l'action-réaction donne :

$$\vec{F}_{21}^{\text{obs}} = -\vec{F}_{12}$$

Par exemple la force exercée par la Terre sur un corps est égale et opposée à la force exercée par ce corps sur la Terre. Les rôles actif et passif sont échangés, le rôle passif correspond au système étudié, celui sur lequel s'exerce la force.

Définition 3.6.2 : Champ gravitationnel créé par une masse

On définit le champ gravitationnel créé par la masse grave m_{g1} indépendamment de la masse grave m_{g2} , par

$$\vec{g}_1^{\text{déf}} = -\frac{\mathcal{G} m_{g1}}{r^3} \vec{r}_{12} \quad (3.13)$$

Par exemple, le champ gravitationnel créé par la Terre s'écrit :

$$\vec{g}_{\oplus}^{\text{déf}} = -\mathcal{G} \frac{M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r}$$

D'où la relation entre le modèle de force de gravitation et le modèle de champ gravitationnel :

$$\vec{F}_{12}^{\text{mod}} = m_{g2} \vec{g}_1 \quad (3.14)$$

En utilisant l'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD pour un corps tombant à la surface de la Terre

$$-\mathcal{G} \frac{m_g M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \frac{d(m_i \vec{v})}{dt}$$

où $M_{g\oplus}$ est la masse gravitationnelle de la Terre. La masse inerte du corps est supposée constante :

$$-\mathcal{G} \frac{m_g M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r} \Rightarrow m_i \vec{a} \quad (3.15)$$

Expérience 3.6.1

L'expérience montre que si l'on se place dans le vide pour s'affranchir des frottements de l'air, tous les corps de masse négligeable devant celle de la Terre, tombent vers la Terre avec la même accélération $\vec{a}$ indépendamment de leur masse (grave ou inerte). Plus généralement, les corps lâchés au même endroit avec la même vitesse initiale, suivent les mêmes trajectoires dans l'espace et dans le temps.

Remarque 3.6.2

On néglige le fait que les corps et la Terre tombent vers leur centre de gravité commun, car la masse des corps étudiés est supposée négligeable devant celle de la Terre. Si l'on considère l'interaction Terre-Lune, cette approximation n'est plus valable.

Nous pouvons alors simplifier l'égalité (3.15) par m_i et m_g , c.-à-d. supposer l'égalité

$$m_{\text{inerte}}^{\text{obs}} = m_{\text{grave}}$$

pour obtenir une accélération indépendante de la masse du corps considéré. Cette égalité est observationnelle, elle ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Elle est justifiée au § 2.5 page 9 par le *principe d'équivalence*. Les expériences récentes montrent que masse inerte et masse grave sont égales avec une incertitude relative de 10^{-15} . On choisit le même corps de référence pour la masse inerte et la masse grave ce qui permet de ne pas introduire de constante de passage arbitraire entre les deux, et qui fixe par conséquent la constante gravitationnelle :

$$-\mathcal{G} \frac{M_{g\oplus}}{r^3} \vec{r} = \vec{a}$$

$$\vec{g}_{\oplus} = \vec{a}$$

Le champ gravitationnel terrestre local $\vec{g}_{\oplus}$ provoque l'accélération $\vec{a}$ d'un objet quelconque de masse négligeable par rapport à celle de la Terre. On mesure alors la constante gravitationnelle grâce à un pendule de torsion⁴ :

$$\mathcal{G} \approx 6,674\ 30 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

Le fait que la trajectoire des corps au voisinage de la Terre ne dépende pas des corps eux-même montre que cette trajectoire dans l'espace et dans le temps est déterminée uniquement par la Terre.

Expérience 3.6.2

Quelle que soit la matière (or, argent, plomb, verre, sable, sel, eau, etc.), si l'on double une quantité de matière homogène en doublant son volume, on constate lors d'une interaction gravitationnelle que la masse grave est double. La masse grave m_g semble donc proportionnelle à la quantité de matière :

$$\text{Quantité de matière} \propto m_g$$

À nouveau, cette loi est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure. Elle va de le sens de l'égalité supposée $m_i = m_g$.

4. Henry Cavendish, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1798.

Exemple 3.6.1 : Le pendule simple, plan

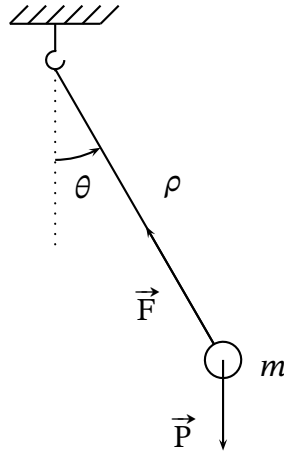


FIG. 3.4 – Pendule simple, plan

On note $\vec{F}$ la force exercée par la tige sur la masse m et $\vec{P}$ son poids. (9.2) page 99 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} m_i \vec{a} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P} + \vec{F} \\ m_i \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m_i \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho &= -m_g g \sin(\theta) \vec{e}_\theta + m_g g \cos(\theta) \vec{e}_\rho - F \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

qui donne le système,

$$\begin{cases} m_i \rho \dot{\theta}^2 + m_g g \cos(\theta) = F \\ m_i \rho \ddot{\theta} + m_g g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

La seconde relation est l'équation différentielle de l'élongation $\theta(t)$ du pendule simple en fonction du temps. Dans l'approximation des petites oscillations, on utilise le développement limité de la fonction sinus à l'ordre un. L'équation devient :

$$m_i \rho \ddot{\theta} + m_g g \theta = 0$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du 2nd ordre par rapport au temps est de forme sinusoïdale, fonction sinus ou cosinus au choix, la phase à l'origine des temps φ_0 permettant de passer d'une fonction circulaire à l'autre :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{\theta}(t) &= A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{\theta}(t) &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

où A est l'amplitude (élongation maximale) et $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase du mouvement oscillatoire. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve l'expression de la

pulsation propre,

$$-m_i \rho A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + m_g g A \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{m_g g}{m_i \rho}}$$

pour laquelle on ne conserve que la valeur positive. La fréquence des petites oscillations est alors :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_g g}{m_i \rho}}$$

Elle dépend du rapport masse grave sur masse inerte. On peut donc se servir du pendule simple pour vérifier expérimentalement la constance de ce rapport pour différentes matières. C'est ce que fit Newton en utilisant de l'or, de l'argent, du plomb, du verre, du sable, du sel, du bois, de l'eau et du blé, montrant que le rapport était constant avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} .

Exemple 3.6.2

Reprenons l'ex. 3.4.1 page 28 d'une masse attachée à un ressort dans le plan vertical, en présence d'un champ gravitationnel $\vec{g}$. Prenons comme système la masse. La position d'équilibre x_0 de la masse par rapport à la position de repos du ressort seul, dépend de sa masse grave m_g (la position d'équilibre est fonction de l'intensité du champ de gravitation, donc de la masse grave). Déterminons la position d'équilibre x_0 de la masse :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{ext} &\stackrel{\rightarrow}{=} \vec{0} \\ \vec{T}_0 + \vec{P} &\stackrel{\rightarrow}{=} \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{T}_0$ est le modèle de force de rappel statique du ressort pour la masse en question, $\vec{P}$ est le modèle de force de pesanteur de cette masse. Remplaçons par leur modèle respectif :

$$\begin{aligned} -k \vec{x}_0 + m_g \vec{g} &\stackrel{\rightarrow}{=} \vec{0} \\ -k x_0 \vec{j} - m_g g \vec{j} &\stackrel{\rightarrow}{=} \vec{0} \\ k x_0 + m_g g &\stackrel{\rightarrow}{=} 0 \end{aligned}$$

L'oscillation $x(t)$ de la masse autour de sa position d'équilibre est déterminée par sa masse inerte car en l'absence de champ de gravitation la masse oscille quand même autour de la position de repos du ressort seul. Déterminons le mouvement de la masse grâce à la RFD :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{ext} &\stackrel{\rightarrow}{=} \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{T}(t) + \vec{P} &\stackrel{\rightarrow}{=} m_i \vec{a}(t) \\ -k[\vec{x}(t) + \vec{x}_0] + m_g \vec{g} &\stackrel{\rightarrow}{=} m_i \vec{\ddot{x}}(t) \\ [-kx(t) - kx_0 + m_g g] \vec{j} &\stackrel{\rightarrow}{=} m_i \ddot{x}(t) \vec{j} \\ -kx(t) &\stackrel{\rightarrow}{=} m_i \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

Le problème n'est plus « que » mathématique. Pour chercher une solution, supposons l'égalité stricte :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m_i} x(t) = 0$$

Les fonctions circulaires sinus et cosinus (et les exponentielles complexes) changent de signe lorsque dérivées deux fois. La solution a donc pour forme générale :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

où A est l'amplitude maximale, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase, ω est la pulsation et φ_0 est la phase à l'origine des temps.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

si bien que :

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m_i} A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m_i}$$

Si l'amplitude $x(t)$ est maximale à $t = 0$ alors $\varphi_0 = 0$ et :

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_i}} t\right)$$

Exemple 3.6.3

Une balance est tarée avec un récipient posé dessus. On y verse de l'eau d'une hauteur h , avec un débit massique μ constant. Qu'indique la balance ?

a) Première méthode

À $t = 0$ le récipient est vide et la balance indique 0. Si à chaque instant le système de masse variable $m(t)$ est l'eau présente dans le récipient, alors dans le référentiel galiléen du récipient et de la balance, la quantité de mouvement du système ne varie pas :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \\ &= m \times \vec{0} + \vec{0} \times \frac{dm}{dt} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Notons $\vec{R}(t)$ la réaction de la balance sur l'eau via le récipient, $\vec{P}(t)$ le poids de l'eau présente dans le récipient, et $\vec{f}$ la force exercée par l'eau qui percute le système avec la vitesse $\vec{v}$. D'après l'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD, la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système est nulle :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{ext} &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système}} \\ \vec{R}(t) + \vec{P}(t) + \vec{f} &= \vec{0}\end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique pendant la chute donne la norme de la vitesse d'impact :

$$mgh = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2gh}$$

En un temps dt le système reçoit de la part de l'eau qui tombe la quantité de mouvement $\vec{v}dm$, donc l'eau exerce sur le système la force :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \frac{dm}{dt} \vec{v} \\ &= \mu \vec{v}\end{aligned}\tag{3.16}$$

À l'instant t la balance affiche la norme de sa réaction :

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= -\vec{P}(t) - \vec{f} \\ \|\vec{R}(t)\|\vec{j} &= -[-gm(t)\vec{j}] - (-\mu\|\vec{v}\|\vec{j}) \\ \|\vec{R}(t)\| &= \mu(gt + \sqrt{2gh})\end{aligned}$$

b) Seconde méthode

Prenons comme système une masse m d'eau versée en un temps Δt . Elle subit une variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ en cet intervalle de temps Δt . La force moyenne exercée sur le système a pour expression :

$$\vec{f} = m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La variation de vitesse est indépendante de la durée de l'impact, elle vaut

$$\begin{aligned}\Delta\vec{v} &= \vec{v} - \vec{0} \\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

Prenons comme système une masse dm d'eau versée en un temps dt :

$$\vec{f} = dm \frac{\vec{v}}{dt}$$

C'est un choc, c.-à-d. une variation de vitesse importante pendant un temps très court. Il nous manque la durée dt pendant laquelle la masse dm impacte le récipient. C'est le débit qui indirectement nous donne cette durée. Pour une masse d'eau m et un débit μ , la durée totale de l'impact vaut m/μ . Pour une masse d'eau dm , la durée est donc $dt = dm/\mu$ si bien que

$$\vec{f} = \mu \vec{v}$$

et l'on retrouve (3.16). C'est une sorte de choc continu.

Exemple 3.6.4

Du sable tombe en continu sur un tapis roulant avec un débit massique μ constant. En bout de tapis le sable tombe si bien que la masse de sable sur le tapis est constante. Quelle force

doit exercer le moteur du tapis roulant pour entrainer le sable et maintenir constante la vitesse $\vec{v}$ du tapis roulant ?

a) Première méthode

Si l'on prend comme système le tapis roulant et le sable qu'il charrie, alors dans le référentiel galiléen qui lui est lié sa quantité de mouvement ne varie pas. D'après l'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD, la somme des forces extérieures s'exerçant sur lui est nulle :

$$\sum \vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{système}}$$

$$\vec{f}_{\text{moteur}} + \vec{f}_{\text{sable}} = \vec{0}$$

En un temps dt le système reçoit de la part du sable la quantité de mouvement $-\vec{v}dm$, donc le sable exerce sur le système la force :

$$\vec{f}_{\text{sable}} = -\frac{dm}{dt} \vec{v}$$

$$= -\mu \vec{v}$$

$$\vec{f}_{\text{moteur}} = \mu \vec{v}$$

b) Seconde méthode

Si l'on prend comme système une masse m de sable tombée en un temps Δt , la force moyenne sur ce temps Δt exercée par le moteur sur le système a pour expression :

$$\vec{f}_{\text{moteur}} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

La variation de vitesse du sable est indépendante de la durée de l'impact, elle vaut

$$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{0}$$

$$= \vec{v}$$

Prenons comme système une masse dm de sable déposée sur le tapis roulant en un temps dt :

$$\vec{f}_{\text{moteur}} = \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

$$= \mu \vec{v}$$

3.7 Énergie

3.7.1 Travail d'une force

Pour mesurer l'effet total d'une force nous calculons la circulation de cette force le long de la trajectoire du point sur lequel elle s'exerce. Intégrons l'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD par rapport à l'espace parcouru par le système sous l'action des forces exercées sur ce système :

$$\begin{aligned} \int_A^B \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} &\equiv \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ \sum \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &\equiv \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le produit scalaire permet de ne prendre en compte que les forces ou les composantes de force qui créent le déplacement ou qui s'y opposent.

Définition 3.7.1 : Travail

On appelle travail d'une force, et on note W (« work »), l'intégrale curviligne d'un modèle de force sur le trajet de cette force.

$$W \stackrel{\text{déf}}{=} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Remarques 3.7.1

- Le travail est positif si le déplacement est dans le sens de la force, le produit scalaire est alors positif. C'est toujours le cas lorsque la force crée le déplacement. Le travail est négatif si le déplacement et la force sont de sens contraire, comme pour toutes les forces de frottements. Il est nul si le déplacement et la force sont perpendiculaires, comme pour les forces de réaction
- Le travail des forces intérieures d'un système isolé peut être positif. Prenons par exemple un système isolé constitué de deux corps en interaction, d'après la loi de l'action-réaction 3.5.1 page 31, les deux forces intérieures sont égales et opposées :

$$\vec{f}_1^{\text{obs}} = -\vec{f}_2$$

Si les deux corps se déplacent, le déplacement est de même direction mais en sens opposé, car les forces étant opposées, elles sont toutes les deux attractives ou répulsives. Le travail intérieur de ces deux forces s'écrit :

$$\int_A^B \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{f}_2 \cdot (-d\vec{r}) = 2 \int_A^B \vec{f}_1 \cdot d\vec{r} \neq 0$$

3.7.2 Énergie cinétique

Dans (3.17) page précédente, pour simplifier le raisonnement sans perdre en généralité, posons

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

Le terme de gauche s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} &= \int_A^B \left(\frac{dp_x}{dt} dx + \frac{dp_y}{dt} dy \right) \\ &= \int_A^B \frac{d(mv_x)}{dt} dx + \int_A^B \frac{d(mv_y)}{dt} dy \\ &= \int_A^B \left(\frac{dm}{dt} v_x + m \frac{dv_x}{dt} \right) dx + \int_A^B \left(\frac{dm}{dt} v_y + m \frac{dv_y}{dt} \right) dy \end{aligned}$$

La masse du système est supposée constante :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} &= \int_A^B m \frac{dv_x}{dt} dx + \int_A^B m \frac{dv_y}{dt} dy \\ &= m \int_A^B dv_x \frac{dx}{dt} + m \int_A^B dv_y \frac{dy}{dt} \\ &= m \int_A^B v_x dv_x + m \int_A^B v_y dv_y \\ &= \frac{1}{2} m [v_x^2]_A^B + \frac{1}{2} m [v_y^2]_A^B \\ &= \frac{1}{2} m [v_x^2 + v_y^2]_A^B \\ &= \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_A^B \text{ dans tout référentiel} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Définition 3.7.2 : Énergie cinétique

Elle est définie par

$$E_c \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

Avec cette définition (3.18) devient :

$$\int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = E_{cB} - E_{cA} \text{ dans tout référentiel}$$

L'énergie cinétique n'est pas une modélisation, elle est toujours une fonction explicite de la vitesse. Elle peut aussi être une fonction explicite des coordonnées, par exemple en coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho \dot{\theta}^2)$$

Elle peut être une fonction implicite des coordonnées, de l'accélération, du temps ou d'autres paramètres par l'intermédiaire de la vitesse.

Exemple 3.7.1

Une boîte de masse négligeable, au repos dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, contient deux particules de masse m qui se déplacent horizontalement avec une vitesse v changeant de sens à chaque choc sur la paroi interne de la boîte. L'énergie cinétique contenue dans la boîte vaut :

$$\begin{aligned} E_c &= 2 \times \frac{1}{2}mv^2 \\ &= mv^2 \end{aligned}$$

Si la boîte ou l'observateur est accéléré horizontalement jusqu'à la vitesse v , l'énergie totale du système boîte par rapport à l'observateur peut être calculée de deux façons :

- à chaque instant une particule a une vitesse nulle par rapport à l'observateur alors que l'autre a une vitesse $2v$, donc :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(2v)^2 \\ &= 2mv^2 \end{aligned}$$

- l'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique de la boîte et des énergies cinétiques des particules dans le référentiel du centre d'inertie de la boîte :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 2mv^2 \end{aligned}$$

3.7.3 Énergie potentielle

Revenons à (3.17) page 41. Pour intégrer la somme des travaux des modèles des forces exercées sur le système, nous devons faire des hypothèses sur ces modèles de force.

Définition 3.7.3 : Gradient

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire de trois variables, habituellement les coordonnées spatiales, qui en tout point de son espace de définition renvoie un scalaire. f définit donc un champ de scalaires. On appelle gradient l'opérateur différentiel $\overrightarrow{\text{grad}}$, tel qu'appliqué à f on ait en coordonnées rectangulaires x, y, z dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

L'opérateur gradient est une dérivée spatiale (ici tridimensionnelle) qui en chaque point de l'espace de définition d'une fonction scalaire donne son taux de variation selon chaque coordonnée. C'est la généralisation à plusieurs dimensions de la notion de dérivée. L'opérateur vectoriel gradient a pour coordonnées rectangulaires $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Lorsqu'il s'applique à f on le nomme *gradient* de f . Il prend en entrée la fonction f et renvoie le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$. Un champ de vecteurs est une fonction qui en tout point de son espace de définition renvoie un vecteur. Cette notion fût inventée par Michael Faraday par analogie avec les champs de blé,

chaque pied représentant un vecteur.

Définition 3.7.4 : Potentiel d'un champ vectoriel

La fonction scalaire f est dite potentielle du champ vectoriel $\vec{A}$ ssi :

$$\vec{A} \stackrel{\text{déf}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Réciproquement, le champ vectoriel $\vec{A}$ dérive du champ de scalaires f .

Exemple 3.7.2

En coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques, dans leur base associée :

$$\begin{aligned} A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \\ A_\rho \vec{e}_\rho + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z &= -\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \right) \\ A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi &= -\left(\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right) \end{aligned}$$

Lorsque le champ vectoriel est un modèle de force, la fonction scalaire est une énergie potentielle.

Définition 3.7.5 : Énergie potentielle ou potentiel de force

Un modèle de force dérive d'une énergie potentielle E_p lorsque l'on peut écrire :

$$\vec{F} \stackrel{\text{déf}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \quad (3.19)$$

$\vec{F}$ étant un modèle de force, E_p est un modèle d'énergie potentielle adapté au problème. La convention de signe négatif rend compte du fait que la force est dirigée selon les potentiels décroissants. Tout comme le modèle de force dont elle dérive, l'énergie potentielle peut dépendre explicitement ou implicitement des coordonnées, de la norme du vecteur vitesse, de la norme du vecteur accélération, du temps, ou de tout autre paramètre.

Les surfaces de l'espace où le potentiel a une valeur fixée sont appelées *surfaces équipotentielles*. La force est en chaque point normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point, elle est dirigée dans le sens des potentiels décroissants (la force de pesanteur est dirigée dans le sens des énergies potentielles décroissantes) et son intensité est égale à la dérivée directionnelle du potentiel suivant la normale.

Exemple 3.7.3 : Énergie potentielle d'une force de gravitation

Soit E_{pp} l'énergie potentielle de pesanteur du modèle de la force gravitationnelle $\vec{F}$. D'après

la définition 3.7.4 page ci-contre, en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\vec{F} &\stackrel{\text{déf}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \\ F\vec{e}_\rho &= -\frac{\partial E_{pp}}{\partial \rho} \vec{e}_\rho \\ F &= -\frac{\partial E_{pp}}{\partial \rho} \\ \int_A^B F d\rho &= -(E_{ppB} - E_{ppA})\end{aligned}$$

La relation (3.12) page 34 donne le modèle de force gravitationnelle :

$$\begin{aligned}-(E_{ppB} - E_{ppA}) &= -\int_A^B \frac{gm_1m_2}{\rho^2} d\rho \\ E_{ppA} - E_{ppB} &= \left[\frac{gm_1m_2}{\rho} \right]_A^B \\ \boxed{E_{pp} &= -\frac{gm_1m_2}{\rho}}\end{aligned}\tag{3.20}$$

Exemple 3.7.4 : Potentiel d'un champ gravitationnel

Soit $\mathcal{V}$ le potentiel scalaire du champ gravitationnel $\vec{g}$. D'après la déf. 3.7.4 page ci-contre, en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\vec{g} &\stackrel{\text{déf}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{V}) \\ g\vec{e}_\rho &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} \vec{e}_\rho \\ g &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho} \\ \int_A^B g d\rho &= -(\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_A)\end{aligned}$$

La relation (3.13) page 34 donne l'expression du champ gravitationnel :

$$\begin{aligned}-(\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_A) &= -\int_A^B \frac{gm}{\rho^2} d\rho \\ \mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B &= \left[\frac{gm}{\rho} \right]_A^B \\ \boxed{\mathcal{V} &= -\frac{gm}{\rho}}\end{aligned}\tag{3.21}$$

$\mathcal{V}$ est le potentiel du champ de gravitation. En partant de (3.14) page 34, nous trouvons la

relation entre énergie potentielle et potentiel d'un champ :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= m_2 \vec{g}_1 \\ -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p12}) &= -m_2 \overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{V}_1) \\ E_{p12} &= m_2 \mathcal{V}_1\end{aligned}$$

que l'on retrouve directement en utilisant (3.20) et (3.21).

Lorsque plusieurs forces s'exercent sur le système, les modèles étant des vecteurs, nous pouvons les additionner. Par linéarité de l'opérateur gradient, nous pouvons de même additionner les énergies potentielles correspondant à ces forces :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p1}) - \overrightarrow{\text{grad}}(E_{p2}) \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p1} + E_{p2})\end{aligned}$$

Donc les énergies potentielles s'additionnent :

$$E_p = \sum_i E_{pi}$$

Dans le cas général la force et son modèle associé dépendent du temps (eg : particule chargée dans un champ électrique variable) et de la position (eg : champ de gravitation). Par conséquent le modèle d'énergie potentielle aussi,

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)(\vec{r}, t)$$

et la différentielle totale exacte (dte) de l'énergie potentielle s'écrit :

$$dE_p(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} + \frac{\partial E_p}{\partial t} dt$$

Si la force est indépendante du temps, elle dérive (spatialement) d'une énergie potentielle elle aussi indépendante du temps, et dans ce cas la dte s'écrit :

$$dE_p(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r}$$

Supposons que chaque modèle de force dérive d'une énergie potentielle et soit indépendant du temps.

3.7.4 Énergie mécanique

La relation (3.17) page 41 devient :

$$\begin{aligned}
 \sum \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} &\stackrel{\rightarrow}{=} \sum_i \int_A^B -\vec{\text{grad}}(E_{pi}) \cdot d\vec{r} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\
 &\stackrel{\rightarrow}{=} - \int_A^B \vec{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} \\
 &\stackrel{\rightarrow}{=} - \int_A^B \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right) \\
 &\stackrel{\rightarrow}{=} - \int_A^B dE_p \\
 &\stackrel{\rightarrow}{=} - [E_p]_A^B \\
 &\stackrel{\rightarrow}{=} E_p(A) - E_p(B) \quad \text{pour tout observateur galiléen}
 \end{aligned}$$

Si les modèles de force dérivent tous d'une énergie potentielle et sont indépendants du temps, alors le travail des modèles de force ne dépend pas du trajet suivi mais uniquement des points de départ et d'arrivée.

Démontrons la réciproque : si le travail du modèle de force est indépendant du trajet suivi, alors le modèle de force dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps.

Imaginons deux trajets pour aller de A à B , et supposons que le travail effectué soit le même pour chaque trajet. Si l'on utilise le premier trajet pour l'aller, et le second pour le retour, le travail à l'aller est égal et opposé à celui du retour, autrement dit il est nul le long du chemin fermé :

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = 0$$

Définition 3.7.6 : Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs

Dans le repère naturel orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z , soit un champ de vecteurs $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$. On appelle rotationnel l'opérateur différentiel $\vec{\text{rot}}$, tel qu'appliqué à $\vec{u}$ on obtienne le champ de vecteurs :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \int_S [\vec{\text{rot}}(\vec{F})(\vec{r}, t)] \cdot \vec{n} ds$$

où $\vec{n}$ est la normale (sortante ou entrante selon le sens de parcours de C) à la surface S s'appuyant sur le chemin C . Par conséquent le vecteur rotationnel de $\vec{F}(\vec{r}, t)$ est nul :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{F})(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

Nous avons ici besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant :

Théorème 3.7.1 : Rotationnel du gradient

Pour toute fonction scalaire ϕ de dérivées partielles secondes continues (pour pouvoir intervertir les dérivées partielles), le rotationnel du gradient de la fonction ϕ est nul :

$$\vec{\text{rot}} [\vec{\text{grad}}(\phi)] = \vec{0}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} [\vec{\text{grad}}(\phi)] &= \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{vmatrix} = (\partial_y \partial_z \phi - \partial_z \partial_y \phi) \vec{i} + (\partial_z \partial_x \phi - \partial_x \partial_z \phi) \vec{j} + (\partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi) \vec{k} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

□

Pour que son rotationnel soit nul, le modèle de force doit dériver d'une énergie potentielle :

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\text{grad}}(E_p)(\vec{r}, t)$$

Seconde partie de la démonstration : si le modèle de force dépend du temps $\vec{F}(\vec{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} &= dE_p - \frac{\partial E_p}{\partial t} dt \\ \int_A^B -\vec{\text{grad}}(E_p) \cdot d\vec{r} &= -\int_A^B dE_p + \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial E_p}{\partial t} dt \\ &= -[E_p]_A^B + \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial E_p}{\partial t} dt \end{aligned}$$

alors le travail du modèle de force dépend du chemin suivi à cause du second terme, car pour $\vec{F}$ donnée, les durées des trajets entre A et B varient selon le trajet emprunté.

Par contraposée, si le travail du modèle de force est indépendant du trajet suivi (ce qui est notre hypothèse de départ), alors le modèle de force est indépendant du temps.

La relation (3.17) page 41 devient

$$E_{pA} - E_{pB} \stackrel{\rightarrow}{=} E_{cB} - E_{cA} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

La variation d'énergie potentielle provoque la variation de vitesse du système. En effet, d'après le principe d'inertie celle-ci doit sinon rester constante en l'absence d'action extérieure au système. Réorganisons les termes :

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \quad (3.22)$$

Le symbol $\stackrel{\rightarrow}{=}$ indique que la relation de causalité est perdue.

Définition 3.7.7 : Énergie mécanique

Le terme $E_c + E_p$, noté E_m , est appelé énergie mécanique.

$$E_m \stackrel{\text{déf}}{=} E_c + E_p$$

Le choix du signe négatif de la définition de l'énergie potentielle (3.19) page 44 se retrouve ici. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Si nous avions choisi un signe positif, l'énergie potentielle serait l'opposée de la convention choisie en physique, et l'énergie mécanique serait la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Il ne s'agit là que d'une convention de définition, écrire $a + b$ ou écrire $a - (-b)$.

Avec cette nouvelle définition (3.22) page ci-contre devient :

$$E_{m_A} = E_{m_B} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Théorème 3.7.2 : Conservation de l'énergie mécanique

Lorsque le modèle de force dérive spatialement d'une énergie potentielle scalaire qui ne dépend pas explicitement du temps, et lorsque la masse se conserve, l'énergie mécanique se conserve le long de tout trajet pour un observateur galiléen :

$$E_m \stackrel{\text{obs}}{=} c^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \quad (3.23)$$

Lorsque les conditions sont réunies, l'énergie mécanique est la même en tout point du trajet, donc aussi à tout instant. Elle ne dépend donc pas du temps et le système est dit *conservatif*. Les forces extérieures dérivant d'un potentiel scalaire, appelé énergie potentielle, qui ne dépend pas explicitement du temps sont dites *conservatives*, dans le sens où cela implique la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique est alors une constante du mouvement, appelée aussi intégrale première du mouvement.

Exemple 3.7.5

Un corps de poids $\vec{P}$ tombe dans un champ gravitationnel $\vec{g}$. En négligeant les forces de frottement de l'air, (3.17) page 41 donne :

$$\int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} \stackrel{=}{=} E_{c_B} - E_{c_A}$$

Le poids du corps $\vec{P} \stackrel{\text{mod}}{=} m\vec{g}$ est un modèle de la force d'interaction gravitationnelle entre le corps et la Terre, lorsque $\vec{g}$ peut être supposé constant. Il dérive de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} telle que :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \\ -mg\vec{k} &= -\frac{dE_{pp}}{dz} \vec{k} \\ E_{pp} &= mgz + C^{ste/z} \end{aligned}$$

Fixer la valeur de la constante revient à fixer le zéro de l'énergie potentielle de pesanteur. Nous pouvons choisir librement ce zéro car seule une différence d'énergie potentielle n'a

de sens physique. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \cdot d\vec{r} &\stackrel{\rightarrow}{=} E_{c_B} - E_{c_A} \\ E_{pp}(A) - E_{pp}(B) &\stackrel{\rightarrow}{=} E_{c_B} - E_{c_A} \\ E_{m_B} &= E_{m_A} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique se conserve. On remarque que l'énergie potentielle de pesanteur dépend implicitement du temps par l'intermédiaire de la coordonnée z , $E_{pp} = mgz(t)$. Elle est fonction de la position verticale, elle-même fonction du temps :

$$\begin{aligned} dE_{pp}(z) &= \frac{\partial E_{pp}}{\partial z} dz \\ \frac{dE_{pp}(z)}{dt} &= \frac{\partial E_{pp}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= mg\dot{z} \end{aligned}$$

Pour autant l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = 0$$

Prenons maintenant en compte les frottements de l'air lors de la chute du corps :

$$\begin{aligned} E_{c_B} - E_{c_A} &\stackrel{\rightarrow}{=} \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ E_{c_B} - E_{c_A} &\stackrel{\rightarrow}{=} E_{pp}(A) - E_{pp}(B) + \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ E_{m_B} - E_{m_A} &= \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique perdue entre les points A et B est égale à l'intégrale de la force de frottement le long du trajet du corps. Cette énergie d'abord sous forme d'agitation thermique du milieu et du corps, se dissipe ensuite par rayonnement, principalement infrarouge.

L'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD, est une équation vectorielle qui est l'écriture condensée de trois équations scalaires, une pour chaque coordonnée d'espace. Lorsque toutes les forces sont conservatives, elle est remplacée par la seule équation scalaire du théorème de conservation de l'énergie mécanique (3.23) page précédente. Cela n'est pas toujours possible car toutes les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle. Par exemple il est clair que les forces de frottement dépendent du trajet suivi entre A et B . Les forces non conservatives, comme les forces de frottement, sont dit *dissipatives*.

Chapitre 4

MOUVEMENT DE ROTATION

Le principe d'inertie 3.1.1 page 16 est un principe d'inertie du mouvement rectiligne, nous allons voir qu'il existe aussi un principe d'inertie en rotation.

4.1 Inertie en rotation

Observation 4.1.1

Par inertie en rotation, la Terre tourne sur elle-même depuis plus de 4 milliards d'années soit plus de 1000 milliards de tours.

Un système a deux façons de tourner, en changeant réellement de direction et en tournant sur lui-même sans changer de direction. C'est pour cela que dans la déf. 2.3.1 page 6 d'un référentiel galiléen nous avons précisé que le mouvement est « en translation » et « rectiligne ». Par rotation sur lui-même on entend une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité du mobile. Par changement de direction on entend une rotation autour d'un axe ne passant pas par le centre de gravité du mobile.

Il s'agit en fait de la même chose, un mobile en rotation sur lui-même peut être vu comme deux mobiles en rotation autour d'un centre de gravité commun.

Le système pouvant à la fois changer de direction et tourner sur lui-même le principe sera appliqué deux fois. Un mouvement rectiligne n'est jamais qu'un mouvement de rotation autour d'un point à l'infini. S'il existe un principe d'inertie en rotation il doit redonner le principe d'inertie du mouvement rectiligne lorsque la distance au centre de gravité commun tend vers l'infini. Par conséquent le principe d'inertie en rotation généralisera celui rectiligne.

Observation 4.1.2

Le système quasi-isolé Terre-Soleil est en rotation autour de son centre de gravité, situé dans le Soleil, depuis plus de 4 milliards d'années. Le système Terre-Soleil tourne sur lui-même. Si l'on prend comme système la Terre seule, elle tourne autour du centre de gravité commun avec le Soleil. La révolution terrestre définit le plan de l'écliptique dont l'orientation est stable par rapport au reste de l'univers si l'on néglige l'influence des autres

planètes, en particulier celle de Jupiter. De même, le plan de révolution de la Lune autour de la Terre, ou des autres planètes autour du Soleil, et des satellites en général, sont stables.

Nous définissons le plan de révolution d'un satellite orbitant autour d'un astre grâce à un pseudovecteur qui lui est perpendiculaire, confondu avec l'axe de rotation du système satellite-astre. On construit ce pseudovecteur en prenant le produit vectoriel de deux vecteurs situés dans le plan de révolution, le rayon vecteur du satellite (vecteur reliant le centre de gravité du système satellite-astre au satellite), et la vitesse du satellite sur son orbite :

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

Ce produit vectoriel est constant en direction et en sens (lié au sens de révolution des satellites). Il permet de définir le pseudovecteur vitesse angulaire qui doit être indépendant de la distance à l'axe :

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

Axiome 4.1.1 : Principe d'inertie en rotation

Tout système isolé tourne autour d'un axe passant par son centre de gravité à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante ou nulle pour un observateur galiléen :

$$\vec{\omega}_{\text{système isolé}} = \vec{C}^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Par analogie avec le mouvement rectiligne, cherchons si une quantité se conserve en rotation dans un système isolé, une sorte de « quantité de mouvement en rotation ». Dans un système isolé constitué de deux corps en interaction, de la quantité de mouvement en rotation serait transférée d'un corps à l'autre. Pour que ce principe redonne le principe d'inertie rectiligne, nous devons prendre en compte la masse inerte des deux systèmes.

4.2 Moment cinétique

Expérience 4.2.1

Dans un référentiel galiléen, soit $\vec{r}_j^{init}$ le vecteur position d'un corps j avant interaction, et soit $\vec{r}_j^{fin}$ son vecteur position après interaction. L'expérience montre que lorsque deux corps formant un système isolé sont en interaction :

$$\vec{r}_1^{fin} \times \vec{p}_1^{fin} + \vec{r}_2^{fin} \times \vec{p}_2^{fin} \stackrel{obs}{=} \vec{r}_1^{init} \times \vec{p}_1^{init} + \vec{r}_2^{init} \times \vec{p}_2^{init} \quad (4.1)$$

Définition 4.2.1 : Moment cinétique

On appelle moment cinétique (ou moment angulaire ou moment de la quantité de mouvement) par rapport à un point O fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, d'un corps de centre de gravité G , le produit vectoriel du vecteur position $\vec{OG}$ par la quantité de mouvement de ce corps dans $\mathcal{R}$, $\vec{OG} \times \vec{p}$. Le vecteur position est noté $\vec{r}$ et le moment cinétique est noté

$\curvearrowright$
 $L_{/O} :$

$$\curvearrowright L_{/O} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

La relation (4.1) page ci-contre devient :

$$\curvearrowright_{1/O}^{fin} + \curvearrowright_{2/O}^{fin} \stackrel{\text{obs}}{=} \curvearrowright_{1/O}^{init} + \curvearrowright_{2/O}^{init} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

La somme des moments cinétiques du système isolé formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps lorsque mesurée dans un référentiel galiléen, elle est identique avant, pendant et après l'interaction des deux corps. La conservation du moment cinétique total lors d'une interaction est mise en évidence dans un référentiel galiléen quelconque, elle ne dépend donc pas du point de référence O fixe dans ce référentiel. Nous pouvons le démontrer :

Démonstration. Soit $\vec{r}$ un vecteur constant dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, en partant de la conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$, (3.6) page 21 :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{p}_1^{init} + \vec{p}_2^{init} \\ \vec{r} \times (\vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{r} \times (\vec{p}_1^{init} + \vec{p}_2^{init}) \\ \vec{r} \times \vec{p}_1^{fin} + \vec{r} \times \vec{p}_2^{fin} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{r} \times \vec{p}_1^{init} + \vec{r} \times \vec{p}_2^{init} \end{aligned}$$

En additionnant avec (4.1)

$$(\vec{r} + \vec{r}_1^{fin}) \times \vec{p}_1^{fin} + (\vec{r} + \vec{r}_2^{fin}) \times \vec{p}_2^{fin} \stackrel{\text{obs}}{=} (\vec{r} + \vec{r}_1^{init}) \times \vec{p}_1^{init} + (\vec{r} + \vec{r}_2^{init}) \times \vec{p}_2^{init}$$

qui est la conservation du moment cinétique par rapport à un nouveau point de référence O' fixe dans $\mathcal{R}$, tel que $\vec{O'O} = \vec{r}$. $\square$

En généralisant à un système isolé constitué d'un nombre quelconque de corps, on énonce l'axiome suivant :

Axiome 4.2.1 : Conservation du moment cinétique total

Le moment cinétique total par rapport à un point O quelconque mais fixe dans un référentiel galiléen, d'un système isolé se conserve au cours du temps :

$$\forall O, \quad \curvearrowright_{/O}^{\text{système isolé}} \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions entre les corps constituant le système isolé.

D'après la définition 4.2.1 page ci-contre du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \curvearrowright_{/O} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$

Donc l'axiome 4.2.1 s'écrit aussi :

$$\forall O, \quad \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{0} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Lorsque le point de référence des vecteurs position est envoyé à l'infini les vecteurs position deviennent tous égaux et (4.1) page 52 devient :

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{p}_1^{fin} + \vec{r} \times \vec{p}_2^{fin} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{r} \times \vec{p}_1^{init} + \vec{r} \times \vec{p}_2^{init} \\ \vec{r} \times (\vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{r} \times (\vec{p}_1^{init} + \vec{p}_2^{init}) \\ \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{p}_1^{init} + \vec{p}_2^{init} \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'axiome 4.2.1 de conservation du moment cinétique total inclut l'axiome 3.2.2 page 22 de conservation de la quantité de mouvement totale.

Montrons qu'il est impossible de démontrer l'axiome 4.2.1 de conservation du moment cinétique total d'un système isolé à partir de l'axiome 3.2.2 page 22 de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé. Autrement dit, lors d'une interaction entre deux corps, nous ne pouvons passer de façon purement théorique de (4.2) à (4.1) page 52. Il faut nécessairement s'appuyer sur une nouvelle expérience.

Considérons un système isolé constitué de deux sous-systèmes. Pour le système global, la conservation de la quantité de mouvement,

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{système}} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste} \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

signifie que la quantité de mouvement du système se conserve, y compris lorsqu'il y a des interactions entre les deux sous-systèmes constituant le système. On en déduit que

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{p}_{\text{système}} &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{r} \times \vec{C}^{ste} \\ \vec{r} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste} \\ \vec{r} \times \vec{p}_1 + \vec{r} \times \vec{p}_2 &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

et le moment cinétique du système global se conserve lors d'une interaction pour un point pris à l'infini (il faut que $\vec{r}$ soit le même). Mais cette relation ne dit pas que l'on a

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste}$$

lors d'une interaction, pour un point qui n'est pas à l'infini.

Remarque 4.2.1

Pour démontrer la conservation du moment cinétique lors d'une interaction entre deux sous-systèmes, on trouve souvent la démonstration

fausse suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{0} \\ &= \vec{0} \\ \vec{r} \times \vec{p} &= \vec{C}^{ste}\end{aligned}$$

Cela démontre seulement que le moment cinétique d'un système dans lequel il ne se passe rien (un corps unique par exemple) se conserve. Par le même raisonnement, nous obtenons plein de relations, par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{p}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{p} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{p})}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m^2\vec{v}) &= \vec{v} \times m^2\vec{v} + \vec{r} \times \vec{0} \\ &= \vec{0} \\ \vec{r} \times m\vec{p} &= \vec{C}^{ste}\end{aligned}$$

Effectivement, tout se conserve dans un système dans lequel il ne se passe rien, mais cette relation est fausse lorsqu'on l'applique à l'interaction entre deux systèmes.

Prenons un contre-exemple pour démontrer que l'on ne peut pas appliquer ce raisonnement au cas d'une interaction entre deux systèmes. Le principe d'inertie nous dit que la vitesse d'un système isolé se conserve, donc aussi son énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{C}^{ste} \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= c^{ste} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= c^{ste} \\ E_c &= c^{ste}\end{aligned}$$

Supposons que le système isolé soit constitué de deux corps bien distincts, chaque corps est un système isolé et par conséquent l'énergie cinétique de chaque corps se conserve et l'on a :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

Mais lorsqu'il y a interaction entre les deux corps, par exemple un choc mou, cette relation devient fausse car une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie d'agitation thermique et en rayonnement. Or ce qui nous intéresse, c'est précisément ce qui se conserve lors d'une interaction, car tout se conserve lorsqu'il ne se passe rien.

4.3 Moment de force

Définition 4.3.1 : Moment d'une force exercé sur un corps

On appelle moment par rapport au point O d'une force $\vec{f}$ s'exerçant en un point A d'un corps, le produit vectoriel du vecteur position $\vec{OA}$ avec cette force, $\vec{OA} \times \vec{f}$. Le moment de force est noté $\overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{f})$:

$$\overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{f}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{OA} \times \vec{f}$$

D'après la déf. 3.5.1 page 29 d'une force sur un corps isolé :

$$\begin{aligned}\vec{f} &\equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \overrightarrow{OA} \times \vec{f} &\equiv \overrightarrow{OA} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{f}) &\equiv \frac{d\overset{\curvearrowright}{L}_{/O}}{dt}\end{aligned}$$

Nous avons vu que le moment cinétique total d'un système isolé se conserve. Lorsque le système n'est plus isolé et que nous le faisons tourner sur lui-même ou ralentissons sa rotation par une action extérieure, nous faisons varier son moment cinétique. Cette variation est due à un moment de force exercé sur le système. Nous pouvons poser la définition alternative suivante :

Définition 4.3.2 : Moment d'une force exercé sur un corps

On appelle moment par rapport au point O d'une force s'exerçant sur un corps, toute action faisant varier dans le temps le moment cinétique par rapport au même point O , de ce corps.

Les moments sont des pseudovecteurs, ils s'additionnent. Lorsque le moment de force par rapport à O s'exerce sur un système constitué de plusieurs corps, il peut s'exercer sur n'importe lequel de ces corps, faisant varier le moment cinétique total du système :

$$\sum_j \overset{\curvearrowright}{M}_{j/O}(\vec{f}) \equiv \frac{d}{dt} \sum_i \overset{\curvearrowright}{L}_{i/O} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

À partir de l'axiome 4.2.1 page 53 de la conservation du moment cinétique d'un système isolé, nous pouvons énoncer un théorème sur les moments des forces intérieures, analogue à la loi de l'action-réaction :

Théorème 4.3.1

La somme des moments des forces intérieures à tout système est nulle.

Définition 4.3.3 : Modèle de moment de force

On appelle modèle du moment par rapport au point O d'une force, la représentation théorique du moment par rapport au point O de la force physique réelle.

En se servant de la déf. 3.4.1 page 28 du modèle de force, le moment par rapport au point O du modèle d'une force s'exerçant sur un corps situé en A , est le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ par le modèle de force $\vec{F}$:

$$\overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$$

La déf. 4.3.2 de la présente page devient une équation du mouvement dont on peut chercher une solution lorsque l'on écrit que le moment du modèle de force de la force réelle exercée sur le système, provoque une variation dans le temps du moment cinétique du système :

Théorème 4.3.2 : Théorème du moment cinétique

La somme des moments par rapport au point O des modèles des forces extérieures à un système provoque la variation dans le temps du moment cinétique total du système par rapport au même point O :

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{F}) \overset{\curvearrowright}{=} \frac{d}{dt} \overset{\curvearrowright}{L}_{/O}^{\text{système isolé}} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

Le théorème du moment cinétique est écrit comme une relation de causalité entre des modèles de moments de forces et une variation du moment cinétique. Il faut garder à l'esprit que ces termes ne sont qu'approximativement égaux. Ce nouvel axiome inclut l'axiome 4.2.1 page 53 de la conservation du moment cinétique total d'un système isolé : lorsqu'aucun moment de force n'est exercé sur un système $\sum \overset{\curvearrowright}{M}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0}$, son moment cinétique total se conserve dans tout référentiel galiléen $\overset{\curvearrowright}{L}_{/O}^{\text{système isolé}} \overset{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste}$.

Montrons que l'axiome 4.3.2 de la présente page appelé « théorème du moment cinétique » inclut aussi l'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD. En explicitant ce théorème, pour m moments de force et pour un système de n corps :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \vec{r}_j \times \vec{F}_j &\overset{\curvearrowright}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m \vec{v}_i \\ &\overset{\curvearrowright}{=} \sum_{i=1}^n \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d(m \vec{v}_i)}{dt} \right] \\ \sum_{j=1}^m \vec{r}_j \times \vec{F}_j &\overset{\curvearrowright}{=} \sum_{i=1}^n \left(\vec{v}_i \times m \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \\ &\overset{\curvearrowright}{=} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \end{aligned}$$

Lorsque le point de référence des vecteurs position est envoyé à l'infini, les vecteurs position deviennent tous égaux, et l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \vec{r} \times \vec{F}_j &\overset{\curvearrowright}{=} \sum_{i=1}^n \vec{r} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \vec{r} \times \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\overset{\curvearrowright}{=} \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\overset{\curvearrowright}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \end{aligned}$$

qui est la RFD. Pour trouver les équations du mouvement d'un corps, nous pouvons appliquer deux fois le théorème du moment cinétique 4.3.2 de la présente page. Une première fois par rapport à un point à distance finie pour son mouvement de rotation, une seconde fois par rapport à un point à distance infinie pour son mouvement rectiligne.

4.4 Un seul axiome pour la mécanique

Montrons qu'en appliquant deux fois l'axiome 4.2.1 page 53 de la conservation du moment cinétique total, par rapport à deux points distincts à distances finies, on retrouve l'axiome 3.2.2 page 22 de conservation de la quantité de mouvement totale.

Démonstration. Nous avons les deux hypothèses :

$$\sum_{j=1}^n (\overrightarrow{OA_j} \times m_j \vec{v}_i) \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}_1^{ste} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{O'A_j} \times m_j \vec{v}_i) \stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}_2^{ste}$$

En soustrayant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{OA_j} \times m_j \vec{v}_i) - \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{O'A_j} \times m_j \vec{v}_i) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}_3^{ste} \\ \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{OA_j} \times m_j \vec{v}_i - \overrightarrow{O'A_j} \times m_j \vec{v}_i) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}_3^{ste} \\ \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{OO'} \times m_j \vec{v}_i) &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}_3^{ste} \\ \overrightarrow{OO'} \times \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_i &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}_3^{ste} \\ \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_i &\stackrel{\text{obs}}{=} \vec{C}^{ste} \end{aligned}$$

□

Montrons maintenant qu'en appliquant deux fois le théorème du moment cinétique 4.3.2 page précédente par rapport à deux points distincts à distance finie, on retrouve l'axiome 3.5.2 page 32 de la RFD.

Démonstration. Nous avons les deux hypothèses :

$$\sum_{j=1}^m \overrightarrow{OA_j} \times \vec{F}_j \stackrel{\text{RFD}}{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m \overrightarrow{O'A_j} \times \vec{F}_j \stackrel{\text{RFD}}{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{O'A_i} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

En soustrayant :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{O'A_j}) \times \vec{F}_j &\stackrel{\text{RFD}}{=} \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{O'A_i}) \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \sum_{j=1}^m \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}_j &\stackrel{\text{RFD}}{=} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OO'} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \overrightarrow{OO'} \times \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\stackrel{\text{RFD}}{=} \overrightarrow{OO'} \times \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \sum_{j=1}^m \vec{F}_j &\stackrel{\text{RFD}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} \end{aligned}$$

□

Par conséquent, toute la mécanique générale peut être établie par la double application du théorème du moment cinétique 4.3.2 page 57. Cet axiome, fâcheusement appelé « théorème du moment cinétique », peut alors servir d'unique axiome de départ pour la mécanique.

Chapitre 5

LOI DE CONSERVATION

5.1 Opérateur divergence

Définition 5.1.1 : Opérateur divergence d'un champ de vecteurs

Dans le repère naturel orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z , soit un champ de vecteurs $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$. On appelle divergence l'opérateur différentiel div , tel qu'appliqué à $\vec{u}$ on obtienne le scalaire :

$$\text{div}(\vec{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Notation 5.1.1

En notation indicielle, la divergence du vecteur $\vec{u}$ s'écrit :

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i}$$

Théorème 5.1.1 : Théorème de la divergence

Soit $\vec{u}$ un champ de vecteurs quelconques. Pour tout volume V de surface S et de normale sortante $\vec{n}$:

$$\oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div}(\vec{u}) \, dv$$

Démonstration. Soit un espace ponctuel euclidien E_3 de système de coordonnées rectangulaire (x^i) . Soit $(\vec{e}_i)$ la base naturelle orthonormée de l'espace vectoriel euclidien associé. Soit S une surface fermée telle que toute droite parallèle aux axes de coordonnées coupe cette surface en au

plus deux points (par exemple un ballon de baudruche suffisamment gonflé). Alors :

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_S (u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2 + u^3 \vec{e}_3) \cdot \vec{n} \, ds \\ &= \iint_S u^1 \vec{e}_1 \cdot \vec{n} \, ds + \iint_S u^2 \vec{e}_2 \cdot \vec{n} \, ds + \iint_S u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, ds\end{aligned}$$

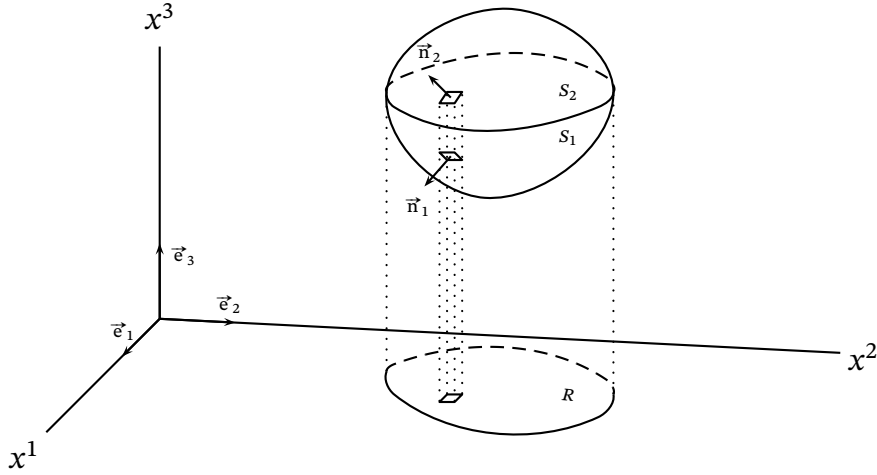


FIG. 5.1 – Volume de surface S

Calculons le dernier terme du membre de droite. Imaginons un plan (x^1, x^2) horizontal coupant la surface fermée S en deux, de sorte que la ligne d'intersection soit la plus longue possible. Nous intégrons maintenant sur les deux surfaces S_1 en bas et S_2 en haut, non fermées, de normales sortantes respectives $\vec{n}_1$ vers le bas et $\vec{n}_2$ vers le haut

$$\iint_S u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S_1} u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_1 \, ds_1 + \iint_{S_2} u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_2 \, ds_2$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_1 \, ds_1 = -dx^1 dx^2 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{n}_2 \, ds_2 = dx^1 dx^2 \end{cases}$$

Les surfaces S_1 et S_2 ont pour équation respective :

$$\begin{cases} S_1 : x^3 = x_1^3(x^1, x^2) \\ S_2 : x^3 = x_2^3(x^1, x^2) \end{cases}$$

Soit R le domaine d'intégration en x^1, x^2 :

$$\begin{aligned}\iint_S u^3 \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \, ds &= \iint_R u^3(x^1, x^2, x_2^3) \, dx^1 dx^2 - \iint_R u^3(x^1, x^2, x_1^3) \, dx^1 dx^2 \\ &= \iint_R [u^3(x^1, x^2, x_2^3) - u^3(x^1, x^2, x_1^3)] \, dx^1 dx^2 \\ &= \iint_R \left(\int_{x_1^3}^{x_2^3} \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \, dx^3 \right) \, dx^1 dx^2 \\ &= \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \, dv\end{aligned}$$

Nous obtenons un résultat similaire pour les coordonnées x^1 et x^2 , si bien que :

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \iiint_V \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \, dv + \iiint_V \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \, dv + \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \, dv \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right) \, dv\end{aligned}$$

Les coordonnées étant rectangulaires, on utilise la déf. 5.1.1 page 61 de l'opérateur différentiel divergence en coordonnées rectilignes :

$$\oint_S \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div}(\vec{u}) \, dv$$

Le théorème peut s'étendre aux surfaces qui ne satisfont pas la condition que des droites parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires les coupent en au plus deux points. Pour établir cette généralisation, subdiviser le domaine S en sous-domaines dont les surfaces satisfont la condition. $\square$

5.2 Théorème de Gauss

Théorème 5.2.1 : Théorème de Gauss

Soit S une surface fermée quelconque, de normale sortante $\vec{n}$. Soit $\vec{r} = r\vec{e}_r$ un champ de vecteurs d'origine O :

$$\begin{aligned}\text{Si } O \text{ est extérieur à } S, \quad & \oint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \\ \text{Si } O \text{ est intérieur à } S, \quad & \oint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds = 4\pi\end{aligned}$$

Démonstration. À partir du théorème de la divergence 5.1.1 page 61 avec $\vec{u} = \vec{e}_r/r^2$:

$$\oint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) \, dv$$

- supposons O extérieur à S . Dans ce cas r ne peut pas être nul dans le volume d'intégration de la divergence ($r \neq 0$ dans V) :

$$\begin{aligned}\text{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) &= \text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\ &= \text{div}\left(\frac{x^1}{r^3} \vec{e}_1 + \frac{x^2}{r^3} \vec{e}_2 + \frac{x^3}{r^3} \vec{e}_3\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{x^1}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{x^2}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{x^3}{r^3}\right)\end{aligned}$$

Pour le premier membre :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{x^1}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \frac{x^1}{[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \left[r^3 - x^1 \times 2x^1 \times \frac{3}{2} r \right] / r^6 \\ &= (r^3 - 3r(x^1)^2) / r^6\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) &= [3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)] / r^6 \\ &= 0\end{aligned}$$

- supposons maintenant O intérieur à S . Entourons O d'une petite sphère s de rayon a et de volume v . Soit $\mathcal{V}$ le volume intérieur à S et extérieur à s , et soient $\vec{n}_S$ et $\vec{n}_s$ les normales sortantes respectives des surfaces S et s :

$$\begin{aligned}\oint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_S}{r^2} ds - \oint_s \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_s}{r^2} ds &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) dv - \iiint_v \operatorname{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) dv \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) dv \\ &= 0\end{aligned}$$

car O est extérieur à $\mathcal{V}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\oint_S \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_S}{r^2} ds &= \oint_s \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{n}_s}{r^2} ds \\ &= \frac{1}{a^2} \oint_s ds \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

□

5.3 Hypothèse d'un milieu continu

5.3.1 Densité numérique - Nombre volumique

On considère un grand nombre d'éléments distincts identiques répartis dans l'espace, ayant chacun leur propre vitesse. À l'instant t dans un référentiel quelconque R , centré en un point de vecteur position $\vec{r}(x, y, z)$, prenons un volume parallélépipédique rectangle $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ contenant $n(t, \vec{r})$ éléments. On pose la définition :

Définition 5.3.1 : Nombre volumique ou densité numérique d'éléments

$$\rho_n(t, \vec{r}) = \frac{n(t, \vec{r})}{V(\vec{r})}$$

$\rho_n(t, \vec{r})$ est la densité numérique d'éléments dans le volume V , à l'instant t en $\vec{r}$.

Remarque 5.3.1

On parle de *nombre volumique* ou de *densité numérique* pour insister sur le fait qu'il s'agit d'un nombre entier d'éléments.

Lorsque le coefficient associé à l'élément est très petit, par exemple sa masse m ou sa charge électrique q , on fait l'approximation d'un *milieu continu*, ce qui permet d'utiliser le calcul différentiel et intégral.

Exemple 5.3.1

La densité (ou masse volumique) et la densité de charges électriques sont définies localement en un point et à un instant donné, dans un volume infinitésimal :

$$\rho_m(t, \vec{r}) = \frac{mn(t, \vec{r})}{V} \longrightarrow \rho_m(t, \vec{r}) = \frac{dM(t, \vec{r})}{dv}$$

$$\rho_q(t, \vec{r}) = \frac{qn(t, \vec{r})}{V} \longrightarrow \rho_q(t, \vec{r}) = \frac{dQ(t, \vec{r})}{dv}$$

où M est la masse totale du volume V , et Q est sa charge totale :

$$M(t, \vec{r}) = \iiint_V \rho_m(t, \vec{r}) dv \quad \text{et} \quad Q(t, \vec{r}) = \iiint_V \rho_q(t, \vec{r}) dv$$

5.3.2 Courant - débit

Un courant moyen ou un débit moyen est un nombre n d'éléments divisé par un intervalle de temps Δt :

$$I_n = \frac{n}{\Delta t}$$

On ne peut faire tendre Δt vers zéro pour obtenir un courant instantané car n deviendrait nul. Nous faisons donc l'hypothèse d'un milieu continu :

$$I_n = \frac{dn}{dt}$$

Exemple 5.3.2

En faisant l'hypothèse d'un milieu continu, nous avons :

- le débit instantané de matière : $I_M = \frac{dM}{dt}$
- le courant électrique instantané : $I_q = \frac{dQ}{dt}$

Remarque 5.3.2

Ce peut être un débit de matière, un courant électrique mais aussi un courant d'énergie, un débit de quantité de mouvement, etc.

Un débit massique est la quantité de matière (i.e. la masse) qui passe par unité de temps dans un conduit de section donnée. De même, un courant électrique est la quantité de charges électriques qui passe chaque par unité de temps dans un câble électrique de section donnée. Intéressons-nous à la quantité de matière ou de charges électriques qui passe dans ce conduit ou ce câble par unité de temps et par unité de surface.

Dans un référentiel quelconque R , soit $\vec{v}(t, \vec{r})$ le champ des vecteurs vitesse du milieu continu. À l'instant t_0 en $\vec{r}_0$ un volume infinitésimal d^3v a pour vitesse instantané $\vec{v} = \vec{v}(t_0, \vec{r}_0)$ qui dépend de sa position, de l'instant considéré et de la vitesse instantanée du référentiel R de l'observateur. Soit $\vec{n}(\vec{r})$ la normale en chaque point de la surface telle que le milieu passe à travers la surface : $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$.

$$\begin{aligned} d^3n &= \rho_n d^3v \\ d^2Idt &= \rho_n \vec{v} dt \cdot \vec{n} d^2s \\ d^2I &= \rho_n \vec{v} \cdot \vec{n} d^2s \\ &= \vec{j} \cdot \vec{n} d^2s \\ I &= \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds \end{aligned}$$

où $\vec{j}$ est le champ de vecteurs densité de courant dans $\mathcal{R}$ (densité surfacique de courant, c.-à-d. densité linéique de charges par unité de temps).

Remarque 5.3.3

La valeur du courant est fonction de $\vec{v}$ qui dépend du choix du référentiel.

5.3.3 Équation de conservation

Nos hypothèses sont les suivantes :

- existence d'un milieu continu
- existence d'une quantité conservative de densité ρ , liée à ce milieu continu

Cette quantité (la masse, la charge, l'énergie ...) se conserve dans le temps, elle ne peut être ni créée ni détruite. Nous nous plaçons dans un référentiel quelconque R dans lequel on mesure le champ des vecteurs vitesse $\vec{v}(t, \vec{r})$ du milieu continu. La variation dans le temps de cette quantité conservative dans le volume V ne peut être due qu'à un flux de matière entrant ou sortant à travers la surface fermée S délimitant V .

Par convention, l'orientation de la surface fermée est choisie positive vers l'extérieur. En notant $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire sortante de la surface, autrement dit pointant hors du volume considéré :

$$\vec{S} = \vec{n} S$$

Les deux hypothèses de départ donnent la relation immédiate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \oiint_S \vec{j} \cdot d^2 \vec{s} = 0$$

appelée *équation de conservation* sous sa forme intégrale, valable dans tout référentiel.

Remarques 5.3.1

- $\vec{v}$ est la vitesse du milieu continu au point où se trouve l'élément de surface d^2s
- L'équation de conservation est également appelée équation de transport car une quantité qui se conserve ne peut qu'être transportée d'un endroit à un autre

- si $\partial_t \rho > 0$ le flux est entrant et $\vec{j} \cdot d^2\vec{s} < 0$
- si $\partial_t \rho < 0$ le flux est sortant et $\vec{j} \cdot d^2\vec{s} > 0$

Remarque 5.3.4

Si par convention l'orientation de la surface est choisie positive vers l'intérieur, l'équation de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence 5.1.1 page 61, on écrit l'équation de conservation sous sa forme différentielle, appelée forme locale :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iiint_V \text{div}(\vec{j}) dv = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

Exemple 5.3.3

Équation de conservation de la masse (mécanique classique) :

- ρ est la masse volumique du fluide
- $\vec{j} = \rho_M \vec{v}$ est la densité de quantité de mouvement du fluide par unité de surface, $\vec{v}$ est son champ de vecteurs vitesse

Équation de conservation de la charge (mécanique classique et relativiste) :

- ρ est la densité de charge
- $\vec{j} = \rho_q \vec{v}$ est la densité de courant électrique

Équation de conservation de l'énergie (mécanique classique) :

- ρ est la densité d'énergie
- $\vec{j} = \rho_e \vec{v}$ est le flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps

Pour les quantités non conservatives, l'équation s'appelle *équation de continuité* :

- s'il existe une *source* d'éléments dans V :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \oint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{s} > 0$$

- s'il existe un *puit* d'éléments dans V :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \oint_S \vec{j} \cdot d^2\vec{s} < 0$$

5.4 Opérateur nabla

Définition 5.4.1 : Opérateur symbolique nabla

Soit le repère naturel orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z . On appelle nabla^a l'opérateur différentiel symbolique ∇ , tel que :

$$\vec{\nabla} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

^a. Nabla est le nom hébraïque d'un instrument de musique égyptien, une sorte de harpe qui avait la forme d'un delta inversé.

Ce 3-opérateur symbolique permet de définir les trois opérateurs gradient, divergence et rotationnel.

- La multiplication de ∇ par le champ de scalaires $f(x, y, z)$ donne le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) \end{aligned}$$

- Le produit scalaire euclidien de ∇ par le champ de vecteurs $\vec{u}$ donne le champ de scalaires $\text{div}(\vec{u})$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(u_x, u_y, u_z) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \text{div}(\vec{u}) \end{aligned}$$

- Le produit vectoriel de ∇ par le champ de vecteurs $\vec{u}$ donne le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u}(u_x, u_y, u_z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \end{aligned}$$

Remarque 5.4.1

L'opérateur nabla est symbolique, toutes les règles du calcul vectoriel ne s'appliquent pas à cet opérateur. En particulier, on a la relation *fausse* suivante :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} \times \vec{v}) &= \nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{u} - (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{v} \\ &= \text{div}(\vec{v}) \vec{u} - \text{div}(\vec{u}) \vec{v} \end{aligned}$$

Définition 5.4.2 : Opérateur laplacien

Soit le repère naturel orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z . On appelle laplacien d'un champ de scalaires $f(x, y, z)$, l'opérateur différentiel Δ , tel que :

$$\begin{aligned}\Delta(f) &\stackrel{\text{déf}}{=} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Le laplacien prend en entrée un champ de scalaires et donne en sortie un autre champ de scalaires. En utilisant l'opérateur symbolique nabla :

$$\begin{aligned}\nabla^2(f) &= \nabla \cdot (\nabla f) \\ &= \Delta(f)\end{aligned}$$

Définition 5.4.3 : Opérateur laplacien vectoriel

Soit le repère naturel orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z . On appelle laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs $\vec{u}$, l'opérateur différentiel $\vec{\Delta}$, tel que :

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}(\vec{u}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div}(\vec{u}) - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})] \\ &= \Delta u_x \vec{i} + \Delta u_y \vec{j} + \Delta u_z \vec{k}\end{aligned}$$

Le laplacien vectoriel prend en entrée un champ de vecteurs et donne en sortie un autre champ de vecteurs. En utilisant l'opérateur symbolique nabla :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2(\vec{u}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \\ &= \vec{\Delta}(\vec{u})\end{aligned}$$

Chapitre 6

GRAVITATION NEWTONIENNE

Sommaire

6.1 Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire	71
6.2 Champ gravitationnel créé par une sphère homogène	74
6.3 Champ gravitationnel créé par une boule homogène	76
6.4 Équations de Poisson et de Laplace	76

6.1 Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire

Dans la théorie newtonienne de la gravitation, le modèle de Hooke de la force de gravitation est en inverse du carré de la distance entre les corps. L'interaction gravitationnelle entre un corps de masse M sur un corps de masse m est modélisée par le vecteur suivant

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{\|\vec{r}_m - \vec{r}_M\|^3} (\vec{r}_m - \vec{r}_M)$$

où la constante de proportionnalité $\mathcal{G}$ est appelée *constante d'attraction gravitationnelle*. Dans la RFD 3.5.2 page 32, le membre de droite $\vec{F}^{ext}$ est à remplacer par le modèle suivant :

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \vec{e}_r \quad (6.1)$$

où r est la distance entre les deux masses, $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire dirigé de M vers m , $r\vec{e}_r$ est le rayon vecteur de M à m . Le signe négatif indique que la force de gravitation est attractive, puisque celle exercée par M sur m est dirigée de m vers M .

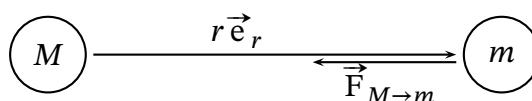


FIG. 6.1 – Signe de la force de gravitation

Définition 6.1.1 : Force gravitationnelle

Le vecteur force qui modélise l'interaction gravitationnelle entre les masses M et m s'appelle *force gravitationnelle* et a pour expression

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

Remarque 6.1.1

La loi d'action-réaction 3.5.1 page 31 donne :

$$\vec{F}_{m \rightarrow M} = -\vec{F}_{M \rightarrow m}$$

Nous pouvons également modéliser l'interaction gravitationnelle par un champ de vecteurs en tout point de l'espace plutôt que par une force en un seul point. L'influence gravitationnelle due à la masse M est alors modélisée par un champ de vecteurs indépendant de m .

Définition 6.1.2 : Champ gravitationnel

Le champ de vecteurs qui modélise l'influence gravitationnelle due à la masse M à une distance r s'appelle *champ gravitationnel* et a pour expression :

$$\vec{g}_M \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

On a :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \vec{g}_M \quad (6.2)$$

Définition 6.1.3 : Potentiel scalaire d'un champ vectoriel

La fonction scalaire f est dite potentielle du champ vectoriel $\vec{A}$ ssi :

$$\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Réciproquement, nous dirons que le champ vectoriel $\vec{A}$ dérive du champ de scalaires f . Un champ de vecteurs est *conservatif* s'il dérive d'un potentiel scalaire.

Définition 6.1.4 : Potentiel du champ gravitationnel

ϕ est le potentiel scalaire du vecteur champ gravitationnel $\vec{g}$ ssi

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$$

Réciproquement, nous dirons que le champ gravitationnel $\vec{g}$ est conservatif ssi il dérive du potentiel de champ ϕ appelé *potentiel newtonien*. Cherchons l'expression du potentiel scalaire ϕ . La symétrie sphérique du problème permet de se placer en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} g \vec{e}_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r \\ g &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \int_A^B g dr &= -(\phi_B - \phi_A) \end{aligned}$$

Avec la déf. 6.1.2 page précédente du champ gravitationnel créé par une masse M :

$$-(\phi_B - \phi_A) = - \int_A^B \frac{GM}{r^2} dr$$

$$\phi_A - \phi_B = \left[\frac{GM}{r} \right]_A^B$$

$$\boxed{\phi = -\frac{GM}{r}} \quad (6.3)$$

ϕ est ici le potentiel newtonien de la masse M .

Définition 6.1.5 : Potentiel de la force gravitationnelle

E_p est le potentiel scalaire du vecteur force gravitationnelle $\vec{F}$ ssi

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

E_p est un modèle de la réalité. Réciproquement, nous dirons que la force de gravitation $\vec{F}$ dérive du potentiel de force E_p , appelé *énergie potentielle de gravitation*. Toutes les forces réelles ne peuvent pas être modélisées par une énergie potentielle, mais dans le cas de l'interaction gravitationnelle newtonienne, le modèle de force (6.1) page 71 le permet.

En partant de la définition précédente, en coordonnées sphériques :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

$$F \vec{e}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$F = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

Avec la déf. 6.1.1 page précédente de la force gravitationnelle :

$$E_p = - \int F dr$$

$$= - \int -\frac{GMm}{r^2} dr$$

On obtient l'expression du modèle d'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}}$$

Le potentiel de force et le potentiel de champ sont bien sûr liés par la même relation (6.2) page ci-contre qui lie force et champ :

$$E_p = m\phi$$

6.2 Champ gravitationnel créé par une sphère homogène

Soit une masse uniformément répartie sur la surface d'une sphère creuse de rayon a . Calculons l'intensité du champ gravitationnel en un point P extérieur à la sphère. Découpons la sphère en bandes circulaires de rayon $a \sin(\theta)$ et de largeur $a d\theta$ où θ est la latitude.

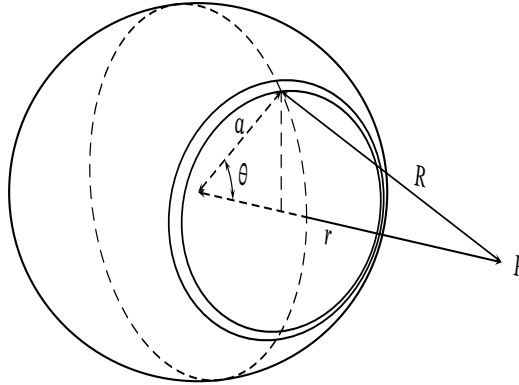


FIG. 6.2 – Champ de gravitation en P

L'aire infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned} ds &= 2\pi a \sin(\theta) \times a d\theta \\ &= 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Soit m la masse de la sphère et ρ sa densité. La masse infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned} dm &= \rho ds \\ &= \frac{m}{4\pi a^2} \times 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} m \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Soit R la distance du point P à la bande. La déf. 6.1.2 page 72 donne le champ gravitationnel infinitésimal produit par cette bande en un point P :

$$\begin{aligned} d\vec{g}_m &= -\frac{G dm}{R^2} \vec{e}_r \\ &= -\frac{G m \sin(\theta) d\theta}{2R^2} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Plutôt que d'effectuer la difficile intégration du champ vectoriel de gravitation ci-dessus, nous allons intégrer le champ scalaire du potentiel de gravitation grâce à (6.3) page précédente :

$$\begin{aligned} d\phi &= -\frac{G dm}{R} \\ &= -\frac{G m \sin(\theta) d\theta}{2R} \end{aligned}$$

Soit r la distance du point P au centre de la sphère. Dérivons la loi des cosinus :

$$R^2(\theta) = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta)$$

$$\frac{dR^2}{d\theta} = 2ar \sin(\theta)$$

$$2RdR = 2ar \sin(\theta)d\theta$$

$$\frac{dR}{2ar} = \frac{\sin(\theta)d\theta}{2R}$$

si bien que

$$d\phi = -\frac{GmdR}{2ar}$$

Intégrons sur la surface totale de la sphère :

- quand P est en dehors de la sphère $r > a$ et R varie de $r - a$ à $r + a$:

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{Gm}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR \\ &= -\frac{Gm}{2ar} 2a \\ &= -\frac{Gm}{r}\end{aligned}$$

À l'extérieur de la sphère, le champ gravitationnel s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{g} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \\ &= -\frac{Gm}{r^2} \vec{e}_r \quad r > a\end{aligned}$$

Le champ gravitationnel en un point extérieur à la sphère est identique au champ gravitationnel que l'on aurait si la masse de la sphère était toute entière au centre de la sphère.

- quand P est dans la sphère $r < a$ et R varie de $a - r$ à $a + r$:

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{Gm}{2ar} \int_{a-r}^{a+r} dR \\ &= -\frac{Gm}{2ar} 2r \\ &= -\frac{Gm}{a} \\ &= c^{ste}\end{aligned}$$

En tout point intérieur à une sphère le champ gravitationnel est nul :

$$\vec{g} = \vec{0} \quad r < a$$

6.3 Champ gravitationnel créé par une boule homogène

La boule est un ensemble de sphères concentriques homogènes. On applique le résultat précédent pour chaque sphère. Le champ gravitationnel en un point extérieur d'une boule de masse M et de rayon a est identique au champ gravitationnel que l'on aurait si la masse de la boule était toute entière au centre de la boule :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \quad r > a$$

En un point P intérieur à la boule, toutes les sphères de rayon supérieur à r ne contribuent pas au champ en P . Soit M' la masse de la boule de rayon $r < a$. Les masses sont dans le rapport des volumes :

$$\begin{aligned} M' &= M \times \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} \\ &= \frac{Mr^3}{a^3} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -\frac{GM'}{r^2} \vec{e}_r \\ &= -\frac{GMr}{a^3} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Au centre d'une boule le champ gravitationnel est nul (par symétrie sphérique), puis il augmente linéairement jusqu'à la surface de la boule, puis décroît jusqu'à l'infini en fonction du carré de la distance au centre de la boule.

6.4 Équations de Poisson et de Laplace

Un champ de vecteurs occupant un volume V de l'espace est de divergence nulle s'il ne diverge pas, ni ne converge, autrement dit s'il n'y a ni source ni puit dans ce volume V . Si donc dans un volume V un champ de vecteurs est de divergence nulle, alors ce champ est à flux conservatif à travers la surface S fermée définissant V . Cela signifie que tout ce qui entre par la surface S entourant V en ressort, et tout ce qui sort par la surface S y est entré. Il y a conservation du champ dans le volume V . Réciproquement, si un champ de vecteurs est à flux conservatif à travers une patatoïde S fermée, alors sa divergence est nulle dans le volume défini par cette patatoïde.

6.4.1 Loi de Gauss pour la gravitation

Théorème 6.4.1 : Loi de Gauss sous forme intégrale

Le flux d'un champ gravitationnel à travers une surface fermée est proportionnel à la somme des masses intérieures à cette surface :

$$\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

Le signe négatif indique que le flux est entrant.

Démonstration. Deux cas :

- pour le « cas intérieur », remplaçons le champ gravitationnel par son modèle donné par la déf. 6.1.2 page 72, et intégrons sur une surface fermée autour de la masse :

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds &= \oiint_S -\frac{\mathcal{G}M_{int}}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} \, ds \\ &= -\mathcal{G}M_{int} \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

Appliquons le théorème de Gauss 5.2.1 page 63 :

$$\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n} \, ds = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

La masse intérieure à la surface est la source du champ gravitationnel, ce champ est dirigé vers la masse (signe négatif car $\vec{g}_{M_{int}}$ est entrant alors que la normale $\vec{n}$ est sortante). $\square$

- pour le « cas extérieur » nous pouvons poser $M_{int} = 0$, ou bien appliquer le théorème de Gauss sur une surface fermée ne contenant pas de masse :

$$\oiint_S \vec{g}_M \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Le flux du champ de vecteurs $\vec{g}_M$ issu de M est nul à travers une surface ne contenant pas M . Il n'y a ni source ni puit dans le volume défini par cette surface, et le flux entrant est égal au flux sortant.

Théorème 6.4.2 : Loi de Gauss sous forme différentielle

$$\text{div}(\vec{g}) = -4\pi\mathcal{G}\rho_{int}$$

Démonstration. À partir du théorème de la divergence 5.1.1 page 61 et de la forme intégrale du

théorème de Gauss appliqué au champ gravitationnel :

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \operatorname{div}(\vec{g}) \, dv &= \oiint_S \vec{g} \cdot \vec{n} \, ds \\
 &= -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\
 &= -4\pi\mathcal{G} \iiint_V \rho_{int} \, dv \\
 \operatorname{div}(\vec{g}) &= -4\pi\mathcal{G}\rho_{int}
 \end{aligned}$$

□

Théorème 6.4.3 : Équation de Poisson (cas « intérieur »)

Soit ϕ le potentiel d'un champ gravitationnel. À l'intérieur d'une surface fermée contenant une distribution de masse de densité volumique ρ :

$$\Delta(\phi) = 4\pi\rho\mathcal{G}$$

Démonstration. À partir de la loi de Gauss sous forme différentielle 6.4.2 page précédente :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{g}) &= -4\pi\rho\mathcal{G} \\
 -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi) &= -4\pi\rho\mathcal{G} \\
 \Delta(\phi) &= 4\pi\rho\mathcal{G}
 \end{aligned}$$

□

L'équation de Poisson est linéaire. En effet, considérons deux distributions de masse de densité volumique ρ_1 et ρ_2 , alors :

$$\begin{cases} \Delta(\phi_1) - 4\pi\rho_1\mathcal{G} = 0 \\ \Delta(\phi_2) - 4\pi\rho_2\mathcal{G} = 0 \end{cases}$$

Additionnons membre à membre :

$$\Delta(\phi_1 + \phi_2) - 4\pi(\rho_1 + \rho_2)\mathcal{G} = 0$$

En posant $\phi = \phi_1 + \phi_2$ et $\rho = \rho_1 + \rho_2$:

$$\Delta(\phi) - 4\pi\rho\mathcal{G} = 0$$

Donc si ϕ_1 et ϕ_2 sont solutions de l'équation de Poisson pour les distributions ρ_1 et ρ_2 , alors leur somme est solution pour la distribution $\rho_1 + \rho_2$, et l'équation de Poisson est linéaire.

Théorème 6.4.4 : Équation de Laplace (cas « extérieur »)

En posant $\rho = 0$ dans l'équation de Poisson, nous retrouvons le cas « extérieur » :

$$\Delta(\phi) = 0$$

Chapitre 7

LES FORCES FICTIVES

Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des forces dites *fictives* car elles ne créent pas le mouvement. Elles ne sont dues qu'au mouvement de l'observateur, on peut les annuler en changeant de référentiel (de ce point de vue, la gravitation est une force fictive). Dans les référentiels non galiléens, nous pouvons utiliser la mécanique développée dans les référentiels galiléens (RFD et théorème du moment cinétique) à la condition d'ajouter ces forces. C'est là leur utilité.

7.1 Loi de composition des vitesses

Définition 7.1.1 : Vecteur position

Soit un mobile et soit M le point où se situe son centre de gravité. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, son vecteur position a pour expression :

$$\overrightarrow{OM} \stackrel{\text{déf}}{=} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dans un référentiel $\mathcal{R}'$ quelconque, il a pour expression :

$$\overrightarrow{O'M} \stackrel{\text{déf}}{=} x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Dans le domaine non relativiste le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels, par exemple pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$,

$$t = t'$$

de sorte que les dérivations par rapport à t et t' sont équivalentes.

Notation 7.1.1

La dérivée par rapport au temps sera notée $d_t^{\mathcal{R}}$ pour un observateur fixe dans $\mathcal{R}$, et $d_t^{\mathcal{R}'}$ pour un observateur fixe dans $\mathcal{R}'$.

Soient $\vec{V}(t)$ la vitesse non constante de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, $\vec{v}(t)$ la vitesse du mobile dans $\mathcal{R}$, et $\vec{v}'(t)$ sa vitesse dans $\mathcal{R}'$.

Théorème 7.1.1 : Loi de composition des vitesses

Par changement de référentiel, les vecteurs vitesse du mobile sont liés par la loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}$$

où $\vec{V}(t)$ est la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et $\vec{\omega}(t)$ est la vitesse angulaire de rotation sur lui-même de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$.

Remarque 7.1.1

On vérifie que si $\vec{v}'(t) = \vec{0}$ et $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$ alors on a bien $\vec{v}(t) = \vec{V}(t)$.

Démonstration. Dérivons dans $\mathcal{R}$ par rapport à t la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t) \\ d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM} &= d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OO'} + d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Définition 7.1.2 : Vitesse absolue

La vitesse du mobile dans $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM} \\ &= d_t^{\mathcal{R}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

Définition 7.1.3 : Vitesse relative des référentiels

- La vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OO'} \\ &= d_t^{\mathcal{R}} (x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k}) \\ &= \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j} + \dot{z}_{O'}\vec{k} \end{aligned}$$

- La vitesse de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{V}'(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}'} \overrightarrow{O'O} \\ &= d_t^{\mathcal{R}'} (x'_O\vec{i}' + y'_O\vec{j}' + z'_O\vec{k}') \\ &= \dot{x}'_O\vec{i}' + \dot{y}'_O\vec{j}' + \dot{z}'_O\vec{k}' \end{aligned}$$

Remarque 7.1.2

Supposons que vu de $\mathcal{R}$, le référentiel $\mathcal{R}'$ ne fasse que tourner sur lui-même. Alors, vu de $\mathcal{R}'$, le référentiel $\mathcal{R}$ décrit un cercle autour de $\mathcal{R}'$. Les vitesses relatives respectives $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont donc en général très différentes.

En se servant des deux définitions (7.1) de la présente page devient :

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} \quad (7.2)$$

Vu de $\mathcal{R}$, les vecteurs de base de $\mathcal{R}'$ varient dans le temps :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} &= d_t^{\mathcal{R}} (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}') \\ &= \dot{x}' \vec{i} + \dot{y}' \vec{j} + \dot{z}' \vec{k}' + x' d_t^{\mathcal{R}} \vec{i} + y' d_t^{\mathcal{R}} \vec{j} + z' d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' \end{aligned}$$

Définition 7.1.4 : Vitesse relative

La vitesse du mobile dans $\mathcal{R}'$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}'} \overrightarrow{O'M} \\ &= d_t^{\mathcal{R}'} (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}') \\ &= \dot{x}' \vec{i} + \dot{y}' \vec{j} + \dot{z}' \vec{k}' \end{aligned}$$

Avec cette définition

$$d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} = \vec{v}' + x' d_t^{\mathcal{R}} \vec{i} + y' d_t^{\mathcal{R}} \vec{j} + z' d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' \quad (7.3)$$

On suppose que les axes Oz et $O'z'$ ont même direction et même sens, de sorte que $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ soient équipollents. Appelons $\alpha(t)$ l'angle orienté de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, qui est l'angle de rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ à l'instant t .

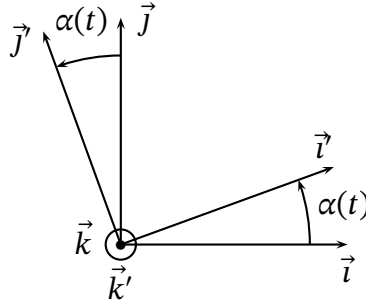


FIG. 7.1 – Rotation de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' = -\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{i} + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{j} \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' = -\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{i} - \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{j} \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' = \dot{\alpha} \vec{j}' \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' = -\dot{\alpha} \vec{i}' \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' = \vec{0} \end{cases}$$

Par conséquent (7.3) de la présente pages'écrit :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} &= \vec{v}' + x' \dot{\alpha} \vec{j}' - y' \dot{\alpha} \vec{i}' \\ &= \vec{v}' + \dot{\alpha} (x' \vec{j}' - y' \vec{i}') \end{aligned} \quad (7.4)$$

Définition 7.1.5 : Pseudovecteur vitesse angulaire relative

Le pseudovecteur vitesse angulaire de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$\vec{\omega}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} (d_t^{\mathcal{R}} \alpha) \vec{k} = \dot{\alpha} \vec{k}$$

Appelons $\alpha'(t)$ l'angle orienté de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$, qui est l'angle de rotation de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ à l'instant t , et tel que $\alpha' = -\alpha$. Le pseudovecteur vitesse angulaire de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}'(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} (d_t^{\mathcal{R}'} \alpha') \vec{k}' = \dot{\alpha}' \vec{k}' = -\dot{\alpha} \vec{k} \\ \vec{\omega}'(t) &= -\vec{\omega}(t) \end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite de (7.4) page précédente est un produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} y' \\ \dot{\alpha} x' \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\alpha} (x' \vec{j}' - y' \vec{i}') \end{aligned}$$

si bien que (7.4) page précédente devient :

$$d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) \quad (7.5)$$

Avec ce résultat, la loi de composition des vitesses (7.2) page 80 s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) \quad \square$$

Remarque 7.1.3

La relation (7.3) page précédente devient :

$$d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} = d_t^{\mathcal{R}'} \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \quad (7.6)$$

Remarque 7.1.4

On peut obtenir ce résultat en utilisant une démonstration purement algébrique :

$$\begin{aligned} \vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 1 \\ d_t^{\mathcal{R}} (\vec{i}' \cdot \vec{i}') &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' + d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 0 \\ 2(\vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}') &= 0 \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' &\perp \vec{i}' \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' &= \vec{\omega} \times \vec{i}' \end{aligned}$$

où $\vec{\omega}$ est pour l'instant un vecteur indéterminé.

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{j}' &= 0 \\ d_t^R(\vec{i}' \cdot \vec{j}') &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^R \vec{j}' + \vec{j}' \cdot d_t^R \vec{i}' &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^R \vec{j}' &= -\vec{j}' \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{i}' \right)\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 11.1.1 page 139 donné en annexe :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot d_t^R \vec{j}' &= -\vec{i}' \cdot \left(\vec{j}' \times \vec{\omega} \right) \\ &= \vec{i}' \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{j}' \right) \\ d_t^R \vec{j}' &= \vec{\omega} \times \vec{j}'\end{aligned}$$

De même pour le vecteur $\vec{k}$:

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{k}' &= 0 \\ d_t^R \vec{k}' &= \vec{\omega} \times \vec{k}'\end{aligned}$$

En posant $\vec{k}'$ comme axe de rotation,

$$\begin{aligned}d_t^R \vec{k}' &= \vec{0} \\ \vec{\omega} \times \vec{k}' &= \vec{0}\end{aligned}$$

soit,

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}'$$

En appliquant ces résultats à (7.3) page 81 puis à (7.2) page 80, nous obtenons la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}' + x' \left(\vec{\omega} \times \vec{i}' \right) + y' \left(\vec{\omega} \times \vec{j}' \right) \\ &= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\end{aligned}$$

Définition 7.1.6 : Vitesse d'entraînement

La vitesse d'entraînement est la vitesse du point P fixe dans le référentiel mobile ($\vec{v}'_p = \vec{0}$), coïncidant avec le point M à l'instant t_0 :

$$\vec{v}_e(t_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{V}(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0)$$

Les points P et M étant superposés à t_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'M}(t_0) &= \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{V}(t_0) + \vec{v}'(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \vec{V}(t_0) + \vec{v}'(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{v}(t_0) &= \vec{v}'(t_0) + \vec{v}_e(t_0)\end{aligned}$$

Les trajectoires de P et M étant différentes sauf si le corps est fixe dans $\mathcal{R}'$, en général :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{O'M}) &\neq d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{O'P}) \\ d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &\neq d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) \\ d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &\neq d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) \\ d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v} &\neq d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{v_e}) \end{aligned}$$

7.2 Loi de composition des accélérations

Théorème 7.2.1 : Loi de composition des accélérations

Par changement de référentiel, les vecteurs accélération du corps sont liés par la loi de composition des accélérations

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

dans laquelle $\vec{a}$ est l'accélération du corps dans $\mathcal{R}$, $\vec{a}'$ est l'accélération du corps dans $\mathcal{R}'$, $\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement et $\vec{a}_c$ l'accélération de Coriolis.

Démonstration. Dérivons dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps, la loi de composition des vitesses du théorème 7.1.1 page 80 :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v} &= d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{V} + d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v'} + d_t^{\mathcal{R}}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) \\ &= d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{V} + d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v'} + d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega} \times d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{O'M} \end{aligned}$$

Définition 7.2.1 : Accélération absolue

L'accélération absolue du corps dans le référentiel $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{a} &\stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}}(d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{OM}) \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Définition 7.2.2 : Accélération relative des référentiels

L'accélération relative de $\mathcal{R}'$ vu de $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$\vec{A} \stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v'}$$

Avec ces définitions :

$$\vec{a} = \vec{A} + d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega} \times d_t^{\mathcal{R}}\overrightarrow{O'M}$$

En utilisant (7.5) page 82, nous avons :

$$\vec{a} = \vec{A} + d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) \quad (7.7)$$

La relation (7.6) page 82 s'applique à tout vecteur exprimé dans $\mathcal{R}'$ et dérivé dans $\mathcal{R}$. Appliquée au vecteur $\vec{v}'$, elle donne :

$$d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' = d_t^{\mathcal{R}'} \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Définition 7.2.3 : Accélération relative

L'accélération relative est l'accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a}' \stackrel{\text{déf}}{=} d_t^{\mathcal{R}'} \vec{v}'$$

La relation (7.7) devient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{A} + d_t^{\mathcal{R}'} \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) \\ &= \vec{A} + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (7.8)$$

Soit H la projection orthogonale du point M sur l'axe de rotation $O'z'$ du repère $\mathcal{R}'$.

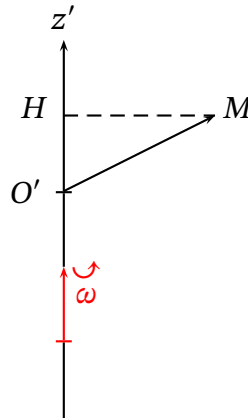


FIG. 7.2 – Projection du point M sur l'axe de rotation

En utilisant le théorème 11.2.1 page 140 donné en annexe, l'avant dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'M}) - \overrightarrow{O'M} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \vec{\omega} (\omega O'H) - \overrightarrow{O'M} \omega^2 \\ &= \overrightarrow{O'H} \omega^2 - \overrightarrow{O'M} \omega^2 \\ &= \overrightarrow{MH} \omega^2 \end{aligned}$$

Ce terme est toujours dirigé vers le centre de rotation instantané.

Définition 7.2.4 : Accélération centripète

Le terme $\overrightarrow{MH} \omega^2$ s'appelle accélération centripète.

La relation (7.8) s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{MH} \omega^2 + 2\dot{\vec{\omega}} \times \vec{v}' \quad (7.9)$$

Définition 7.2.5 : Accélération d'entraînement

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point P fixe dans le référentiel mobile ($\vec{v}'_P = \vec{0}$), coïncidant avec le point M à l'instant t_0 :

$$\vec{a}_e(t_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)$$

L'accélération d'entraînement contient l'accélération relative des référentiels, l'accélération de la vitesse angulaire et l'accélération centripète. A l'instant t_0 , les points P et M étant superposés, nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0) &= \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_e(t_0) = \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)$$

Définition 7.2.6 : Accélération de Coriolis

L'accélération de Coriolis a pour expression,

$$\vec{a}_c \stackrel{\text{déf}}{=} 2\dot{\vec{\omega}} \times \vec{v}'$$

Avec les définitions 7.2.5 et 7.2.6, (7.9) s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

□

Remarque 7.2.1

La dérivée dans $\mathcal{R}$ de la vitesse d'entraînement donne l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}_e &= d_t^{\mathcal{R}} \vec{v} + d_t^{\mathcal{R}} (\dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P}) \\ &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P} + \dot{\vec{\omega}} \times d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'P} \end{aligned}$$

En utilisant (7.6) page 82 puis le théorème 11.2.1 page 140 donné en annexes :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}_e &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P} + \dot{\vec{\omega}} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P}) \\ &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{MH} \omega^2 \\ &= \vec{a}_e \end{aligned}$$

7.3 Forces dans un référentiel non galiléen

Théorème 7.3.1 : RFD dans un référentiel non galiléen

Soient $\sum \vec{F}^{\text{ext}}$ la somme des modèles des forces extérieures réelles s'exerçant sur un système. La RFD dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = \frac{d\vec{p}'}{dt}$$

et, lorsque la masse du système est constante :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m \vec{a}'$$

Démonstration. La RFD dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse m du système étant supposée constante :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m \vec{a}$$

Avec le théorème 7.2.1 page 84 nous avons :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{\text{ext}} &= m (\vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c) \\ &= m \vec{a}' + m \vec{a}_e + m \vec{a}_c \end{aligned}$$

Définition 7.3.1 : Force d'inertie d'entraînement

La force d'inertie d'entraînement a pour expression :

$$\vec{F}_e \stackrel{\text{déf}}{=} -m \vec{a}_e$$

Définition 7.3.2 : Force de Coriolis

La force de Coriolis a pour expression :

$$\vec{F}_c \stackrel{\text{déf}}{=} -m \vec{a}_c$$

Par conséquent, on a bien :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m \vec{a}'$$

Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, il faut ajouter aux forces extérieures réelles $\vec{F}^{\text{ext}}$ s'exerçant sur le système, les forces fictives d'entraînement $\vec{F}_e$ et de Coriolis $\vec{F}_c$. $\square$

7.4 Exemple de force fictive : la force centrifuge

Le système étudié est un corps de centre de gravité M et de masse m , tenu par un fil et tournant avec la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ autour de l'axe Oz d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On considère le référentiel $\mathcal{R}'$ de même centre O que $\mathcal{R}$, dont l'axe Oz' est confondu avec l'axe Oz . Ce référentiel tourne autour de cet axe à la même vitesse angulaire $\vec{\omega}$ que le corps, de sorte que celui-ci soit immobile dans $\mathcal{R}'$ et soit toujours sur l'axe Ox' : $\overrightarrow{OM} = x'\vec{t}'$

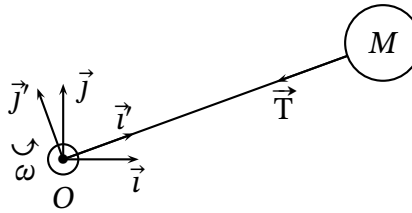


FIG. 7.3 – Rotation du corps M vue de dessus

7.4.1 Dans le référentiel galiléen

Le corps étant fixe dans $\mathcal{R}'$, sa vitesse $\vec{v}'$ et son accélération $\vec{a}'$ sont nulles.

D'après la déf. 7.2.6 page 86, l'accélération de Coriolis nulle : $\vec{a}_c = \vec{0}$

L'accélération relative des référentiels est nulle par hypothèse : $\vec{A} = \vec{0}$,

La variation de la vitesse angulaire est nulle également : $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

Dans (7.9) page 86 il ne reste que l'accélération centripète :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{MO} \omega^2 \\ &= -\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

où $r \vec{e}_r$ est le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires. La RFD donne la tension du fil :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{\text{ext}} &= m \vec{a} \\ \vec{T} &= -m\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

7.4.2 Dans le référentiel non galiléen

Écrivons la RFD pour un observateur dans le référentiel $\mathcal{R}'$:

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m \vec{a}'$$

L'accélération de Coriolis étant nulle, d'après la déf. 7.3.2 page 87 la force de Coriolis est nulle :

$$\begin{aligned} \vec{F}_c &= -m \vec{a}_c \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

L'accélération relative des référentiels étant nulle et la vitesse angulaire constante, il ne reste que l'accélération centripète. D'après la déf. 7.3.1 page 87 la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -m \vec{a}_e \\ &= m\omega^2 r \vec{e}_r \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + m\omega^2 r \vec{e}_r = m \vec{a}'$$

Définition 7.4.1 : Force centrifuge

La force centrifuge a pour expression :

$$\vec{F}_n \stackrel{\text{déf}}{=} m\omega^2 r \vec{e}_r$$

Le corps étant immobile dans $\mathcal{R}'$, son accélération est nulle :

$$\vec{T} + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Pour un observateur dans $\mathcal{R}'$, la force centrifuge s'exerce sur tous les corps immobiles dans $\mathcal{R}'$ en plus des forces réelles (la tension du fil). Elles permettent à l'observateur dans $\mathcal{R}'$ d'appliquer la RFD, la somme des forces est nulle pour les objets immobiles.

Chapitre 8

LE PENDULE BALISTIQUE

8.1 Description

Le pendule balistique permet de mesurer la vitesse d'un projectile. Un sac de sable est relié par l'intermédiaire d'une tige rigide au bras horizontal (Oz) d'une potence, autour duquel il peut tourner librement et sans frottement (fig. 8.1 de la présente page).

À l'instant t_0 le sac est au repos dans le référentiel terrestre (O, x, y, z) supposé galiléen. On note M la masse du sac, G son centre de gravité et J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, c.-à-d. la répartition de sa masse en fonction du carré de la distance à l'axe de rotation (Oz). On note l la distance OG .

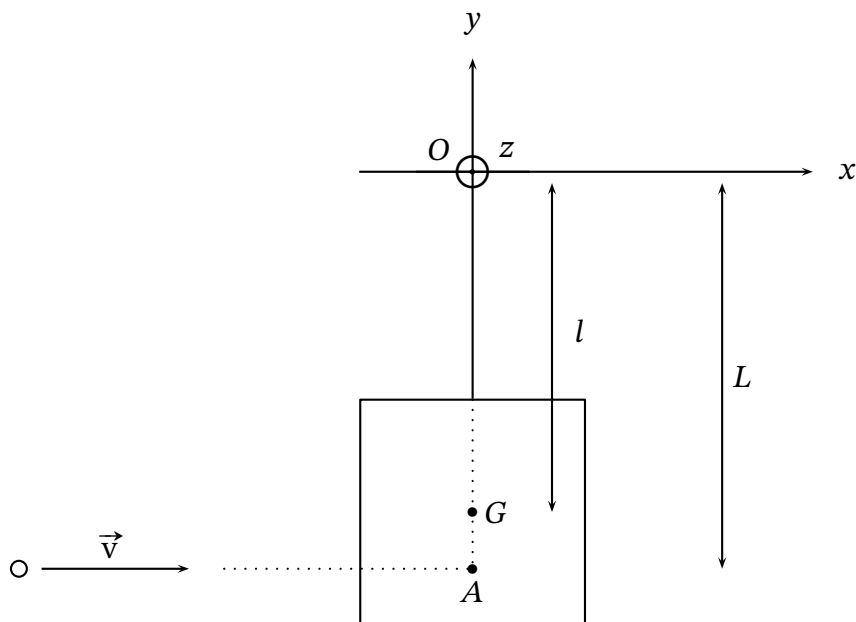


FIG. 8.1 – Pendule balistique avant impact

Remarque 8.1.1

L'utilisation d'une corde au lieu d'une tige rigide autoriserait une rotation du sac de sable autour de son point d'attache avec la corde, ce qui compliquerait la résolution de ce problème.

À l'instant t_0 , un projectile (p) de masse m , de vecteur position $\vec{p}(t)$ et de dimensions négligeables, pénètre le sac de sable avec un vecteur vitesse purement horizontal $\vec{v}$, donc au sommet de sa trajectoire, et s'arrête au point A à l'instant t_1 . Nous supposons que A est situé sur la droite verticale (OG). On note L la distance OA .

La durée $t_1 - t_0$ de l'impact, le sac et le projectile prennent la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$ autour de l'axe de rotation (Oz). Le mouvement du sac étant un mouvement de rotation, nous devons utiliser le « théorème » du moment cinétique.

8.2 Théorème du moment cinétique

1) Première méthode : le système étudié est le sac de sable et le projectile, noté ($s + p$).

Avant l'impact, les forces extérieures exercées sur le système sont le poids du sac $\vec{P}_s$, la tension dans la tige $\vec{T}$ et le poids du projectile $\vec{P}_p$, avec :

$$\vec{P}_s = -\vec{T}$$

Cette relation n'est plus vraie après l'impact.

Remarque 8.2.1

Les poids du sac et du projectile sont des forces extérieures au système. Elles sont dues à la présence de la Terre.

Le pseudovecteur moment cinétique est noté $\vec{\sigma}$. Le théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque q fixe dans (O, x, y, z) s'écrit :

$$\sum \vec{M}_q(\vec{F}^{\text{ext}}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{q(s+p)} \\ \vec{M}_q(\vec{P}_s) + \vec{M}_q(\vec{P}_p) + \vec{M}_q(\vec{T}) \Rightarrow \frac{\vec{\sigma}_{q(s+p)}(t_1) - \vec{\sigma}_{q(s+p)}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Remarque 8.2.2

Les forces intenses et de courte durée qui apparaissent lors d'un choc sont appelées *percussions*. On considère qu'un solide ne bouge presque pas lorsqu'il subit une percussion, seule sa vitesse varie. C'est le cas par exemple du rebond d'une balle contre un mur.

En acquérant en très peu de temps une vitesse de rotation autour du bras horizontal, le sac de sable exerce soudainement une force centrifuge $\vec{F}_c = -M\omega^2 \vec{l}$ sur la tige. La tension dans la tige augmente brutalement pendant le choc alors que le sac de sable ne bouge presque pas. Cette percussion tend à casser la tige et le bras de la potence, la tension est égale et opposée à la réaction $\vec{R}$ de l'axe de rotation.

Prenons q confondu avec O car en ce point les moments de force sont identiquement nuls : le temps de l'impact les forces passent toutes approximativement par O :

$$\vec{M}_O(\vec{P}_s) + \vec{M}_O(\vec{P}_p) + \vec{M}_O(\vec{T}) \Rightarrow \vec{0}$$

Remarque 8.2.3

En toute rigueur le point O n'est pas fixe dans un référentiel galiléen car la Terre se met à tourner lors de l'impact dans le sac. Pour s'en rendre compte il suffit d'imaginer la même expérience avec une masse terrestre beaucoup plus faible. La masse de la Terre étant très grande par rapport aux masses du projectile et du sac, O est approximativement fixe dans un référentiel galiléen. Cette approximation permet de ne pas prendre comme système un système isolé. En effet, si l'on remplaçait la Terre par une boule de quelques kilos, il faudrait choisir le système isolé constitué du projectile, du sac, de la tige, de la potence et de la boule. L'interaction gravitationnelle serait alors négligeable.

La variation dans le temps du moment cinétique du système $(s + p)$ par rapport à O est nulle, il se conserve :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O(s+p)}(t_1) &= \vec{\sigma}_{O(s+p)}(t_0) \\ J\vec{\omega} + \vec{p}(t_1) \times m[\vec{\omega} \times \vec{p}(t_1)] &= \vec{p}(t_0) \times m\vec{v} \\ J\vec{\omega} + mL^2\vec{\omega} &= mL\vec{v} \\ (J + mL^2)\vec{\omega} &= mL\vec{v} \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\vec{\omega} = \frac{mL\vec{v}}{J + mL^2} \quad (8.2)$$

Remarque 8.2.4

Une réécriture de (8.1) met en évidence le transfert de moment cinétique entre le projectile et le sac :

$$J\vec{\omega} = mL(\vec{v} - L\vec{\omega})$$

Lorsque la masse du projectile est négligeable devant celle du sac de sable $m \ll M$:

$$\vec{\omega} \approx \frac{mL\vec{v}}{J}$$

Remarque 8.2.5

À partir de (8.1) de la présente page, cherchons quelles sont les approximations qui donnent la conservation de la quantité de mouvement. Si la dimension verticale du sac est petite devant l et/ou si la dimension verticale du sac est petite par rapport à ses dimensions horizontales alors $J \approx Ml^2$ et $L \approx l$, et (8.1) devient :

$$\begin{aligned} (Ml^2 + ml^2)\vec{\omega} &\approx ml\vec{v} \\ (M + m)\vec{V} &\approx m\vec{v} \end{aligned}$$

où $\vec{V} = l\vec{\omega}$ est la vitesse horizontale du sac et du projectile après le choc. Par conséquent, si au moins l'une des deux conditions précédentes est respectée, nous pouvons écrire la conservation de la quantité de mouvement lors de l'impact plutôt que la conservation du moment cinétique.

2) Seconde méthode : le système étudié est le sac de sable seul, noté (s) .

Le système est à masse variable, sa masse passe de M à $M + m$. Avant l'impact, les forces extérieures exercées sur le système sont le poids du sac $\vec{P}_s$ et la tension dans la tige $\vec{T}$. Pendant l'impact apparaissent la force $\vec{f}_p$ du projectile sur le sac et le poids du projectile $\vec{P}_p$ lorsque la masse du système passe de M à $M + m$.

Le théorème du moment cinétique par rapport au point O s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{F}^{\text{ext}}) &\overset{=}{=} \frac{d}{dt} \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)} \\ \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{P}_{(s+p)}) + \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{T}) + \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{f}_p) &\overset{=}{=} \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_1) - \overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_0)}{t_1 - t_0} \\ \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{f}_p) &\overset{=}{=} \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_1)}{t_1 - t_0} \end{aligned} \quad (8.3)$$

La RFD donne :

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{M}_O(\vec{f}_p) &= -L\vec{j} \times m \frac{dv}{dt} \vec{i} \\ &= mL \frac{dv}{dt} \vec{k} \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} mL \frac{v-0}{t_1-t_0} \vec{k} &= \frac{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{O(s)}(t_1)}{t_1-t_0} \\ mLv &= J\omega + mL^2\omega \end{aligned}$$

Nous retrouvons (8.1) page précédente.

8.3 Conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie mécanique permet de trouver l'expression de la vitesse du projectile avant l'impact. Prenons la position initiale du centre de gravité du système sac-projectile comme origine de l'énergie potentielle. Au temps t_1 , juste après la fin de l'impact, l'énergie potentielle du système sac-projectile est nulle et l'énergie cinétique est maximale :

$$E_{cin}(t_1) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} (J + mL^2) \omega^2$$

Avec l'expression de omega (8.2) page précédente :

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_1) &= \frac{1}{2} (J + mL^2) \left(\frac{mLv}{J + mL^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{mL^2}{J + mL^2} \right) v^2 \\ &\approx \frac{1}{2} m \left(\frac{mL^2}{J} \right) v^2 \quad m \ll M \end{aligned}$$

On note ici que pour $m \ll M$ cette énergie cinétique est très petite. Nous verrons au § 8.4 que l'énergie cinétique du projectile est en grande partie transformée en énergie thermique.

On mesure l'angle maximal θ_{max} atteint par le système sac-projectile à l'instant t_2 . L'énergie cinétique est alors nulle et l'énergie potentielle maximale :

$$\begin{aligned} E_{pot}(t_2) &= Mgl(1 - \cos(\theta_{max})) + mgL(1 - \cos(\theta_{max})) \\ &= (Ml + mL)g(1 - \cos(\theta_{max})) \end{aligned}$$

Lorsque la masse du projectile est négligeable devant celle du sac de sable, en appelant h_{max} la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité du sac de sable :

$$\begin{aligned} E_{pot}(t_2) &\approx Mgl(1 - \cos(\theta_{max})) \quad m \ll M \\ &\approx Mgh_{max} \quad m \ll M \end{aligned}$$

En négligeant les frottements de l'air et les frottements au niveau de l'axe, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{méca}(t_1) &= E_{méca}(t_2) \\ E_{cin}(t_1) + E_{pot}(t_1) &= E_{cin}(t_2) + E_{pot}(t_2) \\ \frac{m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 &= (Ml + mL)g(1 - \cos(\theta_{max})) \\ v &= \frac{1}{mL} \sqrt{2(J + mL^2)(Ml + mL)g(1 - \cos(\theta_{max}))} \\ &\approx \frac{1}{mL} \sqrt{2JMgh_{max}} \quad m \ll M \end{aligned}$$

Avec $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2(\theta/2)$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{(J + mL^2)(Ml + mL)g} \\ &\approx \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{JMgl} \quad m \ll M \end{aligned} \tag{8.4}$$

8.4 Conservation de l'énergie totale

On peut à présent calculer le transfert de chaleur Q du projectile au sac de sable lors de l'impact. On écrit la conservation de l'énergie totale lors du transfert d'énergie cinétique au moment de l'impact :

$$\begin{aligned} Q &= E_{cin}(t_0) - E_{cin}(t_1) \\ &= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 \\ &= \frac{m(J + mL^2) - m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{J}{J + mL^2} \right) v^2 \\ &\approx \frac{1}{2} mv^2 \quad m \ll M \end{aligned} \tag{8.5}$$

La quasi totalité de l'énergie cinétique du projectile est transformée en énergie thermique, une faible partie est transformée en énergie cinétique du sac et du projectile.

8.5 Condition pour annuler la percussion

Le théorème du moment cinétique et la relation fondamentale de la dynamique permettent de trouver la hauteur d'impact h qui annule une partie de la percussion sur l'axe (la percussion due à la force centrifuge de mise en rotation du sac de sable ne peut être annulée).

Soit $\vec{f}$ la force exercée par le projectile sur le sac, le théorème du moment cinétique (8.3) page 94 se réécrit :

$$-h\vec{j} \times f\vec{i} = \frac{d}{dt}(J\omega + mh^2\omega)\vec{k}$$

$$h \approx \frac{J\dot{\omega}}{f}$$

La percussion sur (Oz) est nulle si f sert intégralement à accélérer le sac de sable (et n'est donc pas transmise à l'axe (Oz)). La RFD donne :

$$f = \frac{d}{dt}(Ml\omega)$$

$$= Ml\dot{\omega}$$

Nous avons donc :

$$h = \frac{J}{Ml} \quad (8.6)$$

Cette hauteur est particulière. En effet, la période du pendule pesant de moment d'inertie J , de masse M et de longueur l s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{gMl}}$$

Celle du pendule simple de longueur h s'écrit :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Si on égale ces deux périodes on retrouve (8.6). Il faut donc que le projectile percute le sac de sable à la distance h de l'axe de rotation, égale à la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule balistique. En effet, lorsque le projectile percute le centre de gravité du sac de sable, celui-ci prend un mouvement de translation rectiligne seul. Or il doit aussi avoir un mouvement de rotation. L'impact doit donc se trouver sous le centre de gravité pour correspondre au mouvement naturel du sac de sable autour de l'axe (Oz).

En remplaçant J par Lml dans (8.4) page précédente, nous obtenons pour la vitesse :

$$v = \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{g(Lml + mL^2)(Ml + mL)}$$

$$v = \frac{2(Ml + mL)}{m} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{\frac{g}{L}}$$

En remplaçant J par Lml dans (8.5) page précédente, nous avons :

$$Q = \frac{1}{2} m \left(\frac{Ml}{Ml + mL} \right) v^2$$

Chapitre 9

LE PROBLÈME DE KEPLER

Il s'agit de déterminer l'équation de l'orbite d'une planète à partir de la mécanique de Newton, en ne considérant que la seule force de gravitation, en négligeant l'interaction gravitationnelle des planètes entre elles, et en supposant les astres ponctuels. Ce problème est aussi connu sous le nom de « problème des deux corps ».

9.1 Coordonnées polaires

Etant donné que l'on traite ici de la révolution d'une planète autour du Soleil, il est avantageux de passer en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . Les axes des z en coordonnées rectangulaires (x, y, z) et en cylindriques sont supposés confondus. Nous nous intéressons ici aux coordonnées polaires (ρ, θ) prises dans le plan (x, y) .

9.1.1 Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée

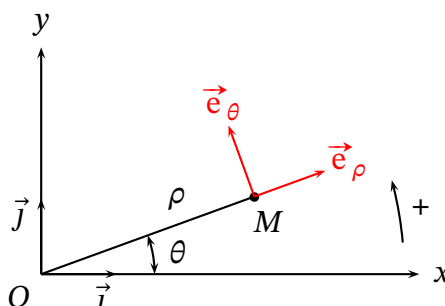


FIG. 9.1 – Vecteurs de la base polaire orthonormée

1) Première méthode

En se servant de la figure 9.1, exprimons les vecteurs unitaires de base $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction

de ceux de la base rectangulaire normée $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

2) Deuxième méthode

Soit M un point de coordonnées polaires (ρ, θ) et de coordonnées rectangulaires (x, y) . Le changement de coordonnées de polaires vers rectangulaires s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Déterminons les vecteurs unitaires de base $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en différentiant le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base rectangulaire normée $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ d\vec{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right)_\theta d\rho + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right)_\rho d\theta \\ &= [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] d\rho + \rho [-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}] d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r}(\rho, \theta) = \vec{e}_\rho d\rho + \rho \vec{e}_\theta d\theta$$

9.1.2 Expression du vecteur position

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ &= \rho [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] \\ &= \rho \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

9.1.3 Dérivée des vecteurs de base

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} - \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \end{cases}$$

9.1.4 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta\end{aligned}\tag{9.1}$$

9.1.5 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta\end{aligned}\tag{9.2}$$

9.2 Force centrale - Cas général

9.2.1 Centre d'inertie

Soient m et M les masses de deux astres situés respectivement aux points A et B .

Définition 9.2.1 : Centre d'inertie

Le point G tel que

$$m \vec{GA} + M \vec{GB} = \vec{0}$$

est appelé centre d'inertie, centre de gravité ou centre de masse du système.

Le système binaire formé des deux astres est supposé isolé, son centre d'inertie G a un mouvement inertiel. On le suppose fixe au centre du référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

Définition 9.2.2 : Référentiel de centre de masse

Le référentiel $\mathcal{R}$ de centre G est appelé référentiel de centre de masse.

Notons $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GA}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GB}$ les rayons vecteurs des astres dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 &= \vec{0} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m}{M}\vec{r}_1 \end{aligned} \quad (9.3)$$

9.2.2 Masse réduite

Déterminons les rayons vecteur des astres en fonction des données du problème, c.-à-d. en fonction du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$ reliant les deux astres :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} \end{aligned}$$

Avec (9.3) de la présente page :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{et} & & \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_1 + \frac{m}{M}\vec{r}_1 & & & &= -\frac{M}{m}\vec{r}_2 - \vec{r}_2 \\ &= \frac{m+M}{M}\vec{r}_1 & & & &= -\frac{m+M}{m}\vec{r}_2 \end{aligned}$$

et l'on a :

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m+M}\vec{r} \quad (9.4a)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{-m}{m+M}\vec{r} \quad (9.4b)$$

Le centre d'inertie se trouve sur le segment de droite $[AB]$ qui relie les deux astres.

Remarque 9.2.1

Le signe dans les expressions de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ dépend de la convention choisie pour définir $\vec{r}$, c.-à-d. $\vec{r} = \pm(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

9.2.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Le système binaire est isolé, la somme des forces se réduit à la seule force d'interaction gravitationnelle entre les deux astres. Écrivons la RFD dans $\mathcal{R}$ pour chacun de deux sous-systèmes constitués d'un astre. La force est ici extérieure aux sous-systèmes mais intérieure au système binaire :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^{\text{ext}} &= m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} & \text{et} & & \vec{F}_2^{\text{ext}} &= M \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \\ &= \frac{mM}{m+M} \frac{d^2 [(m+M)\vec{r}_1/M]}{dt^2} & & & &= \frac{-mM}{m+M} \frac{d^2 [(m+M)\vec{r}_2/m]}{dt^2} \end{aligned}$$

Ces deux relations amènent à poser la définition suivante :

Définition 9.2.3 : Masse réduite

Le rapport ayant pour dimension une masse

$$\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{mM}{m+M}$$

est appelée masse réduite.

Avec cette définition :

$$\vec{F}_1^{\text{ext}} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2^{\text{ext}} = -\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

La loi de l'action-réaction

$$\vec{F}_2^{\text{ext}} = -\vec{F}_1^{\text{ext}}$$

implique que les deux astres sont gouvernés par la même équation :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Cette équation coïncide formellement avec celle d'un point matériel de masse μ et de vecteur position $\vec{r}$, en mouvement sous l'action de la force extérieure $\vec{F}^{\text{ext}}$ dirigée vers un point fixe d'un référentiel galiléen. Toute force dirigée vers un point fixe est dite *centrale* :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = F \vec{e}_\rho$$

Nous pouvons à tout moment passer des rayons vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ au rayon vecteur $\vec{r}$ à condition de passer des masses m et M à la masse réduite μ , et vice versa. Si la trajectoire est établie pour le rayon vecteur $\vec{r}$, les trajectoires $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ seront obtenues grâce aux relations (9.4) page précédente.

Par symétrie du problème et isotropie de l'espace, chaque force attractive exercée par un astre sur l'autre est dirigée suivant la droite passant par les deux astres, vers le centre d'inertie du système. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ de centre de masse, ce dernier est un point fixe. Chaque force étant constamment dirigée vers ce centre fixe, le problème est dit à *force centrale*. Dans ce référentiel, les forces n'ont de composante que selon le vecteur $\vec{e}_\rho$, et le mouvement est donc plan (aucune force ne permet la sortie de ce plan). En écrivant ceci on fait l'hypothèse implicite que le moment cinétique de chaque astre se conserve, comme nous allons le voir. En utilisant l'accélération en coordonnées polaires (9.2) page 99, la RFD s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{ext}} &= \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ F \vec{e}_\rho &= \mu \frac{d^2(\rho \vec{e}_\rho)}{dt^2} \\ &= \mu (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + \mu (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

- la RFD selon $\vec{e}_\rho$ donne la première relation suivante

$$\begin{aligned} \mu (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) &= F \\ \mu \ddot{\rho} &= \mu \rho \dot{\theta}^2 + F \end{aligned} \tag{9.5}$$

où $\mu \rho \dot{\theta}^2$ est la force centrifuge.

- la RFD selon $\vec{e}_\theta$ donne la seconde relation :

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} &= 0 \\ 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 9.2.1 : Loi des aires

La relation

$$\rho^2\dot{\theta} = C$$

est appelée loi des aires. C est la constante des aires, de dimensions le carré d'une longueur divisé par un temps L^2T^{-1} .

La loi des aires s'applique à $\vec{r}$, donc à chacun des astres du système binaire. Elle ne dépend pas du modèle de force, elle est donc valable pour toute force centrale et pas seulement pour la force gravitationnelle. Nous verrons que selon la *première loi de Kepler*, l'orbite des planètes est une ellipse dont l'un des foyer est le centre de gravité G du système planète-Soleil. La constante des aires est alors simplement le double de l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur de la planète, ce qui justifie son nom.

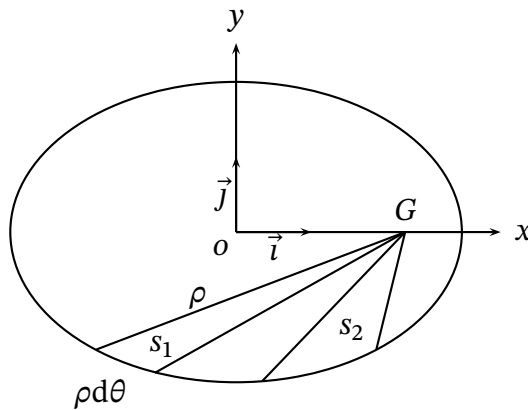


FIG. 9.2 – Aires balayées en des temps égaux

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire infinitésimale balayée par le rayon vecteur ρ d'un astre en un intervalle de temps infinitésimal dt . Cette aire est égale au demi-rectangle de côtés ρ et $\rho d\theta$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \rho \times \rho d\theta \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} \\ d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C dt \\ \int_0^s d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C \int_0^\tau dt \end{aligned}$$

$$s = \frac{1}{2} C \tau$$

Les aires s_1 et s_2 de la figure 9.2 balayées en des temps égaux sont égales. Nous énonçons la

Axiome 9.2.1 : Deuxième loi de Kepler

Le rayon vecteur d'un astre balaye des surfaces d'aires égales en des temps égaux.

En une période T , le rayon vecteur parcourt la surface totale de l'ellipse, d'aire πab :

$$\int_0^{\pi ab} d\mathcal{A} = \frac{1}{2} C \int_0^T dt$$

$$C = \frac{2\pi ab}{T}$$

(9.6)

En introduisant la pulsation ω , telle que $\omega = 2\pi/T$,

$$C = \omega ab$$

9.2.4 Conservation du moment cinétique

En utilisant la vitesse en coordonnées polaires (9.1) page 99, le vecteur moment cinétique $\vec{L}$ de la masse réduite μ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \mu \vec{v} \\ &= \rho \vec{e}_\rho \times \mu (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mu \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu \rho^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces extérieures :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \rho \vec{e}_\rho \times F \vec{e}_\rho \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Le moment cinétique est donc constant :

$$\vec{L} = \vec{C}^{ste}$$

$$L = \mu \rho^2 \dot{\theta}$$

(9.7)

Notons également la relation

$$L = \mu C$$

La loi des aires et la deuxième loi de Kepler ne sont autre que la conservation du module du moment cinétique lorsque la force est centrale. Le théorème de conservation du moment cinétique est plus général et plus puissant puisqu'il implique de plus que la trajectoire de chaque astre soit une courbe plane, dont le plan orbital est perpendiculaire au vecteur moment cinétique constant de l'astre, ce plan contenant les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$.

Servons-nous du module du moment cinétique pour réécrire la RFD selon $\vec{e}_\rho$ (9.5) page 101 :

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\mu\rho^3} + F$$

9.2.5 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique

Supposons le modèle de force F conservatif, il dérive par rapport à ρ d'une énergie potentielle E_p . Par symétrie du problème, l'énergie potentielle ne dépend explicitement que du rayon vecteur reliant les deux astres. La RFD selon $\vec{e}_\rho$ s'écrit :

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\mu\rho^3} - \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \quad (9.8)$$

La seule force présente étant conservative, l'énergie mécanique E se conserve. Le carré de la vitesse (9.1) page 99 permet d'écrire l'énergie cinétique de la masse réduite μ :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}\mu v^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

On en déduit l'énergie mécanique de la masse μ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + E_p(\rho) \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Remarque 9.2.2

Cette équation différentielle est la relation (9.8) intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, dérivons (9.9) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \mu\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{L^2\dot{\rho}}{\mu\rho^3} + \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{dE}{dt} \\ \mu\ddot{\rho} - \frac{L^2}{\mu\rho^3} + \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} &= 0 \end{aligned}$$

9.2.6 Intégration de l'équation différentielle du mouvement

La relation (9.9) est une intégrale première de la RFD selon $\vec{e}_\rho$ (9.8). Elle s'intègre par séparation des variables et donne la solution générale au problème sous la forme $t = t(\rho)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 &= E - E_p(\rho) - \frac{1}{2}\mu\rho^2\dot{\theta}^2 \\ \frac{d\rho}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \rho^2\dot{\theta}^2}\end{aligned}$$

Avec le module du moment cinétique, (9.7) page 103 :

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}} \quad (9.10)$$

a) lorsque ρ est croissant, $\rho(t_0) < \rho(t)$ et $d\rho/dt \geq 0$. Or $dt > 0$ donc $d\rho \geq 0$.

$$\begin{aligned}d\rho &= \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}} dt \\ t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}}\end{aligned} \quad (9.11)$$

b) lorsque ρ est décroissant, $\rho(t_0) > \rho(t)$ et $d\rho/dt \leq 0$. Or $dt > 0$ donc $d\rho \leq 0$.

$$\begin{aligned}d\rho &= -\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}} dt \\ t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}}\end{aligned}$$

Cette relation donne de façon implicite le rayon vecteur en fonction du temps. Pour obtenir l'équation de la trajectoire $\theta = \theta(\rho)$, reprenons le module du moment cinétique, (9.7) page 103 :

$$d\theta = \frac{L}{\mu\rho^2} dt$$

On pose $\theta(t = t_0) = \theta_0$.

a) lorsque ρ est croissant, en remplaçant dt par $d\rho$ grâce à (9.10) :

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}} \quad (9.12)$$

b) lorsque ρ est décroissant

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{-\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}}$$

9.2.7 Potentiel effectif

La RFD selon $\vec{e}_\rho$ (9.8) page 104 s'écrit :

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} \left[\frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) \right]$$

Le mouvement radial est similaire à un mouvement à une dimension (avec $\rho > 0$) dans un potentiel dit effectif (ou efficace).

Définition 9.2.4 : Potentiel effectif

On appelle potentiel effectif, le potentiel :

$$V_{eff}(\rho) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho)$$

où $L^2/(2\mu\rho^2)$ est appelé *énergie centrifuge*. La RFD selon de ce mouvement linéaire s'écrit

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$$

et l'énergie mécanique du mouvement à une dimension a pour expression :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_{eff}$$

9.2.8 Étude de la trajectoire

Lorsque les limites du domaine du mouvement sont atteintes, l'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie potentielle effective est donc maximale. Toute l'énergie mécanique du mouvement linéaire est sous forme potentielle :

$$\frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) = E$$

La vitesse radiale $\dot{\rho}$ est alors nulle mais pas la vitesse angulaire $\rho\dot{\theta}$, et la distance radiale ρ est extrémale. En ces points de rebroussement appelés apsides, périapside pour le point de la trajectoire le plus proche de l'autre astre, et apoapside pour celui le plus loin, la fonction $\rho(t)$ de croissante devient décroissante ou inversement.

Si le domaine de variation de ρ n'a qu'une limite inférieure, $\rho \geq \rho_{min}$, la trajectoire commence à l'infini et finit à l'infini. Si le domaine admet deux limites, $\rho_{max} \geq \rho \geq \rho_{min}$, le mouvement est fini et compris entre les cercles ρ_{min} et ρ_{max} . Cependant cela ne signifie pas que la trajectoire est fermée, elle ne repasse pas forcément exactement par les mêmes points avec le même vecteur vitesse au bout d'un temps fini. Entre deux passages par ρ_{max} en passant par ρ_{min} , le rayon vecteur a tourné d'un angle

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

Pour que la trajectoire soit fermée cet angle doit être une fraction rationnelle de 2π , de la forme :

$$\Delta\theta = \frac{m}{n} 2\pi$$

avec m et n entiers. Ainsi après n période de temps (par exemple n passages en ρ_{max}), l'angle aura tourné de m fois 2π , et la trajectoire se refermera. En général, pour une forme quelconque de l'énergie potentielle E_p , l'angle n'est pas une fraction rationnelle de 2π et la trajectoire n'est pas fermée. Elle remplit tout l'anneau compris entre ρ_{min} et ρ_{max} . Il n'existe que deux types de champs centraux pour lesquels les trajectoires sont fermées, les champs en $1/\rho$ et en ρ^2 . En général donc, la trajectoire a la forme suivante

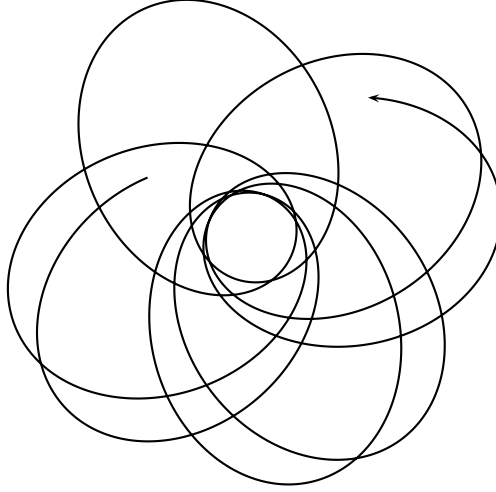


FIG. 9.3 – Trajectoire dans un champ central quelconque

Le champ en $1/\rho$ est celui de la gravitation non relativiste et celui en ρ^2 est celui de l'oscillateur spatial.

Si l'on prend $\theta = \theta_0$ aux apsides, les segments de trajectoire adjacents de chaque côté de ces points ne diffèrent que par le signe de θ :

$$\theta_{min} - \theta_{max} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

et

$$\theta_{max} - \theta_{min} = \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{-\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

$$\theta_{min} - \theta_{max} = - \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

La trajectoire est donc symétrique de part et d'autre de $\theta = \theta_0$. Par conséquent toute la trajectoire est symétrique par répétition de l'arc de trajectoire de ρ_{min} à ρ_{max} , puis de ρ_{max} à ρ_{min} , puis de ρ_{min} à ρ_{max} , etc. Cela concerne également les trajectoires infinies formées de deux branches symétriques, allant de l'infini à ρ_{min} puis de ρ_{min} à l'infini.

9.2.9 Cas où le rayon vecteur tend vers zéro

Dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique (9.9) page 104, l'énergie cinétique étant toujours positive :

$$0 < E - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - E_p(\rho)$$

$$\rho^2 E_p(\rho) < \rho^2 E - \frac{L^2}{2\mu}$$

Pour $L \neq 0$, c.-à-d. pour une trajectoire qui n'est pas rectiligne dirigée vers le centre de gravité commun, cette dernière relation est toujours vraie, en particulier pour un rayon vecteur tendant vers zéro. L'énergie mécanique étant constante, le terme associé tend vers zéro :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^2 E_p(\rho)] < \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 E - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L^2}{2\mu}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^2 E_p(\rho)] < -\frac{L^2}{2\mu}$$

Le terme de droite est constant et négatif, par conséquent celui de gauche ne peut tendre vers zéro. Donc ρ ne peut tendre vers zéro que si $E_p(\rho)$ tend vers $-\infty$ plus vite de ρ^2 vers zéro. Deux possibilités :

- soit $E_p(\rho) = \frac{-\alpha}{\rho^2}$ avec $\alpha > \frac{L^2}{2\mu}$
- soit $E_p(\rho) = \frac{-A}{\rho^n}$ avec A une constante positive quelconque et $n > 2$

En général donc, l'existence d'une énergie centrifuge empêche les corps de rejoindre le centre de gravité commun.

9.3 Force de gravitation

9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique

Reprenons la RFD selon le rayon vecteur (9.5) page 101 et la loi des aires (9.2.1) page 102 valables pour tout modèle de force centrale. Le modèle de Hooke pour la force de gravitation est en raison inverse du carré de la distance des deux astres (qui varie dans le temps). Notons $\mathcal{G}$ la constante de gravitation de dimensions $L^3 T^{-2} M^{-1}$. La RFD donne les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -\mathcal{G} \frac{mM}{\rho^2} \\ \rho^2 \dot{\theta} = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^3 \ddot{\rho} - \rho^4 \dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} M \rho \\ \rho^4 \dot{\theta}^2 = C^2 \end{cases}$$

$$\rho^3 \ddot{\rho} + \mathcal{G} M \rho - C^2 = 0$$

En raisonnant sur l'énergie plutôt que sur les forces, nous obtiendrons la même équation différentielle intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, la RFD est équivalente à la conservation de l'énergie mécanique lorsque les forces dérivent d'un potentiel. Le théorème de l'énergie cinétique permet de travailler sur la vitesse par l'intermédiaire de l'énergie cinétique, plutôt que sur l'accélération.

9.3.2 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique

Cherchons le potentiel de la force gravitationnelle exercée sur un astre, autrement dit l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(\rho)$ de cet astre dans le champ de gravitation de l'autre astre :

$$\begin{aligned} -\mathcal{G} \frac{mM}{\rho^2} \vec{e}_\rho &= -\vec{\text{grad}} E_{pp}(\rho) \\ &= -\frac{\partial E_{pp}(\rho)}{\partial \rho} \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

On pose $\alpha = \mathcal{G}mM$ constante toujours positive :

$$\frac{\alpha}{\rho^2} = \frac{dE_{pp}(\rho)}{d\rho}$$

Seule une différence d'énergie potentielle intervient si bien qu'elle est toujours définie à une constante additive près. Ajuster la valeur de cette constante nous permet de définir le zéro de l'énergie potentielle où cela nous convient le mieux.

- en fixant les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} dE_{pp} &= \frac{\alpha}{\rho^2} d\rho \\ \int_{\rho=+\infty}^{\rho} dE_{pp} &= \alpha \int_{\rho=+\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} \\ [E_{pp}]_{\rho=+\infty}^{\rho} &= -\alpha \left[\frac{1}{\rho} \right]_{\rho=+\infty}^{\rho} \\ E_{pp}(\rho) &= -\frac{\alpha}{\rho} \end{aligned}$$

- en raisonnant sur la constante d'intégration :

$$\begin{aligned} \int dE_{pp} &= \alpha \int \frac{d\rho}{\rho^2} \\ E_{pp} &= -\frac{\alpha}{\rho} + c^{ste} \end{aligned}$$

Prendre une constante nulle revient à poser $E_{pp} = 0$ en $\rho = +\infty$.

Remarque 9.3.1

Le potentiel effectif a pour expression

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2(m)}{2m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$$

Avec ce modèle d'énergie potentielle, le cas général (9.9) page 104 devient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} &= E \\ \mu^2\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2\mu\alpha}{\rho} &= 2E\mu\end{aligned}\tag{9.13}$$

D'après (9.11) page 105, l'équation $t = t(\rho)$ a pour expression :

$$t - t_0 = \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\alpha}{\rho}\right) - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}}$$

D'après (9.12) page 105, l'équation du mouvement $\rho = \rho(\theta)$ a pour expression :

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{\pm \frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu\left(E + \frac{\alpha}{\rho}\right) - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

Nous pouvons chercher à résoudre cette intégrale ou travailler directement sur l'équation différentielle.

9.3.3 Intégration de l'équation différentielle du mouvement

Pour intégrer l'équation différentielle et obtenir l'équation de la trajectoire de la forme $\rho = \rho(\theta)$, nous supprimons le temps grâce à (9.7) page 103 :

$$\begin{aligned}L &= \mu\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \\ dt &= \frac{\mu\rho^2 d\theta}{L}\end{aligned}\tag{9.14}$$

Le premier terme de l'équation différentielle (9.13) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\rho}^2 &= \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{L^2}{\mu^2} \left(\frac{d\rho}{\rho^2 d\theta}\right)^2\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d\rho^{-1}}{d\theta} = -\rho^{-2} \frac{d\rho}{d\theta}$$

donc,

$$\mu^2\dot{\rho}^2 = L^2 \left(\frac{d\rho^{-1}}{d\theta}\right)^2$$

L'équation différentielle (9.13) de la présente page devient :

$$\begin{aligned}L^2 \left(\frac{d\rho^{-1}}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2\mu\alpha}{\rho} &= 2E\mu \\ L^2 \left(\frac{d\rho^{-1}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{L}{\rho} - \frac{\mu\alpha}{L}\right)^2 - \left(\frac{\mu\alpha}{L}\right)^2 &= 2E\mu\end{aligned}$$

Nous n'avons plus que des termes en ρ^{-1} . Effectuons un premier changement de variable

$$r = L\rho^{-1}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(r - \frac{\mu\alpha}{L}\right)^2 = 2E\mu + \left(\frac{\mu\alpha}{L}\right)^2$$

Posons la constante $A = 2E\mu + \left(\frac{\mu\alpha}{L}\right)^2$ et effectuons un deuxième changement de variable :

$$r = r - \frac{\mu\alpha}{L}$$

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 &= A \\ \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\right)\right]^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{A}}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Effectuons un troisième et dernier changement de variable

$$r = \frac{r}{\sqrt{A}}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = 1$$

1) Première méthode de résolution

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \pm (1 - r^2)^{1/2} \\ d\theta &= \pm \frac{dr}{(1 - r^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Si le signe est positif cette équation s'intègre en arcossinus plus un angle constant ϕ :

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos(r) + \phi \\ r &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Si le signe est négatif cette équation s'intègre en arcsinus plus un angle constant β :

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin(r) + \beta \\ r &= \sin(\theta - \beta) \end{aligned}$$

Pour $\beta = \phi - \pi/2$,

$$\begin{aligned} r &= \sin(\theta - \phi + \pi/2) \\ &= \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Les solutions étant identiques, on conserve $r = \cos(\theta - \phi)$.

2) Deuxième méthode de résolution

Dérivons par rapport à θ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] &= 0 \\ 2 \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2r}{d\theta^2} + 2r \frac{dr}{d\theta} &= 0 \\ \frac{d^2r}{d\theta^2} + r &= 0 \\ r &= \cos(\theta - \phi)\end{aligned}$$

Revenons à la variable ρ :

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \\ r &= \frac{\mu\alpha}{L} + \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{L}{\rho} &= \frac{\mu\alpha}{L} \left[1 + \frac{L}{\mu\alpha} \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \right] \\ \rho &= \frac{L^2}{\mu\alpha} \left[1 + \frac{L}{\mu\alpha} \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \right]^{-1}\end{aligned}$$

On pose la constante

$$p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad (9.15)$$

et l'on reconnaît une section conique (section d'un cône par un plan) de *paramètre* p , d'équation polaire ayant son foyer à l'origine des coordonnées

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \quad (9.16)$$

et d'*excentricité*

$$\begin{aligned}e &= \frac{L}{\mu\alpha} \sqrt{2E\mu + \left(\frac{\mu\alpha}{L} \right)^2} \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}\end{aligned}$$

9.4 Étude de la trajectoire

9.4.1 L'excentricité e

Elle est positive ou nulle, sans dimension, et elle définit la forme de l'orbite :

- Si $E = \frac{-\mu\alpha^2}{2L^2}$ alors $e = 0$ et $\rho = p$, l'orbite est un cercle, la trajectoire est fermée. Nous voyons que p est le paramètre de taille de l'orbite
- Si $\frac{-\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$ alors $0 < e < 1$, l'orbite est une ellipse, la trajectoire est fermée
- Si $E = 0$ alors $e = 1$, la trajectoire est une parabole
- Si $E > 0$ alors $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole

Remarque 9.4.1

Pour un champ de répulsion la trajectoire est toujours hyperbolique.

Notons également la relation

$$\begin{aligned} e^2 - 1 &= \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2} \\ 1 - e^2 &= \frac{-2EL^2}{\mu\alpha^2} \end{aligned}$$

et puisque l'énergie mécanique est strictement négative pour une orbite elliptique :

$$1 - e^2 = \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2} \quad (9.17)$$

9.4.2 L'ellipse

Pour $0 < e < 1$ (donc pour $E < 0$) et pour $\phi = 0$, (9.16) page précédente est une ellipse centrée sur $o(-c, 0)$ dans le repère (F, x, y) , où F et F' sont les foyers de l'ellipse.

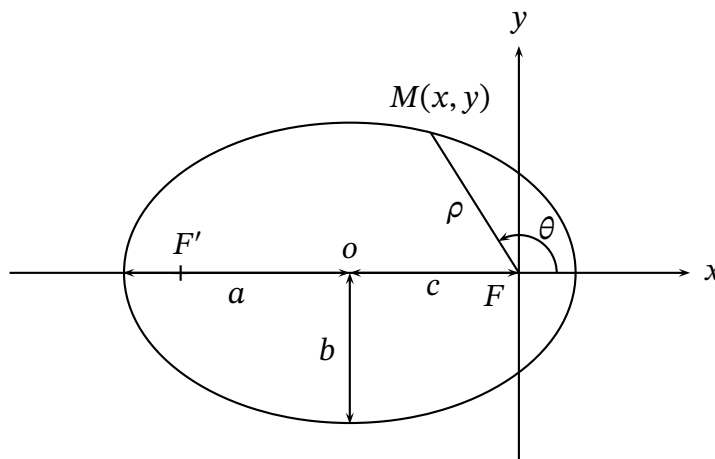


FIG. 9.4 – Orbite elliptique

L'angle θ est appelé *anomalie vraie*. Nous pouvons énoncer la

Axiome 9.4.1 : Première loi de Kepler

Les planètes décrivent des ellipses dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe l'un des foyers.

Remarque 9.4.2

Le Soleil décrit également une ellipse dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe l'un des foyers. À l'exception de Jupiter le centre de gravité du système planète-Soleil est dans le Soleil.

Le couple (p, e) définit une ellipse de manière unique, sa taille et sa forme. En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une ellipse dont le grand axe est sur l'axe des abscisses, s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le couple formé du demi-grand axe a et du demi-petit axe b permet donc aussi de définir parfaitement une ellipse. En étudiant le passage des coordonnées polaires (ρ, θ) vers les coordonnées rectangulaires (x, y) de l'équation d'une même ellipse, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{a} \\ e &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \end{aligned} \tag{9.18a}$$

9.4.3 Orientation de l'ellipse

À partir de l'équation polaire d'une conique (9.16) page 112, pour $\theta = \phi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \theta - \phi &= 2k\pi \\ \cos(\theta - \phi) &= \cos(2k\pi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 + e} \\ &= \rho_{min} \end{aligned}$$

Nous sommes au *périhélie*, point de l'orbite le plus proche du Soleil. Le grand axe de l'ellipse fait donc un angle ϕ avec l'axe des abscisses.

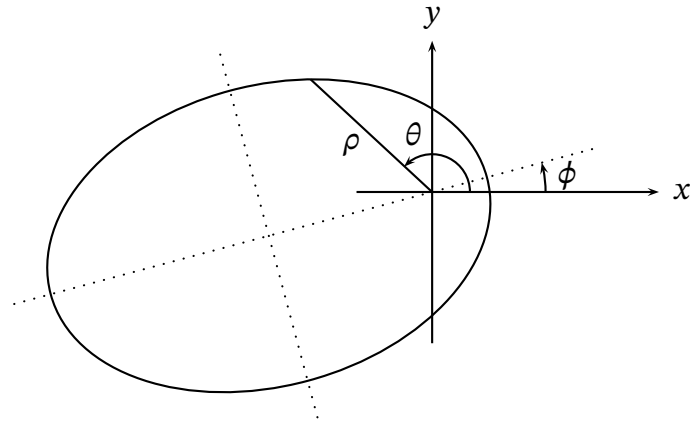


FIG. 9.5 – Orientation de l'ellipse

Pour $\theta = \phi + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$\begin{aligned}\theta - \phi &= \pi + 2k\pi \\ \cos(\theta - \phi) &= -1 \\ \rho &= \frac{p}{1 - e} \\ &= \rho_{\max}\end{aligned}$$

Nous sommes à l'*aphélie*, point de l'orbite le plus éloigné du Soleil.

L'orbite de la Terre autour du Soleil est dans un plan appelé *plan de l'écliptique*, qui contient à chaque instant la Terre et le Soleil. La révolution terrestre donne lieu au mouvement apparent annuel du Soleil à travers les constellations du zodiac. Le plan de l'écliptique fait un angle de $23^\circ 26'$ avec le plan de l'équateur terrestre, et leur intersection forme une droite dans l'espace. Chaque année vers le 21 septembre, le Soleil passe à travers le plan de l'équateur terrestre en allant du Nord au Sud. On pose $\theta = 0^\circ$ à ce moment précis appelé *équinoxe d'automne* (EA), en retour cela fixe la valeur $\phi \approx 103^\circ$. Sur la figure 9.6 page suivante, l'axe des abscisses est confondu avec la droite d'intersection des deux plans. Dans l'hémisphère Nord, le Soleil de midi monte de moins en moins haut dans le ciel et en $\theta = \pi/2$ vers le 21 décembre il atteint son point le plus bas dans le ciel, au *solstice d'hiver* (SH). Le Soleil de midi remonte alors dans le ciel et en $\theta = \pi$ vers le 21 mars il passe à nouveau à travers le plan de l'équateur terrestre, cette fois en allant du Sud au Nord, à l'*équinoxe de printemps* (EP). La droite passant par les équinoxes est donc la droite d'intersection des deux plans. Le Soleil de midi continue de monter et en $\theta = 3\pi/2$ vers le 21 juin il atteint son point le plus haut dans le ciel, au *solstice d'été* (SE).

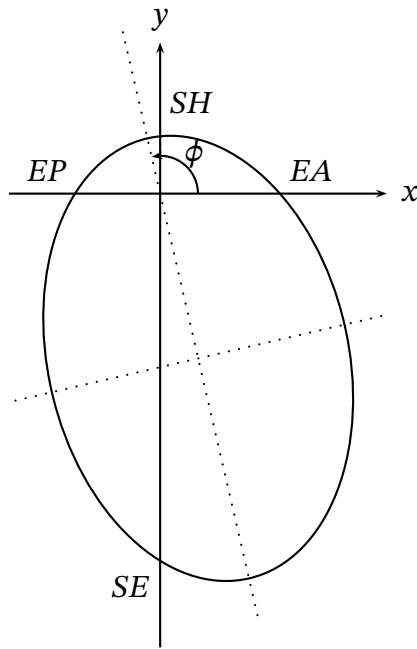


FIG. 9.6 – Orientation de l'ellipse terrestre

9.4.4 Demi-grand axe a

Soit $2a$ la longueur du grand axe de l'ellipse :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\rho_{min} + \rho_{max}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) \\ &= \frac{p}{1-e^2} \end{aligned}$$

Avec les expressions du paramètre (9.15) page 112 et de l'excentricité (9.17) page 113 :

$$\begin{aligned} a &= \frac{L^2}{\mu\alpha} \times \frac{\mu\alpha^2}{2|E|L^2} \\ &= \frac{\alpha}{2|E|} \end{aligned} \tag{9.19}$$

On note également la relation

$$p = a(1 - e^2) \tag{9.20}$$

Exprimons le rayon minimum en fonction du demi-grand axe :

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= \frac{p}{1+e} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1+e} \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$

De même pour le rayon maximum :

$$\begin{aligned}\rho_{max} &= \frac{p}{1-e} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1-e} \\ &= a(1+e)\end{aligned}$$

9.4.5 Demi-petit axe b

En reprenant l'excentricité en fonction de a et b , (9.18a) page 114, et l'expression de l'excentricité (9.17) page 113

$$\begin{aligned}e^2 - 1 &= -\frac{b^2}{a^2} \\ b^2 &= a^2(1 - e^2) \\ &= a^2 \times \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2} \\ &= \frac{aL^2}{\mu\alpha}\end{aligned}\tag{9.21}$$

Avec l'expression du demi-grand axe (9.19) page ci-contre :

$$\begin{aligned}b^2 &= \frac{\alpha}{2|E|} \times \frac{L^2}{\mu\alpha} \\ b &= \frac{L}{\sqrt{2|E|\mu}}\end{aligned}$$

9.4.6 Période de révolution T

À partir du carré de (9.6) page 103 et de b en fonction de a , (9.21) de la présente page, nous évaluons la période de révolution en fonction du demi-grand axe a :

$$\begin{aligned}T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} \\ &= \frac{4\pi^2 a^3 L^2 \mu^2}{L^2 \mu \alpha}\end{aligned}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{\alpha}$$

(9.22)

Ceci constitue la :

Axiome 9.4.2 : Troisième loi de Kepler

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi ab\mu}{L} \\ &= \frac{2\pi\mu}{L} \times \frac{\alpha}{2|E|} \times \frac{L}{\sqrt{2|E|\mu}} \\ &= \pi\alpha\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} \end{aligned}$$

La période ne dépend donc que de l'énergie lorsque les masses sont fixées.

9.5 Equations paramétriques

9.5.1 Angle en fonction du temps

Les équations paramétriques du temps vont nous permettre de connaître la position de la planète en fonction du temps.

Cherchons tout d'abord $\theta = \theta(t)$. En utilisant la loi des aires (9.14) page 110 et l'équation de l'orbite (9.16) page 112 :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\rho^2}{C} d\theta \\ dt &= \frac{p^2 d\theta}{C[1 + e \cos(\theta - \phi)]^2} \\ \int_0^\tau dt &= \frac{p^2}{C} \int_\phi^\vartheta \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \phi)]^2} \end{aligned}$$

où l'on a pris comme condition initiale que la planète est au périhélie, c.-à-d. $\theta = \phi$ à $t = 0$. Le membre de droite s'intègre en termes de fonctions élémentaires. Le résultat est trouvé grâce au logiciel de calcul formel Maxima. Pour une trajectoire elliptique, $0 < e < 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \left\{ \frac{(1 - e) \sin(\vartheta - \phi)}{\sqrt{1 - e^2} [\cos(\vartheta - \phi) + 1]} \right\} \\ &\quad - \frac{2e \sin(\vartheta - \phi)}{\frac{(e^3 - e^2 - e + 1) \sin^2(\vartheta - \phi)}{[\cos(\vartheta - \phi) + 1]} - (e^3 + e^2 - e - 1) [\cos(\vartheta - \phi) + 1]} \end{aligned}$$

Cette relation est trop complexe pour que son inversion $\theta = \theta(t)$, ne soit possible analytiquement.

9.5.2 Rayon en fonction du temps

D'après (9.11) page 105, l'équation $t = t(\rho)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{\mu^2 \rho^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{E\rho^2 + \alpha\rho - \frac{2L^2}{\mu}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha\rho}{|E|} - \frac{L^2}{2\mu|E|}}} \end{aligned}$$

car E étant négative, $E/|E| = -1$. Remplaçons les constantes E et L par les constantes a et e . À partir des expressions du paramètre (9.15) page 112 et (9.20) page 116 :

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{\mu\alpha} &= p \\ L^2 &= \mu\alpha a(1 - e^2) \end{aligned}$$

Avec (9.19) page 116 :

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{\alpha}{2a} \\ \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2\mu|E|} &= \frac{\mu\alpha a(1 - e^2) 2a}{2\mu\alpha} \\ &= a^2(1 - e^2) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1 - e^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - \rho)^2}} \end{aligned}$$

Nous avons vu au § 9.4.4 page 116 que le rayon vecteur varie entre $a - ae$ et $a + ae$. Cela suggère d'effectuer le changement de variable :

$$\rho = a - ae \cos(\psi), \quad \psi \in [0, \pi] \quad (9.23)$$

L'angle ψ , appelé *anomalie excentrique* remplace le rayon vecteur. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\psi} &= ae \sin(\psi) \\ d\rho &= ae \sin(\psi) d\psi\end{aligned}$$

On suppose de nouveau qu'à l'instant initial la planète est au périhélie, donc à l'instant initial $\rho = \rho_{min} \Leftrightarrow \psi = 0$ et $\theta = \phi$.

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_0^\psi \frac{(a - ae \cos(\psi)) ae \sin(\psi)}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2(\psi)}} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_0^\psi \frac{(a - ae \cos(\psi)) ae \sin(\psi)}{ae \sin(\psi)} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} \int_0^\psi (1 - e \cos(\psi)) d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} [\psi - e \sin(\psi)]_0^\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\psi - e \sin(\psi))\end{aligned}\tag{9.24}$$

La planète effectue une demi-période $T/2$ quand ρ varie de ρ_{min} à ρ_{max} , c.-à-d. quand ψ varie de 0 à π :

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\pi - e \sin(\pi)) \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\end{aligned}$$

On retrouve bien la période de révolution (9.22) page 117.

En introduisant la période T puis la pulsation ω dans (9.24), la solution de l'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \frac{T}{2\pi} (\psi - e \sin(\psi)) \\ \omega(t - t_0) &= \psi - e \sin(\psi)\end{aligned}\tag{9.25}$$

appelée *équation de Kepler*. L'angle $\omega(t - t_0)$ s'appelle *anomalie moyenne*.

Revenons à la variable ρ en inversant le changement de variable (9.23) page précédente. Dans la pratique cela n'est jamais fait, nous allons voir pourquoi.

$$\begin{aligned}\rho &= a - ae \cos(\psi) \\ \frac{a - \rho}{ae} &= \cos(\psi) \\ \psi &= \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega(t - t_0) = \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right) - e \sin \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right)\tag{9.26}$$

On fixe ρ pour obtenir $t - t_0$. Pour la détermination de l'angle θ à partir d'un rayon ρ fixé, nous utilisons l'équation de l'orbite (9.16) page 112 :

$$\begin{aligned}\rho + \rho e \cos(\theta - \phi) &= p \\ \cos(\theta - \phi) &= \frac{p - \rho}{\rho e} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{p - \rho}{\rho e}\right) + \phi\end{aligned}$$

Cette méthode n'est pas optimale pour un calcul sur ordinateur, avec un sinus d'arccosinus dans l'expression (9.26). Il est préférable de fixer ψ pour trouver la durée $t - t_0$ grâce à l'équation de Kepler (9.25), puis de trouver la distance au Soleil ρ en utilisant le changement de variable (9.23) page 119. Enfin, nous pouvons trouver la valeur correspondante de l'angle θ en utilisant l'équation de l'orbite (9.16) page 112 et le changement de variable (9.23) qui donne chacun le rayon ρ :

$$\begin{aligned}a - ae \cos(\psi) &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \\ 1 + e \cos(\theta - \phi) &= \frac{a(1 - e^2)}{a(1 - e \cos(\psi))} \\ e \cos(\theta - \phi) &= \frac{1 - e^2 - (1 - e \cos(\psi))}{1 - e \cos(\psi)} \\ \cos(\theta - \phi) &= \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)}\right) + \phi\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser une forme alternative pour exprimer θ en fonction de ψ :

$$\begin{aligned}1 - \cos(\theta - \phi) &= 1 - \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ 2 \sin^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \frac{1 - e \cos(\psi) - \cos(\psi) + e}{1 - e \cos(\psi)} \\ &= \frac{(1 + e)(1 - \cos(\psi))}{1 - e \cos(\psi)}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}1 + \cos(\theta - \phi) &= 1 + \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ 2 \cos^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \frac{1 - e \cos(\psi) + \cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ &= \frac{(1 - e)(1 + \cos(\psi))}{1 - e \cos(\psi)}\end{aligned}$$

en faisant le rapport :

$$\begin{aligned}\tan^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \frac{(1+e)(1-\cos(\psi))}{(1-e)(1+\cos(\psi))} \\ \tan\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \theta &= 2 \arctan\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)\right] + \phi\end{aligned}$$

Chapitre 10

LE TENSEUR D'INERTIE

Le tenseur d'inertie calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie d'un solide est une caractéristique intrinsèque de ce solide. Il apparaît naturellement dans l'expression du moment d'inertie (répartition de la masse autour d'un axe de rotation) qui est nécessaire pour le calcul du moment cinétique d'un solide, et de son énergie cinétique de rotation.

10.1 Moment d'inertie

Soit un solide S et soit Δ un axe quelconque ne passant pas nécessairement par S , de direction fixe dans le repère $\mathcal{R}$.

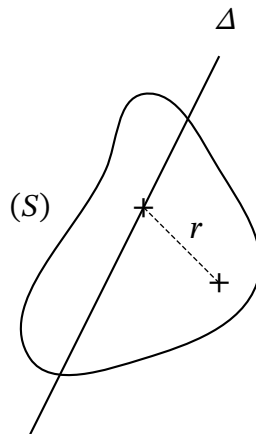


FIG. 10.1 – Solide et axe de rotation quelconques

Le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ est un scalaire qui caractérise l'inertie en rotation du solide S autour de l'axe Δ .

Définition 10.1.1 : Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe Δ , est la somme des masses de ce système, pondérées par leurs distances à l'axe au carré :

$$I_{\Delta}^{\text{déf}} = \sum_i m_i r_i^2$$

Pour un système continu :

Définition 10.1.2 : Moment d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ , d'un solide S de volume V et de masse volumique ρ , a pour expression :

$$I_{\Delta} \stackrel{\text{déf}}{=} \iiint_V \rho r^2 d^3V$$

Le moment d'inertie est fonction de r^2 , il dépend donc du choix de l'axe Δ , mais pas du choix du repère $\mathcal{R}$, car seule la distance à l'axe intervient.

Remarque 10.1.1

Lorsque le solide est homogène, sa densité est constante dans l'espace et l'on peut sortir ρ de l'intégrale de volume.

10.2 Tenseur d'inertie

Cherchons l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque Δ , en fonction du tenseur d'inertie. Considérons un repère orthonormé $\mathcal{R}$ dont le centre O est sur l'axe Δ . Soit un élément de volume du solide S , de masse dm , situé au point M tel que $\overrightarrow{OM}(x_1, x_2, x_3)$, et soit $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ un vecteur unitaire porté par l'axe Δ . On appelle H la projection orthogonale de M sur l'axe Δ , tel que $r = MH$.

En appliquant le théorème de pythagore dans le triangle OMH rectangle en H :

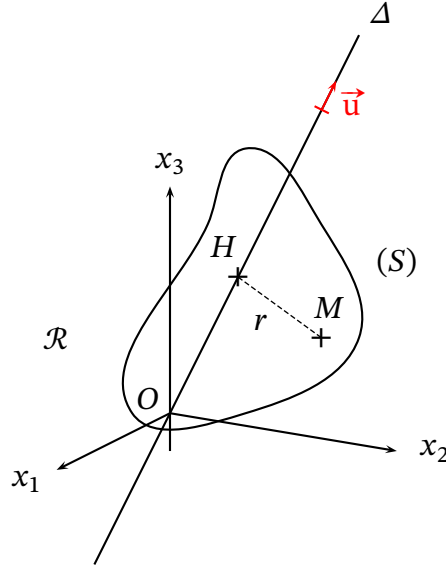
$$\begin{aligned} MH^2 &= OM^2 - OH^2 \\ &= OM^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u})^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3)^2 \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{u}$ étant unitaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} MH^2 &= [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] - (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2 \\ &= [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \\ &\quad - [u_1^2 x_1^2 + u_2^2 x_2^2 + u_3^2 x_3^2 + 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 - 2u_1 u_3 x_1 x_3] \\ &= u_1^2 (x_2^2 + x_3^2) + u_2^2 (x_1^2 + x_3^2) + u_3^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 - 2u_1 u_3 x_1 x_3 \end{aligned}$$



Ecrivons le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \iiint_V \rho MH^2 dV \\
 &= u_1^2 \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V + u_2^2 \int_V \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V + u_3^2 \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \\
 &\quad - u_1 u_2 \int_V \rho 2x_1 x_2 d^3V - u_2 u_3 \int_V \rho 2x_2 x_3 d^3V - u_1 u_3 \int_V \rho 2x_1 x_3 d^3V \quad (10.1)
 \end{aligned}$$

Nous avons alors le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \begin{pmatrix} u_1 \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V - u_2 \int_V \rho x_1 x_2 d^3V - u_3 \int_V \rho x_1 x_3 d^3V \\ -u_1 \int_V \rho x_1 x_2 d^3V + u_2 \int_V \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V - u_3 \int_V \rho x_2 x_3 d^3V \\ -u_1 \int_V \rho x_1 x_3 d^3V - u_2 \int_V \rho x_2 x_3 d^3V + u_3 \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int_V \rho x_1 x_2 d^3V & -\int_V \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\int_V \rho x_1 x_2 d^3V & \int_V \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int_V \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\int_V \rho x_1 x_3 d^3V & -\int_V \rho x_2 x_3 d^3V & \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$I_{\Delta} = [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (10.2)$$

où $[I]_O$ est le tenseur d'inertie du solide S calculé au centre O du repère $\mathcal{R}$. L'opération $[I]_O \vec{u}$ est la multiplication de la matrice $[I]_O$ par le vecteur $\vec{u}$, elle donne un vecteur. L'opération suivante est le produit scalaire de deux vecteurs et l'on a :

$$[I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot [I]_O \vec{u}$$

Les composantes du tenseur d'inertie sont des fonctions de x_1, x_2 et x_3 , il dépend donc du choix du repère $\mathcal{R}$ (position du centre O et orientation des axes). En revanche il ne dépend pas de l'axe Δ . La dépendance de I_{Δ} à l'axe Δ se fait uniquement par le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par l'axe Δ .

Dans l'expression du premier terme, $x_2^2 + x_3^2$ est la distance au carré à l'axe x_1 . Les termes diagonaux sont par conséquent les moments d'inertie par rapport aux axes x_1, x_2, x_3 du repère $\mathcal{R}$.

Montrons-le pour un axe de rotation Δ confondu avec l'axe x_3 , donc portant le vecteur unitaire $\vec{k}$. Supposons la masse volumique ρ constante :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= [I]_O \vec{k} \cdot \vec{k} \\
 &= \rho \begin{bmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int x_1 x_2 d^3V & -\int x_1 x_3 d^3V \\ -\int x_1 x_2 d^3V & \int (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int x_2 x_3 d^3V \\ -\int x_1 x_3 d^3V & -\int x_2 x_3 d^3V & \int (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \rho \begin{pmatrix} -\iiint x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint x_2 x_3 d^3V \\ \iiint (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \rho \iiint (x_1^2 + x_2^2) d^3V
 \end{aligned}$$

qui est le moment d'inertie par rapport à l'axe x_3 . Les opposés des termes non diagonaux sont appelés *produits d'inertie*.

Définition 10.2.1 : Tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie d'un solide de volume V et de masse volumique ρ , calculé au centre O d'un repère $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$[I]_O \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix}$$

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

où la convention de signe permet d'avoir des produits d'inertie positif.

Notation 10.2.1

Le tenseur $[I]$ est aussi noté $\mathbf{I}$, $\hat{I}$, $\hat{I}$, $\hat{I}$, $\hat{I}$, et en notation indicielle I_{ij} :

$$I_\Delta = I_{ij} u^i u^j$$

avec une sommation sur les indices répétés. À partir du tenseur d'inertie en un point O , on trouve le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe passant par O . Le tenseur d'inertie prend en entrée deux vecteurs (deux fois le vecteur unité porté par l'axe de rotation), et donne en sortie un scalaire (le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation). C'est donc une forme bilinéaire, appelée tenseur deux fois covariant.

Deux indices permettent de repérer ses éléments, c'est donc un tenseur d'ordre deux. Il est

covariant, les indices seront en bas par convention. Il est symétrique :

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Les indices pouvant prendre trois valeurs, il appartient à un espace vectoriel de dimension 3. La dimension de l'espace puissance l'ordre du tenseur donne le nombre de composantes du tenseur, soit $3^2 = 9$ composantes.

10.3 Repère principal d'inertie

Comme tout tenseur symétrique d'ordre deux, le tenseur d'inertie en tout point O peut être diagonalisé. Il existe donc un *repère principal d'inertie* $(O, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$, composé de trois axes *principaux d'inertie* passant par O , dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal. Plaçons-nous dans un repère $\mathcal{R}$ de centre O et cherchons l'expression des *vecteurs propres* $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$, et des *valeurs propres* I_1, I_2, I_3 solutions des trois équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} [I]_O \vec{P}^1 &= I_1 \vec{P}^1 \\ [I]_O \vec{P}^2 &= I_2 \vec{P}^2 \\ [I]_O \vec{P}^3 &= I_3 \vec{P}^3 \end{aligned}$$

10.3.1 Moments principaux d'inertie

Soient I un scalaire et $\vec{P}(p_1, p_2, p_3)$ un vecteur non nuls tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} [I]_O \vec{P} &= I \vec{P} \\ \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} I - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Ce système admet des solutions non triviales (différentes de zéro) si le déterminant de la matrice des coefficients est nul,

$$\begin{vmatrix} I - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I - I_{33} \end{vmatrix} = 0$$

qui donne l'équation caractéristique :

$$(I - I_{11})[(I - I_{22})(I - I_{33}) - I_{32}I_{23}] - I_{21}[I_{12}(I - I_{33}) - I_{32}I_{13}] + I_{31}[I_{12}I_{23} - (I - I_{22})I_{13}] = 0$$

Ce polynôme Q est du troisième degré en I

$$Q = I^3 + a_1 I^2 + a_2 I + a_3$$

qui admet trois racines I_1, I_2, I_3 . Ces trois solutions de l'équation $Q = 0$ sont les valeurs propres du tenseur d'inertie, aussi appelées *moments principaux d'inertie* au point O . Pour le premier vecteur propre $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$ de valeur propre I_1 nous avons :

$$[I]_O \vec{P}^1 = I_1 \vec{P}^1$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix}$$

10.3.2 Axes principaux d'inertie

Résolvons le système (10.3) page précédente avec les différentes valeurs possibles de I . Pour la valeur propre I_1 associée au vecteur propre $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$:

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

$$\begin{cases} (I_1 - I_{11})p_1^1 + I_{12}p_2^1 + I_{13}p_3^1 = 0 \\ I_{21}p_1^1 + (I_1 - I_{22})p_2^1 + I_{23}p_3^1 = 0 \\ I_{31}p_1^1 + I_{32}p_2^1 + (I_1 - I_{33})p_3^1 = 0 \end{cases}$$

Nous n'avons pas besoin de résoudre ce système car nous n'avons besoin que de la direction du vecteur $\vec{P}^1$. En effet si $\vec{P}^1$ est solution alors si α est un scalaire $\alpha \vec{P}^1$ est aussi solution :

$$\alpha \begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha p_1^1 \\ \alpha p_2^1 \\ \alpha p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le module $\|\vec{P}^1\|$ étant quelconque nous pouvons fixer la valeur de la première composante, $p_1^1 = 1$:

$$\begin{cases} I_{12}p_2^1 + I_{13}p_3^1 = I_{11} - I_1 \\ (I_1 - I_{22})p_2^1 + I_{23}p_3^1 = -I_{21} \\ I_{32}p_2^1 + (I_1 - I_{33})p_3^1 = -I_{31} \end{cases}$$

Deux équations parmi ces trois suffisent à trouver p_2^1 et p_3^1 , c.-à-d. la direction dans $\mathcal{R}$ du premier *axe principal d'inertie* :

$$\begin{bmatrix} I_{12} & I_{13} \\ (I_1 - I_{22}) & I_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} - I_1 \\ -I_{21} \end{pmatrix}$$

Soit D le déterminant de la matrice carrée, résolvons par la méthode de Cramer :

$$p_2^1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{11} - I_1 & I_{13} \\ -I_{21} & I_{23} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad p_3^1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{12} & I_{11} - I_1 \\ (I_1 - I_{22}) & -I_{21} \end{vmatrix}$$

Nous avons l'expression du premier vecteur propre $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$. Nous procédons de même avec $\vec{P}^2$ et $\vec{P}^3$, les deux autres vecteurs propres portés par les *axes principaux d'inertie*. Ainsi il existe un repère principal d'inertie en tout point O .

Montrons que les directions principales sont orthogonales. Désignons les directions des axes principaux d'inertie par les vecteurs unitaires $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, et faisons apparaître leurs produits scalaires. Pour $\vec{n}_1(n_1^1, n_1^2, n_1^3)$ et le scalaire I_1 , (10.4) page ci-contre s'écrit :

$$I_1 \vec{n}_1 = [I] \vec{n}_1$$

De même pour $\vec{n}_2(n_2^1, n_2^2, n_2^3)$:

$$I_2 \vec{n}_2 = [I] \vec{n}_2$$

Effectuons le produit scalaire

$$\begin{aligned} [I] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}n_1^1 - I_{12}n_1^2 - I_{13}n_1^3 \\ -I_{21}n_1^1 + I_{22}n_1^2 - I_{23}n_1^3 \\ -I_{31}n_1^1 - I_{32}n_1^2 + I_{33}n_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \\ &= I_{11}n_1^1n_2^1 - I_{12}n_1^2n_2^1 - I_{13}n_1^3n_2^1 \\ &\quad - I_{21}n_1^1n_2^2 + I_{22}n_1^2n_2^2 - I_{23}n_1^3n_2^2 \\ &\quad - I_{31}n_1^1n_2^3 - I_{32}n_1^2n_2^3 + I_{33}n_1^3n_2^3 \end{aligned}$$

Par symétrie du tenseur d'inertie, échangeons I_{ij} par I_{ji}

$$\begin{aligned}
 [I] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= I_{11}n_1^1n_2^1 - I_{21}n_1^2n_2^1 - I_{31}n_1^3n_2^1 \\
 &\quad - I_{12}n_1^1n_2^2 + I_{22}n_1^2n_2^2 - I_{32}n_1^3n_2^2 \\
 &\quad - I_{13}n_1^1n_2^3 - I_{23}n_1^2n_2^3 + I_{33}n_1^3n_2^3 \\
 &= I_{11}n_2^1n_1^1 - I_{12}n_2^2n_1^1 - I_{13}n_2^3n_1^1 \\
 &\quad - I_{21}n_2^1n_1^2 + I_{22}n_2^2n_1^2 - I_{23}n_2^3n_1^2 \\
 &\quad - I_{31}n_2^1n_1^3 - I_{32}n_2^2n_1^3 + I_{33}n_2^3n_1^3 \\
 &= \begin{pmatrix} I_{11}n_2^1 - I_{12}n_2^2 - I_{13}n_2^3 \\ -I_{21}n_2^1 + I_{22}n_2^2 - I_{23}n_2^3 \\ -I_{31}n_2^1 - I_{32}n_2^2 + I_{33}n_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \\
 &= [I] \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 I_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= I_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \\
 (I_1 - I_2) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Si $I_1 \neq I_2$ alors $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ et les axes principaux d'inertie sont orthogonaux deux à deux.

Cherchons l'expression du tenseur d'inertie dans le repère principal d'inertie $(O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$.

Soit $\vec{\omega}$ un vecteur porté par un axe de rotation quelconque Δ :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3$$

Soit $\vec{L}$ un vecteur tel que :

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= [I]_O \vec{\omega} \\
 L_1 \vec{n}_1 + L_2 \vec{n}_2 + L_3 \vec{n}_3 &= [I]_O (\omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3) \\
 &= \omega_1 [I]_O \vec{n}_1 + \omega_2 [I]_O \vec{n}_2 + \omega_3 [I]_O \vec{n}_3 \\
 &= \omega_1 I_1 \vec{n}_1 + \omega_2 I_2 \vec{n}_2 + \omega_3 I_3 \vec{n}_3
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_3 = I_3 \omega_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

d'où l'expression du *tenseur principal d'inertie* au point O :

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Il dépend du choix du point O . En revanche le tenseur principal d'inertie $[I]_G$ calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie G du système, est une caractéristique intrinsèque de ce système (elle ne dépend que du système), comme le sont sa masse, son volume ou sa charge électrique. On l'appelle *tenseur central principal d'inertie*. C'est la répartition des masses du solide S , pondérée par la distance au centre d'inertie au carré.

10.3.3 Ellipsoïde d'inertie

Soit un solide S , et soit un repère $\mathcal{R}$ de centre O . Le tenseur d'inertie $[I]_O$ est donc fixé. Soit Δ un axe de rotation quelconque, de vecteur unitaire $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$:

$$\begin{aligned} I_\Delta &= [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}u_1 - I_{12}u_2 - I_{13}u_3 \\ -I_{12}u_1 + I_{22}u_2 - I_{23}u_3 \\ -I_{13}u_1 - I_{23}u_2 + I_{33}u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$I_\Delta = I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2 - 2I_{12}u_2u_1 - 2I_{13}u_3u_1 - 2I_{23}u_2u_3$$

on retrouve (10.1) page 125. C'est l'équation d'un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde d'inertie*, dans laquelle les composantes $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}, I_{23}$ du tenseur d'inertie sont des paramètres.

Pour chaque axe Δ de direction $\vec{u}$, donc pour chaque ensemble de valeurs (u_1, u_2, u_3) , l'équation donne une valeur pour le moment d'inertie I_Δ du solide S . De même qu'un vecteur peut être représenté par une flèche, un tenseur symétrique d'ordre deux peut être représenté par un ellipsoïde.

10.3.4 Théorème de Huygens

Théorème 10.3.1 : Théorème de Huygens

Soit Δ_G un axe parallèle à l'axe Δ et passant par le centre d'inertie G d'un solide S de masse m . Soit $a = KH$ la distance entre ces deux axes, où $K \in \Delta_G$ et $H \in \Delta$, alors :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2m$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \rho \iiint (MH)^2 d^3V \\
 &= \iiint \rho (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH}) \cdot (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH}) d^3V \\
 &= \iiint \rho (MK)^2 d^3V + \iiint \rho (KH)^2 d^3V + 2 \iiint \rho \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KH} d^3V \\
 &= I_{\Delta_G} + a^2 m + 2 \iiint \rho (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{KH} d^3V
 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{KH}$ étant constant :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + a^2 m + 2 \overrightarrow{KH} \cdot \iiint \rho \overrightarrow{MG} d^3V + 2 \iiint \rho \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{KH} d^3V$$

Par définition du centre d'inertie,

$$\iiint \rho \overrightarrow{MG} d^3V = 0$$

De plus, $\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{KH}$, d'où :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

□

10.4 Moment cinétique

Définition 10.4.1 : Moment cinétique

On appelle moment cinétique (ou moment angulaire ou moment de la quantité de mouvement) par rapport à un point O fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, d'un corps de centre de gravité G , le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ par la quantité de mouvement de ce corps dans $\mathcal{R}$, $\overrightarrow{OG} \times \vec{p}$.

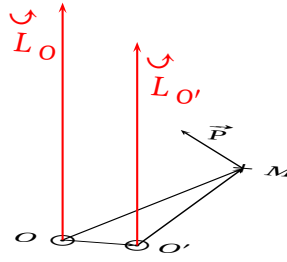
Le vecteur position est noté $\vec{r}$ et le moment cinétique est noté $\overset{\curvearrowright}{L}_{/O}$:

$$\overset{\curvearrowright}{L}_{/O} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

10.4.1 Moment cinétique par rapport à un point

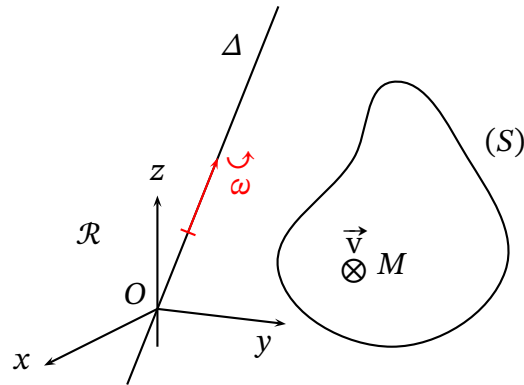
Soient O et O' deux points distincts d'un repère $\mathcal{R}$, le moment cinétique par rapport au point O' d'un point massique M de quantité de mouvement $\vec{p}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \overset{\curvearrowright}{L}_{O'}(M) &= \overrightarrow{O'M} \times \vec{p} \\
 &= (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \times \vec{p} \\
 &= \overrightarrow{O'O} \times \vec{p} + \overrightarrow{OM} \times \vec{p} \\
 &= \overrightarrow{O'O} \times \vec{p} + \overset{\curvearrowright}{L}_O(M)
 \end{aligned}$$



Le moment cinétique d'un solide ou d'un système dépend du point par rapport auquel il est calculé. Le terme $\vec{O'O} \times \vec{p}$ permet de passer du moment cinétique au point O à celui au point O'.

Soit un solide S de masse volumique ρ , tournant avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour d'un axe Δ de direction fixe dans $\mathcal{R}$. Si le solide S est libre alors l'axe de rotation passe obligatoirement par son centre d'inertie, mais l'on envisage ici le cas plus général de la rotation d'un solide autour d'un axe quelconque. Calculons le moment cinétique par rapport au centre du référentiel O situé sur l'axe Δ .



Considérons un élément de volume du solide S , de masse dm , de volume d^3V , de vitesse $\vec{v}$, situé au point M . Son moment cinétique dans $\mathcal{R}$ par rapport au point O s'écrit :

$$dL_O^{\mathcal{R}}(M) = \vec{OM} \times \vec{v} dm$$

L'axe de rotation Δ passant par le point O , la vitesse du point M s'écrit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

si bien que

$$\begin{aligned} dL_O^{\mathcal{R}}(M) &= \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) dm \\ &= \rho \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) d^3V \end{aligned}$$

Le moment cinétique total du solide S s'obtient par intégration sur son volume total :

$$\overset{\mathcal{R}}{L}_O(S) = \iiint \rho \overrightarrow{OM} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) d^3V$$

Développons le double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega^2 x_3 - \omega^3 x_2 \\ \omega^3 x_1 - \omega^1 x_3 \\ \omega^1 x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 x_2^2 - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 + \omega^1 x_3^2 \\ \omega^2 x_3^2 - \omega^3 x_2 x_3 - \omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 x_1^2 \\ \omega^3 x_1^2 - \omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 \\ -\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3 \\ -\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression du moment cinétique de S par rapport à O , calculé dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \overset{\mathcal{R}}{L}_O(S) &= \begin{pmatrix} \iiint \rho [\omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3] d^3V \\ \iiint \rho [-\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3] d^3V \\ \iiint \rho [-\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2)] d^3V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V - \omega^2 \iiint \rho x_1 x_2 d^3V - \omega^3 \iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\omega^1 \iiint \rho x_1 x_2 d^3V + \omega^2 \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V - \omega^3 \iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\omega^1 \iiint \rho x_1 x_3 d^3V - \omega^2 \iiint \rho x_2 x_3 d^3V + \omega^3 \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\overset{\mathcal{R}}{L}_O(S) = [I]_O \vec{\omega}$$

où $[I]_O$ est le tenseur d'inertie du solide S , au point O dans le repère $\mathcal{R}$.

10.4.2 Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation Δ :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}$$

et soit $L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S)$ la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation Δ . Soit MH la distance du point M à l'axe de rotation. En utilisant le théorème 11.2.1 page 140 de l'analyse vectorielle donné en annexe, on a :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) &= \vec{L}_O(S) \cdot \vec{u} \\ &= \iiint \rho \overrightarrow{OM} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) d^3V \cdot \vec{u} \\ &= \iiint \rho \left[\vec{\omega} (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\omega}) \right] d^3V \cdot \vec{u} \\ &= \omega \iiint \rho \left[\vec{u} \cdot \vec{u} (OM)^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}) (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}) \right] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho [(OM)^2 - (OH)^2] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho (MH)^2 d^3V \end{aligned}$$

$$L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) = I_{\Delta} \omega \quad (10.5)$$

où le scalaire I_{Δ} est le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ .

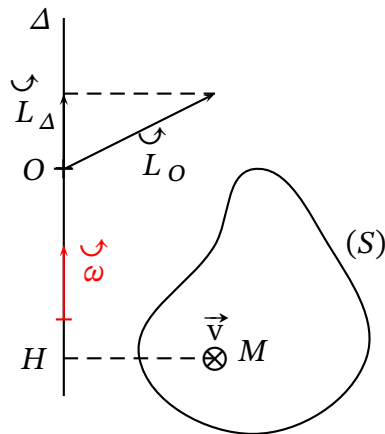


FIG. 10.2 – Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

10.4.3 Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation Δ . Alors :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) &= \overset{\curvearrowright}{L}_O(S) \cdot \vec{u} \\ &= [I]_O \overset{\curvearrowright}{\omega} \cdot \vec{u} \\ &= [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \omega \end{aligned}$$

Par conséquent, avec (10.5) page précédente :

$$I_{\Delta} = [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Nous retrouvons (10.2) page 125.

10.5 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Soit S un solide de masse m , de volume V , de masse volumique ρ , en rotation avec une vitesse angulaire $\overset{\curvearrowright}{\omega}$ autour du centre O d'un référentiel inertiel $\mathcal{R}$. On considère un élément du solide, de masse dm , de volume d^3V situé au point M . Son énergie cinétique dT s'écrit :

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} v^2 dm \\ &= \frac{\rho}{2} v^2 d^3V \\ &= \frac{\rho}{2} (\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{OM})^2 d^3V \end{aligned}$$

L'énergie cinétique totale T s'obtient par intégration sur le volume total du solide S :

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint (\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{OM})^2 d^3V$$

Grâce au théorème 11.3.2 page 141 de l'analyse vectorielle donné en annexe :

$$\begin{aligned} (\overset{\curvearrowright}{\omega} \times \overrightarrow{OM})^2 &= \omega^2 (OM)^2 - (\overset{\curvearrowright}{\omega} \cdot \overrightarrow{OM})^2 \\ &= \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] - (\omega^1 x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3)^2 \\ &= \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \\ &\quad - \left[(\omega^1)^2 x_1^2 + (\omega^2)^2 x_2^2 + (\omega^3)^2 x_3^2 + 2(\omega^1 x_1 \omega^2 x_2 + \omega^1 x_1 \omega^3 x_3 + \omega^2 x_2 \omega^3 x_3) \right] \\ &= (\omega^1)^2 (x_2^2 + x_3^2) + (\omega^2)^2 (x_1^2 + x_3^2) + (\omega^3)^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - 2(\omega^1 x_1 \omega^2 x_2 + \omega^1 x_1 \omega^3 x_3 + \omega^2 x_2 \omega^3 x_3) \end{aligned}$$

Ce scalaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (\vec{\omega} \times \vec{OM})^2 &= \begin{pmatrix} \omega^1(x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 \\ -\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2(x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3 \\ -\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où l'expression du dernier terme :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int \rho(x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_1 x_2 d^3V & -\int \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_2 d^3V & \int \rho(x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_3 d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V & \int \rho(x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$$

En ajoutant l'énergie cinétique en translation rectiligne du solide S , l'énergie cinétique T s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} [I]_O \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

où $[I]_O$ est le tenseur d'inertie du solide S , au point O .

Chapitre 11

ANNEXES

11.1 Premier théorème d'analyse vectorielle

Théorème 11.1.1

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \\ &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) \\ &\quad + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= C_x (A_y B_z - A_z B_y) \\ &\quad + C_y (A_z B_x - A_x B_z) \\ &\quad + C_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\end{aligned}$$

□

11.2 Deuxième théorème d'analyse vectorielle

Théorème 11.2.1

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z) \\ A_z (B_y C_z - B_z C_y) - A_x (B_x C_y - B_y C_x) \\ A_x (B_z C_x - B_x C_z) - A_y (B_y C_z - B_z C_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z \\ A_z B_y C_z - A_z B_z C_y - A_x B_x C_y + A_x B_y C_x \\ A_x B_z C_x - A_x B_x C_z - A_y B_y C_z + A_y B_z C_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{B} (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \vec{C} (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &= \begin{pmatrix} B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ B_y (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_y (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ B_z (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_z (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_x A_y C_y + B_x A_z C_z - C_x A_y B_y - C_x A_z B_z \\ B_y A_x C_x + B_y A_z C_z - C_y A_x B_x - C_y A_z B_z \\ B_z A_x C_x + B_z A_y C_y - C_z A_x B_x - C_z A_y B_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Application 11.2.1

Pour $\vec{A} = \vec{C} = \vec{OM}$ et $\vec{B} = \vec{\omega}$, on a :

$$\vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) = \vec{\omega} (\vec{OM} \cdot \vec{OM}) - \vec{OM} (\vec{OM} \cdot \vec{\omega})$$

11.3 Troisième théorème d'analyse vectorielle

Théorème 11.3.1

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Démonstration.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$$

et avec le théorème 11.2.1 page ci-contre, en remplaçant $\vec{A}$ par $\vec{C}$, $\vec{B}$ par $\vec{A}$, et $\vec{C}$ par $\vec{B}$,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= -[\vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})] \\ &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

□

Théorème 11.3.2

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Démonstration. D'après le théorème 11.1.1 :

$$\vec{X} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{X} \times \vec{C}) \cdot \vec{D}$$

On pose $\vec{X} = \vec{A} \times \vec{B}$, alors

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}] \cdot \vec{D}$$

et avec le théorème 11.3.1 :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= [\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})] \cdot \vec{D} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

□

Application 11.3.1

Pour $\vec{A} = \vec{C} = \vec{\omega}$ et $\vec{B} = \vec{D} = \vec{GM}$, on a :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{GM})^2 &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{GM} \cdot \vec{GM}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{GM})(\vec{GM} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \omega^2(GM)^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{GM})^2 \end{aligned}$$

Index

- Centrale inertielle, 6
- Champ
 - gravitationnel, 72
- Courbure
 - de la lumière, 11
- Divergence
 - nulle, 76
- Divergence d'un champ de vecteurs, 61
- Équation(s)
 - de conservation, 67
 - de continuité, 67
 - de la dynamique
 - newtonienne, 32
 - de Laplace, 78
 - de Poisson, 78
- Force
 - gravitationnelle, 72
- Géodésique(s)
 - trajectoire définition, 7
- Gravitation
 - newtonienne, 71
- Laplacien
 - d'un champ de scalaires, 69
- Laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs, 69
- Loi
 - de Gauss
 - forme différentielle, 77
 - forme intégrale, 77
 - pour la gravitation, 77
 - de l'action-réaction, 31
 - des cosinus, 75
- Mach Principe de, 12
- Masse
 - grave, 33
 - inerte, 18
- Mobile inertiel, 10
- nabla, 68
- Opérateur
 - divergence, 61
 - laplacien, 69
 - laplacien vectoriel, 69
 - nabla, 68
 - rotationnel, 47
- Potentiel
 - de la force gravitationnelle, 73
 - du champ gravitationnel, 72
 - scalaire, 71
 - scalaire d'un champ vectoriel, 72
- Principe
 - d'équivalence, 10
 - entre masse inerte et masse grave, 35
 - de Mach, 12
- Rayon
 - vecteur, 71
- Référentiel(s)
 - définition, 5
 - équivalents, 7
 - inertiel, 10
 - propre, 6
- Relation
 - d'égalité, 8
 - d'équivalence, 8
 - fondamentale de la dynamique, 32
- Rotationnel d'un champ de vecteurs, 47
- Théorème
 - de Gauss, 63
 - de la divergence, 61, 63, 77
- Trivecteur
 - nabla, 68

