

o.castera@free.fr
sciences-physiques.neocities.org

Physique Vol. 3

Mécanique analytique

Olivier Castéra

Le 14 février 2026

Table des matières

1 Le principe des travaux virtuels en statique	1
1.1 Principe des déplacements virtuels	2
1.2 Principe des travaux virtuels	4
1.3 Formulation générale du principe	5
1.4 Exemples	7
1.5 Comparaison avec la mécanique de Newton	13
1.6 Avantage de la méthode	17
1.7 Types de liaisons et coordonnées généralisées	17
1.7.1 Liaisons géométriques et liaisons cinématiques	18
1.7.2 Liaisons scléronomes et liaisons rhéonomes	19
1.7.3 Liaisons holonomes	19
1.7.4 Liaisons non-holonomes	22
1.8 Multiplicateurs de Lagrange	23
1.9 Forces dérivant d'une énergie potentielle	24
1.10 Nature de l'équilibre	25
1.10.1 Système à un degré de liberté	25
1.10.2 Système à deux degrés de liberté	28
1.11 Applications des travaux virtuels	29
1.11.1 Poutre sur deux cylindres	29
1.11.2 Treuil	30
1.11.3 Appareil de levage	31
1.11.4 Ciseaux de Nuremberg	32
1.11.5 Problème à deux degrés de liberté	33
1.11.6 Poulie à ressort	35
1.11.7 Poulie différentielle de Weston	36
1.11.8 Échelle contre un mur	37
1.11.9 Poutre articulée	40
1.11.10 Chaîne suspendue	42
1.11.11 Système isostatique	44
1.11.12 Système hyperstatique	45
1.11.13 Le levier	46
1.11.14 Système bielle-manivelle	49
1.11.15 Vitesses virtuelles et puissances virtuelles	51
2 Le principe des travaux virtuels en dynamique	53
2.1 Généralisation du principe à la dynamique	53
2.2 Coordonnées polaires	55
2.2.1 Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée	55

2.2.2	Expression du vecteur position	56
2.2.3	Dérivée des vecteurs de base	56
2.2.4	Expression du vecteur vitesse	57
2.2.5	Expression du vecteur accélération	57
2.3	Exemples	57
2.4	Comparaison avec la mécanique de Newton	59
3	La mécanique de Lagrange	69
3.1	Équations de Lagrange	69
3.1.1	Modèles de forces dérivant toutes d'une énergie potentielle	73
3.1.2	Énergie potentielle généralisée	78
3.1.3	Forces ne dérivant pas toutes d'une énergie potentielle	80
3.1.4	Forces de contraintes généralisées	83
3.1.5	Liaisons non-holonomes	87
3.2	Propriétés du lagrangien et des équations de Lagrange	89
3.2.1	Équivalence avec la relation fondamentale de la dynamique	89
3.2.2	Covariance par changement de référentiel galiléen	94
3.2.3	Similitude mécanique	96
3.2.4	Caractère scalaire du lagrangien	98
3.2.5	Additivité du lagrangien	98
3.2.6	Invariance de jauge du lagrangien	98
3.2.7	Condition nécessaire et suffisante pour avoir un lagrangien	100
3.2.8	Covariance des équations de Lagrange par changement de coordonnées	102
3.3	Intégrales premières du mouvement	104
3.3.1	Énergie généralisée	107
3.3.2	Coordonnées cycliques	108
3.4	Impulsions généralisées	109
3.4.1	Présence d'un champ électromagnétique	111
3.4.2	Base et repère naturels	111
3.4.3	Composantes contravariantes d'un vecteur	113
3.4.4	Composantes covariantes d'un vecteur	115
3.5	Applications de la mécanique de Lagrange	116
3.5.1	Masse sur une trappe	116
3.5.2	Pendule double, plan	117
3.5.3	Pendule simple plan, dont le point de suspension est libre horizontalement	119
3.5.4	Pendule simple plan, dont le point de suspension oscille horizontalement	120
3.5.5	Pendule simple, plan, dont le point de suspension se déplace verticalement	121
3.5.6	Pendule simple, plan, dont le point de suspension décrit un cercle	123
4	La mécanique de Hamilton	125
4.1	Transformation de Legendre	125
4.1.1	Équation de la tangente en un point d'une courbe	125
4.1.2	Équation de l'enveloppe	126
4.1.3	Involution de la transformation de Legendre	127
4.2	Équations de Hamilton	129
4.2.1	Introduction de nouvelles variables indépendantes	129
4.2.2	Transformée de Legendre des vitesses généralisées	130
4.2.3	Expression du hamiltonien	130

4.2.4 Les équations de Hamilton	132
4.3 Cas où le hamiltonien se conserve	133
4.4 Hamiltonien et énergie mécanique	134
4.5 Coordonnées cycliques	138
4.6 Théorème de Liouville	138
4.7 Applications de la mécanique de Hamilton	141
4.7.1 Masse sur une trappe	141
4.7.2 Pendule simple, plan, dont le point de suspension se déplace verticalement	142
5 Les transformations canoniques	145
5.1 Transformations de coordonnées	145
5.1.1 Cas de la mécanique de Lagrange	146
5.1.2 Cas de la mécanique de Hamilton	147
5.2 Fonctions génératrices d'une transformation	147
5.2.1 Fonctions génératrices de type 1	147
5.2.2 Fonctions génératrices de type 2	152
5.2.3 Fonctions génératrices de type 3	159
5.2.4 Fonctions génératrices de type 4	160
5.2.5 Crochets de Lagrange	162
5.3 Transformations canoniques infinitésimales	164
5.3.1 Évolution d'un système	167
5.4 Transformations invariantes	168
6 Les crochets de Poisson	169
6.1 Introduction	169
6.2 Crochets de Poisson et équations de Hamilton	170
6.3 Lien avec les crochets de Lagrange	170
6.4 Conditions d'intégrabilité et crochets de Poisson	172
6.5 Propriétés	175
6.5.1 Crochet de Poisson avec une fonction constante	175
6.5.2 Bilinéarité	175
6.5.3 Antisymétrie	176
6.5.4 Crochet de Poisson fondamentaux	176
6.6 Identités	177
6.6.1 Identité de Leibniz	177
6.6.2 Identité de Jacobi	177
6.7 Théorèmes	178
7 La théorie de Hamilton-Jacobi	189
7.1 Équation de Hamilton-Jacobi	189
7.1.1 Fonction F1	190
7.1.2 Fonction F2	190
7.1.3 Fonction F3	191
7.1.4 Fonction F4	192
7.2 Séparation des variables	192
7.2.1 Équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps	192
7.2.2 Équation de Hamilton-Jacobi en représentation p indépendante du temps	199
7.2.3 Cas des coordonnées cycliques	201
7.2.4 Équation de Hamilton-Jacobi et forme du hamiltonien	204

TABLE DES MATIÈRES

7.3	Représentation de l'action de Hamilton	207
7.4	Mécanique ondulatoire	213
7.4.1	Relation de de Broglie	213
7.4.2	Équation de Schrödinger	214
7.5	Action de Hamilton et lagrangien	216
8	Le principe variationnel	219
8.1	Principe de moindre distance	219
8.2	Principe de moindre temps	221
8.3	Passage de l'optique à la mécanique	223
8.4	La brachistochrone	225
8.4.1	Résolution de l'équation différentielle	229
8.5	Principes de moindre action	233
8.5.1	Principe de moindre action de Hamilton	233
8.5.2	Principe de moindre action de Maupertuis	234
9	Le principe de moindre action de Hamilton	241
9.1	Dérivation des équations du mouvement	241
9.1.1	Les équations de Lagrange	241
9.1.2	Les équations de Hamilton	243
9.1.3	L'équation de Hamilton-Jacobi	244
9.2	Propriétés du lagrangien	246
9.2.1	Changement d'unités	246
9.2.2	Additivité du lagrangien	246
9.2.3	Invariance de jauge du lagrangien	247
9.3	Symétries et lois de conservation	247
9.3.1	Conservation de l'énergie	247
9.3.2	Conservation de la quantité de mouvement	248
9.3.3	Conservation du moment cinétique	248
9.4	Principe de relativité de Galilée	249
9.5	Lagrangien d'un mobile libre	250
9.6	Lagrangien d'un système	251
9.6.1	Lagrangien d'un système libre	252
9.6.2	Lagrangien d'un système dans un champ extérieur	252
9.7	Le temps comme quatrième coordonnée	252
10	Le théorème de Noether	255
10.1	Transformations invariantes	255
10.1.1	Définition des transformations invariantes	255
10.2	Transformations infinitésimales	259
10.2.1	Définition des transformations infinitésimales	259
10.3	Transformations de l'espace et du temps	262
10.3.1	Homogénéité de l'espace	262
10.3.2	Isotropie de l'espace	263
10.3.3	Changement de référentiel galiléen	265
10.3.4	Décalage temporel	266
11	Comparaison des différentes mécaniques	267
11.1	Double plan incliné	267

11.1.1	Résolution par la mécanique de Newton	268
11.1.2	Résolution par le principe des travaux virtuels	270
11.1.3	Résolution par la mécanique de Lagrange	271
11.1.4	Résolution par la mécanique de Hamilton	271
11.1.5	Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi	272
11.2	Poulies coaxiales	273
11.2.1	Résolution par la mécanique de Newton	273
11.2.2	Résolution par le principe des travaux virtuels	274
11.2.3	Résolution par la mécanique de Lagrange	275
11.2.4	Résolution par la mécanique de Hamilton	275
11.2.5	Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi	276
11.3	Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe	277
11.3.1	Résolution par la mécanique de Newton	277
11.3.2	Résolution par le principe des travaux virtuels	281
11.3.3	Résolution par la mécanique de Lagrange	282
11.3.4	Résolution par la mécanique de Hamilton	283
11.3.5	Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi	284
11.4	Pendule simple, plan	287
11.4.1	Résolution par la mécanique de Newton	287
11.4.2	Résolution par le principe des travaux virtuels	292
11.4.3	Résolution par la mécanique de Lagrange	292
11.4.4	Résolution par la mécanique de Hamilton	293
11.4.5	Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi	294
11.5	Pendule simple à ressort, plan	295
11.5.1	Résolution par la mécanique de Newton	296
11.5.2	Résolution par le principe des travaux virtuels	297
11.5.3	Résolution par la mécanique de Lagrange	298
11.5.4	Résolution par la mécanique de Hamilton	299
11.6	Pendule sphérique	300
11.6.1	Résolution par la mécanique de Newton, grâce aux intégrales premières	301
11.6.2	Résolution par la mécanique de Lagrange	302
11.6.3	Résolution par la mécanique de Hamilton	303

Chapitre 1

LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS EN STATIQUE

Sommaire

1.1 Principe des déplacements virtuels	2
1.2 Principe des travaux virtuels	4
1.3 Formulation générale du principe	5
1.4 Exemples	7
1.5 Comparaison avec la mécanique de Newton	13
1.6 Avantage de la méthode	17
1.7 Types de liaisons et coordonnées généralisées	17
1.8 Multiplicateurs de Lagrange	23
1.9 Forces dérivant d'une énergie potentielle	24
1.10 Nature de l'équilibre	25
1.11 Applications des travaux virtuels	29

En 1586, Simon Stevin énonce le principe des travaux virtuels en étudiant des palans. En 1717, Jean Bernoulli pose le principe des travaux virtuels comme loi fondamentale de la statique : à l'équilibre, aucun travail n'est nécessaire pour provoquer un déplacement infiniment petit d'un système mécanique donné. En 1743, Jean le Rond D'Alembert étend ce principe à la dynamique. Il devient alors une écriture équivalente des équations de la mécanique de Sir Isaac Newton. En 1756, dans une lettre à Léonhard Euler, Joseph-Louis de La Grange démontre toute la mécanique à partir du principe de moindre action. Ces écrits paraissent dans un mémoire des *Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin* Tome 2, 1760-1761. Dans son ouvrage *Mécanique analytique* de 1788, il pose le principe des travaux virtuels à la base de la mécanique analytique. En appliquant les coordonnées généralisées à ce principe, il énonce les équations de la mécanique analytique. Comme les équations de Newton, les n équations différentielles de Lagrange sont du 2nd ordre par rapport au temps, du fait des termes d'accélération. En 1827, Sir William Rowan Hamilton effectue la transformation de Legendre du lagrangien pour les vitesses généralisées. Les $2n$ équations différentielles de Hamilton sont du 1^{er} ordre par rapport au temps, donc intégrées une première fois, et sont remarquables par leur symétrie. Dans son mémoire de 1837 « Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique », Carl Gustav Jacob Jacobi simplifie l'intégration des équations de la dynamique en abaissant leur ordre.

Il me paraît difficile de comprendre la mécanique analytique en partant du principe de Hamilton

ou des équations de Newton, c'est pourquoi, comme le fit Lagrange dans son ouvrage de 1788, j'ai choisi de partir du principe des travaux virtuels.

Nous supposons comme Newton que le temps est absolu, et que l'espace physique est un espace euclidien à trois dimensions. L'espace et le temps sont les mêmes pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement relatif. À partir des notions de temps et d'espace, on définit un référentiel comme étant un système de coordonnées et une horloge, à chaque référentiel on associe un observateur, et réciproquement, à chaque observateur on associe un référentiel.

Galilée note qu'aucune expérience effectuée dans la cale d'un navire ne permet de mettre en évidence la vitesse de ce navire, si celle-ci est constante en norme et en direction par rapport aux étoiles lointaines. Cette expérience de pensée nous amène à appeler *référentiels galiléens* tous les référentiels qui se déplacent d'un mouvement de translation rectiligne uniforme (à vecteur vitesse constant) par rapport aux étoiles lointaines, et à énoncer le principe de relativité galiléenne : « les référentiels galiléens sont équivalents pour l'écriture des lois de la physique ». Dans ce document nous nous plaçons toujours dans un référentiel galiléen.

1.1 Principe des déplacements virtuels

À la fin du XVI^e siècle, Stevin étudie les palans qui permettent de charger et décharger les palanquées sur les navires marchands. Il étudie ces systèmes de poulies à l'équilibre¹. On suppose la masse des poulies négligeable devant les autres masses, et les liaisons parfaites (ou polies) c.-à-d. sans frottements au niveau des axes des poulies.

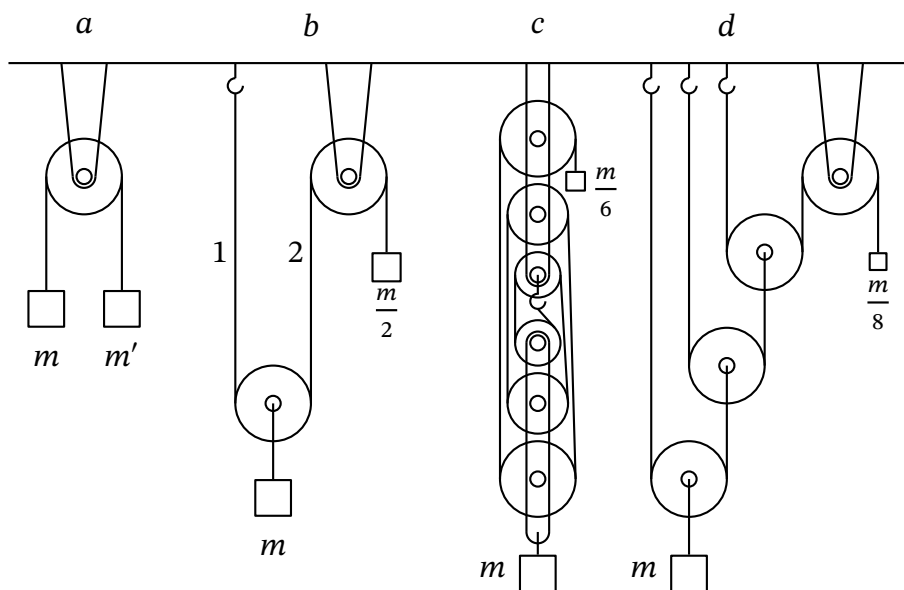


FIG. 1.1 – Systèmes de poulies

1. Ernst Mach, *La mécanique* (Édition Jacques Gabay, 1987).

En *a*, par symétrie $m' = m$. En *b*, la masse m est soutenue par les cordes parallèles 1 et 2. Par symétrie, chacune des cordes supporte la moitié du poids de la masse m , il faut un contrepoids de masse $\frac{m}{2}$ pour qu'il y ait équilibre.

Stevin remarque que pour chaque système de poulies ci-dessus, si l'on déplace la masse m vers le bas ou vers le haut d'une hauteur h , alors :

- en *a*, le poids $m' = m$ monte ou descend de h ,
- en *b*, le poids $\frac{m}{2}$ monte ou descend de $2h$,
- en *c*, le poids $\frac{m}{6}$ monte ou descend de $6h$,
- en *d*, le poids $\frac{m}{8}$ monte ou descend de $8h$.

Ainsi, dans un système de poulies à l'équilibre, les produits de chacune des masses par les déplacements que l'on *pourrait* leur donner, sont égaux :

$$\begin{aligned} m \times h &= \frac{m}{2} \times 2h \\ &= \frac{m}{6} \times 6h \\ &= \frac{m}{8} \times 8h \end{aligned}$$

Cette remarque contient en germe le *principe des déplacements virtuels*. On imagine le système dans une configuration toute proche de celle que l'on a, chaque masse subissant un déplacement dit *virtuel*, car il n'y a pas à proprement parler de déplacement. La notion de temps n'intervient pas puisqu'il s'agit de comparer deux positions d'équilibre d'un système, sans le passage de l'un à l'autre. Le mieux est d'imaginer deux systèmes de poulies parfaitement identiques, dans des positions d'équilibre proches.

Stevin étudie également l'équilibre des forces sur les plans inclinés². Il décrit l'expérience de pensée suivante : une chaîne fermée formée de perles de même poids est placée sur un double plan incliné (fig. 1.2 de la présente page). On néglige les forces de frottement des perles sur les plans inclinés.

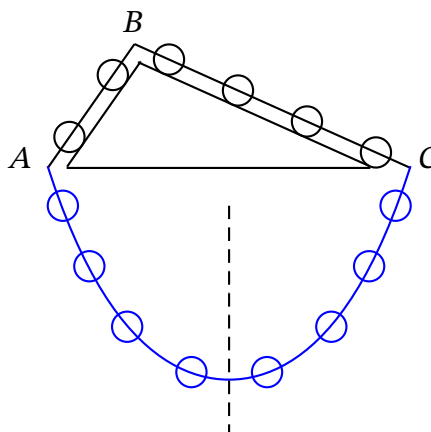


FIG. 1.2 – Chaîne de perles

La chaîne de perles reste immobile car sinon, selon Stevin « les boules tourneront par elles-mêmes de manière infinie. Ce qui ne se peut. »³. Or, la partie représentée en bleue, appelée chaînette ou

2. Simon Stevin, *De Beghinselen der Weeghconst* (Les principes de l'art de peser, 1586).

3. Notez qu'en l'absence totale de frottements, les perles pourraient tourner de manière infinie.

caténaire, est symétrique par rapport à l'axe vertical, si bien que la force exercée par la caténaire en A est égale à celle exercée en C . La partie AB de la chaîne de perles équilibre donc la partie BC , et ce, quel que soit le double plan incliné sur lequel repose la chaîne de perles.

1.2 Principe des travaux virtuels

En étudiant les plans inclinés, Galilée constate la validité du principe des déplacements virtuels et en trouve une formulation plus générale, le *principe des travaux virtuels*. Une masse m repose sur un plan incliné dont la longueur AB est double de la hauteur BC . D'après l'expérience de pensée de Stevin, lorsque les liaisons sont parfaites, c.-à-d. en l'absence de frottements entre la masse m et le plan incliné, et au niveau de l'axe de la poulie, cette masse est maintenue en équilibre par une masse $\frac{m}{2}$:

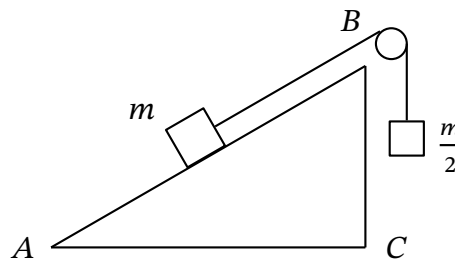


FIG. 1.3 – Équilibre d'une masse sur un plan incliné

Si l'on déplace virtuellement la masse m vers le haut sur une distance d le long du plan incliné, alors la masse $\frac{m}{2}$ descend d'une hauteur d . Nous n'avons plus l'égalité trouvée par Stevin entre les masses multipliées par leur déplacement virtuel respectif :

$$m \times d \neq \frac{m}{2} \times d$$

Mais Galilée constate que la masse m monte d'une hauteur $\frac{h}{2}$ et que la masse $\frac{m}{2}$ descend d'une hauteur h , et cette fois les produits sont égaux :

$$m \times \frac{h}{2} = \frac{m}{2} \times h$$

L'équilibre est déterminé par les masses multipliées par leur hauteur de chute, et non par leur déplacement. Par rapport à Stevin, Galilée précise que le déplacement à prendre en compte est celui effectué selon la verticale, autrement dit, celui dans le sens des forces de pesanteur.

Notons m_1 la première masse, m_2 la seconde, h_1 la hauteur de chute virtuelle de m_1 et h_2 celle de m_2 :

$$m_1 h_1 = m_2 h_2$$

Si les hauteurs de chute virtuelle sont des mesures algébriques affectées d'un signe positif ou d'un signe négatif selon qu'elles sont ou non de même sens que le poids des masses (force verticale

vers le bas), alors :

$$\sum_{i=1}^2 m_i h_i = 0$$

Généralisons à N masses $m_1, m_2, \dots, m_p$ subissant respectivement les déplacements virtuels $d_1, d_2, \dots, d_p$ compatibles entre eux et avec les liaisons, autrement dit compatibles avec le mécanisme, donc non indépendants.

Remarque 1.2.1

Sur la fig. 1.3 page précédente, les déplacements des masses sont compatibles entre eux si lorsqu'une masse monte l'autre descend, et ils sont compatibles avec les liaisons si la masse m ne passe pas à travers le plan incliné.

Soient $h_1, h_2, \dots, h_p$, les projections de ces déplacements sur la verticale, à l'équilibre :

$$\sum_{i=1}^N m_i h_i = 0$$

En écriture vectorielle, soient :

- $\vec{g}$ le champ de gravitation terrestre
- $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ le poids de la $i^{\text{ème}}$ masse
- $\vec{r}_i$ le vecteur position de la $i^{\text{ème}}$ masse
- $\Delta \vec{r}_i$ le déplacement virtuel de la $i^{\text{ème}}$ masse
- $\vec{P}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$ le travail virtuel de la $i^{\text{ème}}$ masse

Le principe des travaux virtuels énonce qu'à l'équilibre la somme des travaux virtuels est nulle,

$$\sum_{i=1}^N \vec{P}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = 0$$

où :

- les liaisons sont parfaites
- les déplacements virtuels sont compatibles entre eux
- les déplacements virtuels sont compatibles avec les liaisons

1.3 Formulation générale du principe

En 1717, Jean Bernoulli énonce la formulation générale du principe des travaux virtuels pour tous les cas d'équilibre, en ce qu'elle ne s'applique pas uniquement aux forces de pesanteur. En effet, une force quelconque peut être remplacée par la traction exercée par une corde attachée à une masse par l'intermédiaire d'une poulie.

Plusieurs forces peuvent s'exercer sur une même partie mobile du système (les masse m_i). Notons $\vec{F}_i$ la somme des *modèles* des forces exercées sur la i^{e} partie mobile :

$$\vec{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots$$

Soient N sommes de modèles de force $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ actives (qui créent le mouvement, aussi appelées motrices) appliquées aux N parties mobiles d'un système, subissant respectivement les déplacements virtuels *infinitement petits* $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \dots, \delta \vec{r}_p$. À l'équilibre, la somme des travaux virtuels des forces actives est nulle,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.1)$$

où :

- les liaisons sont parfaites
- les déplacements virtuels sont compatibles entre eux
- les déplacements virtuels sont compatibles avec les liaisons
- les déplacements virtuels sont infinitésimaux

Ceci constitue le *principe des travaux virtuels appliqué à la statique* dans sa formulation la plus générale. Nous verrons avec les ex 1.4.2 page 9 et 1.4.3 page 11 que c'est justement parce que les déplacements virtuels sont compatibles entre eux et avec les liaisons, c.-à-d. respectent le mécanisme, que l'on ne considère plus les forces de contrainte (aussi dites passives ou résistantes) mais seulement les forces actives.

L'emploi de déplacements infinitésimaux plutôt que finis considérés par Galilée, est justifié par la remarque qui suit. Soit le système suivant, pour lequel la poulie est parfaite et la masse glisse sans frottements sur le plan incliné :

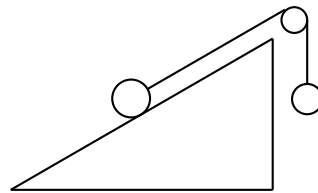


FIG. 1.4 – Déplacements finis

Les deux masses et l'inclinaison du plan sont choisis de sorte que le système soit à l'équilibre. Cet équilibre persiste quelle que soit la position du poids sur le plan incliné. Dans ce cas particulier, nous pouvons employer au choix, des déplacements finis ou infinitésimaux. Cependant, considérons le cas général en remplaçant le plan incliné par une surface quelconque tangente au plan incliné au point de contact de la masse :

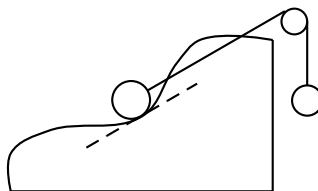


FIG. 1.5 – Déplacements infinitésimaux

L'équilibre subsiste puisque du point de vue de la masse rien n'a changé. Si nous considérons alors un déplacement fini, le système se transforme en une conformation voisine toute autre,

pour laquelle il n'y a pas toujours équilibre. Le système n'est pas à l'équilibre mais revient à sa position d'équilibre ou s'en éloigne définitivement. Si l'on considère maintenant un déplacement infinitésimal, le poids reste sur le plan tangent et l'équilibre est maintenu. Il n'y a donc d'essentiel que la possibilité de déplacement infinitésimal, pour lequel l'équilibre subsiste toujours. *Les déplacements virtuels sont donc toujours infinitésimaux.*

1.4 Exemples

Exemple 1.4.1 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Reprenons la fig. 1.3 page 4, et cherchons la masse m_2 pour qu'il y ait équilibre. Dans cet exemple on ne part pas du principe des travaux virtuels mais on le fait apparaître à partir de la mécanique de Newton.

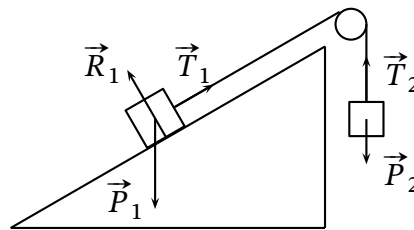


FIG. 1.6 – Équilibre d'une masse sur un plan incliné

Le système comprend $N = 2$ parties mobiles. $\vec{F}_i^{(e)}$ est la somme des forces extérieures s'exerçant sur la $i^{ème}$ partie mobile du système :

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{(e)} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 \\ \vec{F}_2^{(e)} = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 \end{cases}$$

Lorsque le système est à l'équilibre, chacune de ces sommes de forces extérieures est nulle :

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{(e)} = \vec{0} \\ \vec{F}_2^{(e)} = \vec{0} \end{cases}$$

Leur travail virtuel est donc nul pour tout ensemble de déplacements virtuels quelconques indépendants (pour le moment aucun lien entre $\delta \vec{r}_1$ et $\delta \vec{r}_2$) :

$$\begin{cases} \forall \delta \vec{r}_1 & \vec{F}_1^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0 \\ \forall \delta \vec{r}_2 & \vec{F}_2^{(e)} \cdot \delta \vec{r}_2 = 0 \end{cases}$$

Additionnons ces travaux virtuels nuls :

$$\forall \delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \quad \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

La force active est ici le poids $\vec{P}$, les forces de contrainte sont la tension $\vec{T}$ et la réaction du support $\vec{R}$.

$$\begin{aligned} & (\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{T}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0 \\ & (\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2) + (\vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{R}_1 \cdot \delta \vec{r}_1) = 0 \end{aligned}$$

Choisissons les déplacements virtuels $\delta \vec{r}_1$ et $\delta \vec{r}_2$ compatibles entre eux et avec les liaisons. Ils ne sont plus quelconques mais dépendants, et sont liés par l'équation de liaison qui remplace les forces de tension :

$$\|\delta \vec{r}_1\| = \|\delta \vec{r}_2\|$$

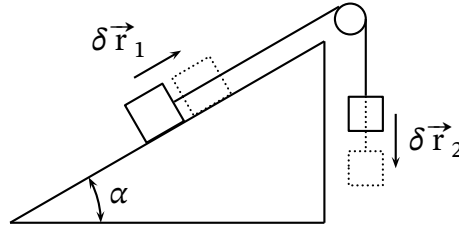


FIG. 1.7 – Déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons

En l'absence de frottements la réaction du support $\vec{R}_1$ est perpendiculaire au déplacement virtuel et ne travaille pas :

$$(\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2) + (\vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2) = 0$$

La tension de la corde travaille

$$\begin{cases} \vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 \neq 0 \\ \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

mais la somme de ces travaux virtuels est nulle. En effet, la tension étant constante

$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$$

qui donne

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= \|\vec{T}_1\| \|\delta \vec{r}_1\| - \|\vec{T}_2\| \|\delta \vec{r}_2\| \\ &= \|\vec{T}\| (\|\delta \vec{r}_1\| - \|\delta \vec{r}_2\|) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il reste,

$$\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

qui est le principe des travaux virtuels appliqué aux deux parties mobiles, les masses m_1 et m_2 . Supposons que la masse m_1 monte et la masse m_2 descende :

$$-\|\vec{P}_1\| \sin(\alpha) \|\delta \vec{r}_1\| + \|\vec{P}_2\| \|\delta \vec{r}_2\| = 0$$

$$m_2 = m_1 \sin(\alpha)$$

Les déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons ont permis de trouver la condition d'équilibre. S'il existe une force de frottement $\vec{f}$ entre la masse et le plan incliné, il va de suite que :

$$-\|\vec{P}_1\| \sin(\alpha) \|\delta \vec{r}_1\| - f \|\delta \vec{r}_1\| + \|\vec{P}_2\| \|\delta \vec{r}_2\| = 0$$

$$f = (m_2 - m_1) g \sin(\alpha)$$

Effectuons un déplacement virtuel perpendiculaire au plan incliné, donc incompatible avec la liaison. Le déplacement virtuel de la seconde masse est choisi nul pour être compatible avec le déplacement virtuel de la première.

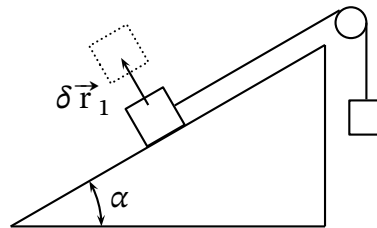


FIG. 1.8 – Déplacements virtuels compatibles entre eux mais pas avec la liaison

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$$

$$(\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$$

La tension est perpendiculaire au déplacement virtuel, elle ne travaille pas :

$$\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$$

$$-\|\vec{P}_1\| \|\delta \vec{r}_1\| \cos(\alpha) + \|\vec{R}\| \|\delta \vec{r}_1\| = 0$$

$$\|\vec{R}\| = \|\vec{P}_1\| \cos(\alpha)$$

Un déplacement virtuel incompatible avec une liaison permet sa détermination.

Exemple 1.4.2 : Pendule statique

Une masse est attachée à une corde de longueur ρ faisant un angle θ avec la verticale. Quelle doit être l'intensité $\|\vec{f}\|$ de la force horizontale pour qu'il y ait équilibre ?

On imagine le système dans une configuration d'équilibre toute proche de celle que l'on

a, ce qui revient à effectuer un déplacement virtuel compatible avec la liaison. Pour cela, faisons varier l'angle d'une valeur $\delta\theta$ infiniment petite :

$$\begin{aligned}\delta\vec{r} &= \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} \\ &= \rho \cos(\theta)\delta\theta\vec{i} + \rho \sin(\theta)\delta\theta\vec{j}\end{aligned}$$

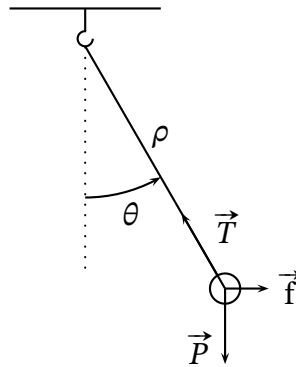


FIG. 1.9 – Pendule statique

Le déplacement virtuel est perpendiculaire à la tension, le travail virtuel de la tension est donc nul. Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 à la seule partie mobile ($N = 1$), pour un déplacement virtuel compatible avec la liaison :

$$\begin{aligned}\vec{F}^{(a)} \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ (\vec{f} + \vec{P}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ \|\vec{f}\|\rho \cos(\theta)\delta\theta - \|\vec{P}\|\rho \sin(\theta)\delta\theta &= 0 \\ \|\vec{f}\| &= mg \tan(\theta)\end{aligned}$$

C'est la condition d'équilibre cherchée. On note que la longueur de la corde n'intervient pas. Pour $\theta = 0^\circ$ la force est nulle, pour $\theta = 45^\circ$, $\|\vec{f}\| = mg$. La force tend vers l'infini lorsque θ tend vers 90° .

Prenons un déplacement virtuel incompatible avec la liaison :

$$\delta\vec{r} = \delta y\vec{j}$$

La force horizontale lui est perpendiculaire, son travail virtuel est donc nul.

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ (\vec{P} + \vec{T}) \cdot \delta\vec{r} &= 0 \\ -\|\vec{P}\|\delta y + \|\vec{T}\|\cos(\theta)\delta y &= 0 \\ \|\vec{T}\| &= \frac{mg}{\cos(\theta)}\end{aligned}$$

Pour $\theta = 0^\circ$, $\|\vec{T}\| = mg$, puis $\|\vec{T}\|$ croît avec θ et tend vers l'infini lorsque θ tend vers 90° . La composante verticale de la tension est toujours égale à mg , sa composante horizontale est toujours égale à $\|\vec{f}\|$.

Exemple 1.4.3 : Le principe du levier

Dans le repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$, soit un levier à l'équilibre sous l'action de deux forces actives :

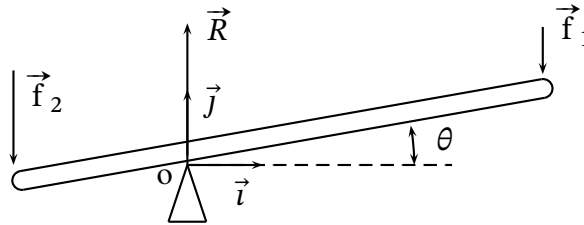


FIG. 1.10 – Levier à l'équilibre quel que soit l'angle θ

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = -\|\vec{f}_1\| \vec{j} \\ \vec{f}_2 = -\|\vec{f}_2\| \vec{j} \end{cases}$$

Les vecteurs position des extrémités du levier s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \|\vec{r}_1\| \cos(\theta) \vec{i} + \|\vec{r}_1\| \sin(\theta) \vec{j} \\ \vec{r}_2 = -\|\vec{r}_2\| \cos(\theta) \vec{i} - \|\vec{r}_2\| \sin(\theta) \vec{j} \end{cases}$$

Donnons au levier une rotation virtuelle d'angle $\delta\theta$ compatible avec la liaison $\vec{R}$:

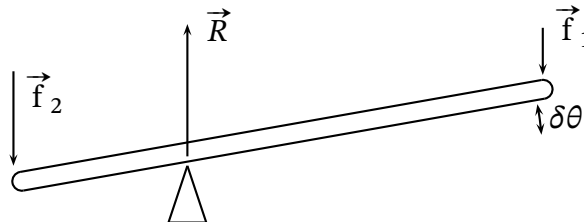


FIG. 1.11 – Rotation virtuelle d'angle $\delta\theta$

Les variations des vecteurs positions ont pour expressions :

$$\begin{cases} \delta \vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} \delta\theta \\ \delta \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} \delta\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \vec{r}_1 = -\|\vec{r}_1\| \sin(\theta) \delta\theta \vec{i} + \|\vec{r}_1\| \cos(\theta) \delta\theta \vec{j} \\ \delta \vec{r}_2 = \|\vec{r}_2\| \sin(\theta) \delta\theta \vec{i} - \|\vec{r}_2\| \cos(\theta) \delta\theta \vec{j} \end{cases}$$

La réaction $\vec{R}$ ne travaille pas lors de ce déplacement virtuel, elle reste identique à elle-même quel que soit l'angle. Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 pour un déplacement virtuel compatible avec la liaison. Nous devons considérer qu'il y a deux

parties mobiles ($N = 2$), chaque extrémité du levier :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{f}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ -\|\vec{f}_1\| \|\vec{r}_1\| \cos(\theta) \delta\theta + \|\vec{f}_2\| \|\vec{r}_2\| \cos(\theta) \delta\theta &= 0 \\ \|\vec{f}_1\| \|\vec{r}_1\| &= \|\vec{f}_2\| \|\vec{r}_2\| \end{aligned}$$

Nous retrouvons le principe du levier, c.-à-d. l'égalité des moments de force.

Remarque 1.4.1

Le principe du levier est précisément le principe des travaux virtuels. Celui-ci aurait pu être établi en étudiant le levier plutôt que les palans. Le principe de fonctionnement des palans et celui du levier étant à la base de la statique, ils ne sont pas démontrables.

Calcul de la force de réaction

Lorsque l'on veut calculer une force de réaction, le déplacement virtuel doit être incompatible avec cette liaison pour qu'elle travaille virtuellement. La force de liaison est alors traitée comme une force active. Pour calculer la réaction du point d'appui, on donne au levier une translation verticale virtuelle $\delta \vec{r} = \delta y \vec{j}$:

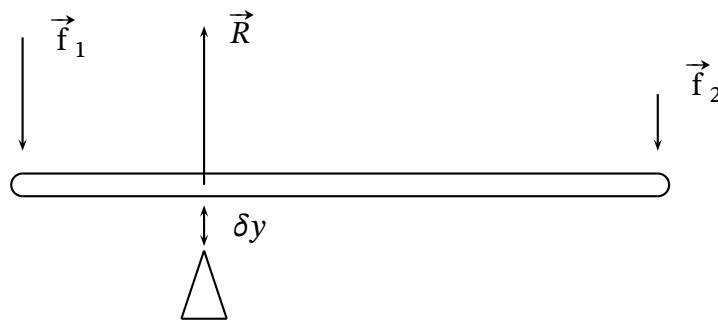


FIG. 1.12 – Force de réaction d'un levier

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \delta \vec{r} + \vec{f}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{f}_2 \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\ \|\vec{R}\| \delta y - \|\vec{f}_1\| \delta y - \|\vec{f}_2\| \delta y &= 0 \\ \|\vec{R}\| &= \|\vec{f}_1\| + \|\vec{f}_2\| \end{aligned}$$

Remarque 1.4.2

La translation virtuelle aurait pu être vers le bas, le résultat aurait été le même. Il est permis de considérer un déplacement virtuel où deux solides se compénètrent et ne respectent pas les liaisons.

Nous voyons sur cet exemple la différence entre un déplacement virtuel et un déplacement réel. Dans ce dernier, si le levier se sépare de son appui, la réaction $\vec{R}$ devient nulle, et ne

travaille pas. Dans le déplacement virtuel, la réaction reste la même et effectue le travail virtuel $\|\vec{R}\| \delta y$.

Dans l'exemple que nous venons de voir, nous ne cherchons pas l'équation d'équilibre du système mais la force de réaction, c'est pourquoi le déplacement virtuel choisi n'est pas compatible avec la liaison. Lorsque nous étudierons l'équilibre d'un système, nous prendrons toujours des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, c.-à-d. pour lesquels le travail virtuel des forces de liaison est nul.

1.5 Comparaison avec la mécanique de Newton

En mécanique de Newton, un système est à l'équilibre lorsque la somme de toutes les forces extérieures exercées sur ce système est nulle, *et* lorsque la somme des moments de ces forces est nulle. Pour un système articulé, on doit définir plusieurs sous-systèmes, puis déterminer les forces exercées sur ces sous-systèmes, dont les forces de liaison entre ces sous-systèmes. C'est la détermination des forces de liaison qui permet de résoudre le problème.

Exemple 1.5.1 : Palan

Reprenons l'exemple du palan (fig. 1.1.b page 2). Quelle doit être la valeur de la masse m_2 pour équilibrer celle de m_1 ?

Résolution par la mécanique de Newton

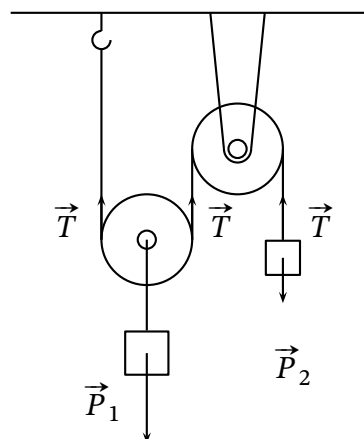


FIG. 1.13 – Palan : inventaire des forces

Le premier sous-système étudié est constitué de la première poulie et de la première masse. Appliquons le principe fondamental de la dynamique. L'ensemble est immobile donc la

somme des forces extérieures exercées sur ce sous-système est nulle :

$$\begin{aligned}\sum \vec{f}^{(e)} &= \vec{0} \\ \vec{P}_1 + 2\vec{T} &= \vec{0} \\ \vec{T} &= -\frac{\vec{P}_1}{2}\end{aligned}$$

Nous avons déterminé la force de liaison, la tension $\vec{T}$ de la corde. Le second sous-système étudié est la masse m_2 . Appliquons le principe fondamental de la dynamique. Elle est immobile donc :

$$\begin{aligned}\sum \vec{f}^{(e)} &= \vec{0} \\ \vec{P}_2 + \vec{T} &= \vec{0} \\ \vec{P}_2 &= -\vec{T}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$m_2 = \frac{m_1}{2}$$

Résolution par le principe des travaux virtuels

Donnons à la masse m_2 un déplacement virtuel $\delta \vec{r}_2$ vertical vers le bas :

$$\delta \vec{r}_2 = -\delta y \vec{j}$$

Le vecteur déplacement virtuel $\delta \vec{r}_1$ de la masse m_1 compatible avec les liaisons et compatible avec $\delta \vec{r}_2$ est tel que :

$$\delta \vec{r}_1 = -\frac{\delta \vec{r}_2}{2}$$

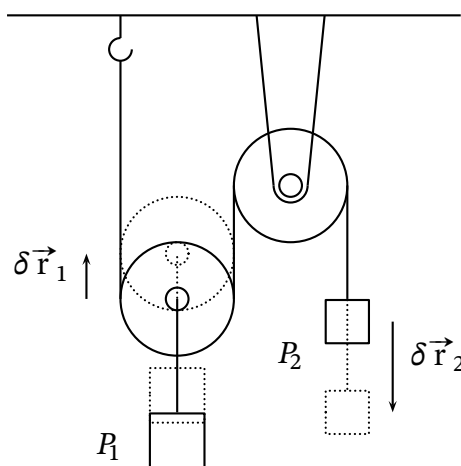


FIG. 1.14 – Palan : déplacements virtuels

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$), les masses m_1 et m_2 , pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les

liaisons :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$$

$$\vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 - \vec{P}_1 \cdot \frac{\delta \vec{r}_2}{2} = 0$$

$$\left(\vec{P}_2 - \frac{\vec{P}_1}{2} \right) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

$$m_2 = \frac{m_1}{2}$$

Nous avons tenu compte des liaisons sans introduire de forces de liaison inconnues à déterminer, mais en utilisant des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons (un mouvement virtuel compatible avec le mécanisme).

Au lieu de s'appliquer séparément à chacun des sous-systèmes, le principe des travaux virtuels s'applique au système dans son ensemble en regardant comment les sous-systèmes s'articulent entre eux grâce aux liaisons.

Exemple 1.5.2 : Poulies coaxiales

Deux poulies coaxiales de rayon R_1 et R_2 supportent respectivement les masses m_1 et m_2 . Quelle est la condition d'équilibre ?

Résolution par la mécanique de Newton

L'ensemble des poids et des poulies coaxiales constitue le système.

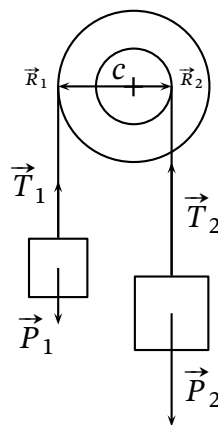


FIG. 1.15 – Poulies coaxiales : inventaire des forces

À l'équilibre, la somme des moments des forces extérieures est nulle par rapport à n'importe quel point. Par rapport au centre c de l'axe commun aux deux poulies, nous avons :

$$\begin{aligned}\overset{\curvearrowright}{M}_{\vec{P}_1/c} + \overset{\curvearrowright}{M}_{\vec{P}_2/c} &= \vec{0} \\ \vec{R}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{R}_2 \times \vec{P}_2 &= \vec{0} \\ \|\vec{P}_1\| \|\vec{R}_1\| - \|\vec{P}_2\| \|\vec{R}_2\| &= 0 \\ m_1 &= \frac{R_2}{R_1} m_2\end{aligned}$$

Résolution par le principe des travaux virtuels

La position du système ne dépend que de l'angle φ de rotation des poulies. Donnons aux poulies une rotation virtuelle d'angle $\delta\varphi$.

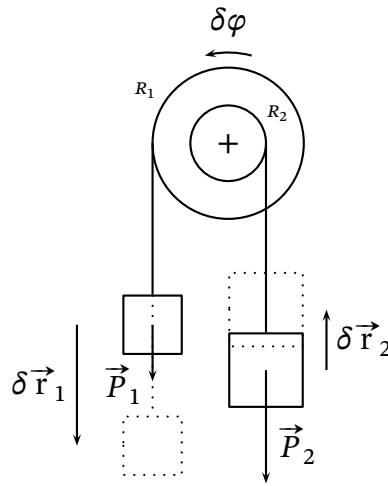


FIG. 1.16 – Poulies coaxiales : déplacements virtuels

Les déplacements virtuels s'écrivent :

$$\begin{aligned}\delta \vec{r}_1 &= -R_1 \delta \varphi \vec{j} \\ \delta \vec{r}_2 &= R_2 \delta \varphi \vec{j}\end{aligned}$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$), les masses m_1 et m_2 , pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ \|\vec{P}_1\| R_1 \delta \varphi - \|\vec{P}_2\| R_2 \delta \varphi &= 0 \\ m_1 g R_1 - m_2 g R_2 &= 0 \\ m_1 &= \frac{R_2}{R_1} m_2\end{aligned}$$

Nous avons montré avec l'exemple du palan que le principe des travaux virtuels contient le principe de l'équilibre des forces de la mécanique de Newton. Grâce au principe des travaux

virtuels nous retrouvons aussi l'équilibre des moments de force de la statique géométrique. Le principe des travaux virtuels contient donc les deux principes de la mécanique de Newton, l'égalité des forces et l'égalité des moments de force.

1.6 Avantage de la méthode

Imaginons qu'une machine inconnue soit placée dans une caisse fermée d'où il ne sort que deux bras de levier, servant de point d'application aux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

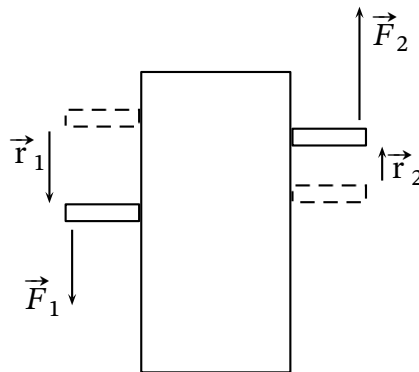


FIG. 1.17 – Mécanisme dans une boîte noire

En observant les vecteurs déplacements simultanés réels $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, nous déduisons immédiatement la condition d'équilibre :

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2 = 0$$

Dans cet exemple, les vecteurs forces étant constants, les déplacements virtuels se confondent avec les déplacements réels. Ce type de problème n'est pas soluble par la mécanique de Newton car nous n'avons pas accès aux mécanismes internes de la machine.

1.7 Types de liaisons et coordonnées généralisées

Un système est soumis à des liaisons s'il existe des contraintes qui en limitent les mouvements externes ou internes. Les liaisons s'expriment soit par des *forces de contrainte*, soit par des *équations de liaison*.

1.7.1 Liaisons géométriques et liaisons cinématiques

Une liaison *géométrique* concerne uniquement les positions et éventuellement le temps.

Soit $\vec{r}_i = (x_1, \dots, x_m)_i$ le vecteur position du $i^{\text{ème}}$ point matériel (ou partie mobile) du système.

Une liaison géométrique s'écrit sous la forme $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_p, t) = 0$

Exemple 1.7.1 : Trois exemples de liaison

- La liaison du pendule simple plan peut s'exprimer soit par la force de contrainte $\vec{T}$ (tension dans la corde), soit par l'équation de liaison $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$:

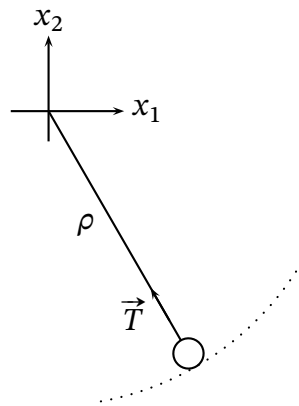


FIG. 1.18 – Le pendule se déplace sur un arc de cercle

- Deux mobiles sont maintenus à une distance constante par une liaison rigide qui peut s'exprimer soit par deux forces égales et opposées, soit par l'équation de liaison $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = c^{ste}$:

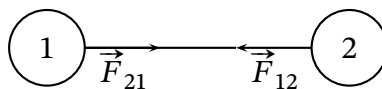


FIG. 1.19 – Liaison rigide entre deux mobiles

- La liaison du solide glissant sur un plan incliné peut s'exprimer soit par la force de contrainte $\vec{R}$ (réaction du plan incliné sur le solide), soit par l'équation de liaison $x_2 = ax_1 + b$:

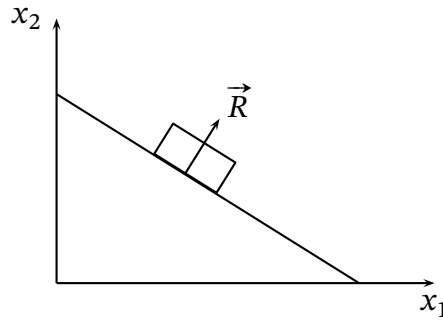


FIG. 1.20 – Le solide se déplace sur une droite

Une équation de liaison concernant les vitesses $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m)_i$ et éventuellement les positions et le temps est dite *cinématique*.

1.7.2 Liaisons scléronomes et liaisons rhéonomes

Une liaison dont l'équation ne dépend pas explicitement du temps est dite *scléronome*. Dans le cas contraire, une liaison dont l'équation dépend explicitement du temps est dite *rhéonome*.

1.7.3 Liaisons holonomes

Une équation de liaison est dite *holonome* si elle permet d'éliminer l'une des m coordonnées. Lorsque toutes les liaisons sont holonomes, le système est dit holonome. Dans la plupart des cas, les liaisons géométriques sont holonomes et les liaisons cinématiques sont non-holonomes.

Définition 1.7.1 : Degrés de liberté

Soit un système décrit par m coordonnées dont k sont superflues. Si l'on utilise k équations de liaisons holonomes pour éliminer les k coordonnées superflues alors le nombre $m - k$ de coordonnées restantes est égal au nombre minimal n de paramètres nécessaires pour décrire le mouvement du système, c.-à-d. au *nombre de degrés de liberté* du système :

$$n = m - k$$

On définit le *symbole de Kronecker* δ_{ij} par

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 1.7.2 : Coordonnées généralisées

Si la configuration d'un système est déterminée par un ensemble de n variables indépendantes q , alors ces variables sont appelées *coordonnées généralisées* de ce système, et l'on a la relation d'indépendance :

$$\forall i, j \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad (1.3)$$

Le nombre de degrés de liberté d'un système est donc égal au nombre de coordonnées généralisées de ce système.

Les coordonnées généralisées étant indépendantes, leur nombre est minimal. Réciproquement, si le nombre de coordonnées est minimal alors elles sont indépendantes. Nous pouvons donc aussi définir les coordonnées généralisées en écrivant qu'elles constituent un ensemble minimal de coordonnées pour un système.

Remarque 1.7.1 : Rappel sur les dérivations totales et partielles

Soit $x(t)$ une fonction explicite du temps et soit $f(x) = x^2$ une fonction explicite de x et implicite du temps par l'intermédiaire de la fonction x :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{df}{dx} = 2x \quad ; \quad \frac{df}{dt} = 2x\dot{x}$$

Plus précisément :

$$\begin{aligned} df[x(t)] &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \\ \frac{df[x(t)]}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Notez que $\frac{df[x(t)]}{dt}$ n'a pas le même sens que $\frac{df}{dt}[x(t)]$, dans le premier cas la fonction f a pour variable $x(t)$, dans le second cas c'est la dérivée de la fonction f qui a pour variable $x(t)$.

Exemple 1.7.2 : Liaison holonome scléronome

Deux masses m_1 et m_2 sur un double plan incliné sont reliées entre elles par un câble de longueur constante passant par une poulie. Quelle est la condition d'équilibre ?

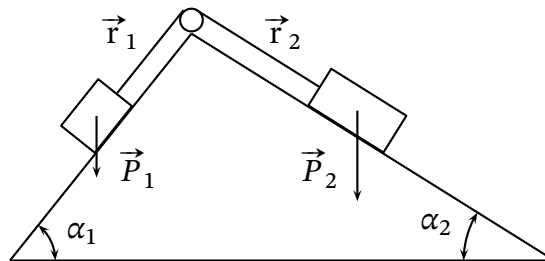


FIG. 1.21 – Double plan incliné

Soient $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ les vecteurs position des masses par rapport au sommet de la poulie. Nous avons deux coordonnées, r_1 et r_2 , donc $m = 2$, et le système est soumis à une liaison holonome scléronome telle que :

$$\|\delta \vec{r}_1\| = \|\delta \vec{r}_2\|$$

Remarque 1.7.2

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_1\| + \|\vec{r}_2\| &= c^{ste} \\ \delta(\|\vec{r}_1\| + \|\vec{r}_2\|) &= 0 \\ \delta\|\vec{r}_1\| + \delta\|\vec{r}_2\| &= 0 \end{aligned}$$

mais la variation de la norme d'un vecteur n'est pas la norme de sa variation, la première pouvant être négative mais pas la seconde.

Donc $k = 1$, et $n = m - k = 2 - 1 = 1$ un seul degré de liberté. Cette relation permet d'éliminer la coordonnée r_2 , et r_1 devient l'unique coordonnée, appelée coordonnée généralisée. La force de tension du câble est remplacée par l'équation de liaison. Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$), les masses m_1 et m_2 , pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

Supposons que la masse m_1 descende et que la masse m_2 monte :

$$\|\vec{P}_1\| \sin(\alpha_1) \|\delta \vec{r}_1\| - \|\vec{P}_2\| \sin(\alpha_2) \|\delta \vec{r}_2\| = 0$$

$$(m_1 g \sin(\alpha_1) - m_2 g \sin(\alpha_2)) \|\delta \vec{r}_1\| = 0$$

$$m_1 \sin(\alpha_1) = m_2 \sin(\alpha_2)$$

On vérifie que pour $\alpha_2 = \pi/2$ on retrouve $m_2 = m_1 \sin(\alpha_1)$.

Exemple 1.7.3 : Liaison holonome rhéonome

Une masse M est posée sur une trappe qui s'ouvre, p. ex. grâce à un moteur, d'un angle θ donné en fonction du temps : $\theta = f(t)$

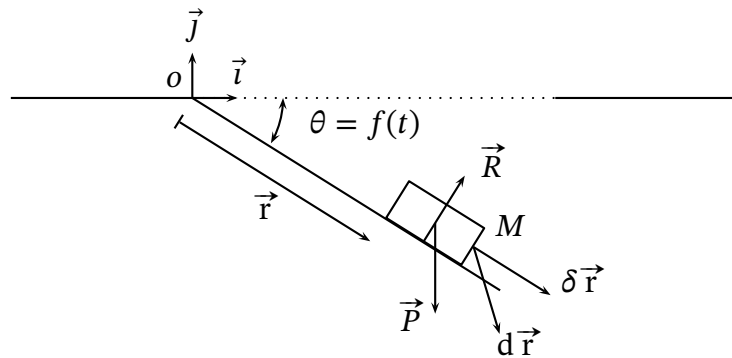


FIG. 1.22 – Masse sur une trappe

Le vecteur position de la masse s'écrit :

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$$

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho (\cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j})$$

Nous avons deux coordonnées, ρ et θ , donc $m = 2$, mais le système est soumis à une liaison holonome rhéonome,

$$\theta - f(t) = 0$$

donc $k = 1$ et il reste $n = 2 - 1 = 1$ un seul degré de liberté. Le vecteur position est une fonction explicite du temps, et de la seule coordonnée généralisée ρ :

$$\vec{r}(\rho, t) = \rho [\cos(f(t)) \vec{i} + \sin(f(t)) \vec{j}]$$

Ce problème est résolu dans l'ex. 2.4.5 page 66.

1.7.4 Liaisons non-holonomes

L'enceinte d'un gaz constitue une liaison non-holonome. Dans le cas d'une enceinte sphérique de rayon r , l'équation de liaison pour chaque molécule du gaz de coordonnées (x_1, x_2, x_3) s'écrit :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$$

On ne peut pas exprimer l'une des coordonnées en fonction des deux autres grâce à cette équation de liaison. Les liaisons s'exprimant par une inégalité, dites *unilatérales*, sont toutes non-holonomes. Pour être holonomes, les liaisons doivent s'exprimer par une égalité, c.-à-d., être *bilatérales*. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Exemple 1.7.4 : Disque roulant sans glissement sur un plan horizontal

Considérons un disque roulant sans glissement sur un plan horizontal (une pièce de monnaie sur la tranche roule sur une table). La position du disque est définie par ses deux coordonnées x et y dans le plan, et son orientation est définie par l'angle θ de rotation du disque autour de son axe, et par l'angle φ que fait l'axe du disque avec l'axe des x .

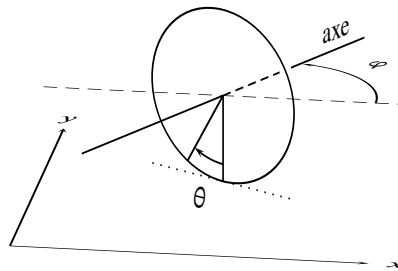


FIG. 1.23 – Disque roulant sans glissement sur un plan horizontal

En projetant le vecteur vitesse instantanée (à chaque instant perpendiculaire à l'axe du disque) sur les axes x et y :

$$\begin{cases} v_x = \|\vec{v}\| \cos(\pi/2 - \varphi) \\ v_y = -\|\vec{v}\| \sin(\pi/2 - \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \|\vec{v}\| \sin(\varphi) \\ \dot{y} = -\|\vec{v}\| \cos(\varphi) \end{cases}$$

Notons r le rayon du disque, la condition de roulement sans glissement s'écrit

$$\|\vec{v}\| = r\dot{\theta}$$

si bien que les équations de liaison du disque avec le sol s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x} = r\dot{\theta} \sin(\varphi) \\ \dot{y} = -r\dot{\theta} \cos(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx - r \sin(\varphi) d\theta = 0 \\ dy + r \cos(\varphi) d\theta = 0 \end{cases}$$

Ces équations différentielles ne peuvent être intégrées, il n'existe pas de facteur intégrant qui les transformerait en différentielles totales exactes. Si cela était possible, l'on pourrait exprimer une coordonnée en fonction des trois autres. Or, pour une position du disque en un

point (x, y) , toutes les orientations en θ et φ sont possibles, en fonction de la trajectoire prise pour venir en ce point. Les quatre coordonnées (x, y, θ, φ) sont nécessaires pour définir complètement la position et l'orientation du disque dans l'espace. Aucune coordonnée n'est superflue, et par conséquent la liaison est non-holonyme.

1.8 Multiplicateurs de Lagrange

Soit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues x et y suivant,

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - ax - b = 0 \\ y - cx - d = 0 \end{cases}$$

Soit λ un multiplicateur *indéterminé*, différent de zéro. Le système précédent est équivalent à la seule équation suivante

$$\forall \lambda \neq 0, \quad (y - ax - b) + \lambda(y - cx - d) = 0$$

En effet, la seule façon d'annuler cette équation pour *tous* les λ non nuls est bien que chacun de ses deux termes soient nuls. Il est important que le multiplicateur λ soit indéterminé, car s'il prenait une valeur déterminée il suffirait de résoudre l'équation. Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \neq 0, \quad y - ax - b + \lambda y - \lambda cx - \lambda d &= 0 \\ \forall \lambda \neq 0, \quad (1 + \lambda)y - (a + \lambda c)x - (b + \lambda d) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si l'on prend $\lambda = -1$ pour éliminer l'inconnue y , on obtient la solution triviale,

$$(a - c)x - (b - d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

(1.4) doit être valable $\forall \lambda \neq 0$, donc aussi pour $\lambda = -a/c$, qui permet d'éliminer l'inconnue x ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{c}\right)y - \left(b - \frac{ad}{c}\right) &= 0 \\ y &= \frac{b - ad/c}{1 - a/c} \\ &= \frac{bc - ad}{c - a} \end{aligned}$$

On trouve l'expression de x grâce à $y = ax + b$, ce qui finit de résoudre le système.

Exemple 1.8.1

Résolvons le problème du double plan incliné de l'ex. 1.7.2 page 20 en utilisant les multiplicateurs indéterminés de Lagrange. Le système formé par le principe des travaux

virtuels et l'équation de liaison holonome,

$$\begin{cases} -\|\vec{P}_1\| \sin(\alpha_1) \|\delta \vec{r}_1\| + \|\vec{P}_2\| \sin(\alpha_2) \|\delta \vec{r}_2\| = 0 \\ \|\delta \vec{r}_1\| - \|\delta \vec{r}_2\| = 0 \end{cases}$$

est équivalent à la seule équation suivante,

$$\begin{aligned} \forall \lambda \neq 0 \quad & -\|\vec{P}_1\| \sin(\alpha_1) \|\delta \vec{r}_1\| + \|\vec{P}_2\| \sin(\alpha_2) \|\delta \vec{r}_2\| + \lambda (\|\delta \vec{r}_1\| - \|\delta \vec{r}_2\|) = 0 \\ \forall \lambda \neq 0 \quad & (-\|\vec{P}_1\| \sin(\alpha_1) + \lambda) \|\delta \vec{r}_1\| + (\|\vec{P}_2\| \sin(\alpha_2) - \lambda) \|\delta \vec{r}_2\| = 0 \end{aligned}$$

qui redonne le système

$$\begin{cases} m_1 g \sin(\alpha_1) - \lambda = 0 \\ m_2 g \sin(\alpha_2) - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow m_1 \sin(\alpha_1) = m_2 \sin(\alpha_2)$$

1.9 Forces dérivant d'une énergie potentielle

Lorsque tous les modèles de forces qui travaillent lors de leur déplacement virtuel dérivent d'une énergie potentielle, le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^N -\overrightarrow{\text{grad}}_i(V_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{\text{grad}}_i(V_i)$ est le vecteur gradient du modèle d'énergie potentielle V_i .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \vec{e}_x + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \vec{e}_y + \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \vec{e}_z \right) \cdot (\delta x_i \vec{e}_x + \delta y_i \vec{e}_y + \delta z_i \vec{e}_z) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \delta z_i \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \delta V_i &= 0 \\ \delta \sum_{i=1}^N V_i &= 0 \end{aligned}$$

Soit $V = \sum_i^N V_i$ la somme des modèles des énergies potentielles de toutes les parties mobiles. Sa variation lors du déplacement virtuel s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta V &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j &= 0 \end{aligned}$$

où n est le nombre de degrés de liberté du système et q_j est la $j^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée. Les δq_j étant indépendants, à l'équilibre :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (1.5)$$

1.10 Nature de l'équilibre

1.10.1 Système à un degré de liberté

Soit q la seule coordonnée généralisée. D'après (1.5), la condition d'équilibre en $q = \tilde{q}$ (la notation q_0 est réservée pour désigner la position à l'instant initial) est,

$$V'(\tilde{q}) = 0$$

le prime indiquant une dérivation par rapport à q .

Remarque 1.10.1

$V'(\tilde{q})$ est un abus de notation pour $\left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=\tilde{q}}$. En effet $\tilde{q}$ n'est pas une variable.

Pour $q = \tilde{q}$, l'énergie potentielle $V(q)$ est donc soit minimale, soit maximale, soit constante, soit elle présente un point d'inflexion. Cela correspond respectivement à un équilibre stable, instable, indifférent, et de nouveau, instable.

- a) premier cas, éloigné de sa position d'équilibre, le système gagne de l'énergie potentielle, $\Delta V > 0$, qu'il restitue plus ou moins rapidement pour retrouver sa position initiale.
- b) deuxième cas, éloigné de sa position d'équilibre, le système perd de l'énergie potentielle, $\Delta V < 0$, il s'éloigne irrémédiablement de sa position d'équilibre.
- c) troisième cas, l'énergie potentielle est constante, $\Delta V = 0$. Toute nouvelle position est encore une position d'équilibre.
- d) quatrième cas, dans un sens $\Delta V < 0$ et dans l'autre $\Delta V > 0$. Un petit déplacement fait quitter son état d'équilibre au système. Dans le premier sens, le système s'éloigne de son point d'équilibre. Dans l'autre sens, il repasse momentanément par son ancien état d'équilibre avec une vitesse non nulle, puis s'en éloigne.

L'étude du signe de l'accroissement de potentiel au voisinage de l'équilibre se fait à l'aide du développement de Taylor de $V(q)$ pour q au voisinage de $\tilde{q}$:

$$V(q) = V(\tilde{q}) + V'(\tilde{q})(q - \tilde{q}) + V''(\tilde{q}) \frac{(q - \tilde{q})^2}{2!} + V'''(\tilde{q}) \frac{(q - \tilde{q})^3}{3!} + \dots$$

À l'équilibre nous avons vu que $V'(\tilde{q}) = 0$, et la variation d'énergie potentielle s'écrit,

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(q) - V(\tilde{q}) \\ &= V''(\tilde{q}) \frac{(q - \tilde{q})^2}{2!} + V'''(\tilde{q}) \frac{(q - \tilde{q})^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

q étant au voisinage de $\tilde{q}$, $q - \tilde{q}$ est petit, et donc le signe de ΔV est celui du premier terme non nul.

- $\Delta V > 0$ (équilibre stable), implique $V''(\tilde{q}) > 0$.
- $\Delta V < 0$ (équilibre instable), implique $V''(\tilde{q}) < 0$.
- $\Delta V = 0$ (équilibre indifférent), implique $\forall n \geq 2, V^{(n)}(\tilde{q}) = 0$.
- Si $V''(\tilde{q}) = 0$, il faut étudier le signe de la première dérivée p -ième non nulle $V^{(p)}(\tilde{q})$ selon la parité de p , avec $p > 2$:
 - si p est pair et $V^{(p)}(\tilde{q}) > 0$, l'équilibre est stable.
 - si p est impair et $V^{(p)}(\tilde{q}) > 0$, l'équilibre est instable. C'est un point d'inflexion de $V(q)$.
 - si $V^{(p)}(\tilde{q}) < 0$ (p pair ou impair), l'équilibre est instable.

Exemple 1.10.1 : Poulies coaxiales

Reprenons l'ex. 1.5.2 page 15. Les deux forces de ce problème dérivant de l'énergie potentielle de gravitation, nous pouvons le résoudre grâce à (1.5) page précédente.

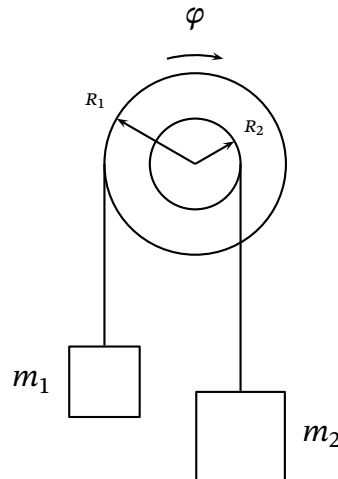


FIG. 1.24 – Poulies coaxiales

$$\vec{P}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}_i(V_i) = -\frac{\partial V_i}{\partial y} \vec{j} = -m_i g \vec{j}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = m_i g \quad \Rightarrow \quad V_i = \int_{y_i}^{y_i + \Delta y_i} m_i g dy = m_i g \Delta y_i = m_i g h_i$$

où les h_i sont les variations de hauteur des masses m_i . L'énergie potentielle totale est la

somme des énergies potentielles :

$$\begin{aligned} V &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \\ &= m_1 g (c_1^{ste} + R_1 \varphi) + m_2 g (c_2^{ste} - R_2 \varphi) \end{aligned}$$

φ est la seule coordonnées généralisée. À l'équilibre, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \\ m_1 g R_1 - m_2 g R_2 &= 0 \\ m_1 &= \frac{R_2}{R_1} m_2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\partial^n V}{\partial \varphi^n} = 0$$

donc l'équilibre est indifférent. Le système est à l'équilibre quelle que soit la valeur de l'angle φ . Éloigné de sa position, il ne revient ni ne s'éloigne d'avantage de celle-ci.

Exemple 1.10.2 : Double plan incliné

Reprenons l'ex. 1.7.2 page 20. Les deux forces de ce problème dérivant d'une énergie potentielle (de gravitation), nous pouvons le résoudre grâce à (1.5) page 25.

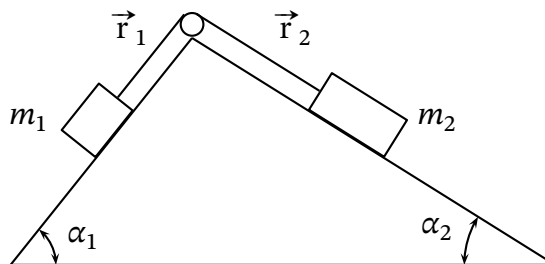


FIG. 1.25 – Double plan incliné

Prenons le sommet de la poulie comme origine des énergies potentielles de gravitation. L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles. Du fait de la liaison

$$\|\vec{r}_1\| + \|\vec{r}_2\| = c^{ste}$$

la seule coordonnée généralisée est r_1 :

$$\begin{aligned} V &= -\|\vec{P}_1\| \|\vec{r}_1\| \sin(\alpha_1) - \|\vec{P}_2\| \|\vec{r}_2\| \sin(\alpha_2) \\ &= -m_1 g \|\vec{r}_1\| \sin(\alpha_1) - m_2 g (c^{ste} - \|\vec{r}_1\|) \sin(\alpha_2) \end{aligned}$$

À l'équilibre, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r_1} &= 0 \\ -m_1 g \sin(\alpha_1) + m_2 g \sin(\alpha_2) &= 0 \\ m_1 \sin(\alpha_1) &= m_2 \sin(\alpha_2)\end{aligned}$$

De plus,

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\partial^n V}{\partial r_1^n} = 0$$

l'équilibre est indifférent.

1.10.2 Système à deux degrés de liberté

Soient q_1 et q_2 les coordonnées généralisées, et soient $\tilde{q}_1$ et $\tilde{q}_2$ les coordonnées généralisées de la position d'équilibre. Le développement de Taylor de $V(q_1, q_2)$ pour q_1, q_2 au voisinage de $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ s'écrit :

$$\begin{aligned}V(q_1, q_2) &= V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) + \partial_{q_1} V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(q_1 - \tilde{q}_1) + \partial_{q_2} V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(q_2 - \tilde{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\partial_{q_1}^2 V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(q_1 - \tilde{q}_1)^2 + 2\partial_{q_1, q_2}^2 V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(q_1 - \tilde{q}_1)(q_2 - \tilde{q}_2) \right. \\ &\left. + \partial_{q_2}^2 V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)(q_2 - \tilde{q}_2)^2 \right] + \dots\end{aligned}$$

À l'équilibre, les dérivées partielles $\partial_{q_1} V$, et $\partial_{q_2} V$ sont nulles. On pose :

$$\begin{cases} A = \partial_{q_1}^2 V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \\ B = \partial_{q_1, q_2}^2 V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \\ C = \partial_{q_2}^2 V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \end{cases}$$

La variation d'énergie potentielle s'écrit alors :

$$\Delta V = \frac{1}{2} \left[A(q_1 - \tilde{q}_1)^2 + 2B(q_1 - \tilde{q}_1)(q_2 - \tilde{q}_2) + C(q_2 - \tilde{q}_2)^2 \right] + \dots$$

C'est l'équation de la surface $\Delta V(q_1, q_2)$, de la forme :

$$\Delta V = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2 + \dots$$

Si l'on suppose $A > 0$,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \left(\sqrt{\frac{A}{2}}x + \sqrt{\frac{2}{A}} \times \frac{B}{2}y \right)^2 - \frac{2B^2}{4A}y^2 + \frac{C}{2}y^2 + \dots \\ &= \left(\sqrt{\frac{A}{2}}x + \frac{B}{\sqrt{2A}}y \right)^2 - \frac{y^2}{2} \left(\frac{B^2}{A} - C \right) + \dots\end{aligned}$$

Si $B^2 - AC \leq 0$, donc si $C > 0$, alors $\Delta V > 0$ et l'équilibre est stable.

Si $B^2 - AC > 0$ alors,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \left(\sqrt{\frac{A}{2}}x + \frac{B}{\sqrt{2A}}y \right)^2 - \left(y\sqrt{\frac{B^2}{2A} - \frac{C}{2}} \right)^2 + \dots \\ &= \left[\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x + \frac{B}{\sqrt{2A}}y \right) + \left(y\sqrt{\frac{B^2}{2A} - \frac{C}{2}} \right) \right] \times \left[\left(\sqrt{\frac{A}{2}}x + \frac{B}{\sqrt{2A}}y \right) - \left(y\sqrt{\frac{B^2}{2A} - \frac{C}{2}} \right) \right] + \dots \\ &= \left[\sqrt{\frac{A}{2}}x + y \left(\frac{B}{\sqrt{2A}} + \sqrt{\frac{B^2}{2A} - \frac{C}{2}} \right) \right] \times \left[\sqrt{\frac{A}{2}}x + y \left(\frac{B}{\sqrt{2A}} - \sqrt{\frac{B^2}{2A} - \frac{C}{2}} \right) \right] + \dots\end{aligned}$$

dont le signe dépend des valeurs prises par x et y , donc par $q_1 - \tilde{q}_1$ et $q_2 - \tilde{q}_2$, et de celles des dérivées partielles secondes A, B, C . L'équilibre est stable ou instable selon les directions.

Si $A = B = C = 0$, l'équilibre est indéterminé, il faut étudier le signe des dérivées d'ordre supérieur à deux.

Si $V = c^{ste}$, alors $\Delta V = 0$, l'équilibre est indifférent.

1.11 Applications des travaux virtuels

1.11.1 Poutre sur deux cylindres

Une poutre de masse M est posée sur deux cylindres de masse m . Quelle force $\vec{F}$ faut-il appliquer pour maintenir l'ensemble à l'équilibre sur un plan incliné d'un angle α ?

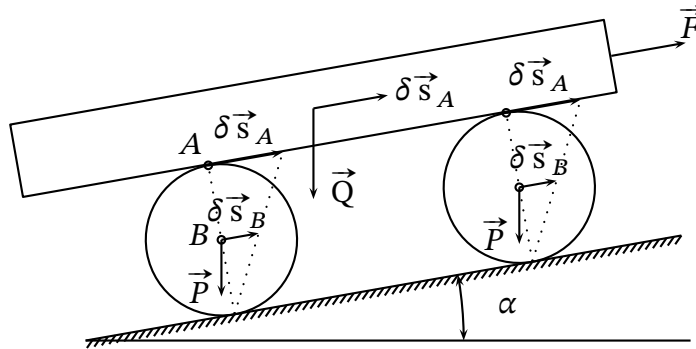


FIG. 1.26 – Poutre sur deux cylindres

Communiquons à la poutre un déplacement virtuel $\delta \vec{s}_A$. Appliquons le principe des travaux

virtuels (1.1) page 6 aux trois parties mobiles ($N = 3$) :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{s}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{s}_A + 2\vec{P} \cdot \delta \vec{s}_B = 0$$

Cherchons la relation entre les déplacements virtuels $\delta \vec{s}_A$ et $\delta \vec{s}_B$ de sorte qu'ils soient compatibles entre eux et avec les liaisons. Le point de contact des cylindres avec le plan incliné est un centre instantané de rotation. Soient $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ les vitesses virtuelles instantanées (rapport d'un déplacement virtuel sur un temps réel infinitésimal) des points A et B :

$$\vec{v}_A = 2 \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_A dt = 2 \vec{v}_B dt$$

$$\delta \vec{s}_A = 2 \delta \vec{s}_B$$

par conséquent,

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{s}_A + \vec{Q} \cdot \delta \vec{s}_A + \vec{P} \cdot \delta \vec{s}_A = 0$$

$$\|\vec{F}\| - \|\vec{Q}\| \sin(\alpha) - \|\vec{P}\| \sin(\alpha) = 0$$

$$\|\vec{F}\| = (M + m) g \sin(\alpha)$$

1.11.2 Treuil

Soit un treuil à l'équilibre sous l'action d'un poids $\vec{P}$ et d'une force $\vec{F}$. Pour quelle valeur de la force $\vec{F}$ y a-t-il équilibre ? Donnons au treuil une rotation virtuelle d'angle $\delta\theta$:

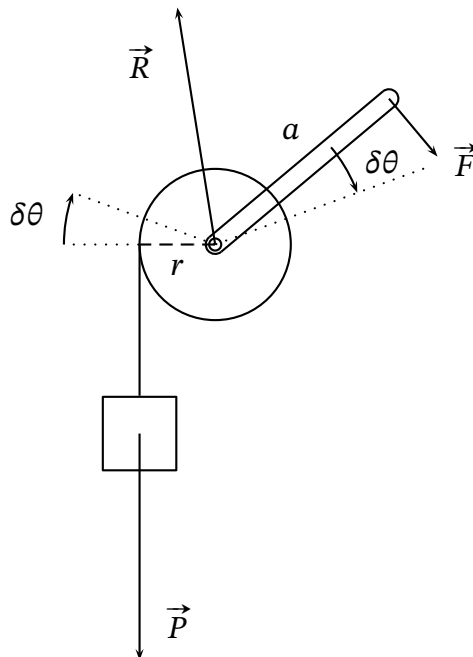


FIG. 1.27 – Treuil

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ -\|\vec{P}\| r \delta \theta + \|\vec{F}\| a \delta \theta &= 0 \\ \|\vec{F}\| &= mg \frac{r}{a}\end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas résoudre ce problème en appliquant (1.5) page 25, $\partial V / \partial \theta = 0$, car nous n'avons pas l'expression du potentiel de la force $\vec{F}$. Il faudrait p. ex. attacher une masse au bras de levier pour remplacer la force exercée.

1.11.3 Appareil de levage

Un appareil de levage dont le mécanisme n'est pas visible est tel qu'à chaque tour de manivelle la vis s'élève d'une hauteur h . Quelle valeur de la force $\vec{F}$ équilibre le poids $\vec{P}$?

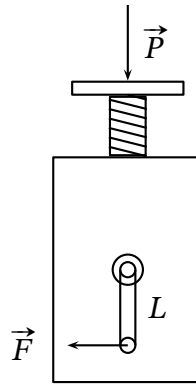


FIG. 1.28 – Appareil de levage

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{F} \cdot L \delta \varphi \vec{e}_\varphi + \vec{P} \cdot \delta h \vec{j} &= 0 \\ \|\vec{F}\| 2\pi L - \|\vec{P}\| h &= 0 \\ \|\vec{F}\| &= \frac{h}{2\pi L} \|\vec{P}\|\end{aligned}$$

Ce problème simple est impossible à résoudre par la mécanique de Newton car le mécanisme est inconnu.

1.11.4 Ciseaux de Nuremberg

Soient un ensemble de barres rigides articulées sans frottements appelé « Ciseaux de Nuremberg ». Le point C est fixe. Au point A est appliquée une force verticale vers le haut $\vec{f}_1$.

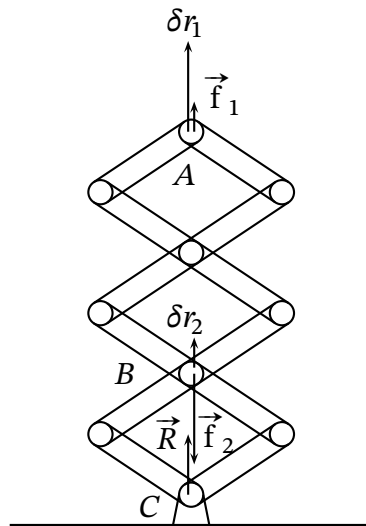


FIG. 1.29 – Ciseaux de Nuremberg

Quelle force $\vec{f}_2$ faut-il exercer au point B pour qu'il y ait équilibre ? Si l'on communique au système un déplacement virtuel, toutes les diagonales verticales des parallélogrammes formés par les tiges s'allongeront d'une même longueur δr_2 . Par conséquent, $\delta \vec{r}_1 = 3 \delta \vec{r}_2$. Prenons $\vec{f}_2$ dirigée vers le bas.

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) subissant des efforts :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{f}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ \|\vec{f}_1\| \delta r_1 - \|\vec{f}_2\| \delta r_2 &= 0 \\ (3\|\vec{f}_1\| - \|\vec{f}_2\|) \delta r_2 &= 0 \\ \|\vec{f}_2\| &= 3\|\vec{f}_1\| \end{aligned}$$

Remarque 1.11.1

Si l'on prend $\vec{f}_2$ dirigée vers le haut on obtient $\|\vec{f}_2\| = -3\|\vec{f}_1\|$ ce qui est impossible.

Pour calculer la réaction $\vec{R}$ on la fait travailler virtuellement. Supposons que le point B soit fixe, on a $\delta \vec{r}_1 = -2 \delta \vec{r}_3$, où $\delta \vec{r}_3$ est le déplacement virtuel vers le bas du point C . Prenons $\vec{R}$ dirigée

vers le haut. Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_3 &= 0 \\ \|\vec{f}_1\| \delta r_1 - \|\vec{R}\| \delta r_3 &= 0 \\ (2\|\vec{f}_1\| - \|\vec{R}\|) \delta r_3 &= 0 \\ \|\vec{R}\| &= 2\|\vec{f}_1\|\end{aligned}$$

Les ciseaux étant à l'équilibre, on vérifie que la somme des forces est nulle :

$$\begin{aligned}\vec{R} + \vec{f}_1 - \vec{f}_2 &= 2\vec{f}_1 + \vec{f}_1 - 3\vec{f}_1 \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

1.11.5 Problème à deux degrés de liberté

Trois poids sont reliés par des câbles passant par trois poulies fixes A, B, C . Pour quelle disposition des câbles y a-t-il équilibre ?

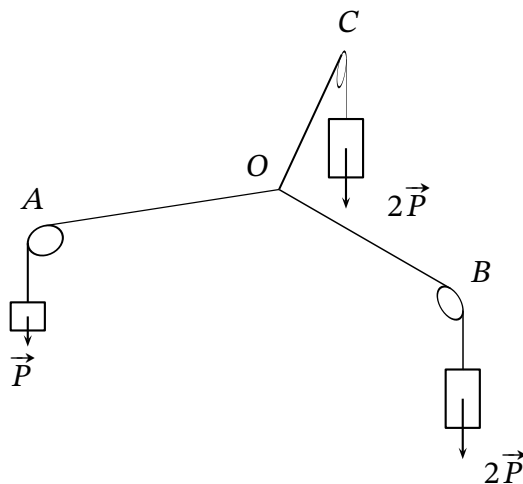


FIG. 1.30 – Problème à deux degrés de liberté

Supposons que l'équilibre soit réalisé et donnons au point O les déplacements virtuels élémentaires $\delta \vec{r}_2$ selon OB , et $\delta \vec{r}_3$ selon OC . Seules les tensions dans les câbles comptent, un schéma équivalent du point de vue de la mécanique est celui-ci, vu de dessus :

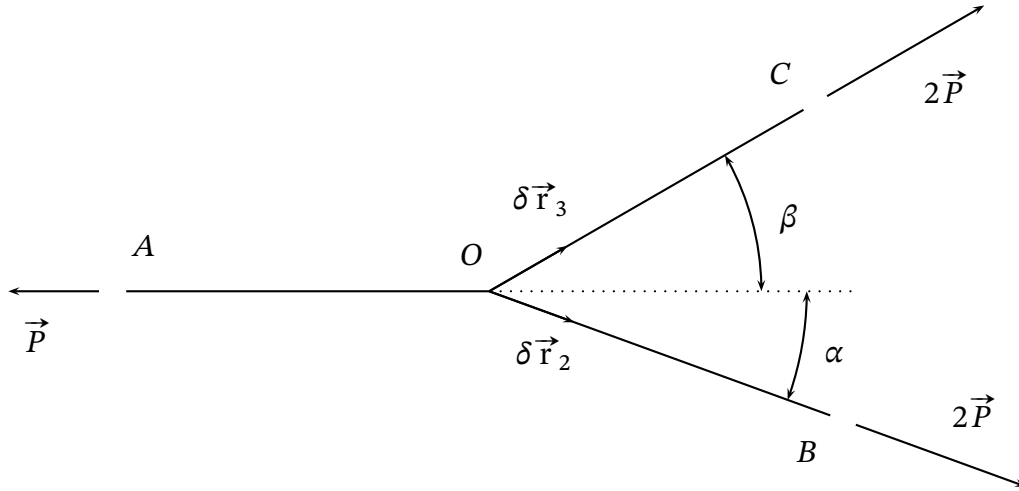


FIG. 1.31 – Problème à deux degrés de liberté. Schéma équivalent vu de dessus

On peut réaliser n'importe quel déplacement du point O dans le plan ABC , le déplacement selon OA étant une combinaison linéaire des déplacements selon OB et OC .

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux trois parties mobiles ($N = 3$) selon deux axes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{P}_A \cdot (\delta \vec{r}_2 + \delta \vec{r}_3) + \vec{P}_B \cdot (\delta \vec{r}_2 + \delta \vec{r}_3) + \vec{P}_C \cdot (\delta \vec{r}_2 + \delta \vec{r}_3) &= 0 \\ \vec{P}_A \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{P}_A \cdot \delta \vec{r}_3 + \vec{P}_B \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{P}_B \cdot \delta \vec{r}_3 + \vec{P}_C \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{P}_C \cdot \delta \vec{r}_3 &= 0 \\ -\|\vec{P}\| \|\delta \vec{r}_2\| \cos(\alpha) - \|\vec{P}\| \|\delta \vec{r}_3\| \cos(\beta) + 2\|\vec{P}\| \|\delta \vec{r}_2\| + 2\|\vec{P}\| \|\delta \vec{r}_3\| \cos(\alpha + \beta) \\ + 2\|\vec{P}\| \|\delta \vec{r}_2\| \cos(\alpha + \beta) + 2\|\vec{P}\| \|\delta \vec{r}_3\| &= 0 \\ [-\cos(\alpha) + 2 + 2 \cos(\alpha + \beta)] \|\delta \vec{r}_2\| + [-\cos(\beta) + 2 + 2 \cos(\alpha + \beta)] \|\delta \vec{r}_3\| &= 0 \end{aligned}$$

Les déplacements virtuels étant indépendants, on a le système :

$$\begin{cases} 2 + 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha) = 0 \\ 2 + 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) = \cos(\beta) \\ 2 + 2 \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

On ne traite pas le cas $\alpha = -\beta$ qui implique que les poids B et C soient confondus.

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 2 + 2 [2 \cos^2(\alpha) - 1] - \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 4 \cos^2(\alpha) - \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \cos(\alpha) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 75^\circ 31'$$

1.11.6 Poulie à ressort

Une poulie de rayon R et de masse m est suspendue par un câble terminé par un ressort de coefficient de raideur k . La force de rappel exercée par le ressort sur la poulie vaut :

$$\vec{f} = -kx\vec{j}$$

On attache une masse m au centre C de la poulie. De quelle hauteur h descend le centre de la poulie ? L'allongement du ressort au nouvel équilibre vaut $2h$.

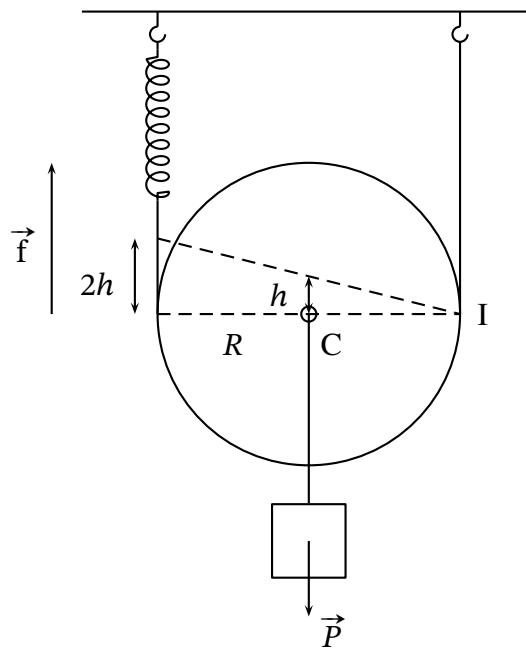


FIG. 1.32 – Poulie à ressort

On imagine un déplacement virtuel vertical vers le bas du centre de gravité :

$$\delta \vec{h} = -\|\delta \vec{h}\|\vec{j}$$

L'allongement virtuel du ressort compatible avec ce déplacement et avec les liaisons vaut

$$2\delta \vec{h} = -2\|\delta \vec{h}\|\vec{j}$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{P} \cdot \delta \vec{h} + \vec{f} \cdot 2\delta \vec{h} &= 0 \\ mg\|\delta \vec{h}\| - k(2h)2\|\delta \vec{h}\| &= 0 \\ mg - 4kh &= 0 \\ h &= \frac{mg}{4k} \end{aligned}$$

Toutes les forces dérivant d'un potentiel, nous pouvons résoudre le problème grâce à (1.5) page 25. Le potentiel est la somme des potentiels :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(2h)^2 - mgh \\ &= 2kh^2 - mgh \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial h} &= 0 \\ 4kh - mg &= 0 \\ h &= \frac{mg}{4k} \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h^2} = 4k > 0$$

donc l'équilibre est stable.

1.11.7 Poulie différentielle de Weston

La poulie différentielle de Weston est formée de deux poulies de même axe, invariablement liées, de rayons R_1 et R_2 peu différents, avec $R_2 < R_1$.

Pour quelle valeur de la force $\vec{f}$ y a-t-il équilibre ?

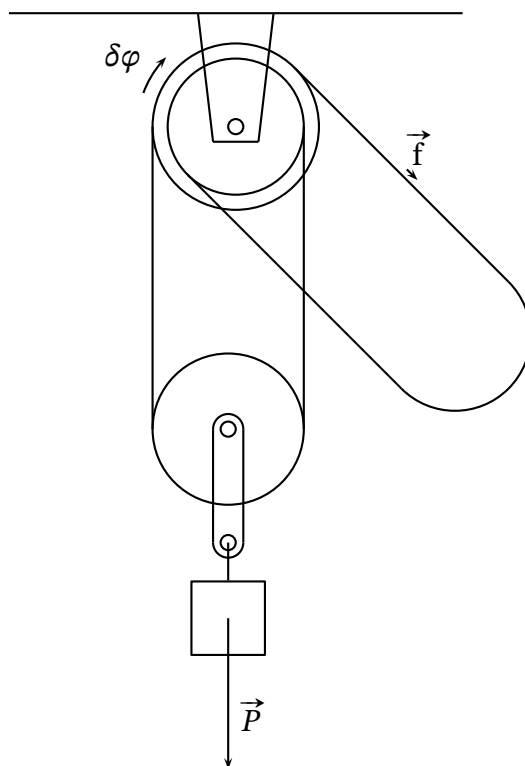


FIG. 1.33 – Poulie différentielle de Weston

Communiquons aux poulies coaxiales une rotation virtuelle d'angle $\delta\varphi$. En respectant le mécanisme, la poulie extérieure enroule une longueur de câble $R_1 \delta\varphi$ et la poulie intérieure déroule une longueur de câble $R_2 \delta\varphi$: la longueur du câble sous tension diminue de $(R_1 - R_2) \delta\varphi$. Le poids $\vec{P}$ monte alors d'une hauteur $(R_1 - R_2) \delta\varphi/2$.

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{f} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ \|\vec{f}\| R_1 \delta\varphi - \|\vec{P}\| \frac{R_1 - R_2}{2} \delta\varphi &= 0 \\ \|\vec{f}\| &= \frac{\|\vec{P}\|}{2} \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

Plus R_1 et R_2 sont proches et plus la force $\vec{f}$ est démultipliée mais plus il faut tirer du câble.

1.11.8 Échelle contre un mur

Une échelle de masse m et de longueur L est appuyée contre un mur. La force de frottement contre le mur est nulle. On cherche la valeur de la force de frottement $\vec{f}$ avec le sol pour qu'il y ait équilibre.

1.11.8.1 Résolution par le principe des travaux virtuels

Pour s'affranchir des forces de réaction $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$, effectuons un déplacement virtuel compatible avec celles-ci, de sorte qu'elles ne travaillent pas. Ce déplacement est représenté en pointillés :

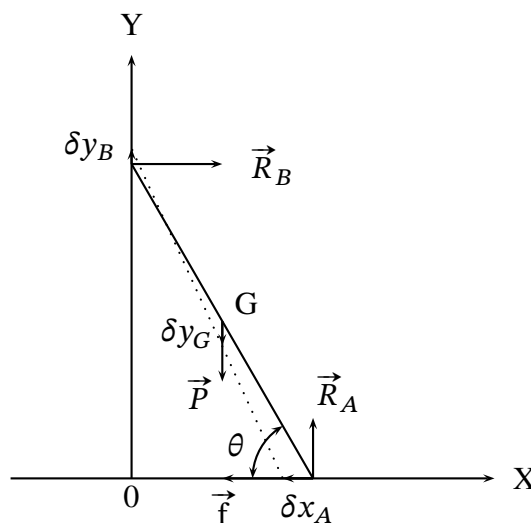


FIG. 1.34 – Échelle contre un mur

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_G + \vec{f} \cdot \delta \vec{r}_f &= 0 \\ mg \delta y_G + f \delta x_A &= 0\end{aligned}$$

Exprimons les déplacements virtuels en fonction de la coordonnée généralisée θ . Nous avons :

$$\begin{cases} x_A = L \cos(\theta) \\ y_G = \frac{L}{2} \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_A = -L \sin(\theta) \delta \theta \\ \delta y_G = \frac{L}{2} \cos(\theta) \delta \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}mg \frac{L}{2} \cos(\theta) \delta \theta - f L \sin(\theta) \delta \theta &= 0 \\ \frac{mg}{2} \cos(\theta) - f \sin(\theta) &= 0 \\ f &= \frac{mg}{2} \cot \theta\end{aligned}$$

Pour calculer la force de réaction $\vec{R}_A$, prenons un déplacement virtuel qui la fasse travailler et compatible avec la liaison en B. L'échelle tourne autour de B d'un angle $\delta \alpha$, le déplacement virtuel est donc perpendiculaire à l'échelle est fait un angle β avec le sol :

$$\begin{aligned}\beta + \frac{\pi}{2} + \theta &= \pi \\ \beta &= \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}$$

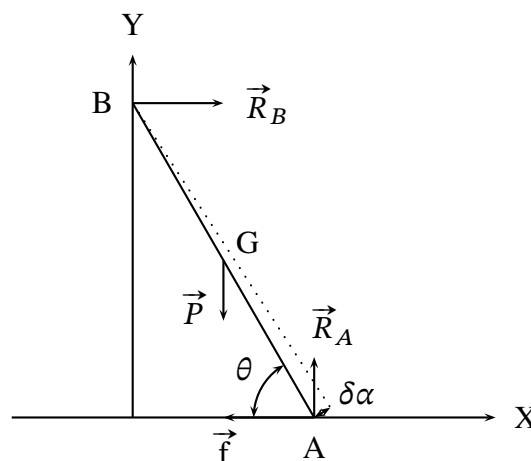


FIG. 1.35 – Échelle contre un mur. Calcul de la réaction du sol

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_G + \vec{R}_A \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{f} \cdot \delta \vec{r}_f &= 0 \\ -mg \frac{L}{2} \sin(\beta) \delta \alpha + R_A L \sin(\beta) \delta \alpha - f L \cos(\beta) \delta \alpha &= 0 \\ -\frac{mg}{2} \cos(\theta) + R_A \cos(\theta) - f \sin(\theta) &= 0 \\ R_A &= \frac{mg}{2} + f \tan(\theta) \\ &= mg\end{aligned}$$

1.11.8.2 Résolution par la mécanique de Newton

À l'équilibre la somme des forces exercées sur l'échelle est nulle :

$$\begin{aligned}\text{Sur l'axe X : } \vec{R}_B + \vec{f} &= 0 \Rightarrow \|\vec{R}_B\| = \|\vec{f}\| \\ \text{Sur l'axe Y : } \vec{R}_A + \vec{P} &= 0 \Rightarrow \|\vec{R}_A\| = mg\end{aligned}$$

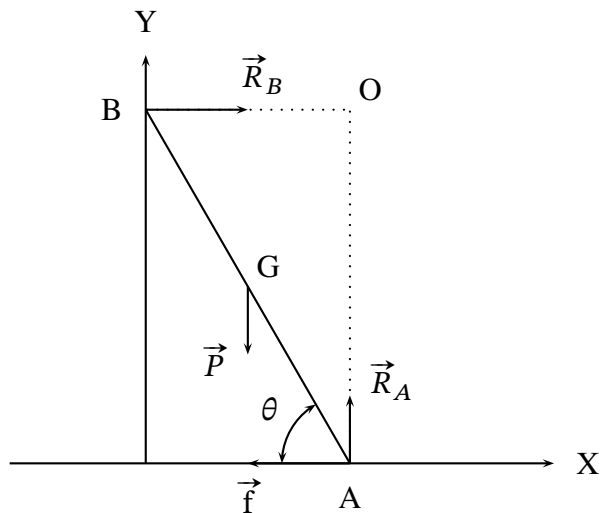


FIG. 1.36 – Échelle contre un mur. Analyse des forces

Le moment des forces pris en un point quelconque doit aussi être nul. Prenons-le par rapport au point O pour annuler le moment des forces de réaction :

$$\begin{aligned}\vec{OA} \times \vec{f} + \vec{OG} \times \vec{P} &= \vec{0} \\ -L \sin(\theta) f + \frac{L}{2} \cos(\theta) mg &= 0 \\ f &= \frac{mg}{2} \cot \theta\end{aligned}$$

Cet exemple montre que le principe des travaux virtuels employé dans le cas d'un seul solide ne présente pas un avantage décisif par rapport à la méthode classique. Cependant il s'impose pour les problèmes comprenant des systèmes de solides.

1.11.9 Poutre articulée

Une poutre de masse négligeable, composée de deux barres articulées en C, soutient une charge $\vec{P}$. Quelle est la pression exercée sur le support en B ?

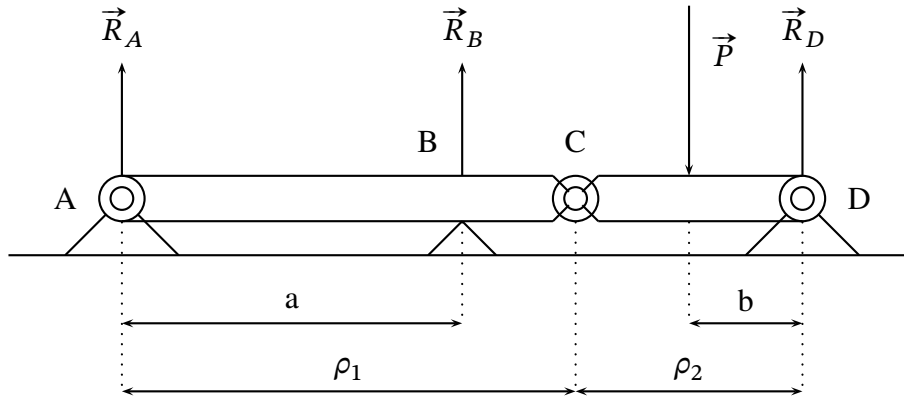


FIG. 1.37 – Poutre articulée

1.11.9.1 Résolution par le principe des travaux virtuels

Effectuons un déplacement virtuel pour lequel les liaisons ne travaillent pas :

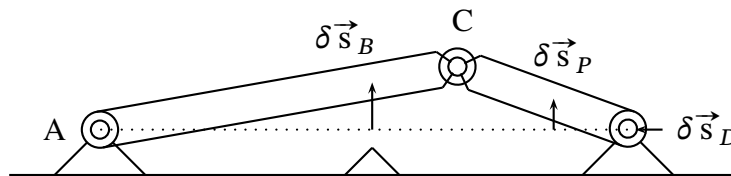


FIG. 1.38 – Poutre articulée

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux trois parties mobiles ($N = 3$) :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{R}_B \cdot \delta \vec{s}_B + \vec{P} \cdot \delta \vec{s}_P + \vec{R}_D \cdot \delta \vec{s}_D = 0$$

$$\|\vec{R}_B\| \|\delta \vec{s}_B\| - \|\vec{P}\| \|\delta \vec{s}_P\| = 0$$

soit,

$$\|\vec{R}_B\| = \|\vec{P}\| \frac{\|\delta \vec{s}_P\|}{\|\delta \vec{s}_B\|}$$

La relation entre les déplacements virtuels s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\|\delta \vec{s}_B\|}{a} = \frac{\|\delta \vec{s}_C\|}{\rho_1} \\ \frac{\|\delta \vec{s}_P\|}{b} = \frac{\|\delta \vec{s}_C\|}{\rho_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\|\delta \vec{s}_P\|}{\|\delta \vec{s}_B\|} = \frac{b \rho_1}{a \rho_2}$$

par conséquent,

$$\|\vec{R}_B\| = \|\vec{P}\| \frac{b \rho_1}{a \rho_2}$$

1.11.9.2 Résolution par la mécanique de Newton

Pour résoudre ce problème en mécanique de Newton, il faut étudier l'équilibre de chacun des éléments de la poutre. La seconde barre exerce sur la première la force $\vec{R}_{C_1}$, et la première barre exerce sur la seconde la force $\vec{R}_{C_2}$, égale et opposée à $\vec{R}_{C_1}$:

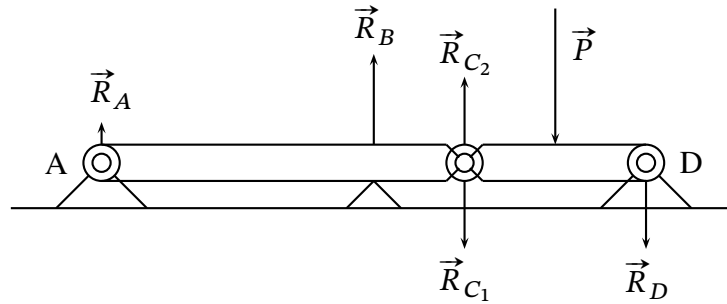


FIG. 1.39 – Poutre articulée

On isole par la pensée la première barre. La somme des moments des forces exercés en A sur la première barre s'écrit :

$$\begin{aligned} a \|\vec{R}_B\| - \rho_1 \|\vec{R}_{C_1}\| &= 0 \\ \|\vec{R}_{C_1}\| &= \frac{a}{\rho_1} \|\vec{R}_B\| \end{aligned}$$

On isole par la pensée la seconde barre. La somme des moments des forces exercés au point D sur la seconde barre s'écrit :

$$\begin{aligned} -\rho_2 \|\vec{R}_{C_2}\| + b \|\vec{P}\| &= 0 \\ \|\vec{R}_{C_2}\| &= \frac{b}{\rho_2} \|\vec{P}\| \end{aligned}$$

En se servant du fait que $\|\vec{R}_{C_1}\| = \|\vec{R}_{C_2}\|$, nous obtenons :

$$\|\vec{R}_B\| = \frac{\rho_1 b}{a \rho_2} \|\vec{P}\|$$

L'équilibre des forces sur la première barre donne :

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_{C_1} &= 0 \\
 \|\vec{R}_A\| + \|\vec{R}_B\| - \|\vec{R}_{C_1}\| &= 0 \\
 \|\vec{R}_A\| &= \|\vec{R}_{C_1}\| - \|\vec{R}_B\| \\
 &= \frac{b}{\rho_2} \|\vec{P}\| - \frac{\rho_1 b}{a \rho_2} \|\vec{P}\| \\
 &= \frac{b}{\rho_2} \left(1 - \frac{\rho_1}{a}\right) \|\vec{P}\|
 \end{aligned}$$

La force $\vec{R}_A$ est toujours dirigée vers le haut car $a < \rho_1$.

1.11.10 Chaîne suspendue

Une chaîne de quatre tiges homogènes de masse m et de longueur L chacune, est fixée au plafond par l'une de ses extrémités. Une force $\vec{F}$ est exercée horizontalement à l'autre extrémité.

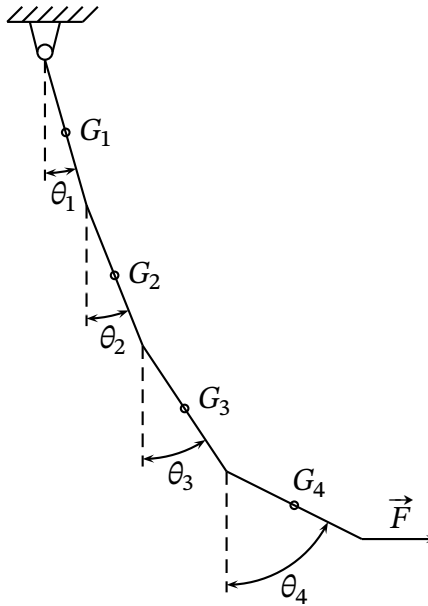


FIG. 1.40 – Chaîne suspendue

Étudions son équilibre. Soient $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \delta \vec{r}_3, \delta \vec{r}_4$ les déplacements virtuels des centres de gravité G_1, G_2, G_3 et G_4 des tiges, et soit $\delta \vec{r}$ le déplacement virtuel de la force $\vec{F}$. Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux cinq parties mobiles ($N = 5$) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\
 \vec{P} \cdot (\delta \vec{r}_1 + \delta \vec{r}_2 + \delta \vec{r}_3 + \delta \vec{r}_4) + \vec{F} \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\
 mg (\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4) + F \delta x &= 0
 \end{aligned}$$

où les δy_i et le δx sont positifs. Les relations suivantes

$$\begin{cases} y_1 = L \frac{1}{2} \cos(\theta_1) \\ y_2 = L \left[\cos(\theta_1) + \frac{1}{2} \cos(\theta_2) \right] \\ y_3 = L \left[\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \frac{1}{2} \cos(\theta_3) \right] \\ y_4 = L \left[\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) + \frac{1}{2} \cos(\theta_4) \right] \\ x = L [\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) + \sin(\theta_3) + \sin(\theta_4)] \end{cases}$$

donnent les expressions des déplacements virtuels :

$$\begin{cases} \delta y_1 = -L \frac{1}{2} \sin(\theta_1) \delta \theta_1 \\ \delta y_2 = -L \left(\sin(\theta_1) \delta \theta_1 + \frac{1}{2} \sin(\theta_2) \delta \theta_2 \right) \\ \delta y_3 = -L \left(\sin(\theta_1) \delta \theta_1 + \sin(\theta_2) \delta \theta_2 + \frac{1}{2} \sin(\theta_3) \delta \theta_3 \right) \\ \delta y_4 = -L \left(\sin(\theta_1) \delta \theta_1 + \sin(\theta_2) \delta \theta_2 + \sin(\theta_3) \delta \theta_3 + \frac{1}{2} \sin(\theta_4) \delta \theta_4 \right) \\ \delta x = L (\cos(\theta_1) \delta \theta_1 + \cos(\theta_2) \delta \theta_2 + \cos(\theta_3) \delta \theta_3 + \cos(\theta_4) \delta \theta_4) \end{cases}$$

Si bien que,

$$\begin{aligned} mg \left[-L \frac{1}{2} \sin(\theta_1) \delta \theta_1 - L \left(\sin(\theta_1) \delta \theta_1 + \frac{1}{2} \sin(\theta_2) \delta \theta_2 \right) \right. \\ \left. - L \left(\sin(\theta_1) \delta \theta_1 + \sin(\theta_2) \delta \theta_2 + \frac{1}{2} \sin(\theta_3) \delta \theta_3 \right) \right. \\ \left. - L \left(\sin(\theta_1) \delta \theta_1 + \sin(\theta_2) \delta \theta_2 + \sin(\theta_3) \delta \theta_3 + \frac{1}{2} \sin(\theta_4) \delta \theta_4 \right) \right] \\ + FL (\cos(\theta_1) \delta \theta_1 + \cos(\theta_2) \delta \theta_2 + \cos(\theta_3) \delta \theta_3 + \cos(\theta_4) \delta \theta_4) = 0 \end{aligned}$$

On simplifie par L . Les $\delta \theta_i$ étant indépendants, nous avons :

$$\begin{cases} -\frac{mg}{2} \sin(\theta_1) - 3mg \sin(\theta_1) + F \cos(\theta_1) = 0 \\ -\frac{mg}{2} \sin(\theta_2) - 2mg \sin(\theta_2) + F \cos(\theta_2) = 0 \\ -\frac{mg}{2} \sin(\theta_3) - mg \sin(\theta_3) + F \cos(\theta_3) = 0 \\ -\frac{mg}{2} \sin(\theta_4) + F \cos(\theta_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin(\theta_1) \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = F \cos(\theta_1) \\ mg \sin(\theta_2) \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = F \cos(\theta_2) \\ mg \sin(\theta_3) \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = F \cos(\theta_3) \\ \frac{mg}{2} \sin(\theta_4) = F \cos(\theta_4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan(\theta_1) = \frac{2}{7} \frac{F}{mg} \\ \tan(\theta_2) = \frac{2}{5} \frac{F}{mg} \\ \tan(\theta_3) = \frac{2}{3} \frac{F}{mg} \\ \tan(\theta_4) = \frac{2F}{mg} \end{cases}$$

1.11.11 Système isostatique

Considérons le tabouret à trois pieds suivant :

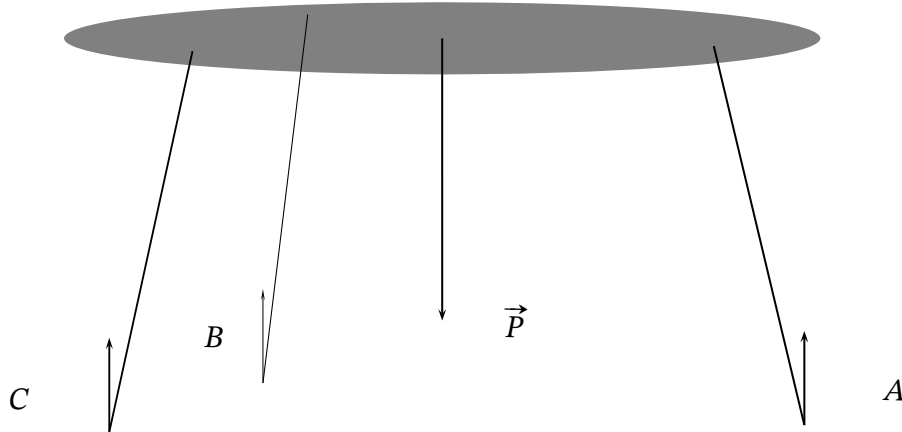


FIG. 1.41 – Système isostatique

Donnons au tabouret une rotation virtuelle autour de la droite passant par les points de contact B et C, de sorte que le pied A se soulève. Les réactions en B et C ne travaillent pas. Dans le triangle équilatéral ABC, il reste à savoir quelle est la position du centre de gravité G sur la hauteur OA, le point O étant au milieu de BC :

$$\begin{aligned}\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0} \\ \vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} &= \vec{0} \\ 3\vec{GO} + \vec{OA} &= \vec{0} \\ \vec{OG} &= \frac{1}{3}\vec{OA}\end{aligned}$$

Lors de la rotation virtuelle le point G se soulèvera trois fois moins que le point A.

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{R}_A \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_G &= 0 \\ \|\vec{R}_A\| \delta z - mg \frac{\delta z}{3} &= 0 \\ \|\vec{R}_A\| &= \frac{mg}{3}\end{aligned}$$

De la même façon on trouve les réactions R_B et R_C , égales à R_A . Bien entendu, par symétrie du problème on trouve directement le résultat.

1.11.12 Système hyperstatique

Considérons le tabouret à quatre pieds suivant :

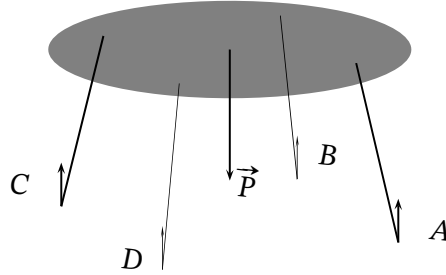


FIG. 1.42 – Système hyperstatique

Donnons au tabouret une rotation virtuelle autour de la droite passant par les points de contact C et D , de sorte que les pieds A et B se soulèvent. Les réactions en C et D ne travaillent pas. Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux trois parties mobiles ($N = 3$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{R}_A \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_G &= 0 \\ \|\vec{R}_A\| \delta z + \|\vec{R}_B\| \delta z - mg \frac{\delta z}{2} &= 0 \\ \|\vec{R}_A\| + \|\vec{R}_B\| &= \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

De la même façon on trouve les relations suivantes :

$$\|\vec{R}_B\| + \|\vec{R}_C\| = \|\vec{R}_C\| + \|\vec{R}_D\| = \|\vec{R}_D\| + \|\vec{R}_A\| = \frac{mg}{2}$$

En utilisant ces quatre relations, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{R}_A\| &= \|\vec{R}_C\| \\ \|\vec{R}_B\| &= \|\vec{R}_D\| \end{aligned}$$

On aurait pu trouver ces deux relations directement en considérant des rotations selon les diagonales AC et BD . On en déduit :

$$\|\vec{R}_A\| + \|\vec{R}_B\| + \|\vec{R}_C\| + \|\vec{R}_D\| = mg$$

Donnons au tabouret une rotation virtuelle autour de la droite parallèle à BD passant par A , de

sorte que les pieds B , C et D se soulèvent :

$$\begin{aligned}\vec{R}_B \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{R}_C \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{R}_D \cdot \delta \vec{r}_D + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_G &= 0 \\ \|\vec{R}_C\| \delta z + \|\vec{R}_B\| \frac{\delta z}{2} + \|\vec{R}_D\| \frac{\delta z}{2} - mg \frac{\delta z}{2} &= 0 \\ \|\vec{R}_C\| + \|\vec{R}_B\| &= \frac{mg}{2}\end{aligned}$$

Il est impossible de déterminer la réaction individuelle de chaque pied, car aucun déplacement virtuel ne permet de faire travailler une seule réaction à la fois. Ce système est dit hyperstatique : l'équilibre peut être réalisé avec un pied en moins.

1.11.13 Le levier

Pour trouver directement l'expression de la force $\vec{f}_2$ en fonction de la réaction d'appui $\vec{R}$, on effectue une rotation virtuelle d'angle $\delta\alpha$ telle que la force $\vec{f}_1$ ne travaille pas :

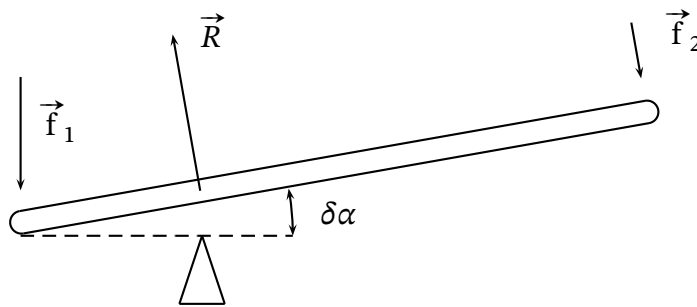


FIG. 1.43 – Expression de la force de levier

Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \vec{R} \cdot \delta \vec{r} + \vec{f}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ \|\vec{R}\| a_1 \delta\alpha - \|\vec{f}_2\| (a_1 + a_2) \delta\alpha &= 0 \\ \|\vec{f}_2\| &= \frac{\|\vec{R}\| a_1}{a_1 + a_2}\end{aligned}$$

1.11.13.1 Calcul des efforts dans le levier

L'effort résultant a une composante de cisaillement $\vec{T}$ perpendiculaire au levier, et une composante de dilatation-compression $\vec{N}$ suivant l'axe du levier.

Pour calculer l'effort tranchant $\vec{T}$ en un point p du levier, on donne une translation virtuelle verticale $\delta \vec{r} = \delta z \vec{j}$ à une partie du levier, p. ex. à droite de ce point :

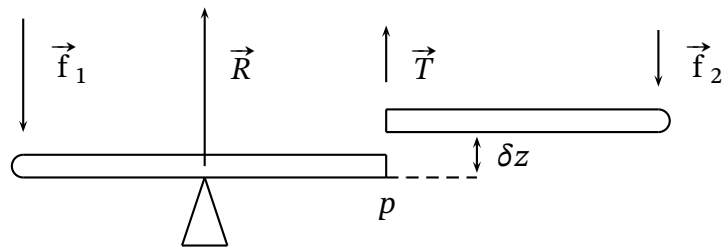


FIG. 1.44 – Effort tranchant

L'effort en compression-dilatation et le moment résultant ne travaillent pas. Choisissons de façon arbitraire $\vec{T}$ vers le haut.

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{T} \cdot \delta \vec{r} + \vec{f}_2 \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\ \|\vec{T}\| \delta z - \|\vec{f}_2\| \delta z &= 0 \\ \|\vec{T}\| &= \|\vec{f}_2\|\end{aligned}$$

La partie gauche de la section exerce sur la partie droite un effort tranchant vertical vers le haut, et la partie droite exerce un effort tranchant vertical vers le bas sur la partie gauche.

Pour calculer l'effort de compression-dilatation $\vec{N}$ dans le levier, on donne à la partie coupée une translation virtuelle horizontale $\delta \vec{r} = \delta x \vec{i}$:

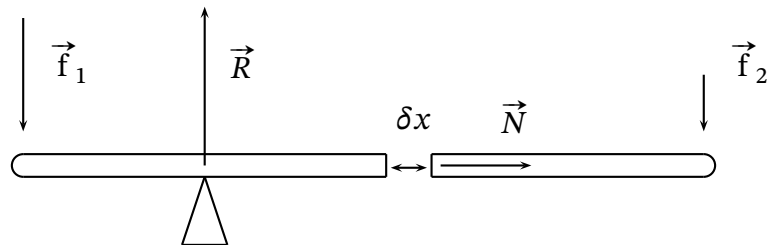


FIG. 1.45 – Effort de compression-dilatation

L'effort tranchant et le moment résultant ne travaillent pas. Choisissons arbitrairement $\vec{N}$ vers la droite. Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{N} \cdot \delta \vec{r} &= 0 \\ \|\vec{N}\| \delta x &= 0 \\ \|\vec{N}\| &= 0\end{aligned}$$

1.11.13.2 Calcul du moment des efforts dans le levier

Le moment résultant a une composante en torsion $\vec{M}_t$ suivant l'axe du levier, et une composante en flexion $\vec{M}_f$ perpendiculaire au levier.

Pour calculer le moment en flexion $\vec{M}_f$ dans le levier, on donne à la partie coupée une rotation virtuelle $\delta\theta$ dans le plan.

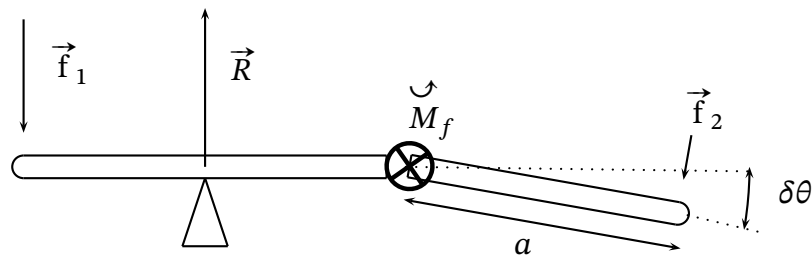


FIG. 1.46 – Moment en flexion

L'effort tranchant, l'effort en compression-dilatation, et le moment en torsion ne travaillent pas.

Choisissons arbitrairement le moment en flexion $\vec{M}_f$ dirigé vers l'arrière. La rotation virtuelle d'angle $\delta\theta$ se faisant dans le sens du moment en flexion, nous avons un signe positif devant $\vec{M}_f \delta\theta$. Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} +\vec{M}_f \delta\theta + \vec{f}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 &= 0 \\ \vec{M}_f \delta\theta + \|\vec{f}_2\| a \delta\theta &= 0 \\ \vec{M}_f &= -\|\vec{f}_2\| a \end{aligned}$$

Le moment en flexion exercé par la partie gauche de la section sur la partie droite est donc dirigé vers le lecteur.

Pour calculer le moment en torsion $\vec{M}_t$ dans le levier, on donne à la partie coupée une rotation virtuelle $\delta\beta$ selon l'axe du levier :

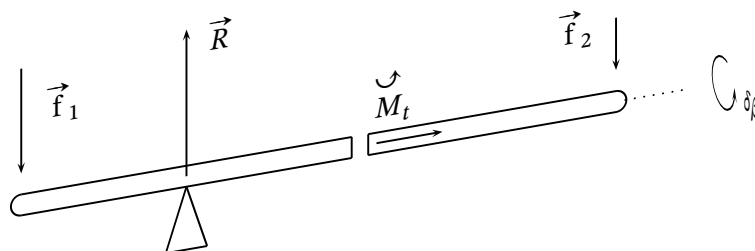


FIG. 1.47 – Moment en torsion

L'effort tranchant, l'effort en compression-dilatation, et le moment en flexion ne travaillent pas. Choisissons le moment en torsion $\overset{\curvearrowright}{M}_t$ dirigé vers la droite. La rotation virtuelle d'angle $\delta\beta$ choisie étant dans le sens contraire du moment en torsion, le signe est négatif. Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowright}{-M}_t \delta\beta &= 0 \\ \overset{\curvearrowright}{M}_t &= 0 \end{aligned}$$

1.11.14 Système bielle-manivelle

Considérons la bielle-manivelle suivante supposée à l'équilibre. En B on exerce une force $\vec{F}$, en retour le gaz dans la cavité exerce la force $\vec{f}$.

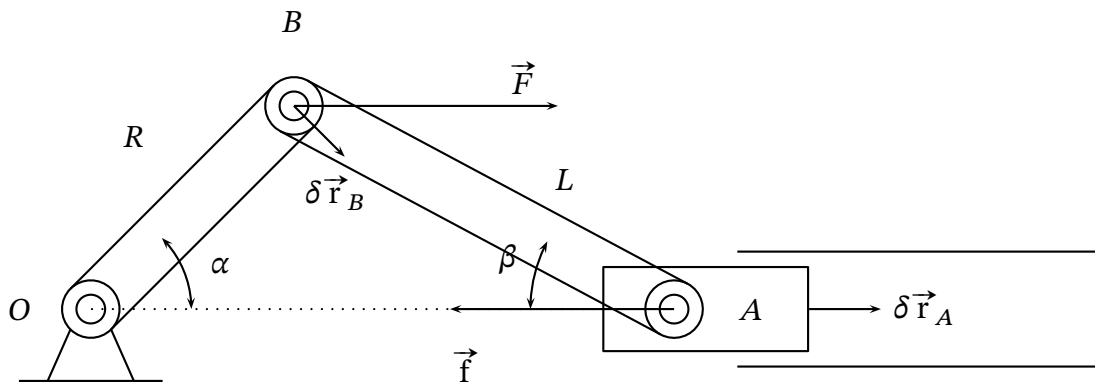


FIG. 1.48 – Système bielle-manivelle

Donnons au système un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, c.-à-d. $\delta\vec{r}_B$ perpendiculaire à R car B décrit un cercle. Appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 aux deux parties mobiles ($N = 2$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i &= 0 \\ \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_B + \vec{f} \cdot \delta\vec{r}_A &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{F} \cdot \delta\vec{r}_B$ est positif et $\delta\alpha$ est négatif :

$$-\|\vec{F}\|R \cos(\alpha)\delta\alpha - \|\vec{f}\|\delta[OA] = 0$$

On retrouve le fait que la composante de la force exercée selon l'axe de la manivelle $[OB]$ ne sert à rien. On suppose dans ce qui suit que la force est exercée perpendiculairement à la manivelle, on supprime donc le cosinus alpha.

Il reste à trouver l'expression de $\delta[OA]$:

$$\begin{aligned}[OA] &= R \cos(\alpha) + L \cos(\beta) \\ \delta[OA] &= \frac{\partial[OA]}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial[OA]}{\partial \beta} \delta\beta \\ &= -R \sin(\alpha) \delta\alpha - L \sin(\beta) \delta\beta\end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}\|\vec{F}\| R \delta\alpha - \|\vec{f}\| (R \sin(\alpha) \delta\alpha + L \sin(\beta) \delta\beta) &= 0 \\ (\|\vec{F}\| - \|\vec{f}\| \sin(\alpha)) R \delta\alpha - L \|\vec{f}\| \sin(\beta) \delta\beta &= 0\end{aligned}$$

On ne peut pas annuler les coefficients devant les angles α et β car ils ne sont pas indépendants. La relation existant entre les deux est différenciée,

$$\begin{aligned}R \sin(\alpha) &= L \sin(\beta) \\ R \cos(\alpha) \delta\alpha &= L \cos(\beta) \delta\beta \\ R \cos(\alpha) \delta\alpha - L \cos(\beta) \delta\beta &= 0\end{aligned}$$

Nous avons deux équations pour deux inconnues, $\|\vec{F}\|$ et $\|\vec{f}\|$, utilisons la méthode des multiplieurs indéterminés de Lagrange :

$$\begin{aligned}(\|\vec{F}\| - \|\vec{f}\| \sin(\alpha)) R \delta\alpha - L \|\vec{f}\| \sin(\beta) \delta\beta + \lambda (R \cos(\alpha) \delta\alpha - L \cos(\beta) \delta\beta) &= 0 \\ (\|\vec{F}\| - \|\vec{f}\| \sin(\alpha) + \lambda \cos(\alpha)) R \delta\alpha - (\|\vec{f}\| \sin(\beta) + \lambda \cos(\beta)) L \delta\beta &= 0\end{aligned}$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\begin{cases} \|\vec{f}\| \sin(\beta) + \lambda \cos(\beta) = 0 \\ \|\vec{F}\| - \|\vec{f}\| \sin(\alpha) + \lambda \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -\|\vec{f}\| \tan(\beta) \\ \|\vec{F}\| = \|\vec{f}\| \sin(\alpha) - \lambda \cos(\alpha) \end{cases} \\ \|\vec{F}\| = \|\vec{f}\| \left(\sin(\alpha) + \frac{\sin(\beta) \cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right) \\ = \|\vec{f}\| \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \\ = \|\vec{f}\| \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\beta)}\end{aligned}$$

Lorsque α et β tendent vers zéro, $\sin(\alpha + \beta)$ tend vers zéro et $\cos(\beta)$ tend vers un. Dans ce cas, si l'une des forces reste constante, soit $\|\vec{F}\|$ tend vers zéro, soit $\|\vec{f}\|$ tend vers l'infini.

1.11.15 Vitesses virtuelles et puissances virtuelles

Nous pouvons résoudre le problème précédent plus facilement en utilisant les notions de vitesse virtuelle et de puissance virtuelle.

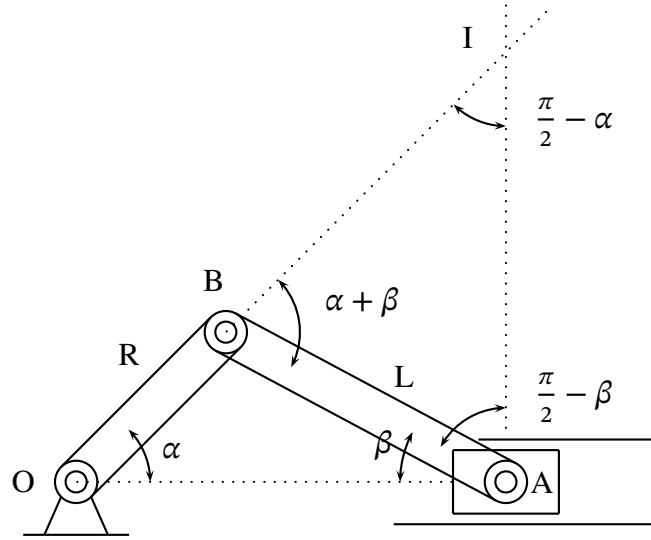


FIG. 1.49 – Système bielle-manivelle

Soit O l'origine, et soient $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$ les vecteurs position des points A et B . Leurs vitesses virtuelles s'écrivent :

$$\vec{v}_A = \frac{\delta \vec{r}_A}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v}_B = \frac{\delta \vec{r}_B}{dt}$$

où t est le temps. La bielle-manivelle est supposée à l'équilibre, les points A et B n'ont donc pas de vitesse, c'est en cela qu'elles sont virtuelles. En multipliant la somme des travaux virtuels par dt , nous obtenons la somme des puissances virtuelles :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v}_B + \vec{f} \cdot \vec{v}_A &= 0 \\ \|\vec{F}\| \|\vec{v}_B\| - \|\vec{f}\| \|\vec{v}_A\| &= 0 \\ \|\vec{F}\| &= \|\vec{f}\| \frac{\|\vec{v}_A\|}{\|\vec{v}_B\|} \end{aligned}$$

Soit I le centre instantané de rotation, commun aux points A et B . C'est le point d'intersection des droites perpendiculaires aux vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$. Soit ω la vitesse angulaire commune aux points A et B :

$$\begin{cases} \|\vec{v}_A\| = \omega [IA] \\ \|\vec{v}_B\| = \omega [IB] \end{cases} \Rightarrow \|\vec{F}\| = \|\vec{f}\| \frac{[IA]}{[IB]}$$

Dans le triangle AIB , soit h la hauteur (non représentée) passant par le point I . Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sin(\pi/2 - \beta) = h/[IA] \\ \sin(\alpha + \beta) = h/[IB] \end{cases} \Rightarrow [IA] \sin(\pi/2 - \beta) = [IB] \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{[IA]}{[IB]} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\beta)}$$

et,

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{f}\| \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\beta)}$$

Chapitre 2

LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS EN DYNAMIQUE

Sommaire

2.1 Généralisation du principe à la dynamique	53
2.2 Coordonnées polaires	55
2.3 Exemples	57
2.4 Comparaison avec la mécanique de Newton	59

2.1 Généralisation du principe à la dynamique

D'Alembert généralise l'utilisation du principe des travaux virtuels (1.1) page 6 en l'appliquant à la dynamique. Dans un référentiel galiléen, donc en l'absence de forces fictives dues au mouvement de l'observateur, cherchons les équations du mouvement d'un système de solides mobiles soumis à des contraintes.

Soit $\vec{F}_i$ le modèle de la force *totale* exercée sur la i^e partie mobile du système, somme des modèles des forces actives et des modèles des forces de contrainte :

$$\vec{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(c)}$$

Notons $\vec{p}_i$ la quantité de mouvement de la i^e partie mobile. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la i^e partie en mouvement s'écrit :

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$$

Tout problème de dynamique peut se ramener à un problème de statique, simplement en écrivant que

$$\forall i, \quad \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

et en considérant que la force d'inertie $\vec{p}_i$ est maintenant une force appliquée. En sommant sur l'ensemble des N parties mobiles formant le système,

$$\forall \delta \vec{r}_i, \quad \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

où chacun des N termes est identiquement nul. En comparaison, le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 ne contient pas les forces de contrainte mais uniquement les forces actives. En revanche dans le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 les termes ne sont pas identiquement nuls, seule la somme des termes est nulle.

D'Alembert montre alors que l'on peut s'affranchir des forces de contrainte comme dans le cas de la statique. Pour le démontrer faisons un retour sur la statique. La somme des forces s'exerçant sur chaque partie mobile d'un système à l'équilibre est nulle :

$$\forall i, \quad \vec{F}_i = \vec{0}$$

En sommant N termes nuls, nous avons :

$$\forall \delta \vec{r}_i, \quad \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Décomposons la somme des forces s'exerçant sur chacune des N parties mobiles du système en une force active et une force de contrainte :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(c)}) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(c)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

En supposant les liaisons parfaites, appliquons le principe des travaux virtuels (1.1) page 6 pour des $\delta \vec{r}_i$ compatibles entre eux et avec les liaisons. Le premier terme est alors nul et il reste :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(c)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Cette relation constitue le *principe de D'Alembert* : le travail *total* des forces de contrainte est nul lors d'un ensemble de déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons, celles-ci étant parfaites. Ce principe est équivalent au principe des travaux virtuels.

Remarque 2.1.1

Individuellement les forces de contrainte peuvent travailler lors d'un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, seule la somme des travaux virtuels des forces de contrainte est nulle (pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons, celles-ci étant parfaites), voir p. ex. (1.2) page 8.

On peut donc s'affranchir des forces de contrainte et énoncer le *principe des travaux virtuels appliqué à la dynamique* :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.1)$$

où :

- les déplacements virtuels sont compatibles entre eux
- les déplacements virtuels sont compatibles avec les liaisons
- les liaisons sont parfaites

Chacun des termes n'est plus nul puisqu'il n'y a plus les forces de contrainte, seule la somme est nulle.

Remarque 2.1.2

La force d'inertie, qui s'écrit $\vec{p} = m \vec{\ddot{r}}$ lorsque la masse est constante, contient l'accélération réelle $\vec{\ddot{r}} = d^2 \vec{r}/dt^2$ ou $d\vec{r}$ est un déplacement infinitésimal réel, et dt un élément infinitésimal de temps réel.

De la même façon que la relation fondamentale de la dynamique s'applique aussi à la statique, le principe de travaux virtuels (2.1) s'applique à la dynamique et à la statique. Avant de voir quelques exemples, faisons un rappel sur les coordonnées polaires.

2.2 Coordonnées polaires

Nous nous intéressons ici aux coordonnées polaires (ρ, θ) prises dans le plan (x, y) .

2.2.1 Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée

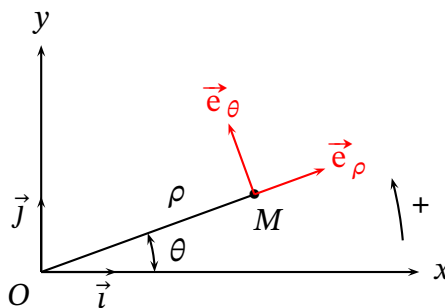


FIG. 2.1 – Vecteurs de la base polaire orthonormée

1. Première méthode

En se servant de la fig. 2.1, exprimons les vecteurs unitaires de base $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction de ceux de la base rectangulaire normée $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

2. Deuxième méthode

Soit M un point de coordonnées rectangulaires (x, y) et de coordonnées polaires (ρ, θ) . Le changement de coordonnées rectangulaires (x, y) à polaires (ρ, θ) s'écrit :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Réciproquement, le changement de coordonnées polaires à rectangulaires s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.2)$$

Déterminons les vecteurs unitaires de base $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ en différentiant le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base rectangulaire normée $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ d\vec{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right)_\theta d\rho + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)_\rho d\theta \\ &= [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}]d\rho + \rho[-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}]d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

et l'on a :

$$d\vec{r}(\rho, \theta) = \vec{e}_\rho d\rho + \rho \vec{e}_\theta d\theta$$

2.2.2 Expression du vecteur position

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ &= \rho[\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] \\ &= \rho \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

2.2.3 Dérivée des vecteurs de base

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = -\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{j} \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{i} - \sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_\rho = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho \end{cases}$$

2.2.4 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho) \\ &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (2.3)$$

2.2.5 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \quad (2.4)$$

2.3 Exemples

Exemple 2.3.1 : Volant d'inertie

Une masse m est attachée à une corde enroulée autour d'une poulie de masse M , de rayon R et de moment d'inertie I . Quelle est l'accélération de la masse m ?

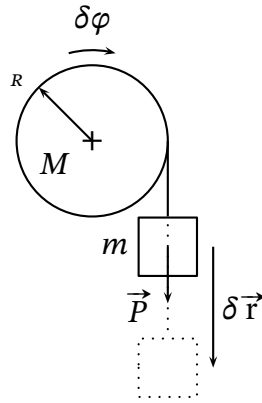


FIG. 2.2 – Volant d'inertie

La position du système ne dépend que de l'angle φ de rotation de la poulie. Donnons à la poulie une rotation virtuelle d'angle $\delta\varphi$. Le déplacement virtuel de m vers le bas s'écrit :

$$\begin{aligned} r &= R\varphi \\ \delta r &= R \delta\varphi \\ \delta \vec{r} &= -R \delta\varphi \vec{j} \end{aligned}$$

Pour calculer la force d'inertie $\vec{p}_M$ de la poulie en rotation, considérons un élément de masse dM de cette poulie, à la distance ρ du centre. Son vecteur déplacement virtuel $\delta \vec{s}$ a pour expression

$$\begin{aligned} s &= \rho\varphi \\ \delta s &= \rho \delta\varphi \\ \delta \vec{s} &= \frac{\rho}{R} \delta r \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

où $\vec{e}_\theta$ est un vecteur polaire unitaire partout perpendiculaire au rayon de la poulie. La norme de la force d'inertie de l'élément dM s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\vec{p}_{dM}\| &= dM \ddot{s} \\ &= dM \rho \ddot{\varphi} \\ &= dM \frac{\rho}{R} \ddot{r} \end{aligned}$$

Le travail virtuel de la force d'inertie de l'élément dM s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{dM} \cdot \delta \vec{s} &= dM \frac{\rho}{R} \ddot{r} \vec{e}_\theta \cdot \frac{\rho}{R} \delta r \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\ddot{r} \delta r}{R^2} \rho^2 dM \end{aligned}$$

Le travail virtuel de la force d'inertie de la poulie s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{p}_M \cdot \delta \vec{s} &= \int_0^M \vec{p}_{dM} \cdot \delta \vec{s} \\ &= \frac{\ddot{r} \delta r}{R^2} \int_0^M \rho^2 dM \\ &= \frac{I}{R^2} \ddot{r} \delta r \end{aligned}$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54 pour les deux parties mobiles ($N = 2$), la masse et la poulie, pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P} - \vec{p}_m) \cdot \delta \vec{r} - \vec{p}_M \cdot \delta \vec{s} &= 0 \\ mg\delta r - m\ddot{r}\delta r - \frac{I}{R^2} \ddot{r} \delta r &= 0 \\ \ddot{r} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) &= mg \\ \ddot{r} &= \frac{g}{1 + I/(mR^2)} \end{aligned}$$

2.4 Comparaison avec la mécanique de Newton

Exemple 2.4.1 : Deux masses reliées par une poulie

Deux masses sont attachées à une corde passant par une poulie. Quelle est l'accélération de ces masses ?

a) Résolution par la mécanique de Newton

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la masse m_1 :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P}_1 + \vec{T} \end{aligned}$$

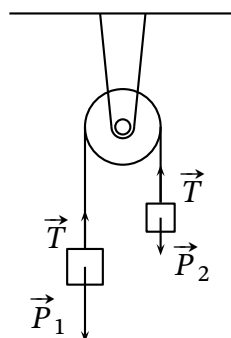


FIG. 2.3 – Masses reliées par une poulie

En projetant sur l'axe verticale orienté vers le haut :

$$m_1 \ddot{r}_1 = -m_1 g + T \quad (2.5)$$

$\ddot{r}_1$ est la composante verticale de l'accélération de la masse m_1 , elle peut être positive, négative ou nulle. Pour le vecteur déplacement réel,

$$\forall t, \quad d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2 \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = -\dot{\vec{r}}_2 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = -\ddot{\vec{r}}_2$$

et pour la composante verticale,

$$\ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1$$

qui donne pour la masse m_2 :

$$m_2 \ddot{r}_2 = -m_2 g + T$$

$$m_2 \ddot{r}_1 = m_2 g - T$$

En additionnant avec (2.5) :

$$(m_1 + m_2) \ddot{r}_1 = (m_2 - m_1) g$$

$$\ddot{r}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

On vérifie que $\ddot{r}_1 = 0$ pour $m_1 = m_2$. L'accélération $\ddot{r}_1$ est bien positive (donc vers le haut) si $m_2 > m_1$.

Pour obtenir la tension dans la corde on soustrait les deux expressions :

$$(m_1 - m_2) \ddot{r}_1 = -(m_1 + m_2) g + 2T$$

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) g + (m_1 - m_2) \ddot{r}_1]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 + m_2} g + (m_1 - m_2) \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \right]$$

$$= \frac{g}{2} \left[\frac{m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2 - m_1^2 + 2m_1 m_2 - m_2^2}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

On vérifie que pour $m_1 = m_2$ on a bien $T = m_1 g$.

b) Résolution par le principe des travaux virtuels

Donnons à la masse m_1 un déplacement virtuel $\delta \vec{r}_1$ vertical vers le haut :

$$\delta \vec{r}_1 = \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j}$$

Le déplacement virtuel $\delta \vec{r}_2$ de la masse m_2 compatible avec $\delta \vec{r}_1$ et avec la liaison est tel que :

$$\delta \vec{r}_2 = -\delta \vec{r}_1$$

$$= -\|\delta \vec{r}_1\| \vec{j}$$

Le travail virtuel de la force d'inertie de la masse m_1 s'écrit :

$$\vec{p}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = m_1 \ddot{r}_1 \vec{j} \cdot \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j}$$

$$= m_1 \ddot{r}_1 \|\delta \vec{r}_1\|$$

Celui de la masse m_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{p}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 &= -m_2 \ddot{r}_2 \vec{j} \cdot \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j} \\ &= -m_2 \ddot{r}_2 \|\delta \vec{r}_1\| \\ &= m_2 \ddot{r}_1 \|\delta \vec{r}_1\|\end{aligned}$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54, pour les deux parties mobiles ($N = 2$), les masses m_1 et m_2 , pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons. On ne considère alors que les forces actives, la somme des travaux virtuels des forces de contrainte (réaction de l'axe de la poulie et tension de la corde) est nulle :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P}_1 - \vec{p}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 - \vec{p}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ -m_1 g - m_1 \ddot{r}_1 + m_2 g - m_2 \ddot{r}_1 &= 0 \\ (m_2 - m_1) g - (m_1 + m_2) \ddot{r}_1 &= 0 \\ \ddot{r}_1 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression de la tension dans la corde on choisit un déplacement virtuel non compatible avec la liaison :

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2 = \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}(\vec{P}_1 + \vec{T} - \vec{p}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{T} - \vec{p}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ -m_1 g + T - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g + T + m_2 \ddot{r}_1 &= 0 \\ -(m_1 + m_2) g + 2T + (m_2 - m_1) \ddot{r}_1 &= 0 \\ T &= \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) g + (m_1 - m_2) \ddot{r}_1]\end{aligned}$$

Exemple 2.4.2 : Palan

Reprenons l'exemple du palan (fig. 1.14 page 14). Quelle est l'accélération de la masse m_2 ?

- a) Résolution par la mécanique de Newton Le premier sous-système étudié est constitué de la première poulie et de la première masse. Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{r}_1 &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P}_1 + 2\vec{T}\end{aligned}$$

En projetant sur l'axe vertical dirigé vers le haut :

$$m_1 \ddot{r}_1 = -m_1 g + 2T$$

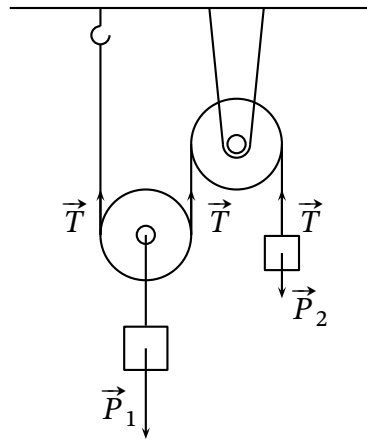


FIG. 2.4 – Palan : inventaire des forces

Pour le vecteur déplacement réel,

$$\forall t, \quad d\vec{r}_1 = -\frac{1}{2} d\vec{r}_2 \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = -\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_2 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_2$$

et pour la composante verticale,

$$\ddot{r}_1 = -\frac{1}{2} \ddot{r}_2$$

si bien que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} m_1 \ddot{r}_2 &= -m_1 g + 2T \\ m_1 \ddot{r}_2 &= 2m_1 g - 4T \end{aligned}$$

Le second sous-système étudié est la masse m_2 . Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P}_2 + \vec{T} \\ m_2 \ddot{r}_2 &= -m_2 g + T \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (m_1 + 4m_2) \ddot{r}_2 &= (2m_1 - 4m_2)g \\ \ddot{r}_2 &= \frac{2m_1 - 4m_2}{m_1 + 4m_2} g \end{aligned}$$

On vérifie que pour $m_1 = 2m_2$ on a bien $\ddot{r}_2 = 0$. Pour $m_1 > 2m_2$ l'accélération de la masse m_2 est positive, c.-à-d. vers le haut.

b) Résolution par le principe des travaux virtuels

Donnons à la masse m_1 un déplacement virtuel $\delta \vec{r}_1$ vertical vers le haut :

$$\delta \vec{r}_1 = \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j}$$

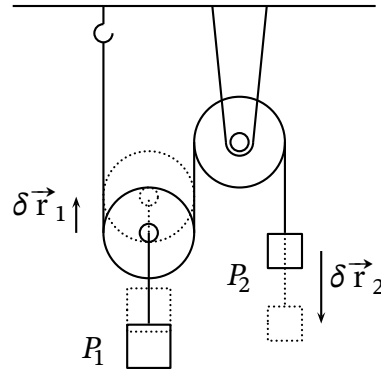


FIG. 2.5 – Palan : déplacements virtuels

Le déplacement virtuel $\delta \vec{r}_2$ de la masse m_2 compatible avec $\delta \vec{r}_1$ et avec la liaison est tel que :

$$\delta \vec{r}_2 = -2\delta \vec{r}_1 = -2\|\delta \vec{r}_1\| \vec{j}$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54, pour les deux parties mobiles ($N = 2$), les masses m_1 et m_2 , pour des déplacements virtuels compatibles entre eux et avec les liaisons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P}_1 - \vec{p}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 - \vec{p}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ (\vec{P}_1 - \vec{p}_1) \cdot \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j} - 2(\vec{p}_2 - \vec{P}_2) \cdot \|\delta \vec{r}_1\| \vec{j} &= 0 \\ -m_1 g - m_1 \ddot{r}_1 + 2m_2 \ddot{r}_2 + 2m_2 g &= 0 \end{aligned}$$

Pour le vecteur déplacement réel

$$d\vec{r}_1 = -\frac{1}{2}d\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{1}{2}\vec{r}_2 \Rightarrow \ddot{r}_1 = -\frac{1}{2}\ddot{r}_2$$

et pour la composante verticale,

$$\ddot{r}_1 = -\frac{1}{2}\ddot{r}_2$$

si bien que :

$$\begin{aligned} -m_1 g + \frac{1}{2}m_1 \ddot{r}_2 + 2m_2 \ddot{r}_2 + 2m_2 g &= 0 \\ (2m_2 - m_1)g + \left(\frac{1}{2}m_1 + 2m_2\right)\ddot{r}_2 &= 0 \\ \ddot{r}_2 &= \frac{2m_1 - 4m_2}{m_1 + 4m_2} g \end{aligned}$$

Exemple 2.4.3 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

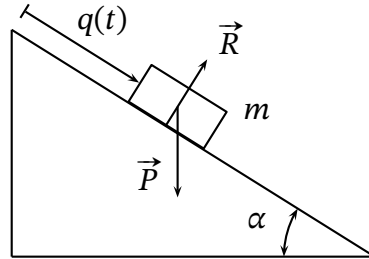


FIG. 2.6 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

a) Résolution par la mécanique de Newton

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la masse m :

$$\begin{aligned} m\ddot{q} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{R} + \vec{P} \end{aligned}$$

En projetant sur les axes tangent et orthogonal au plan incliné :

$$\begin{cases} \|\vec{P}\| \sin(\alpha) = m\ddot{q} \\ R - \|\vec{P}\| \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q} = g \sin(\alpha) \\ R = mg \cos(\alpha) \end{cases}$$

En notant q_0 et $\dot{q}_0$ les conditions initiales sur la position et la vitesse, cherchons la solution $q(t)$ en intégrant cette équation différentielle du 2nd ordre par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= g \sin(\alpha) \\ \dot{q}(t) &= g \sin(\alpha) t + \dot{q}_0 \\ q(t) &= \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + \dot{q}_0 t + q_0 \end{aligned}$$

b) Résolution par le principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels pour la seule partie mobile ($N = 1$), la masse m , pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P} + \vec{R} - \vec{p}) \cdot \delta \vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

On choisit un déplacement virtuel confondu avec le déplacement réel, donc compatible avec la liaison supposée parfaite. Le travail virtuel de la réaction $\vec{R}$ du plan sur la masse est alors nul, et nous avons :

$$\begin{aligned} [mg \sin(\alpha) - m\ddot{q}] \delta q &= 0 \\ \ddot{q} &= g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Exemple 2.4.4 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné motorisé

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné se déplaçant horizontalement selon une fonction du temps connue $x(t)$. Quelle est l'équation de son mouvement ?

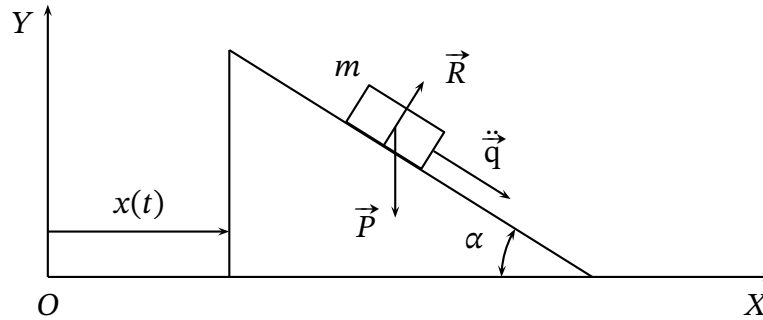


FIG. 2.7 – Masse glissant sur un plan incliné motorisé

a) Résolution par la mécanique de Newton

Soit $\ddot{x}$ l'accélération du plan incliné, et soit $\ddot{q}$ l'accélération de la masse m relativement au plan incliné. L'accélération de la masse m dans un référentiel galiléen est la somme des accélérations $\ddot{q} + \ddot{x}$. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la masse m :

$$\begin{aligned} m(\ddot{q} + \ddot{x}) &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P} + \vec{R} \end{aligned}$$

Le vecteur accélération $\ddot{q}$ est parallèle au plan incliné. En projetant sur les axes parallèle et perpendiculaire au plan incliné, nous avons :

$$\begin{cases} P \sin(\alpha) = m\ddot{q} + m\ddot{x} \cos(\alpha) \\ -P \cos(\alpha) + R = m\ddot{x} \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q} = g \sin(\alpha) - \ddot{x} \cos(\alpha) \\ R = m(\ddot{x} \sin(\alpha) + g \cos(\alpha)) \end{cases}$$

Lorsque $\ddot{x} = 0$ on retrouve le résultat de l'exemple précédent, et lorsque

$$\begin{aligned} g \sin(\alpha) - \ddot{x} \cos(\alpha) &< 0 \\ g \sin(\alpha) &< \ddot{x} \cos(\alpha) \\ g \tan(\alpha) &< \ddot{x} \end{aligned}$$

le vecteur $\ddot{q}$ est vers le haut, la masse m remonte le plan incliné.

b) Résolution par le principe des travaux virtuels

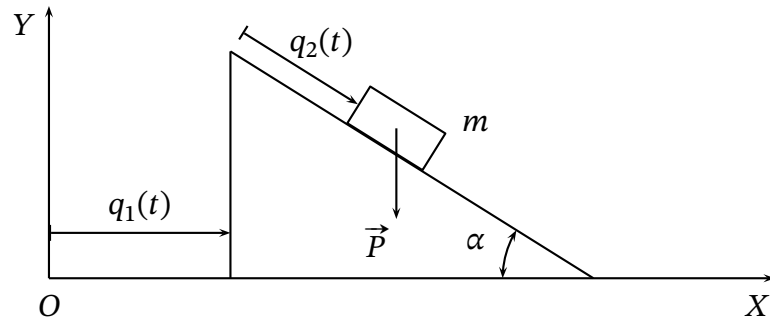


FIG. 2.8 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné motorisé

Le système n'a qu'un seul degré de liberté car la fonction $q_1(t)$ est donnée. Choisissons q_2 comme coordonnée généralisée. Le déplacement virtuel étant compatible avec la liaison, le principe des travaux virtuels pour la seule partie mobile ($N = 1$), la masse m , s'écrit :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$[\vec{P} - m(\ddot{\vec{q}}_1 + \ddot{\vec{q}}_2)] \cdot \delta \vec{q}_2 = 0$$

Avec

$$\delta \vec{q}_2 = \delta q_2 [\cos(\alpha) \vec{i} - \sin(\alpha) \vec{j}]$$

nous avons :

$$mg \sin(\alpha) - m[\ddot{q}_1 \cos(\alpha) + \ddot{q}_2] = 0$$

$$\ddot{q}_2 = g \sin(\alpha) - \ddot{q}_1 \cos(\alpha)$$

Exemple 2.4.5 : Masse sur une trappe

Reprenons l'ex. 1.7.3 de la page 21. Une masse M est posée sur une trappe qui s'ouvre d'un angle $\theta(t)$ donné en fonction du temps. Quelle est l'équation de son mouvement ?

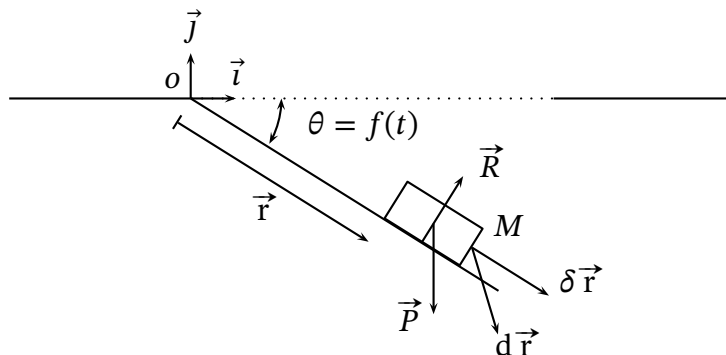


FIG. 2.9 – Masse sur une trappe

a) Résolution par la mécanique de Newton

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la masse M :

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{r}} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{R} + \vec{P} \end{aligned}$$

(2.4) page 57 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ de centre o :

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} Mg \sin(\theta) = M(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ R - Mg \cos(\theta) = M(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) = 0 \\ M[\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \cos(\theta)] = R \end{cases}$$

Nous obtenons deux équations pour deux inconnues, $\rho(t)$ et $R(t)$.

b) Résolution par le principe des travaux virtuels

Le déplacement infinitésimal réel s'écrit,

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d(\rho \vec{e}_\rho) \\ &= d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho \\ &= d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

et le travail réel de la force de contrainte $\vec{R}$ est non nul :

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot d\vec{r} &= R \vec{e}_\theta \cdot (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta) \\ &= R\rho d\theta \end{aligned}$$

Choisissons le déplacement virtuel de sorte que la force de contrainte ne travaille pas,

$$\delta \vec{r} = \delta \rho \vec{e}_\rho$$

Le déplacement virtuel de la coordonnée ρ est noté $\delta \rho$. Il ne s'inscrit pas dans le temps, il n'est pas fonction du temps, ni explicitement ni implicitement, contrairement à la différentielle $d\rho$ qui est une fonction implicite du temps. La difficulté tient au fait qu'en physique tout déplacement réel dans l'espace est une fonction explicite ou à défaut implicite du temps. Ce n'est pas le cas en mathématique où un déplacement n'est pas nécessairement fonction d'un paramètre. En ce sens, un déplacement virtuel est un déplacement mathématique sans paramètre.

Le travail virtuel de $\vec{R}$ est alors nul :

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \delta \vec{r} &= R \vec{e}_\theta \cdot \delta \rho \vec{e}_\rho \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P} - \vec{p}) \cdot \delta \vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

(2.4) page 57 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} [Mg \sin(\theta) \vec{e}_\rho - Mg \cos(\theta) \vec{e}_\theta - M(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho \\ - M(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta] \cdot \delta\rho \vec{e}_\rho = 0 \\ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \sin(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Pour trouver l'expression de la réaction de la trappe sur la masse M , on choisit un déplacement virtuel pour lequel cette réaction travaille. Avec un déplacement virtuel selon $\vec{e}_\theta$, nous avons :

$$\begin{aligned} [R + Mg \sin(\theta) \vec{e}_\rho - Mg \cos(\theta) \vec{e}_\theta - M(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho \\ - M(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta] \cdot \rho\delta\theta \vec{e}_\theta = 0 \\ R - Mg \cos(\theta) - M(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0 \\ R = M[\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \cos(\theta)] \end{aligned}$$

Chapitre 3

LA MÉCANIQUE DE LAGRANGE

Sommaire

3.1 Équations de Lagrange	69
3.2 Propriétés du lagrangien et des équations de Lagrange	89
3.3 Intégrales premières du mouvement	104
3.4 Impulsions généralisées	109
3.5 Applications de la mécanique de Lagrange	116

3.1 Équations de Lagrange

Repartons du principe des travaux virtuels appliqué à la dynamique (2.1) page 54, pour un système à N parties mobiles, dans un référentiel galiléen non avons

$$\sum_{i=1}^N (\vec{p}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.1)$$

où l'on rappelle que $\vec{F}_i$ est la *somme* des modèles des forces s'exerçant sur la i^e partie mobile. Nous pouvons essayer de remplacer les produits scalaires par des scalaires. Le produit scalaire d'une force d'inertie par un déplacement donne une énergie cinétique. En mécanique de Newton,

pour faire apparaître les vitesses (donc l'énergie cinétique), on écrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i d\vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N d\left(\frac{1}{2}m_i \vec{v}_i^2\right) \\
 &= d \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i \vec{v}_i^2
 \end{aligned}$$

Avec les déplacements virtuels nous ne pouvons pas tenir le même raisonnement car $\delta \vec{r}_i$ n'est pas une fonction implicite du temps par l'intermédiaire des coordonnées comme l'est $d\vec{r}_i$. Il représente une longueur, et non une distance parcourue. Le terme $\delta \vec{r}_i/dt$ est bien homogène à une vitesse, une longueur divisée par une durée, mais ce n'est pas la vitesse réelle de la i^e partie mobile. $\delta \vec{r}_i$ est fonction des variations infinitésimales des coordonnées δx_k de la i^e partie mobile dans deux positions d'équilibre infiniment proches :

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_k} \delta x_k$$

En remplaçant dans (3.1) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_k} \delta x_k - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_k} \delta x_k &= 0 \\
 \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k &= 0 \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Les m coordonnées x_k ne sont pas toujours indépendantes si bien que la somme sur k est nulle mais pas chacun de ses termes. Il nous faut utiliser les coordonnées généralisées q_j (déf. 1.7.2 page 19) car elles sont indépendantes. Pour cela nous devons supposer que le système est holonome (§ 1.7.3 page 19) pour utiliser les équations de liaison et supprimer les coordonnées superflues. On effectue alors le changement de coordonnées suivant :

$$\forall k = 1, \dots, m \quad x_k = f_k(q_1, \dots, q_n) \quad n \leq m$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j &= 0 \\
 \forall \delta q_j, \quad \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j &= 0 \\
 \forall j = 1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= 0
 \end{aligned}$$

Pour le second terme on pose la définition suivante :

Définition 3.1.1 : Force généralisée

On appelle *force généralisée* selon le degré de liberté j , la quantité

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

où l'on rappelle que $\vec{F}_i$ est la somme des modèles des forces s'exerçant sur la i^{e} partie mobile.

Avec cette définition :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Intégrons par parties le terme de droite :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] = Q_j \quad (3.3)$$

Établissons maintenant les deux relations suivantes

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d \vec{r}_i}{dt} \right)$$

pour les remplacer dans (3.3). Pour la première relation, notons que le vecteur position de la i^{e} partie mobile dépend des coordonnées généralisées, et explicitement du temps lorsqu'une liaison est rhéonome ou pour un référentiel en mouvement :

$$\begin{aligned} d \vec{r}_i(q_k, t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \\ \frac{d \vec{r}_i}{dt} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d \vec{r}_i}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (3.4)$$

En utilisant l'indépendance des coordonnées généralisées (1.3) page 19 :

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.5)$$

Établissons la seconde relation. Nous avons :

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} dq_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} dt \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'autre part, en dérivant par rapport à q_j la relation (3.4) page précédente :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées ne dépendant pas explicitement l'une de l'autre, le terme $\partial \dot{q}_k / \partial q_j$ est nul :

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

Comparons avec (3.6). Les dérivations partielles $\partial / \partial q_j$ et $\partial / \partial q_k$ étant continues, nous pouvons les intervertir, d'où la seconde relation :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \quad (3.7)$$

Avec (3.5) et (3.7), (3.3) page précédente devient :

$$\begin{aligned}\forall j = 1, \dots, n \quad & \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] = Q_j \\ & \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = Q_j \\ & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = Q_j\end{aligned}$$

Définition 3.1.2 : Énergie cinétique

On appelle *énergie cinétique* d'un solide i , la quantité

$$T_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

L'énergie cinétique est un scalaire, elle est additive. Notons T l'énergie cinétique totale du système (la somme des énergies cinétiques de toutes les parties mobiles) :

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2$$

Nous avons alors n relations, une pour chaque coordonnée généralisée q_j du système :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.8)$$

Remarque 3.1.1

Supposons le changement de variables de coordonnées généralisées rectangulaires à des coordonnées généralisées quelconques :

$$\begin{aligned}\forall k = 1, \dots, n \quad x_k &= f_k(q_1, \dots, q_n) \\ dx_k &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j \\ \dot{x}_k &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \dot{q}_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2 \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_j} \right)^2 \dot{q}_j^2\end{aligned}$$

En coordonnées généralisées, l'énergie cinétique reste une fonction quadratique des vitesses généralisées mais peut dépendre des coordonnées, le terme $\partial T / \partial q_j$ est alors non nul. Par exemple en coordonnées polaires :

$$T = \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Remarque 3.1.2

Les n équations différentielles (3.8) page ci-contre du 2nd ordre par rapport au temps, sont équivalentes à la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum_k \vec{f}_k^{(e)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Cette dernière est une écriture vectorielle qui donne n relations, une par coordonnée, également du 2nd ordre par rapport au temps du fait des termes d'accélération.

3.1.1 Modèles de forces dérivant toutes d'une énergie potentielle

Lorsque chaque modèle de force $\vec{f}$ s'exerçant sur la i^e partie mobile dérive d'une énergie potentielle, la somme $\vec{F}_i$ de ces modèles de force dérive alors d'une énergie potentielle totale V_i qui est la somme des énergies potentielles des forces individuelles. Selon chaque degré de liberté j , la force généralisée s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall j = 1, \dots, n \quad Q_j &= - \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\text{grad}}_i(V_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V_i}{\partial q_j}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j = 1, \dots, n \quad Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j}} \quad (3.9)$$

Remarque 3.1.3

Le principe des travaux virtuels en statique (1.1) page 6 s'écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j &= 0\end{aligned}$$

et l'on retrouve (1.5) page 25 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

Les équations de Lagrange deviennent :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (3.10)$$

Si l'énergie potentielle totale $V(q, t)$ ne dépend pas des vitesses généralisées $\dot{q}$, nous pouvons ajouter le terme nul $\partial V / \partial \dot{q}_j$:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0$$

Définition 3.1.3 : Lagrangien

La fonction des n coordonnées généralisées q , des n vitesses généralisées $\dot{q}$, et du temps

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

est appelée fonction de Lagrange ou *lagrangien* du système.

Remarque 3.1.4

Le modèle de force de la relation fondamentale de la dynamique, devenu modèle d'énergie potentielle, est intégré au lagrangien. Il faudra donc trouver un modèle de lagrangien adapté au problème à résoudre. La « physique » du problème est donc contenue dans le lagrangien. De plus, on note que par l'intermédiaire de l'énergie potentielle, le lagrangien dépend du choix de l'origine des énergies potentielles.

Remarque 3.1.5

L'énergie potentielle est fonction du temps lorsque le système est dans un champ extérieur variable, p. ex. une particule chargée dans un champ électrique variable.

Nous obtenons les n équations de Lagrange, une par coordonnée généralisée :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (3.11)$$

Une équation par coordonnée ne signifie pas que les variables sont séparées, car le lagrangien peut contenir toutes les variables (ex. du pendule double 3.5.2 page 117). Ces n équations différentielles du 2nd ordre par rapport au temps sont équivalentes à la relation fondamentale de la dynamique

lorsque tous les modèles de force dérivent d'un potentiel. Chaque intégration de l'une de ces équations différentielles faisant apparaître une constante, il faudra spécifier $2n$ conditions initiales pour déterminer les n coordonnées généralisées indépendantes : n conditions initiales sur les $\dot{q}$ et n sur les q .

Exemple 3.1.1 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

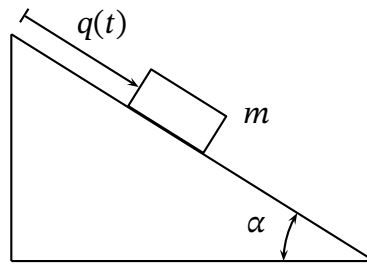


FIG. 3.1 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Si nous choisissons comme coordonnée la hauteur y de la masse par rapport au sol alors l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

fait nécessairement apparaître la coordonnée x . Or nous n'avons besoin que d'une seule coordonnée pour désigner la position de la masse, la coordonnée généralisée q (fig. 3.1) qui tient compte de la liaison entre la masse et le plan incliné. En prenant l'origine de l'énergie potentielle de gravitation au sommet du plan incliné, le lagrangien a pour expression :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq \sin(\alpha)\end{aligned}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{q}) - mg \sin(\alpha) &= 0 \\ \ddot{q} - g \sin(\alpha) &= 0 \\ \dot{q} &= g \sin(\alpha) t + \dot{q}_0 \\ q &= \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + \dot{q}_0 t + q_0\end{aligned}\tag{3.12}$$

Exemple 3.1.2 : Pendule mathématique, simple, plan, gravitationnel

Une masse m est attachée à une corde de longueur ρ faisant un angle $\theta(t)$ avec la verticale. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m ?

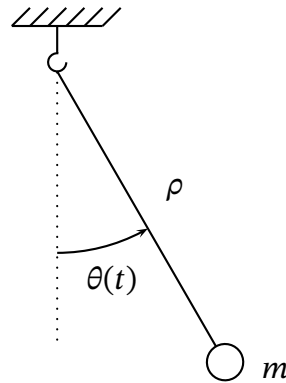


FIG. 3.2 – Pendule mathématique, simple, plan, gravitationnel

Ce pendule est dit « mathématique » par opposition au pendule physique pour lequel on considère le moment d'inertie du pendule. Le système n'a qu'un degré de liberté. Il n'y a donc qu'une coordonnée généralisée, l'angle $\theta(t)$ que fait le pendule avec le temps. Écrivons le changement de coordonnées, de cartésiennes à polaires :

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \\ y = -\rho \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} = \rho \dot{\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m [\rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta)] \\ &= \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

et l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= mgy \\ &= -mg\rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

D'où le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\ &= \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + mg\rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) + mg\rho \sin(\theta) &= 0 \\ \rho \ddot{\theta} + g \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 3.1.3 : Pendule attaché à un point tournant

Dans le plan horizontal (x, y) , un pendule de longueur ρ est attaché à un point tournant à vitesse angulaire constante ω sur un cercle de rayon R . Quelle est l'équation de son mouvement ?

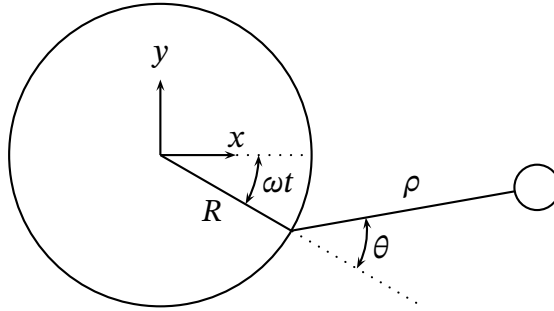


FIG. 3.3 – Pendule tournant dans le plan horizontal

Le passage des coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires (rectilignes et orthogonales) s'écrit :

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t) + \rho \cos(\omega t + \theta) \\ y = R \sin(\omega t) + \rho \sin(\omega t + \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -R\omega \sin(\omega t) - \rho(\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y} = R\omega \cos(\omega t) + \rho(\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

Il n'y a pas d'énergie potentielle, le lagrangien est simplement l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{m}{2} [R^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + 2R\omega \sin(\omega t)\rho(\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) + \rho^2(\omega + \dot{\theta})^2 \sin^2(\omega t + \theta) \\ &\quad + R^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + 2R\omega \cos(\omega t)\rho(\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) + \rho^2(\omega + \dot{\theta})^2 \cos^2(\omega t + \theta)] \\ &= \frac{m}{2} [R^2\omega^2 + 2R\rho\omega(\omega + \dot{\theta}) \cos(\theta) + \rho^2(\omega + \dot{\theta})^2] \end{aligned}$$

La seule coordonnée généralisée est l'angle θ . L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} [mR\rho\omega \cos(\theta) + m\rho^2(\omega + \dot{\theta})] + mR\rho\omega(\omega + \dot{\theta}) \sin(\theta) &= 0 \\ \rho\ddot{\theta} + R\omega^2 \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation en θ est similaire à celle du mouvement d'un pendule simple plan dans un champ de gravitation $R\omega^2$.

3.1.2 Énergie potentielle généralisée

Lorsque les modèles de force dérivent tous d'une énergie potentielle généralisée $U(q, \dot{q}, t)$ telle que,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

alors, à partir de (3.8) page 72 :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \\ \forall j = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \\ \forall j = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - U) = 0 \end{aligned}$$

En définissant le lagrangien généralisé par

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)$$

nous retrouvons les équations de Lagrange (3.11) page 74 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Exemple 3.1.4 : Particule chargée en mouvement dans un champ électromagnétique

Le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ dérivent du potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \end{cases}$$

où le vecteur $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$ est le rotationnel de $\vec{A}$. Soit q la charge électrique de la particule, et soit $\vec{v}$ sa vitesse dans le champ électromagnétique. Sur cette particule s'exerce une force électromagnétique, appelée *force de Lorentz*, dont le modèle a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q \left[-\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \right] \end{aligned}$$

En projetant sur les axes :

$$\begin{aligned} F_x &= q \left\{ -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)|_x - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_x + [\vec{v} \times \text{rot}(\vec{A})]_x \right\} \\ F_y &= q \left\{ -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)|_y - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_y + [\vec{v} \times \text{rot}(\vec{A})]_y \right\} \\ F_z &= q \left\{ -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)|_z - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_z + [\vec{v} \times \text{rot}(\vec{A})]_z \right\} \end{aligned}$$

Par exemple, pour la composante en x :

$$F_x = q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right]$$

Or

$$\begin{aligned} dA_x &= \frac{\partial A_x}{\partial t} dt + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \\ \frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} &= \frac{dA_x}{dt} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \end{aligned}$$

nous donne :

$$\begin{aligned} F_x &= q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \\ &= q \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right] \\ &= q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \right\} \\ F_x &= -\frac{\partial}{\partial x} [q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})] + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_x} [q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})] \right\} \end{aligned}$$

On pose,

$$U = q(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v})$$

l'énergie potentielle généralisée qui engendre la force de Lorentz :

$$F_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial U}{\partial x}$$

En prenant le lagrangien généralisé,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - U \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

les équations de Lagrange donnent les équations du mouvement de la particule chargée dans le champ électromagnétique.

Lorsque le champ magnétique est uniforme, c.-à-d. constant dans l'espace, une condition suffisante pour avoir $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$ est que $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$. Soit donc à montrer que si $\vec{B}$ est uniforme et $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ alors $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$. Par hypothèse :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \\ \text{rot}(\vec{A}) &= \frac{1}{2}\text{rot}(\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\ \text{rot}(\vec{A}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} (B_x y - B_y x) - (B_z x - B_x z) \\ (B_y z - B_z y) - (B_x y - B_y x) \\ (B_z x - B_x z) - (B_y z - B_z y) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial_y(B_x y - B_y x) - \partial_z(B_z x - B_x z) \\ \partial_z(B_y z - B_z y) - \partial_x(B_x y - B_y x) \\ \partial_x(B_z x - B_x z) - \partial_y(B_y z - B_z y) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ étant uniforme, ses dérivations partielles dans l'espace sont nulles :

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{A}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2B_x \\ 2B_y \\ 2B_z \end{pmatrix} \\ &= \vec{B}\end{aligned}$$

Si $\vec{B}$ est uniforme le lagrangien généralisé s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - U \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - q\left[\phi - \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \vec{v}\right]\end{aligned}$$

3.1.3 Forces ne dérivant pas toutes d'une énergie potentielle

Lorsque les modèles de force ne dérivent pas tous d'une énergie potentielle, nous pouvons séparer les forces s'exerçant sur une partie mobile en une somme de force dérivant d'une énergie potentielle et une somme de forces ne dérivant pas d'une énergie potentielle (notée avec une barre) :

$$\vec{F}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}_i(V_i) + \vec{\bar{F}}_i$$

Les équations de Lagrange s'écrivent,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N (-\overrightarrow{\text{grad}}_i(V_i) + \vec{\bar{F}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= - \sum_{i=1}^N \vec{\text{grad}}_i(V_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= \bar{Q}_j \end{aligned}$$

dans lesquelles le lagrangien contient les énergies potentielles de toutes les forces dérivant d'une énergie potentielle indépendante des vitesses généralisées et où la barre sur Q rappelle que ces forces généralisées ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

Exemple 3.1.5 : Forces de frottements sec

Soit une masse m glissant avec frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

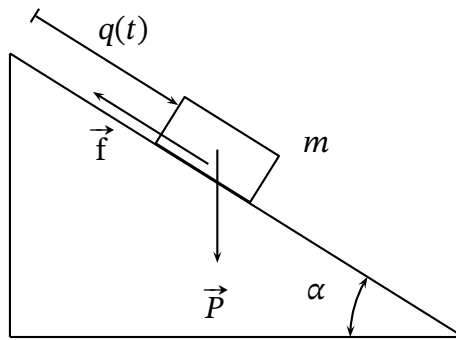


FIG. 3.4 – Masse glissant avec frottements sur un plan incliné

On prend comme modèle de force de frottements cinétiques, une force proportionnelle à la composante du poids qui s'exerce sur le plan incliné, et s'opposant au déplacement de la masse :

$$\vec{f} = -\mu mg \cos(\alpha) \frac{\vec{v}}{v}$$

En utilisant la coordonnée généralisée q , l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

Le lagrangien s'écrit,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgq \sin(\alpha)$$

et l'équation de Lagrange a pour expression :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= \bar{Q} \\ \frac{d}{dt} (m\dot{q}) - mg \sin(\alpha) &= \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \\ \ddot{q} - g \sin(\alpha) &= -\mu g \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Exemple 3.1.6 : Forces de frottements visqueux

Les forces de frottements visqueux (proportionnels à la vitesse), s'écrivent :

$$\vec{f} = -\mu \vec{v}$$

Nous pouvons les réécrire sous la forme :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right)$$

Avec ϕ la fonction de dissipation de Rayleigh, définie par

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \mu v^2$$

nous avons :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} (\phi)$$

En partant de la déf. 3.1.1 page 71 de la force généralisée, nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j &= \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= - \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} (\phi_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

En utilisant (3.5) page 71 :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j &= - \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} (\phi_i) \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

pour lesquelles il reste à préciser les fonctions scalaires $\mathcal{L}$ et ϕ .

Soit un mobile se déplaçant dans un fluide, dans le champ de pesanteur terrestre. La force de frottement étant supposée proportionnelle à la vitesse, la fonction de dissipation a pour expression :

$$\phi = \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

En prenant le zéro de l'énergie potentielle au fond du fluide, le lagrangien s'écrit,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Les équations de Lagrange donnent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0 \\ m\ddot{y} + \mu\dot{y} + mg = 0 \end{cases}$$

3.1.4 Forces de contraintes généralisées

Soit un système holonome à n degrés de liberté, donc à n coordonnées indépendantes. L'emploi des coordonnées généralisées fait disparaître les forces de liaison. Cependant, on peut ne pas les utiliser et conserver $n + k$ coordonnées x_j non indépendantes, et trouver l'expression des k équations de liaison holonome.

Ces k équations de liaison holonome s'écrivent :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad f_i(x_1, \dots, x_{n+k}, t) = 0 \quad (3.14)$$

Imaginons un déplacement virtuel du système, donc à temps constant. Si ce déplacement virtuel est compatible avec les liaisons alors les équations de liaison (3.14) sont encore valables dans cette nouvelle position :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad f_i(x_1 + \delta x_1, \dots, x_{n+k} + \delta x_{n+k}, t) = 0 \quad (3.15)$$

où t ne varie pas. Soustrayons (3.14) de (3.15) :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, k \quad & f_i(x_1 + \delta x_1, \dots, x_{n+k} + \delta x_{n+k}, t) - f_i(x_1, \dots, x_{n+k}, t) = 0 \\ \forall i = 1, \dots, k \quad & \delta_t f_i(x_1, \dots, x_{n+k}, t) = 0 \end{aligned}$$

qui est la variation à temps constant de chaque f_i , et qui s'écrit :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad \sum_{j=1}^{n+k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad (3.16)$$

À partir de (3.2) page 70, l'équation de la dynamique valable pour tous types de contraintes et de coordonnées s'écrit,

$$\sum_{j=1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_j} \right)_t \right] \delta x_j = 0$$

où les δx_j ne sont pas indépendants. On suppose sans perte de généralité, que ce sont les n premières coordonnées x_j qui sont indépendantes. Les expressions entre crochets devant les n premiers δx_j sont donc nulles :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_j} \right)_t = 0$$

Les forces généralisées sont (au maximum) au nombre de n , une force généralisée par degré de liberté : ajouter des coordonnées superflues n'ajoute pas de forces. On suppose donc à nouveau sans perte de généralité que ces forces s'expriment en fonction des n premières coordonnées, supposées indépendantes (Cf. rmq 3.1.6 page 85),

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - Q_j = 0$$

si bien qu'il reste :

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \delta x_j = 0 \quad (3.17)$$

Les n premières coordonnées étant supposées indépendantes, les n premiers δx_j dans (3.16) sont indépendants, et leurs coefficients respectifs sont nuls afin que la somme soit nulle :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3.18)$$

Les équations de liaison ne sont donc pas des fonctions explicites des n premières coordonnées. Il reste :

$$\forall i = 1, \dots, k \quad \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad (3.19)$$

En introduisant k multiplicateurs indéterminés λ_i entre l'éq. (3.17) et les k éq. (3.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \delta x_j &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j \\ \sum_{j=n+1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \delta x_j &= 0 \end{aligned}$$

Les conditions sur les multiplicateurs λ_i pour que chacun des k termes soit nul sont les suivantes :

$$\forall j = n+1, \dots, n+k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$$

Les équations de la dynamique sont données par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, n & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - Q_j = 0 \\ \forall j = n+1, \dots, n+k & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

(3.18) de la présente page permettent d'écrire ce système d'équations sous la forme :

$$\forall j = 1, \dots, n+k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - Q_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3.20)$$

Ces équations montrent que les $\lambda \partial_x f$ sont homogènes à des forces généralisées. On les appelle *forces de contraintes généralisées*.

Lorsque toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle indépendante des vitesses généralisées, d'après la définition (3.1.1) page 71 de la force généralisée et (3.9) page 73 :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial V(x_j, t)}{\partial x_j}$$

On peut ajouter le terme nul $\partial V / \partial \dot{x}_j$, et avec la déf. 3.1.3 page 74 du lagrangien :

$$\forall j = 1, \dots, n+k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$$

Exemple 3.1.7 : Cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné

Un cylindre de masse m et de rayon r , roule sans glisser sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

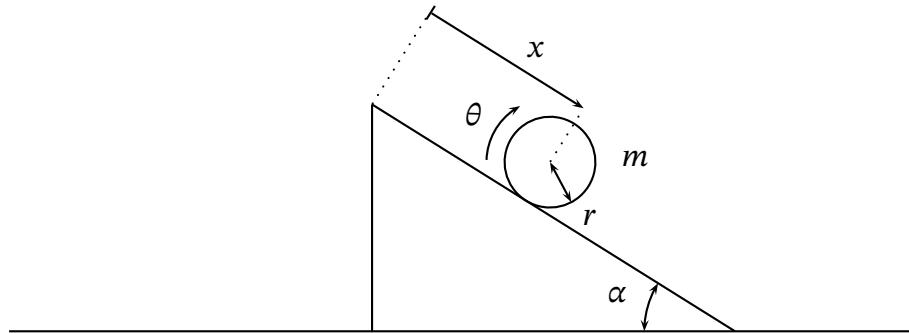


FIG. 3.5 – Cylindre roulant sur un plan incliné

Soit θ l'angle de rotation du cylindre. En l'absence de glissement, la distance $r\theta$ sur le cylindre est égale à celle parcourue x . La condition de roulement sans glissement est l'équation de liaison

$$r\theta - x = 0 \quad (3.21)$$

de la forme,

$$f(x, \theta) = 0$$

avec,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = r \end{cases}$$

En choisissant $x - r\theta = 0$ les signes seraient inversés. Il n'y a qu'un seul degré de liberté mais nous utilisons les deux coordonnées x et θ reliées par l'équation de contrainte (3.21). L'expression de l'énergie cinétique comporte un terme en translation et un terme en rotation,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

dans laquelle on conserve les deux variables x et θ . En choisissant l'origine de l'énergie potentielle au sommet du plan incliné, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgx \sin(\alpha)$$

Remarque 3.1.6

On peut aussi choisir indifféremment de prendre :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgr\theta \sin(\alpha)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - mg \sin(\alpha) = -\lambda \\ \frac{d}{dt} (J\dot{\theta}) = \lambda r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} - mg \sin(\alpha) + \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{J\ddot{\theta}}{r} \end{cases}$$

L'équation de liaison (3.21) page précédente donne,

$$\begin{aligned} r\theta &= x \\ r\ddot{\theta} &= \ddot{x} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda &= J\ddot{x}/r^2 \Rightarrow \ddot{x} = r^2\lambda/J \\ \begin{cases} m\ddot{x} - mg \sin(\alpha) + \frac{J\ddot{x}}{r^2} = 0 \\ \frac{mr^2\lambda}{J} - mg \sin(\alpha) + \lambda = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} (mr^2 + J) - mr^2g \sin(\alpha) = 0 \\ \lambda (mr^2 + J) - mJg \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \frac{mr^2}{mr^2 + J} g \sin(\alpha) = 0 \\ \lambda = \frac{J}{mr^2 + J} mg \sin(\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Pour un cylindre plein, de longueur l , le moment d'inertie s'écrit,

$$\begin{aligned} J &= \iiint_V r^2 dm \\ &= \rho \int_0^r r^2 2\pi r l dr \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi r^4 l \\ &= \frac{1}{2} m r^2 \end{aligned}$$

et l'on obtient,

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2}{3} g \sin(\alpha) = 0 \\ \lambda = \frac{1}{3} mg \sin(\alpha) \end{cases}$$

Les forces de contraintes généralisées s'écrivent,

$$\begin{cases} f_x \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ f_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = -\frac{1}{3} mg \sin(\alpha) \\ f_\theta = \frac{1}{3} r mg \sin(\alpha) \end{cases}$$

f_x est la force de frottement sur la ligne de contact du cylindre avec le plan incliné. f_θ est le moment de cette force de frottement par rapport à l'axe du cylindre, qui provoque la rotation du cylindre sans glissement.

Pour un cylindre creux, de longueur l , le moment d'inertie s'écrit,

$$J = r^2 \iiint_V dm$$

$$J = mr^2$$

et l'on obtient,

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{1}{2} g \sin(\alpha) = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} mg \sin(\alpha) \end{cases}$$

Les forces de contraintes généralisées s'écrivent,

$$\begin{cases} f_x = -\frac{1}{2} mg \sin(\alpha) \\ f_\theta = \frac{1}{2} rm g \sin(\alpha) \end{cases}$$

On vérifie que l'on obtient le même résultat en utilisant directement l'équation de contrainte (3.21) page 85 dans l'expression de l'énergie cinétique. Par exemple pour le cylindre plein :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + mgx \sin(\alpha)$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} m \dot{x} \right) - mg \sin(\alpha) = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2}{3} g \sin(\alpha) = 0$$

3.1.5 Liaisons non-holonomes

Lorsque les liaisons sont non-holonomes il n'existe pas de méthode générale pour éliminer les coordonnées superflues. Cependant, dans le cas particulier où elles sont données sous forme différentielle non intégrable, on peut éliminer les équations de la dynamique dépendantes grâce aux multiplicateurs indéterminés de Lagrange.

Considérons un système à n degrés de liberté, et à $n + k$ coordonnées dépendantes x_j , dont les k liaisons non-holonomes sont données sous la forme

$$\forall i = 1, \dots, k \quad \sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} dx_j + a_{it} dt = 0$$

où les a_{ij} et les a_{it} sont en général fonction du temps et des x_j . Ces équations différentielles sont supposées non intégrables, car sinon on se ramènerait au cas de liaisons holonomes.

Exemple 3.1.8 : Équation de liaison sous forme différentielle intégrable

La condition de roulement sans glissement de l'ex. 3.1.7 page 85 est intégrable. Qu'il y ait glissement ou non, dans le référentiel galiléen lié au plan incliné, la vitesse d'un point quelconque du cylindre est la composition vectorielle d'une vitesse de rotation autour de l'axe du cylindre, et de la vitesse en translation du cylindre. En l'absence de glissement, la vitesse en rotation et la vitesse en translation des points au contact du plan incliné sont égales en norme (et de même direction mais de sens opposé) :

$$r\dot{\theta} = \dot{x}$$

Cette liaison s'écrit sous forme différentielle,

$$r d\theta - dx = 0$$

Les coefficients a_{ij} et a_{it} s'écrivent donc (une seule liaison donc $k = 1$) :

$$\begin{cases} a_{\theta} = r \\ a_x = -1 \\ a_t = 0 \end{cases}$$

Elle s'intègre en une équation holonome

$$r\theta - x = 0$$

où les constantes d'intégration θ_0 et x_0 sont choisies nulles.

Lorsque les équations différentielles sont non intégrables, les déplacements virtuels ayant lieu à temps constant, nous avons

$$\forall i = 1, \dots, k \quad \sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} \delta x_j = 0$$

Par analogie avec (3.20) page 84 du § précédent, en introduisant k multiplicateurs de Lagrange, les $n + k$ équations de la dynamique s'écrivent

$$\forall j = 1, \dots, n + k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} - Q_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0$$

et lorsque toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle indépendante des vitesses généralisées :

$$\forall j = 1, \dots, n + k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0$$

Exemple 3.1.9 : Équations de liaison sous forme différentielle non intégrable

Reprenons l'ex. 1.7.4 page 22 du disque roulant sans glissement sur un plan horizontal. Ce système se déplace dans le plan, il est à $n = 2$ degrés de liberté. Les $k = 2$ équations de

liaison du disque avec le sol s'écrivent :

$$\begin{cases} dx - r \sin(\varphi) d\theta = 0 \\ dy + r \cos(\varphi) d\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\delta x_1 + a_{13}\delta x_3 = 0 \\ a_{21}\delta x_1 + a_{23}\delta x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

(x, y, θ, φ) sont les $n + k = 4$ coordonnées dépendantes. Soient M la masse du disque, A son moment d'inertie par rapport à son axe et B son moment d'inertie par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son centre. Le lagrangien a pour expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\varphi}^2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} + \lambda_4 a_{41}) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{23} + \lambda_4 a_{24}) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} + \lambda_4 a_{41}) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{23} + \lambda_4 a_{24}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x} - \lambda_1 = 0 \\ M\ddot{y} - \lambda_2 = 0 \\ A\ddot{\theta} + \lambda_1 r \sin(\varphi) - \lambda_2 r \cos(\varphi) = 0 \\ B\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Les six variables $(x, y, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2)$ sont déterminées à partir de ces quatre équations et des conditions de liaison (3.22). Il faut également fixer les valeurs initiales de deux des variables x, y, θ, φ , ainsi que leurs dérivées par rapport au temps.

3.2 Propriétés du lagrangien et des équations de Lagrange

3.2.1 Équivalence avec la relation fondamentale de la dynamique

Montrons d'abord que les équations de la dynamique de Newton impliquent celles de Lagrange. Les équations du mouvement de l'une des parties mobiles s'écrivent sous forme vectorielle

$$\sum_k \vec{f}_k^{(e)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

où le membre de gauche est la somme des forces extérieures exercées sur la partie mobile étudiée, et $\vec{p}$ est son vecteur quantité de mouvement. Cette relation vectorielle qui regroupe trois relations scalaires est appelée relation fondamentale de la dynamique. L'égalité n'est pas stricte car les $\vec{f}_k^{(e)}$ sont des *modèles* de forces exercées sur la partie mobile. Remplaçons la somme des forces par une unique force :

$$\vec{F} = \vec{p}$$

Si chaque modèle de force exercée sur la i^e partie mobile dérive d'une énergie potentielle, cette relation devient :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \vec{p}$$

V est un modèle d'énergie potentielle. Si la masse m de la partie mobile étudiée est constante :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(V) = m \vec{a}$$

En coordonnées rectangulaires (x_j) :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad m\ddot{x}_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (3.23)$$

Pour retrouver les équations de Lagrange, introduisons l'énergie cinétique totale du système :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2$$

En coordonnées rectangulaires :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(m_i \sum_{j=1}^3 \dot{x}_{ij}^2 \right)$$

Pour l'une des parties mobiles (valeur de i fixée) :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j \Rightarrow \forall j = 1, 2, 3 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) = m\ddot{x}_j$$

Remplaçons dans les équations de Newton (3.23) de la présente page, pour la partie mobile étudiée :

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$$

En soustrayant le terme nul $\partial T / \partial x_j$

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

nous trouvons les équations de Lagrange (3.10) page 74 en coordonnées rectangulaires. Pour comprendre l'origine de ce terme nul à soustraire, effectuons quelques changements de coordonnées.

- a) Transformation des coordonnées rectangulaires (x, y, z) en coordonnées obliques (rectilignes non orthogonales) (x', y', z') :

$$\begin{cases} x' = x - y/\tan(\alpha) \\ y' = y/\sin(\alpha) \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + y' \cos(\alpha) \\ y = y' \sin(\alpha) \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' + \dot{y}' \cos(\alpha) \\ \dot{y} = \dot{y}' \sin(\alpha) \\ \dot{z} = \dot{z}' \end{cases}$$

L'énergie potentielle totale du système est indépendante du système de coordonnées dans lequel on l'exprime :

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V(x', y', z') \\ &= V'(x', y', z') \end{aligned}$$

De même, l'énergie cinétique totale du système est indépendante du système de coordonnées dans lequel on l'exprime :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\dot{x}'_i + \dot{y}'_i \cos(\alpha))^2 + (\dot{y}'_i \sin(\alpha))^2 + (\dot{z}'_i)^2] \\ &= T' \end{aligned}$$

Ce n'est pas une fonction explicite des nouvelles coordonnées (x', y', z') . L'absence du terme $\partial T / \partial x_i$ n'est pas due au caractère orthogonal du système de coordonnées choisi.

- b) Transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées cylindriques (curvilignes orthogonales) (ρ, ϕ, z) :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y, x) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos(\phi) - \rho \dot{\phi} \sin(\phi) \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin(\phi) + \rho \dot{\phi} \cos(\phi) \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

L'énergie potentielle totale du système est indépendante du système de coordonnées dans lequel on l'exprime :

$$V(x, y, z) = V(\rho, \phi, z)$$

L'énergie cinétique totale du système est indépendante du système de coordonnées dans lequel on l'exprime :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\dot{\rho}_i \cos(\phi_i) - \rho_i \dot{\phi}_i \sin(\phi_i))^2 + (\dot{\rho}_i \sin(\phi_i) + \rho_i \dot{\phi}_i \cos(\phi_i))^2 + (\dot{z}_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\phi}_i^2 + \dot{z}_i^2) \end{aligned}$$

C'est une fonction explicite de la coordonnée ρ . Pour l'une des parties mobiles :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\dot{\rho} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\rho^2\dot{\phi} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) = m\ddot{\rho} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = 2m\dot{\rho}\dot{\phi} + m\rho^2\ddot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \rho\dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Le terme $\partial T / \partial x_j$ est donc dû au caractère curviligne des coordonnées.

Cherchons les équations du mouvement en coordonnées cylindriques. Les vecteurs unitaires de la base cylindrique ont pour expression :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\phi)\vec{i} + \sin(\phi)\vec{j} \\ \vec{e}_\phi = -\sin(\phi)\vec{i} + \cos(\phi)\vec{j} \\ \vec{e}_z = \vec{k} \end{cases}$$

Le vecteur position s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{r}(\rho, \phi, z) &= \rho \cos(\phi)\vec{i} + \rho \sin(\phi)\vec{j} + z\vec{k} \\ &= \rho(\cos(\phi)\vec{i} + \sin(\phi)\vec{j}) + z\vec{k} \\ &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \end{aligned}$$

Nous avons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = -\sin(\phi)\dot{\phi}\vec{i} + \cos(\phi)\dot{\phi}\vec{j} \\ \dot{\vec{e}}_\phi = -\cos(\phi)\dot{\phi}\vec{i} - \sin(\phi)\dot{\phi}\vec{j} \\ \dot{\vec{e}}_z = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\phi}\vec{e}_\phi \\ \dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\vec{e}_\rho \\ \dot{\vec{e}}_z = 0 \end{cases}$$

Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z) \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques le vecteur gradient s'écrit :

$$\begin{cases} F_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ F_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques les équations de Newton s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ 2m\dot{\rho}\dot{\phi} + m\rho\ddot{\phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

En remplaçant les termes présents dans les équations de Newton ci-dessus, nous retrouvons les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Dans (3.24) page 90, il reste à remplacer les coordonnées rectangulaires (x_j) par des coordonnées généralisées (q_j) :

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, n & q_j = q_j(x_1, \dots, x_n, t) \\ \forall j = 1, \dots, n & x_j = x_j(q_1, \dots, q_n, t) \end{cases}$$

La dépendance explicite en t permet le passage à des référentiels en mouvement (voir § suivant). L'énergie cinétique totale du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2$$

Cherchons les équations du mouvement de l'une des parties mobiles :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{v}_i^2}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Avec (3.5) page 71 :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{i=1}^N \left[m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \end{aligned}$$

Avec (3.7) page 72 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

Avec la déf. 3.1.1 page 71 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Nous retrouvons les équations de Lagrange (3.8) page 72 en coordonnées généralisées.

Montrons à présent que les équations de la dynamique de Lagrange impliquent celles de Newton. En coordonnées rectangulaires dans l'espace, le lagrangien de l'une des parties mobiles s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t)$$

Nous avons alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{y}) - \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{z}) - \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{dp_y}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{dp_z}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\text{grad}}(V)$$

qui est l'équation fondamentale de la dynamique de Newton dans le cas de forces conservatives (forces dérivant d'un potentiel de force, aussi appelé énergie potentielle).

Remarque 3.2.1

En coordonnées rectangulaires, les équations de Lagrange peuvent s'écrire sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$$

Remarque 3.2.2

Par dérivée d'une grandeur scalaire par rapport à un vecteur, $\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}$ et $\partial_{\vec{r}} \mathcal{L}$, on entend un vecteur dont les composantes sont égales aux dérivées de cette grandeur par rapport aux composantes correspondantes du vecteur.
Le vecteur $\partial_{\vec{r}} \mathcal{L}$ de composantes $\partial_x \mathcal{L}, \partial_y \mathcal{L}, \partial_z \mathcal{L}$, est le gradient du lagrangien.

3.2.2 Covariance par changement de référentiel galiléen

- a) Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen de système de coordonnées rectangulaires (x, y, z, t) , et soit $\mathcal{R}'$ un second référentiel galiléen de système de coordonnées rectangulaires (x', y', z', t') de même orientation, en mouvement à vitesse relative uniforme v selon l'axe des x . La transformation de Galilée des coordonnées spatio-temporelles permet le passage d'un référentiel à l'autre :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases}$$

L'énergie potentielle totale du système ne dépend pas du référentiel dans lequel on l'exprime :

$$V(x, y, z) = V'(x', y', z')$$

Les équations de Newton sont *covariantes* par changement de référentiel galiléen, par la transformation de Galilée. Cela signifie qu'elles sont invariantes de forme fonctionnelle, la fonction reste la même mais les variables changent. Autrement dit, par changement de référentiel galiléen par la transformation de Galilée, les équations de Newtons s'écrivent pareil, en remplaçant x par x' . Dans $\mathcal{R}'$:

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad m\ddot{x}'_j = -\frac{\partial V}{\partial x'_j} \quad (3.25)$$

L'énergie cinétique totale du système dépend du référentiel dans lequel on l'exprime :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\dot{x}_i' - v)^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i'^2 - 2\dot{x}_i'v + v^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2) \\
 &= T' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (-2\dot{x}_i'v + v^2)
 \end{aligned}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, pour l'une des parties mobiles :

$$\begin{cases} \frac{\partial T'}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + mv \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{y}'} = m\dot{y}' \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{z}'} = m\dot{z}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}'} \right) = m\ddot{x}' \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{y}'} \right) = m\ddot{y}' \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{z}'} \right) = m\ddot{z}' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \\ \frac{\partial T'}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial T'}{\partial z'} = 0 \end{cases}$$

En remplaçant dans les équations de Newton (3.25) page ci-contre, nous retrouvons les équations de Lagrange dans $\mathcal{R}'$:

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}_j'} \right) - \frac{\partial T'}{\partial x_j'} = -\frac{\partial V'}{\partial x_j'}$$

Les équations de Lagrange sont covariantes par changement de référentiel galiléen, elles conservent la même écriture.

- b) Changement de coordonnées du référentiel galiléen $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω dans le sens trigonométrique autour de l'axe des z :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z = z' \end{cases} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' \cos(\omega t) - \dot{y}' \sin(\omega t) - \omega[x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)] \\ \dot{y} = \dot{x}' \sin(\omega t) + \dot{y}' \cos(\omega t) + \omega[x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)] \\ \dot{z} = \dot{z}' \end{cases} \\
 &\begin{cases} \dot{x}^2 = [\dot{x}' \cos(\omega t) - \dot{y}' \sin(\omega t)]^2 - 2\omega[\dot{x}' \cos(\omega t) - \dot{y}' \sin(\omega t)][x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)] \\ \quad + \omega^2[x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)]^2 \\ \dot{y}^2 = [\dot{x}' \sin(\omega t) + \dot{y}' \cos(\omega t)]^2 + 2\omega[\dot{x}' \sin(\omega t) + \dot{y}' \cos(\omega t)][x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)] \\ \quad + \omega^2[x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)]^2 \\ \dot{z}^2 = \dot{z}'^2 \end{cases} \\
 &\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2) + 2\omega(\dot{y}'x' - \dot{x}'y')
 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique totale du système s'écrit :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2) + 2\omega(\dot{y}'x' - \dot{x}'y')] \\
 &= T' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\omega^2(x'^2 + y'^2) + 2\omega(\dot{y}'x' - \dot{x}'y')]
 \end{aligned}$$

Pour l'une des parties mobiles :

$$\begin{cases} \frac{\partial T'}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + m\omega y' \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{y}'} = m\dot{y}' - m\omega x' \\ \frac{\partial T'}{\partial \dot{z}'} = m\dot{z}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}'} \right) = m\ddot{x}' + m\omega \dot{y}' \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{y}'} \right) = m\ddot{y}' - m\omega \dot{x}' \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{z}'} \right) = m\ddot{z}' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial T'}{\partial x'} = -m\omega^2 x' - m\omega \dot{y}' \\ \frac{\partial T'}{\partial y'} = -m\omega^2 y' + m\omega \dot{x}' \\ \frac{\partial T'}{\partial z'} = 0 \end{cases}$$

Le terme $\partial T / \partial x_j$ est donc aussi dû au caractère non galiléen du référentiel.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}'} \right) - \frac{\partial T'}{\partial x'} = m\ddot{x}' + m\omega^2 x' + 2m\omega \dot{y}' \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{y}'} \right) - \frac{\partial T'}{\partial y'} = m\ddot{y}' + m\omega^2 y' - 2m\omega \dot{x}' \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{z}'} \right) - \frac{\partial T'}{\partial z'} = m\ddot{z}' \end{cases}$$

$m\omega^2 x'$, $m\omega^2 y'$, 0 sont les composantes de la force centrifuge, $2m\omega \dot{y}'$, $-2m\omega \dot{x}'$, 0 celles de la force de Coriolis. Toutes les forces fictives, pas seulement centrifuge et de Coriolis, sont comprises dans l'expression de l'énergie cinétique totale du système exprimée dans le référentiel en mouvement.

3.2.3 Similitude mécanique

Les équations du mouvement sont invariantes lorsque l'on multiplie le lagrangien par une constante :

$$\begin{aligned}
 \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (c^{ste} \times \mathcal{L})}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (c^{ste} \times \mathcal{L})}{\partial q_j} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= 0
 \end{aligned}$$

Cette circonstance permet la similitude mécanique. Soient k, α, β, γ des constantes. Supposons la transformation suivante :

$$\vec{r} \rightarrow \alpha \vec{r}, \quad t \rightarrow \beta t, \quad m \rightarrow \gamma m$$

L'énergie cinétique se transforme alors ainsi

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} m v^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \gamma m \frac{\alpha^2}{\beta^2} v^2 \\
 T &\rightarrow \frac{\gamma \alpha^2}{\beta^2} T
 \end{aligned}$$

Si l'énergie potentielle est une fonction homogène des coordonnées

$$V(\alpha \vec{r}_1, \alpha \vec{r}_2, \dots, \alpha \vec{r}_n) = \alpha^k V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$$

alors

$$T - V \rightarrow \frac{\gamma \alpha^2}{\beta^2} T - \alpha^k V$$

Pour que le Lagrangien soit multiplié par une constante il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \alpha^2}{\beta^2} &= \alpha^k \\ \gamma \alpha^{2-k} &= \beta^2 \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathcal{L} \rightarrow \alpha^k \mathcal{L}$$

Exemple 3.2.1

Dans un champ de force homogène, p. ex. en restant proche de la surface de la Terre, l'énergie potentielle est une fonction linéaire de la hauteur, du type mgh . Donc γ n'intervient pas puisque m est présente linéairement dans T et V , et $k = 1$:

$$\alpha = \beta^2$$

Les carrés des temps de chute sont dans le même rapport que les hauteurs de chute.

Exemple 3.2.2

Pour de petites oscillations mécaniques, l'énergie potentielle est quadratique en x , du type $\frac{1}{2}kx^2$, donc $k = 2$:

$$\gamma = \beta^2$$

La période des oscillations est indépendante de leur amplitude, mais varie comme la racine carrée du rapport des masses oscillantes.

Exemple 3.2.3

Dans le cas de l'interaction newtonienne, l'énergie potentielle est linéaire en m et est une fonction inverse de la distance, donc $k = -1$:

$$\alpha^3 = \beta^2$$

Pour les orbites elliptiques, les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes de leurs dimensions. C'est la troisième loi de Kepler.

Si l'énergie potentielle est simplement multipliée par une constante

$$V \rightarrow kV$$

alors

$$T - V \rightarrow \frac{\gamma \alpha^2}{\beta^2} T - kV$$

Pour que le Lagrangien soit multiplié par une constante il faut et il suffit que

$$\frac{\gamma\alpha^2}{\beta^2} = k$$

On a alors

$$\mathcal{L} \rightarrow k\mathcal{L}$$

3.2.4 Caractère scalaire du lagrangien

Les quantités considérées sont toutes des scalaires, et non plus des vecteurs comme en mécanique de Newton. La mécanique analytique exploite directement le fait que la plupart des modèles de force en physique dérivent d'une énergie potentielle :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\text{grad}}(V) \\ \text{rot } \vec{F} &= -\text{rot } \vec{\text{grad}}(V) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

soit,

$$\begin{cases} \partial_y F_z(x, y, z) - \partial_z F_y(x, y, z) = 0 \\ \partial_z F_x(x, y, z) - \partial_x F_z(x, y, z) = 0 \\ \partial_x F_y(x, y, z) - \partial_y F_x(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Les trois composantes de la force $\vec{F}$ sont reliées entre-elles par trois équations, ce qui explique pourquoi on peut les remplacer par l'unique scalaire V .

3.2.5 Additivité du lagrangien

Soient deux systèmes physiques indépendants, d'énergies cinétiques respectives T_1 et T_2 , et d'énergies potentielles respectives V_1 et V_2 . Pour le système global nous avons :

$$\begin{aligned}T &= T_1 + T_2 \\ V &= V_1 + V_2 \\ T - V &= (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2) \\ &= (T_1 - V_1) + (T_2 - V_2) \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\end{aligned}$$

La fonction de Lagrange est donc additive.

3.2.6 Invariance de jauge du lagrangien

Le lagrangien est défini à la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction f des n coordonnées généralisées $q(t)$ et du temps près. Autrement dit, le lagrangien,

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \pm \frac{df[q(t), t]}{dt} \quad (3.26)$$

donne les mêmes équations du mouvement que le lagrangien $\mathcal{L}$ seul. Nous pouvons aussi écrire l'équivalence suivante :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \equiv \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \pm \frac{df(q, t)}{dt}$$

Remarque 3.2.3

Le choix d'un signe positif ou négatif est bien entendu affaire de convention.

En effet, montrons que :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{df(q, t)}{dt} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{df(q, t)}{dt} \right] = 0$$

Écrivons la dérivée totale de f par rapport au temps :

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Soit donc à prouver que :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) &= 0 \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Écrivons la différentielle de $\partial f / \partial q_j$ puis sa dérivée totale par rapport au temps :

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) dq_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} dq_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} dt \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \end{aligned}$$

La variable muette k peut être remplacée par i , et (3.27) est bien nulle. Le lagrangien subit une transformation de jauge ou est dit invariant de jauge.

Exemple 3.2.4

Soit la fonction $f(q_1, q_2, t) = q_1 q_2^2 + q_1^3 t^2$:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= q_2^2 \dot{q}_1 + 3q_1^2 t^2 \dot{q}_1 + 2q_2 q_1 \dot{q}_2 + 2t q_1^3 \end{aligned}$$

Les lagrangiens $\mathcal{L}(q_1, q_2, t)$ et $L(q_1, q_2, t) = \mathcal{L} + q_2^2 \dot{q}_1 + 3q_1^2 t^2 \dot{q}_1 + 2q_2 q_1 \dot{q}_2 + 2t q_1^3$ sont équivalents pour décrire l'évolution d'un système.

3.2.7 Condition nécessaire et suffisante pour avoir un lagrangien

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{F}(\dot{q}(t), q(t), t)$ soit un lagrangien est qu'elle soit la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des coordonnées et du temps :

$$\mathcal{F}(\dot{q}(t), q(t), t) = \frac{dF(q(t), t)}{dt}$$

Autrement dit $\mathcal{F}(\dot{q}(t), q(t), t)$ est un lagrangien si et seulement si $\mathcal{F} = dF(q(t), t)/dt$.

- condition suffisante

Soit à démontrer que si $\mathcal{F} = dF(q(t), t)/dt$ alors $\mathcal{F}(\dot{q}(t), q(t), t)$ est un lagrangien.

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{dF(q, t)}{dt} \\ &= \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(q, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F(q, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$F(q, t)$ n'étant pas fonction des $\dot{q}$ on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial F}{\partial q_j}(q, t) \\ d\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} dq_i + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} dt \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \end{aligned}$$

En comparant ces deux résultats,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j}$$

$\mathcal{F}$ est donc bien un lagrangien quelle que soit sa forme fonctionnelle et quelle que soit la dépendance temporelle des coordonnées $q_j(t)$.

- condition nécessaire

Démontrons que $\mathcal{F}(\dot{q}(t), q(t), t)$ est un lagrangien seulement si $\mathcal{F} = dF(q(t), t)/dt$, autrement dit si $\mathcal{F}(\dot{q}(t), q(t), t)$ est un lagrangien alors $\mathcal{F} = dF(q(t), t)/dt$.

Par hypothèse :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} \quad (3.28)$$

Dans le cas général $\partial \mathcal{F} / \partial \dot{q}_i$ est une fonction de $\dot{q}_j, q_j, t$

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} d\dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} dq_j + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t \partial \dot{q}_i} dt \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t \partial \dot{q}_i} \end{aligned}$$

si bien que (3.28) devient :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i}$$

$\partial \mathcal{F}(q, \dot{q}, t) / \partial q_i$ n'étant pas une fonction des $\ddot{q}_j$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = 0$$

et $\mathcal{F}$ est donc une fonction linéaire des $\dot{q}$, de la forme :

$$\mathcal{F}(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n G_j(q, t) \dot{q}_j + H(q, t) \quad (3.29)$$

Nous avons alors d'une part,

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} &= G_j(q, t) \\ d \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G_j}{\partial t} dt \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G_j}{\partial t} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}$$

Injectons ces deux résultats dans les équations de Lagrange (3.28) prisent pour hypothèses :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G_j}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial G_j}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}$$

$\partial H(q, t)/\partial q_j$ n'étant pas fonction des $\dot{q}_i$

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial G_j}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \forall i, j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial G_j}{\partial q_i} &= \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Par exemple :

$$\frac{\partial G_1}{\partial q_2} = \frac{\partial G_2}{\partial q_1}$$

Cela implique

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad G_j(q, t) = \frac{\partial F(q, t)}{\partial q_j}$$

car on a bien :

$$\frac{\partial^2 F(q, t)}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 F(q, t)}{\partial q_1 \partial q_2}$$

Les équations de Lagrange (3.30) donnent alors :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial^2 F(q, t)}{\partial t \partial q_j} &= \frac{\partial H(q, t)}{\partial q_j} \\ \frac{\partial F(q, t)}{\partial t} &= H(q, t) \end{aligned}$$

D'après (3.29) la fonction $\mathcal{F}$ doit donc être de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q, \dot{q}, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(q, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F(q, t)}{\partial t} \\ &= \frac{dF(q, t)}{dt} \end{aligned}$$

3.2.8 Covariance des équations de Lagrange par changement de coordonnées

Lorsque nous avons établi les équations de Lagrange (3.8) page 72, nous n'avons pas fait d'hypothèse sur le système de coordonnées généralisées utilisé. Par conséquent les équations de Lagrange sont valables dans tout système de coordonnées généralisées. Elles sont covariantes (invariantes de forme fonctionnelle) par changement de coordonnées. Nous pouvons démontrer cette covariance. Soit $L(Q, \dot{Q}(q, \dot{q}, t), t)$ le nouveau lagrangien exprimé dans les nouvelles coordonnées $(Q(q, t), \dot{Q}, t)$. À chaque instant t les lagrangiens nouveau et ancien sont égaux puisqu'il ne s'agit que d'un changement de coordonnées :

$$L(Q_j, \dot{Q}_j, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

Dans le cas d'un seul degré de liberté (une seule coordonnée généralisée) :

$$\begin{aligned}
 dL(Q, \dot{Q}, t) &= d\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \\
 &= \frac{d\mathcal{L}}{dq} dq + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} d\dot{q} + \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt \\
 &= \frac{d\mathcal{L}}{dq} \left(\frac{\partial q}{\partial Q} dQ + \frac{\partial q}{\partial t} dt \right) + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} d\dot{Q} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} d\dot{Q} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} dt \right) + \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt \\
 &= \left(\frac{d\mathcal{L}}{dq} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \right) dQ + \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \right) d\dot{Q} + \left(\frac{d\mathcal{L}}{dq} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right) dt \\
 &= \frac{\partial L}{\partial Q} dQ + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} d\dot{Q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt
 \end{aligned}$$

Or nous avons également

$$\begin{aligned}
 dq &= \frac{\partial q}{\partial Q} dQ + \frac{\partial q}{\partial t} dt \\
 \dot{q} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t} \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} &= \frac{\partial q}{\partial Q}
 \end{aligned}$$

Si bien que nous avons les trois relations

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{d\mathcal{L}}{dq} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d\mathcal{L}}{dq} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \frac{d\mathcal{L}}{dt} \end{cases} \quad (3.31a)$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \right) - \left(\frac{d\mathcal{L}}{dq} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \right) \\
 &= \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \right) + \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dq} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \\
 &= \frac{\partial q}{\partial Q} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dq} \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, la nullité du membre de droite implique celle du membre de gauche. Si le système possède plusieurs degrés de liberté

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dq_k} \right]$$

Les équations de Lagrange se transforment comme les composantes covariantes d'un vecteur de l'espace de configuration.

Contrairement aux équations de Lagrange, les équations de Newton ne sont pas covariantes par changement de coordonnées. En effet, soit un mobile soumis à une force dérivant d'une énergie

potentielle V , les équations de Newton de la dynamique en coordonnées rectangulaires (x, y) s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

En passant en coordonnées polaires (ρ, θ) , nous n'avons pas :

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = -\frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \rho} \\ m\ddot{\theta} = -\frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \theta} \end{cases}$$

3.3 Intégrales premières du mouvement

Les intégrales premières sont des fonctions des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées $\dot{q}$, qui se conservent au cours du mouvement. Une intégrale première est donc de la forme :

$$f(q, \dot{q}) = c^{ste}$$

Ces équations différentielles sont du 1^{er} ordre en t (dérivée première par rapport au temps des variables q), alors qu'en mécanique de Newton les équations différentielles du mouvement sont du 2nd ordre en t par les termes d'accélération. Ces dernières sont intégrées une première fois.

La résolution de l'équation du mouvement d'un système mécanique ayant n degrés de liberté nécessite n conditions initiales sur les coordonnées et n sur les vitesses, soit $2n$ constantes. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées sont des fonctions du temps et de ces constantes :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad q_j &= q_j(t, q_1^0, \dots, q_n^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_n^0) \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \dot{q}_j &= \dot{q}_j(t, q_1^0, \dots, q_n^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_n^0) \end{aligned}$$

Dans l'ex. 2.4.3 page 64, nous avons trouvé $q(t) = \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + \dot{q}_0 t + q_0$. Il est toujours possible d'effectuer une translation dans le temps, qui correspond à un changement d'origine du temps :

$$\tau = t + t_0$$

Cela permet de supprimer l'une des constantes (ex. 3.3.2 page 106), constantes que l'on note C dans ce qui suit :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad q_j &= q_j(\tau, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \dot{q}_j &= \dot{q}_j(\tau, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{aligned}$$

En inversant ces relations, nous avons :

$$\forall i = 1, \dots, 2n - 1 \quad C_i = C_i(q, \dot{q})$$

Nous pouvons par conséquent former au plus $2n - 1$ intégrales premières du mouvement pour un système à n degrés de liberté. Cependant, toutes les intégrales premières sont loin de jouer un rôle d'égale importance en mécanique ¹.

Exemple 3.3.1 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

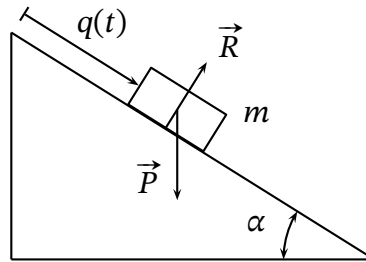


FIG. 3.6 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

À $n = 1$ degré de liberté correspond $2n - 1 = 1$ intégrale première. La force de pesanteur, seule force extérieure, dérive d'une énergie potentielle, donc l'énergie mécanique est une intégrale première. Elle nous fournira une équation, pour une variable, donc la solution $q(t)$. En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au sommet du plan incliné, l'énergie mécanique s'écrit

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \sin(\alpha) \\ &= c^{ste} \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre par rapport au temps, qui s'intègre par séparation des variables. Pour une énergie potentielle quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \dot{q}^2 &= E - V(q) \\ \frac{dq}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(q)]} \\ t &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} + c^{ste} \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1

Vérifions que E est bien une intégrale première des équations différentielles du 2nd ordre par rapport au temps, du mouvement. En la dérivant nous devons retrouver l'équation différentielle (3.12) page 75 :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \sin(\alpha) \right] &= 0 \\ m \dot{q} \ddot{q} - mg \dot{q} \sin(\alpha) &= 0 \\ \ddot{q} - g \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

1. L. Landau, *Mécanique* (Éditions Mir Moscou, 1982).

Exemple 3.3.2 : Pendule mathématique, simple, plan, gravitationnel

Le pendule mathématique, simple, plan, gravitationnel (voir fig. 3.2 page 76), n'a qu'un degré de liberté, l'angle θ avec la verticale, donc une seule intégrale première, l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho[1 - \cos(\theta)] = E$$

Pour de petites oscillations, $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$:

$$\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\rho\theta^2 = E$$

L'amplitude est maximale, $\theta = \theta_{max}$, lorsque $\dot{\theta} = 0$:

$$\frac{1}{2}mg\rho\theta_{max}^2 = E$$

$$\theta_{max} = \pm\sqrt{\frac{2E}{mg\rho}}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\frac{mg\rho}{2E} \frac{\rho}{g} \dot{\theta}^2 &= 1 - \frac{mg\rho}{2E} \theta^2 \\ \frac{\rho}{g} \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta_{max}} \right)^2 &= 1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{max}} \right)^2 \\ \sqrt{\frac{\rho}{g}} \frac{\dot{\theta}}{\theta_{max}} &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{max}} \right)^2}\end{aligned}$$

On pose $\alpha = \theta/\theta_{max}$, soit $\dot{\alpha} = \dot{\theta}/\theta_{max}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\rho}{g}} \dot{\alpha} &= \pm \sqrt{1 - \alpha^2} \\ \int_{t_2}^{t_1} dt &= \pm \sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \\ t_2 - t_1 &= \pm \sqrt{\frac{\rho}{g}} \left[\arcsin\left(\frac{\theta_2}{\theta_{max}}\right) - \arcsin\left(\frac{\theta_1}{\theta_{max}}\right) \right]\end{aligned}$$

La période T est le temps de quatre fois le trajet de $\theta_1 = 0$ à $\theta_2 = \theta_{max}$:

$$\begin{aligned}T &= 4\sqrt{\frac{\rho}{g}} [\arcsin(1) - \arcsin(0)] \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{g}}\end{aligned}$$

Posons qu'à l'instant initial $t_1 = 0$, l'angle est maximal $\theta_1 = \theta_{max}$:

$$\begin{aligned}t_2 &= \pm \sqrt{\frac{\rho}{g}} \left[\arcsin\left(\frac{\theta_2}{\theta_{max}}\right) - \arcsin(1) \right] \\ t &= \pm \sqrt{\frac{\rho}{g}} \arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right) \mp \frac{T}{4}\end{aligned}$$

On suppose θ et θ_{max} de même signe :

$$t = \sqrt{\frac{\rho}{g}} \arcsin\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right) - \frac{T}{4}$$

$$\theta = \theta_{max} \sin\left[\sqrt{\frac{g}{\rho}}\left(t + \frac{T}{4}\right)\right]$$

On pose $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g/\rho}$ la pulsation :

$$\theta = \theta_{max} \sin\left[\omega\left(t + \frac{T}{4}\right)\right]$$

3.3.1 Énergie généralisée

Dans le cas général, le lagrangien dépend des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps explicitement, $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$:

$$d\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

En utilisant les équations de Lagrange (3.11) page 74,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

si bien que,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L} \right) = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Définition 3.3.1 : Fonction énergie

On définit l'énergie généralisée^a par :

$$H(q, \dot{q}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}$$

^a. Notée H par Lagrange en l'honneur de Huygens

Nous avons alors :

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Lorsque le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie généralisée se conserve

au cours du mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H(q, \dot{q}) &= 0 \\ H(q, \dot{q}) &= c^{ste}\end{aligned}$$

Remarque 3.3.2

Disons de suite que l'énergie généralisée n'est pas l'énergie mécanique, même si souvent elles ont même valeur. Nous verrons que lorsqu'elle est exprimée avec les variables q et p , on l'appelle hamiltonien du système (Cf. rmq 4.2.3 page 132).

Exemple 3.3.3 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

Le lagrangien a pour expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgq \sin(\alpha)$$

Il ne dépend pas explicitement du temps, donc l'énergie généralisée se conserve :

$$\begin{aligned}H &= \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \\ &= m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \sin(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \sin(\alpha) \\ &= c^{ste}\end{aligned}$$

Nous retrouvons l'intégrale première de l'énergie mécanique de l'ex. 3.3.1 page 105.

3.3.2 Coordonnées cycliques

Définition 3.3.2 : Coordonnées cycliques

Une coordonnée généralisée q_j qui n'apparaît pas explicitement dans le lagrangien (mais dont la dérivée par rapport au temps apparaît), est dite *cyclique* ou ignorable :

$$q_j \text{ est cyclique ssi } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Soit q_j une coordonnée cyclique, en partant de l'équation de Lagrange pour cette variable,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} &= c^{ste}\end{aligned}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ est donc une intégrale première du mouvement.

Exemple 3.3.4

En coordonnées rectangulaires, si la coordonnée x est cyclique :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = c^{ste}$$

Si de plus l'énergie potentielle ne dépend pas de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial}{\partial v_x} (T - V) \\ &= \frac{1}{2} m \frac{\partial v_x^2}{\partial v_x} \\ &= m v_x \\ &= p_x \end{aligned}$$

Remarque 3.3.3

Notez que $m v_x$ est bien du 1^{er} ordre en t par rapport à la variable x .

3.4 Impulsions généralisées

D'après l'ex. 3.3.4 précédent, p_x étant la composante du vecteur quantité de mouvement (ou impulsion) selon l'axe des x , nous posons la définition :

Définition 3.4.1 : Impulsion généralisée

Les dérivées partielles du lagrangien par rapport aux vitesses généralisées forment les composantes du vecteur *impulsion généralisée* $\vec{p}$:

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

Remarque 3.4.1

Historiquement le terme « impulsion » désignait une variation de quantité de mouvement. Par extension elle désigne la quantité de mouvement elle-même.

Prenons le cas d'un mobile libre (ou isolé) dans le plan.

- en coordonnées rectangulaires (x, y) dans la base rectangulaire normée $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur quantité de mouvement a pour expression :

$$\vec{p} = m\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j}$$

Les composantes du vecteur quantité de mouvement sont donc :

$$\begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ p_y = m\dot{y} \end{cases}$$

Les composantes du vecteur impulsion généralisée ont pour expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ p_y = m\dot{y} \end{cases}$$

En l'absence de champ magnétique, les vecteurs quantité de mouvement et impulsion généralisée sont confondus :

$$\vec{p} = \vec{p}$$

Les vecteurs ayant une existence propre, ils sont indépendants du système de coordonnées et de la base dans lesquels on les exprime. Une égalité vectorielle vraie dans un système de coordonnées est vraie dans tout système de coordonnées. Vérifions-le en passant en coordonnées polaires.

- (2.3) page 57 donne l'expression de la vitesse en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. Le vecteur quantité de mouvement a alors pour expression :

$$\vec{p} = m\dot{\rho}\vec{e}_\rho + m\rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Les composantes du vecteur quantité de mouvement sont donc :

$$\begin{cases} p_\rho = m\dot{\rho} \\ p_\theta = m\rho\dot{\theta} \end{cases}$$

Les composantes du vecteur impulsion généralisée ont pour expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$$

$$\begin{cases} p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\rho = m\dot{\rho} \\ p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \end{cases}$$

Elles ne sont pas identiques à celles du vecteur quantité de mouvement, pour autant les vecteurs sont égaux. Dans la base polaire naturelle (§ 3.4.2 page ci-contre), le vecteur quantité de mouvement a pour expression :

$$\vec{p} = m\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + m\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Les composantes contravariante du vecteur quantité de mouvement dans la base polaire naturelle sont alors :

$$\begin{cases} p^\rho = m\dot{\rho} \\ p^\theta = m\dot{\theta} \end{cases}$$

Ses composantes covariantes dans la base polaire naturelle sont données par :

$$\begin{cases} p_\rho = \vec{p} \cdot \mathbf{e}_\rho \\ p_\theta = \vec{p} \cdot \mathbf{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\rho = (m\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + m\rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_\rho \\ p_\theta = (m\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + m\rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \cdot \rho\mathbf{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\rho = m\dot{\rho} \\ p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \end{cases}$$

Nous retrouvons les composantes du vecteur impulsion généralisée $\vec{p}$.

Remarque 3.4.2

Notez que p_ρ et p_θ ne sont pas de même dimension, et que p_θ est le moment cinétique par rapport à l'axe Oz .

Pour trouver l'expression des nouvelles impulsions généralisées par changement de variables, utilisons (3.31a) page 103 :

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} \\ &= \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} p_k \end{aligned}$$

Les P_j sont donc les composantes covariantes du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ (en l'absence de champ magnétique).

3.4.1 Présence d'un champ électromagnétique

En présence d'un champ électromagnétique de potentiel scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et de potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$, d'après (3.13) page 79 le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q(\phi - A_x\dot{x} + A_y\dot{y})$$

Les composantes du vecteur impulsion généralisée ont pour expression :

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = m\dot{x} + qA_x \\ p_y = m\dot{y} + qA_y \end{cases}$$

En présence d'un champ magnétique

$$\vec{p} = \vec{p} + q\vec{A}$$

Nous verrons au ch. 4 page 125 que l'impulsion généralisée est à la base de la mécanique de Hamilton.

3.4.2 Base et repère naturels

Définition 3.4.2 : Base naturelle

Soit $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ un système de coordonnées quelconques, curvilignes ou rectilignes. En un point M , les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées définissent une base locale :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbf{e}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x^i}$$

$(\mathbf{e}_i)$ est la *base naturelle* du système de coordonnées (x_i) au point M , et $(M, \mathbf{e}_i)$ est le *repère naturel* au point M .

En coordonnées curvilignes les $\mathbf{e}_i$ forment un champ de vecteurs fonction de la position de la base. En général les vecteurs de la base naturelle ne sont pas de norme unité et n'ont pas la même dimension physique. La transformation des vecteurs de base est due à un changement de coordonnées ou à un déplacement de l'origine de la base dans un système de coordonnées curviligne.

$$\begin{aligned}\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^{j'}} \\ &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\end{aligned}$$

$$\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i \quad (3.32)$$

Cette relation n'est valable que pour un changement de base naturelle à base naturelle. Les transformations inverses s'écrivent :

$$\begin{aligned}\forall i \quad \mathbf{e}_i &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\end{aligned}$$

$$\forall i \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'} \quad (3.33)$$

Exemple 3.4.1

Exprimons les vecteurs de la base naturelle polaire ($\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$) en fonction des vecteurs de la base rectangulaire ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$). Commençons par donner la transformation des coordonnées polaires en rectangulaires :

$$\begin{aligned}T \quad : \quad & \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi \\ & \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \rho} \right)_\theta \\ \mathbf{e}_\theta = \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} \right)_\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \rho} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = -\rho \sin(\theta) \mathbf{e}_x + \rho \cos(\theta) \mathbf{e}_y \end{cases}\end{aligned}$$

Les vecteurs de la base naturelle polaire ont pour norme :

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\theta) + \rho^2 \cos^2(\theta)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = 1 \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \rho \end{cases}$$

La base naturelle polaire n'est pas normée. En revanche elle est orthogonale :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta &= (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y) \cdot (-\rho \sin(\theta) \mathbf{e}_x + \rho \cos(\theta) \mathbf{e}_y) \\ &= -\cos(\theta)\rho \sin(\theta) + \sin(\theta)\rho \cos(\theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

ρ ayant la dimension d'une longueur, les vecteurs $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ n'ont pas la même dimension. Il s'en suit que les composantes des vecteurs physiques exprimées dans la base naturelle ne sont pas des composantes physiques. Par exemple, dans la base naturelle polaire les composantes du vecteur vitesse ont pour dimensions m s^{-1} et s^{-1} .

3.4.3 Composantes contravariantes d'un vecteur

Un vecteur peut être projeté de deux façons dans la base naturelle : parallèlement ou perpendiculairement aux vecteurs de base.

- en projetant parallèlement on obtient les composantes *contravariantes* du vecteur
- en projetant perpendiculairement on obtient les composantes *covariantes* du vecteur

Remarque 3.4.3

Dans les bases orthonormées, les composantes contravariantes et covariantes sont confondues.

Se donner une base et se donner des composantes (contravariantes ou covariantes) est équivalent à se donner un vecteur. Réciproquement, dans une base donnée tout vecteur peut se décomposer en composantes contravariantes ou en composantes covariantes. Un vecteur est donc la donnée d'une base et, de composantes contravariantes ou covariantes. Lorsque l'on décrit un vecteur en composantes covariantes on parle de *covecteur* ou *vecteur covariant*. Ceci est un abus de langage, il n'existe qu'une seule sorte de vecteur, que l'on peut exprimer de deux façons différentes dans une base donnée.

Exemple 3.4.2

Soit (x^1, x^2) un système de coordonnées rectilignes obliques dans lequel le point M a pour coordonnées (x_M^1, x_M^2) .

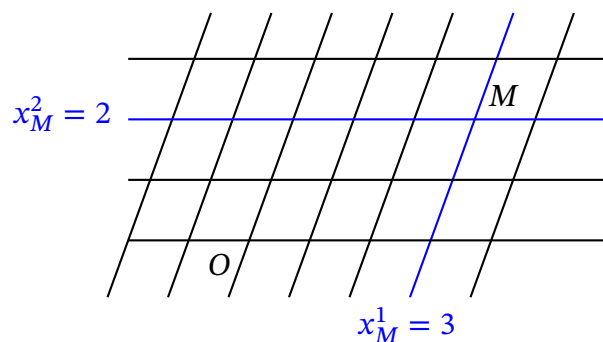


FIG. 3.7 – Système de coordonnées cartésiennes

À ce système de coordonnées nous associons le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ tel que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée et les vecteurs de base pris le long des droites de coordonnées.

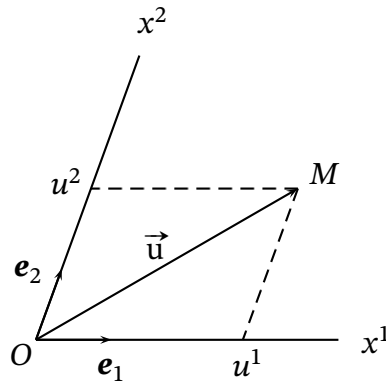


FIG. 3.8 – Composantes contravariantes du vecteur $\vec{u}$

Dans cette base, le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ a pour composantes contravariantes u^1 et u^2 :

$$\vec{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2$$

La base étant normée, $u^1 = x_M^1$ et $u^2 = x_M^2$.

Définition 3.4.3 : Composantes contravariantes

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base d'un espace vectoriel E_n . On appelle *composantes contravariantes* du vecteur $\vec{u}$ dans cette base, les nombres $u^1, u^2, \dots, u^n$ tels que :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \dots + u^n \mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Elles sont représentées au moyen d'indices supérieurs.

Les vecteurs ont une signification absolue indépendante de la base dans laquelle on les exprime, mais les nombres (les composantes) qui les décrivent dépendent de la base utilisée :

$$u^{j'} \mathbf{e}_{j'} = u^i \mathbf{e}_i$$

À partir du changement de base naturelle (3.33) page 112 :

$$u^{j'} \mathbf{e}_{j'} = u^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'}$$

Les composantes contravariantes se transforment par changement de base naturelle selon les relations :

$$\forall j \quad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u^i$$

3.4.4 Composantes covariantes d'un vecteur

Le produit scalaire permet de définir les composantes covariantes. À partir d'un système de coordonnées rectilignes obliques (x^1, x^2) , construisons une base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En projetant le vecteur $\vec{u}$ perpendiculairement aux vecteurs de base, nous obtenons ses composantes covariantes :

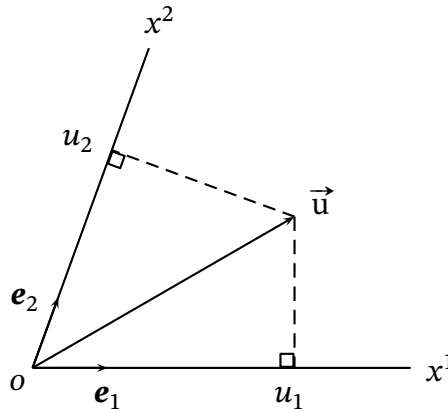


FIG. 3.9 – Composantes covariantes du vecteur $\vec{u}$

Nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= \vec{u} \cdot \mathbf{e}_1 \\ u_2 &= \vec{u} \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Remarque 3.4.4

À chaque axe de coordonnée on associe un vecteur de base tangent normé, sur lequel on définit deux composantes, l'une contravariante, l'autre covariante. La variance, c.-à-d. le fait d'être covariant ou contravariant, ne s'applique qu'aux composantes.

Définition 3.4.4 : Composantes covariantes

Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E_n . On appelle *composantes covariantes* d'un vecteur $\vec{u}$, les n scalaires u_i tels que :

$$\forall i \quad u_i \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u} \cdot \mathbf{e}_i$$

Elles sont représentées au moyen d'indices inférieurs.

Remarque 3.4.5

Lorsqu'un vecteur de base est multiplié par deux, la composante covariante correspondante l'est aussi, d'où son nom.

Bien que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée :

$$\vec{u} \neq u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$$

À partir du changement de base naturelle (3.32) page 112 :

$$\begin{aligned}\forall j \quad u_{j'} &= \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_{j'} \\ &= \overrightarrow{OM} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} (\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{e}_i)\end{aligned}$$

Par changement de base naturelle, les composantes covariantes se transforment selon :

$$\forall j \quad u_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u_i$$

3.5 Applications de la mécanique de Lagrange

3.5.1 Masse sur une trappe

Reprenons l'ex. 2.4.5 page 66 résolu par la mécanique de Newton et par le principe des travaux virtuels. Une masse m est posée sur une trappe qui s'ouvre d'un angle $\theta(t)$ donné en fonction du temps. Quelle est l'équation du mouvement de m ?

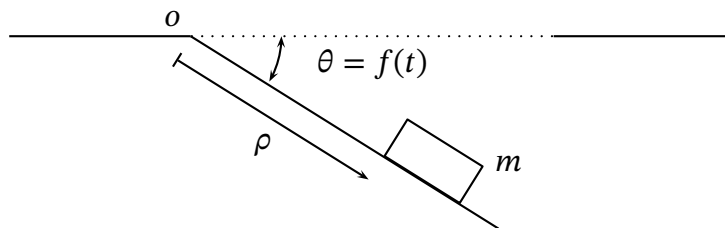


FIG. 3.10 – Masse sur une trappe

Le lagrangien a pour expression :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2}m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2(t)] + mg\rho \sin[\theta(t)]\end{aligned}$$

Le lagrangien est ici une fonction implicite du temps par l'intermédiaire de $\theta(t)$ et de $\dot{\theta}(t)$. Il est en fait une fonction explicite du temps car $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ sont connues. Supposons p. ex. que $\theta(t) = \pi t^2/20$, qui donne une vitesse d'ouverture $\dot{\theta}(t) = \frac{1}{20}\pi \text{rad/s}$. Le lagrangien est maintenant une fonction explicite du temps :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \left(\frac{\pi t}{20} \right)^2 \right] + mg\rho \sin \left(\frac{\pi t^2}{20} \right)$$

$\theta(t)$ n'est pas une coordonnée généralisée car elle est donnée a priori, ρ est la seule inconnue que puisse résoudre l'équation de la dynamique de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\theta}^2(t) + mg \sin[\theta(t)] &= 0 \\ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2(t) - g \sin[\theta(t)] &= 0 \end{aligned}$$

3.5.2 Pendule double, plan

Trouver l'équation du mouvement du pendule double, plan (3.11).

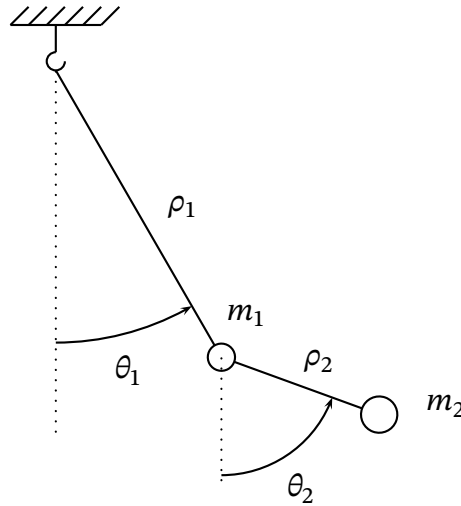


FIG. 3.11 – Pendule double, plan

Cherchons l'expression du lagrangien, donc de l'énergie cinétique et potentielle, en fonction des coordonnées généralisées. Il y a deux coordonnées généralisées, θ_1 et θ_2 , associées aux deux degrés de liberté du système. Cela suggère de passer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1 \sin(\theta_1) \\ y_1 = -\rho_1 \cos(\theta_1) \\ x_2 = \rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2) \\ y_2 = -\rho_1 \cos(\theta_1) - \rho_2 \cos(\theta_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \rho_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \\ \dot{y}_1 = -\rho_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{x}_2 = \rho_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ \dot{y}_2 = \rho_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{cases}$$

Les vitesses au carré des masses m_1 et m_2 s'écrivent en coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \\ v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \end{cases}$$

En coordonnées polaires nous avons :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) \\ &= \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
 v_2^2 &= \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_2) + 2\rho_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \rho_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\
 &\quad + \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2) + 2\rho_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \rho_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \\
 &= \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\rho_1 \dot{\theta}_1 \rho_2 \dot{\theta}_2 [\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)] \\
 &= \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\
 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]
 \end{aligned}$$

On prend le point de suspension du pendule double comme origine des énergies potentielles :

$$\begin{aligned}
 V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\
 &= -m_1 g \rho_1 \cos(\theta_1) - m_2 g [\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)] \\
 &= -(m_1 + m_2) g \rho_1 \cos(\theta_1) - m_2 g \rho_2 \cos(\theta_2)
 \end{aligned}$$

Le lagrangien a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \rho_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\rho_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\
 &\quad + (m_1 + m_2) g \rho_1 \cos(\theta_1) + m_2 g \rho_2 \cos(\theta_2)
 \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) \rho_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \rho_1 \sin(\theta_1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \rho_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g \rho_2 \sin(\theta_2) \end{cases}$$

Les équations de Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \rho_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \rho_1 \rho_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad = -m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \rho_1 \sin(\theta_1) \\ m_2 \rho_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \rho_1 \rho_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad = m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g \rho_2 \sin(\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \rho_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \rho_1 \rho_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -(m_1 + m_2) g \rho_1 \sin(\theta_1) \\ m_2 \rho_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \rho_1 \rho_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \rho_1 \rho_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -m_2 g \rho_2 \sin(\theta_2) \end{cases}$$

3.5.3 Pendule simple plan, dont le point de suspension est libre horizontalement

Une masse m_1 attachée à une tige de longueur ρ oscille dans le plan. La tige est fixée à une masse m_2 libre horizontalement. Quelles sont les équations du mouvement des masses m_1 et m_2 ?

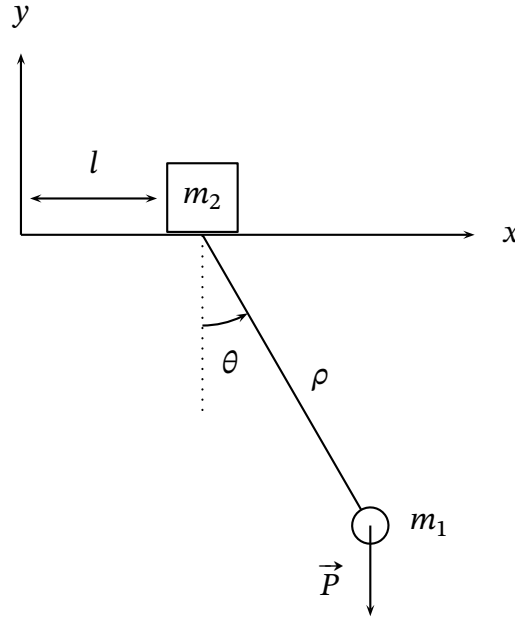


FIG. 3.12 – Pendule simple, plan, dont le point de suspension est libre horizontalement

Le système a deux degrés de liberté et aucune liaison holonome. Il existe donc deux coordonnées généralisées, x et y , ou la distance l et l'angle θ du pendule. Écrivons le changement de coordonnées cartésiennes à polaires :

$$\begin{cases} x = l + \rho \sin(\theta) \\ y = -\rho \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{l} + \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \\ v_y = \rho \dot{\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{l}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 [\dot{l}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + 2\rho \dot{l} \dot{\theta} \cos(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta)] + \frac{1}{2} m_2 \dot{l}^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{l}^2 + \frac{1}{2} m_1 [\rho^2 \dot{\theta}^2 + 2\rho \dot{l} \dot{\theta} \cos(\theta)] \end{aligned}$$

et l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= m_1 g y \\ &= -m_1 g \rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

D'où le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{l}^2 + \frac{1}{2} m_1 [\rho^2 \dot{\theta}^2 + 2\rho \dot{l} \dot{\theta} \cos(\theta)] + m_1 g \rho \cos(\theta)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{l} + m_1 \rho \dot{\theta} \cos(\theta)] = 0 \\ m_1 \frac{d}{dt} [\rho^2 \dot{\theta} + \rho \dot{l} \cos(\theta)] + m_1 \rho \dot{\theta} \sin(\theta) + m_1 g \rho \sin(\theta) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{l} + m_1 \rho \ddot{\theta} \cos(\theta) - m_1 \rho \dot{\theta}^2 \sin(\theta) = 0 \\ \rho^2 \ddot{\theta} + \rho \ddot{l} \cos(\theta) - \rho \dot{l} \dot{\theta} \sin(\theta) + \rho \dot{\theta} \sin(\theta) + \rho g \sin(\theta) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{l} = m_1 \rho [\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - \ddot{\theta} \cos(\theta)] \\ \rho \ddot{\theta} + g \sin(\theta) = -\ddot{l} \cos(\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque

- $\theta = c^{ste}$, c.-à-d. lorsque $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, la 1^{re} équation donne le principe d'inertie $\dot{l} = c^{ste}$
- $l = c^{ste}$, c.-à-d. lorsque $\dot{l} = \ddot{l} = 0$, la 2^e équation devient l'équation du pendule simple, plan.

3.5.4 Pendule simple plan, dont le point de suspension oscille horizontalement

Une masse m attachée à une tige de longueur ρ oscille dans le plan. La tige est fixée à un bloc de masse négligeable, qui oscille horizontalement. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m ?

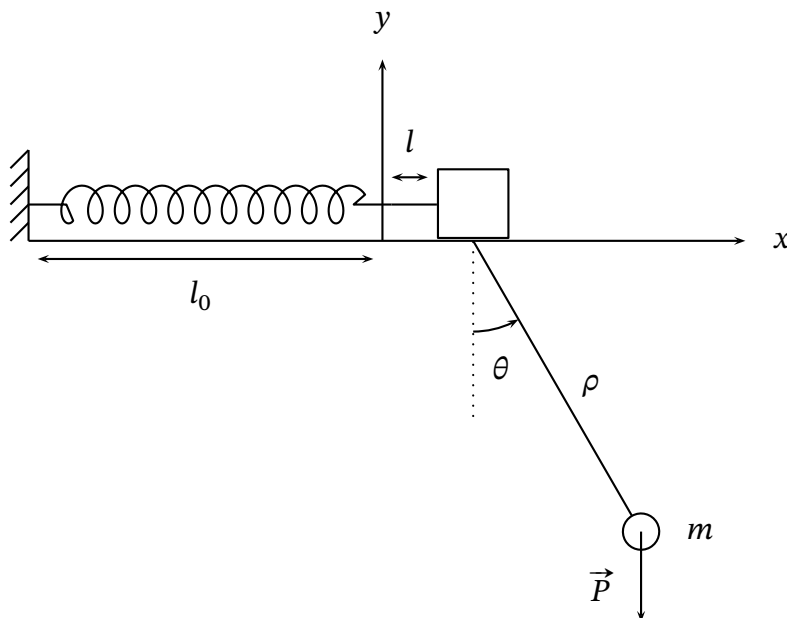


FIG. 3.13 – Pendule simple, plan, dont le point de suspension oscille horizontalement

Le système a deux degrés de liberté et aucune liaison holonome. Il existe donc deux coordonnées généralisées, x et y , ou l'allongement l et l'angle θ du pendule. Écrivons le changement de

coordonnées :

$$\begin{cases} x = l + \rho \sin(\theta) \\ y = -\rho \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{l} + \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \\ v_y = \rho \dot{\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + 2\rho \dot{l} \dot{\theta} \cos(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta)] \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + 2\rho \dot{l} \dot{\theta} \cos(\theta)] \end{aligned}$$

et l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}kl^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}kl^2 - mg\rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

D'où le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{l}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + 2\rho \dot{l} \dot{\theta} \cos(\theta)] - \frac{1}{2}kl^2 + mg\rho \cos(\theta)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{d}{dt} [\dot{l} + \rho \dot{\theta} \cos(\theta)] + kl = 0 \\ m \frac{d}{dt} [\rho^2 \dot{\theta} + \rho \dot{l} \cos(\theta)] + m\rho \dot{l} \sin(\theta) + mg\rho \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m[\ddot{l} + \rho \ddot{\theta} \cos(\theta) - \rho \dot{\theta}^2 \sin(\theta)] + kl = 0 \\ \rho^2 \ddot{\theta} + \rho \ddot{l} \cos(\theta) - \rho \dot{l} \dot{\theta} \sin(\theta) + \rho \dot{l} \dot{\theta} \sin(\theta) + \rho g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{l} + kl = m\rho [\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - \ddot{\theta} \cos(\theta)] \\ \rho \ddot{\theta} + g \sin(\theta) = -\ddot{l} \cos(\theta) \end{cases}$$

Lorsque $\theta = c^{ste}$, c.-à-d. lorsque $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, la première équation devient l'équation de l'oscillateur harmonique.

Lorsque $l = c^{ste}$, c.-à-d. lorsque $\dot{l} = \ddot{l} = 0$, la seconde équation devient l'équation du pendule simple, plan.

3.5.5 Pendule simple, plan, dont le point de suspension se déplace verticalement

Soit une masse m attachée à une tige de longueur ρ constante, oscillant dans le plan (x, y) et dont le point de suspension se déplace verticalement selon la fonction $h(t)$. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m ?

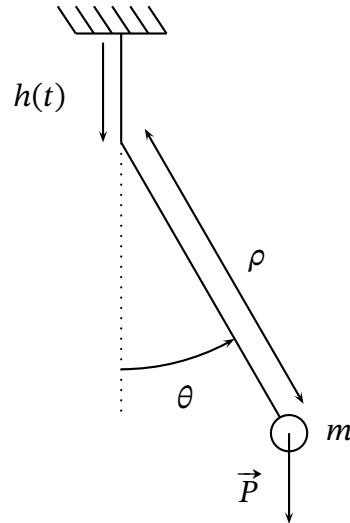


FIG. 3.14 – Pendule simple, plan, dont le point de suspension se déplace verticalement

Le système possède deux dimensions x et y ,

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \\ y = -h(t) - \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

et une liaison holonome rhéonome :

$$\begin{cases} x \cos(\theta) = \rho \sin(\theta) \cos(\theta) \\ y \sin(\theta) = -h(t) \sin(\theta) - \rho \cos(\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y \sin(\theta) &= -h(t) \sin(\theta) - x \cos(\theta) \\ y + x \cot \theta &= -h(t) \end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une seule coordonnée généralisée, θ . Le potentiel a pour expression :

$$V = -mg[h + \rho \cos(\theta)]$$

La vitesse s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} = \rho \dot{\theta} \sin(\theta) - \dot{h} \end{cases}$$

L'énergie cinétique a pour expression :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2}m[\rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) - 2\dot{h}\rho \dot{\theta} \sin(\theta) + \dot{h}^2] \\ &= \frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - m\dot{h}\rho \dot{\theta} \sin(\theta) \end{aligned}$$

Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - m\dot{h}\rho \dot{\theta} \sin(\theta) + mgh + mg\rho \cos(\theta)$$

il dépend explicitement du temps par la fonction $h(t)$. L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} [m\rho^2 \dot{\theta} - m\dot{h}\rho \sin(\theta)] &= -m\dot{h}\rho \dot{\theta} \cos(\theta) - mg\rho \sin(\theta) \\ \rho \ddot{\theta} - \ddot{h} \sin(\theta) - \dot{h} \dot{\theta} \cos(\theta) &= -\dot{h} \dot{\theta} \cos(\theta) - g \sin(\theta) \\ \rho \ddot{\theta} + (g - \ddot{h}) \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

C'est le comportement d'un pendule simple plan dans un champ de gravitation $g - \ddot{h}$. Si momentanément $h(t) = gt^2$ alors $\ddot{h} = g$, le pendule est en chute libre :

$$\begin{aligned}\rho \ddot{\theta} &= 0 \\ \dot{\theta} &= c^{ste}\end{aligned}$$

Sa vitesse angulaire est constante ou nulle autour du point d'encrage. L'équation du mouvement $h(t) = gt^2$ n'est pas tenable longtemps, le point d'encrage doit changer de sens. Si momentanément $h(t) = -gt^2$ alors $\ddot{h} = -g$, le pendule est dans un champ de pesanteur $2g$.

3.5.6 Pendule simple, plan, dont le point de suspension décrit un cercle

Soit une masse m attachée à une tige de longueur ρ constante, oscillant dans le plan (x, y) et dont le point de suspension décrit un cercle de rayon r dans le plan vertical, avec une pulsation ω constante. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m ?

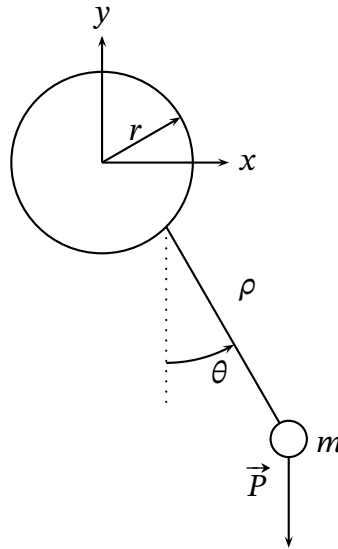


FIG. 3.15 – Pendule simple, plan, dont le point de suspension décrit un cercle

Le système n'a qu'un degré de liberté, θ , car l'angle ωt est imposé au système. Nous avons :

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t) + \rho \sin(\theta) \\ y = r \sin(\omega t) - \rho \cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = -r\omega \sin(\omega t) + \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \\ v_y = r\omega \cos(\omega t) + \rho \dot{\theta} \sin(\theta) \end{cases}$$

L'énergie cinétique a pour expression

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \\
 &= \frac{1}{2}m[r^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + \rho^2\dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) - 2r\omega\rho\dot{\theta} \sin(\omega t) \cos(\theta) \\
 &\quad + r^2\omega^2 \cos^2(\omega t) + \rho^2\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + 2r\omega\rho\dot{\theta} \cos(\omega t) \sin(\theta)] \\
 &= \frac{1}{2}m\{r^2\omega^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + 2r\omega\rho\dot{\theta} [\cos(\omega t) \sin(\theta) - \sin(\omega t) \cos(\theta)]\} \\
 &= \frac{1}{2}m[r^2\omega^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + 2r\omega\rho\dot{\theta} \sin(\theta - \omega t)]
 \end{aligned}$$

et l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 V &= mgy \\
 &= mg[r \sin(\omega t) - \rho \cos(\theta)]
 \end{aligned}$$

D'où le lagrangien :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mr\omega\rho\dot{\theta} \sin(\theta - \omega t) - mgr \sin(\omega t) + mg\rho \cos(\theta) \\
 &= \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mr\omega\rho \left[\frac{d \cos(\theta - \omega t)}{dt} + \omega \sin(\theta - \omega t) \right] + \frac{mgr}{\omega} \frac{d \cos(\omega t)}{dt} + mg\rho \cos(\theta) \\
 &= \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mr\omega^2\rho \sin(\theta - \omega t) + mg\rho \cos(\theta) \\
 &= \frac{1}{2}\rho\dot{\theta}^2 + r\omega^2 \sin(\theta - \omega t) + g \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\
 \frac{d}{dt}(\rho\dot{\theta}) - r\omega^2 \cos(\theta - \omega t) + g \sin(\theta) &= 0 \\
 \rho\ddot{\theta} + g \sin(\theta) - r\omega^2 \cos(\theta - \omega t) &= 0
 \end{aligned}$$

Lorsque la vitesse angulaire ω est nulle, on retrouve l'équation du pendule simple.

Chapitre 4

LA MÉCANIQUE DE HAMILTON

Sommaire

4.1 Transformation de Legendre	125
4.2 Équations de Hamilton	129
4.3 Cas où le hamiltonien se conserve	133
4.4 Hamiltonien et énergie mécanique	134
4.5 Coordonnées cycliques	138
4.6 Théorème de Liouville	138
4.7 Applications de la mécanique de Hamilton	141

4.1 Transformation de Legendre

La transformation de Legendre permet d'exprimer une fonction grâce à l'enveloppe de ses tangentes.

4.1.1 Équation de la tangente en un point d'une courbe

Soit $M(x_M, y_M)$ un point d'une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$. Cherchons l'équation $y = ax + b$ de la droite $\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{C}$ au point M , autrement dit cherchons les paramètres a et b de l'équation $\mathcal{D} : y = ax + b$.

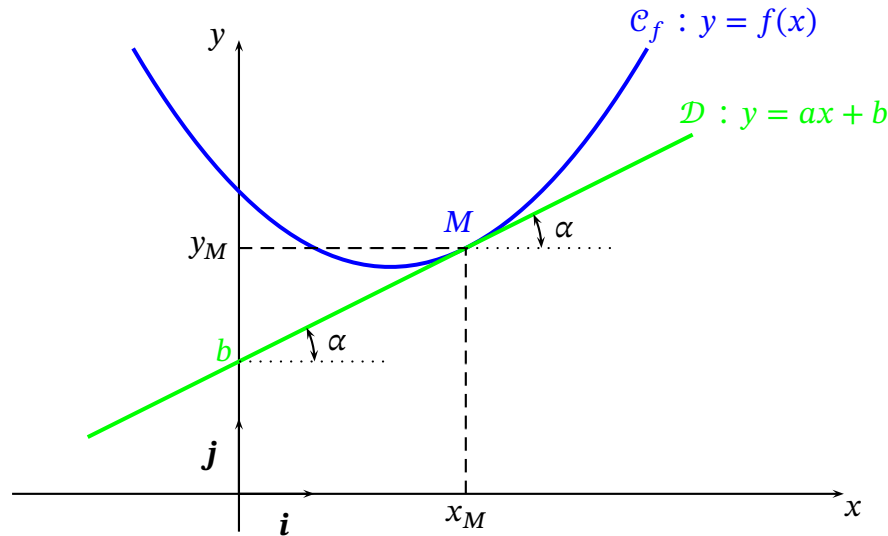


FIG. 4.1 – Tangente à une courbe

Par définition, la dérivée de la fonction f au point M est égale à la tangente de l'angle α que fait la droite $\mathcal{D}$ au point M avec l'horizontale :

$$\begin{aligned} f'(x_M) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \\ &= \tan(\alpha) \end{aligned}$$

Au point $M(x_M, y_M)$ l'équation de la tangente $y_M = a x_M + b$ donne

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_M - b}{x_M} & \text{et} & & b &= y_M - a x_M \\ &= \tan(\alpha) & & & &= f(x_M) - a x_M \\ &= f'(x_M) & & & &= f(x_M) - f'(x_M)x_M \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ayant les deux paramètres a et b , nous pouvons écrire l'équation de la tangente en M :

$$y = f'(x_M)x + f(x_M) - f'(x_M)x_M$$

4.1.2 Équation de l'enveloppe

Cherchons l'équation de toutes les tangentes, c.-à-d. b en fonction de a . Repartons de (4.1) :

$$b(a) = f(x_M) - a x_M$$

Le point M parcourt maintenant toute la courbe $\mathcal{C}$, et x_M devient une variable. La transformée de Legendre de $f(x)$ est donc la fonction $b(a)$ telle que :

$$b(a) = f(x) - a x \quad (4.2)$$

Comme a est la nouvelle variable, il nous reste à exprimer $f(x)$ et x en fonction de a . Pour cela il nous faut l'expression explicite de la fonction f .

Remarque 4.1.1

La nouvelle variable « a » ne doit pas repasser par une même valeur dans la fonction $b(a)$. La fonction de départ $y = f(x)$ ne doit donc pas avoir deux tangentes parallèles (même « a ») dans l'intervalle considéré. Elle doit avoir une concavité de même signe sur l'intervalle, être concave $f''(x) > 0$ ou convexe $f''(x) < 0$.

Exemple 4.1.1

Trouver la transformée de Legendre de $f(x) = x^2$. La nouvelle variable s'écrit,

$$\begin{aligned} a &= f'(x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

soit,

$$x = \frac{a}{2}$$

On exprime $f(x)$ en fonction de a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

La transformée de Legendre de $f(x)$ est alors la fonction $b(a)$ donnée par (4.2) :

$$\begin{aligned} b(a) &= f(x) - a x \\ &= \frac{a^2}{4} - a \times \frac{a}{2} \\ &= -\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

On retiendra que dans toute transformation de Legendre, la nouvelle variable a est la dérivée de la fonction de départ $f(x)$ par rapport à l'ancienne variable x .

4.1.3 Involution de la transformation de Legendre

Si l'on applique deux fois la transformation de Legendre, on retombe sur la fonction de départ. En effet, la transformée de Legendre de la fonction $f(x)$ est donnée par :

$$b(a) = f(x) - a x$$

Si l'on applique de nouveau la transformation de Legendre, la nouvelle variable, notée n , est telle que

$$\begin{aligned} n &= \frac{db(a)}{da} \\ &= \frac{df(x)}{da} - x - a \frac{dx}{da} \end{aligned}$$

et la transformée de Legendre de $b(a)$ est la fonction $g(n)$ telle que :

$$\begin{aligned} g(n) &= b(a) - n a \\ &= f(x) - a x - \left[\frac{df(x)}{da} - x - a \frac{dx}{da} \right] a \\ &= f(x) - \left[\frac{df(x)}{da} - a \frac{dx}{da} \right] a \end{aligned}$$

Avec $a = df(x)/dx$:

$$\begin{aligned} g(n) &= f(x) - \left[\frac{df(x)}{da} - \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{da} \right] a \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en conclue que la transformation de Legendre ne perd ni n'ajoute d'information à la fonction de départ.

Remarque 4.1.2

Nous pouvons choisir de prendre $b(a) = a x - f(x)$ pour transformée de $f(x)$. Le signe est affaire de convention.

Exemple 4.1.2

Poursuivons le premier exemple et cherchons la transformée de Legendre de $b(a) = -a^2/4$. La nouvelle variable n s'écrit,

$$\begin{aligned} n &= b'(a) \\ &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

soit,

$$a = -2n$$

On exprime $b(a)$ en fonction de n :

$$\begin{aligned} b(a) &= -\frac{a^2}{4} \\ &= -n^2 \end{aligned}$$

La transformée de Legendre de $b(a)$ est alors :

$$\begin{aligned} g(n) &= b(a) - n a \\ &= -n^2 + 2n^2 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

On retrouve la propriété d'involution de la transformée de Legendre.

4.2 Équations de Hamilton

4.2.1 Introduction de nouvelles variables indépendantes

Les n équations de Lagrange sont des équations différentielles du 2nd ordre par rapport au temps. N'importe quelle équation différentielle du 2nd ordre peut être remplacée par deux équations différentielles du 1^{er} ordre, en introduisant une nouvelle variable indépendante.

Exemple 4.2.1

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} = 0$$

En posant $v \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}$ nous avons le système de deux équations différentielles à résoudre :

$$\begin{cases} \dot{v} = 0 \\ \dot{x} = v \end{cases}$$

Ces équations différentielles sont résolues indépendamment l'une de l'autre, et les variables v et $\dot{v}$ sont donc traitées comme indépendantes :

$$\begin{cases} v = C_1 \\ \dot{x} = v \end{cases}$$

$$x = C_1 t + C_2$$

Appliquons cette remarque aux équations de Lagrange :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \\ v_j = \dot{q}_j \end{cases}$$

où le lagrangien devient une fonction des nouvelles variables v et des anciennes variables q .

Peut-on simplifier l'écriture des équations de Lagrange ?

Nous avons,

$$\begin{aligned} d \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, v, t)}{\partial v_j} \right] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_k \partial v_j} dv_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_k \partial v_j} dq_k \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial v_j} dt \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, v, t)}{\partial v_j} \right] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_k \partial v_j} \dot{v}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_k \partial v_j} v_k \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial v_j} \end{aligned}$$

Nous obtenons le système d'équations différentielles du 1^{er} ordre par rapport au temps :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_k \partial v_j} \dot{v}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_k \partial v_j} v_k \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial v_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \\ v_j = \dot{q}_j \end{cases}$$

L'introduction des nouvelles variables v_j n'apporte pas de simplification.

4.2.2 Transformée de Legendre des vitesses généralisées

Dans les n équations de Lagrange,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

apparaissent les dérivées partielles du lagrangien par rapport aux vitesses généralisées : $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_j$. Cela suggère d'effectuer la transformation de Legendre du lagrangien pour les vitesses généralisées $\dot{q}$, en posant,

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

qui est la définition 3.4.1 page 109 des impulsions généralisées. Les équations de Lagrange deviennent le système suivant :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \\ p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \end{cases}$$

soit,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} & (4.3a) \\ p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} & (4.3b) \end{cases}$$

La première relation est l'équation de la dynamique. La seconde correspond à la création des nouvelles variables p pour la transformation de Legendre du lagrangien pour les vitesses généralisées. Par rapport aux relations obtenues à la fin du § 4.2.1 précédent, on remarque leur grande simplicité.

Les n équations différentielles (4.3a) sont résolues *indépendamment* des n équations différentielles (4.3b), les variables p et q sont donc traitées comme étant *indépendantes* l'une de l'autre.

4.2.3 Expression du hamiltonien

Il nous reste à effectuer la transformation de Legendre du lagrangien car dans les équations (4.3) de la présente page nous n'utilisons pas les mêmes variables de chaque côté des égalités. Commençons par ne transformer que la première vitesse généralisée $\dot{q}_1$, et notons $\mathcal{H}_1$ la transformée de Legendre du lagrangien :

$$\mathcal{H}_1(q, p_1; \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = p_1 \dot{q}_1 - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

Remarque 4.2.1

Ou bien $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L} - p_1 \dot{q}_1$, le signe de la transformation de Legendre est affaire de convention.

Transformons maintenant la deuxième vitesse généralisée $\dot{q}_2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2(q, p_1, p_2; \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n; t) &= p_2 \dot{q}_2 - \mathcal{H}_1(q, p_1; \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \\ &= p_1 \dot{q}_1 - p_2 \dot{q}_2 - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\end{aligned}$$

En transformant toutes les vitesses généralisées, on pose la définition suivante :

Définition 4.2.1 : Hamiltonien

La fonction des n coordonnées généralisées q , des n impulsions généralisées p , et du temps

$$\mathcal{H}(q, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

est appelée fonction de Hamilton ou *hamiltonien* du système.

Le hamiltonien est la transformation de Legendre du lagrangien pour l'ensemble des vitesses généralisées. Réciproquement, le lagrangien est la transformation de Legendre du hamiltonien pour l'ensemble des impulsions généralisées.

Remarque 4.2.2

Même remarque que pour le lagrangien : le modèle de force de la relation fondamentale de la dynamique, devenu modèle d'énergie potentielle, puis intégré au lagrangien, est maintenant intégré au hamiltonien. Il faudra donc trouver un modèle de hamiltonien adapté au problème à résoudre. La « physique » du problème est donc contenue dans le hamiltonien. De plus, on note que par l'intermédiaire de l'énergie potentielle, le hamiltonien dépend du choix de l'origine des énergies potentielles.

Dans l'exemple qui suit nous allons voir que les $\dot{q}$ sont exprimées en fonction des p en inversant la déf. 3.4.1 page 109 des impulsions généralisées.

Exemple 4.2.2 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse glisse sans frottements sur un plan incliné, quelle est l'expression du hamiltonien ?

Reprenons l'ex. 3.1.1 page 75. Nous avons trouvé le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgq \sin(\alpha)$$

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{q}$. Le moment conjugué de la variable q a pour expression :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \stackrel{\text{def}}{=} p \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad (4.4)$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p \dot{q} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - mgq \sin(\alpha) \\ &= \frac{p^2}{2m} - mgq \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Remarque 4.2.3

Le hamiltonien $\mathcal{H}(q, p, t)$ et l'énergie généralisée $H(q, \dot{q}, t)$ déf. 3.3.1 page 107 ont même valeur, mais elles ne s'expriment pas dans les mêmes variables.

4.2.4 Les équations de Hamilton

Écrivons la différentielle totale exacte du hamiltonien :

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(q, p, t) &= d \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - d\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_{j=1}^n p_j d\dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

En injectant l'équation de la dynamique (4.3a) et la transformation de Legendre du lagrangien (4.3b) page 130,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(q, p, t) &= \sum_{j=1}^n p_j d\dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^n \dot{p}_j dq_j - \sum_{j=1}^n p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt &= \sum_{j=1}^n \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^n \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

nous obtenons les $2n$ équations canoniques de Hamilton :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{cases} \quad (4.6a)$$

$$(4.6b)$$

Ces $2n$ équations différentielles du 1^{er} ordre par rapport au temps sont équivalentes à la relation fondamentale de la dynamique lorsque tous les modèles de force dérivent d'un potentiel. Par involution de la transformation de Legendre, le rôle des p et des $\dot{q}$ est symétrique (au signe près) : remplacer p par $-q$ et q par p redonne les mêmes équations. La première équation reste l'équation de la dynamique. La seconde est la réciproque de (4.3b) page 130, elle correspond à la création des nouvelles variables $\dot{q}$ pour la transformation de Legendre du hamiltonien pour les impulsions généralisées.

Les n équations différentielles (4.6a) sont résolues *indépendamment* des n équations différentielles (4.6b), les variables p et q sont donc traitées comme étant *indépendantes* les unes des autres.

Les n équations différentielles du 2nd ordre de Lagrange sont devenues $2n$ équations différentielles du 1^{er} ordre. On peut noter que les n changements de coordonnées de $\dot{q}_j$ à p_j ne sont pas posés mais sont des équations différentielles qu'il faut résoudre.

Définition 4.2.2 : Variables canoniquement conjuguées

Les variables q_j et p_j sont dites canoniquement conjuguées, ou simplement, *conjuguées*. L'impulsion généralisée p_j est aussi appelée moment conjugué de la coordonnée q_j .

Remarque 4.2.4

L'antisymétrie des équations de Hamilton, elles restent inchangées lorsque l'on remplace q_j par p_j et p_j par $-q_j$, est un exemple de transformation qui sont étudiées au ch. 5 page 145.

Exemple 4.2.3

Poursuivons l'ex. 4.2.2 page 131 et cherchons les équations du mouvement de la masse. Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = mg \sin(\alpha) \\ \dot{q} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

La première équation est l'équation de la dynamique. La seconde est bien équivalente à (4.4) page 131. Nous obtenons deux équations différentielles du 1^{er} ordre.

Remarque 4.2.5

En dérivant $\dot{q}$ par rapport au temps, nous retrouvons l'équation différentielle du 2nd ordre du mouvement :

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \frac{\dot{p}}{m} \\ &= g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

4.3 Cas où le hamiltonien se conserve

(4.3a) page 130 et (4.6a) page ci-contre, ainsi que la comparaison des derniers termes de (4.5) page précédente, donnent les deux relations suivantes entre hamiltonien et lagrangien :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right)_{p_j, t} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)_{\dot{q}_j, t} \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{q_j, p_j} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{q_j, \dot{q}_j} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (4.7a) \\ (4.7b) \end{array}$$

Dérivons le hamiltonien par rapport au temps et utilisons les équations de Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n -\dot{p}_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}} \quad (4.8)$$

Si le hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, alors il est constant, $d\mathcal{H}/dt = 0$. Il se conserve dans le temps.

Avec (4.7b) page précédente :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \quad (4.9)$$

De même, si le lagrangien n'est pas une fonction explicite du temps, alors le hamiltonien est constant, et réciproquement.

4.4 Hamiltonien et énergie mécanique

Cherchons les conditions pour avoir $\mathcal{H} = E$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} &= T + V \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V) &= T + V \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} \dot{q}_j &= 2T \end{aligned}$$

Si le potentiel $V(q, t)$ n'est pas une fonction explicite des vitesses généralisées :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad (4.10)$$

Cette relation est appelée *identité d'Euler*. D'après le théorème d'Euler, elle est vérifiée ssi l'énergie cinétique est une fonction homogène de degré deux des vitesses généralisées.

Définition 4.4.1 : Fonction homogène de degré n

Une fonction d'une ou plusieurs variables est homogène de degré n où $n \in \mathbb{Z}$, si en multipliant les variables par un même scalaire non nul λ , la fonction est multipliée par ce scalaire puissance n :

$$\forall \lambda \neq 0, \quad T(\lambda\dot{q}_1, \dots, \lambda\dot{q}_n) = \lambda^n T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (4.11)$$

- l'homogénéité de degré deux de la fonction T implique l'identité d'Euler :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \neq 0, \quad T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) &= \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \\ \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_1)} d(\lambda \dot{q}_1) + \dots + \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_n)} d(\lambda \dot{q}_n) &= d(\lambda^2 T) \\ \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_1)} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_n)} \dot{q}_n &= \frac{d(\lambda^2 T)}{d\lambda} \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_j)} \dot{q}_j &= 2\lambda T \\ \lambda = 1, \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j &= 2T \end{aligned}$$

- l'identité d'Euler implique l'homogénéité de degré deux de la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n &= 2T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \\ \frac{\partial T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\partial(\lambda \dot{q}_1)} (\lambda \dot{q}_1) + \dots + \frac{\partial T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\partial(\lambda \dot{q}_n)} (\lambda \dot{q}_n) &= 2T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) \\ \frac{\partial T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n &= 2T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \forall \lambda \neq 0, \quad g(\lambda) &= \frac{T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\lambda^2} \\ \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_1)} \frac{d(\lambda \dot{q}_1)}{d\lambda} + \dots + \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_n)} \frac{d(\lambda \dot{q}_n)}{d\lambda} \right] \lambda^2 - T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) 2\lambda}{\lambda^4} \\ &= \frac{\left[\frac{\partial T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \right] \lambda - 2T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) \lambda}{\lambda^4} \\ &= 0 \\ g(\lambda) &= c^{ste} \\ &= g(1) \\ &= T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n)$$

Ainsi, nous cherchons les conditions sur l'énergie cinétique qui impliquent (4.11), qui à son tour implique (4.10), et à son tour $\mathcal{H} = E$. L'énergie cinétique a pour expression :

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

S'il existe une liaison rhéonome (voir les applications 3.5.1 page 116 et 3.5.5 page 121), ou pour

un référentiel en mouvement, le vecteur position dépend explicitement du temps :

$$\begin{aligned}\forall i = 1, \dots, N \quad \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t) \\ d\vec{r}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\end{aligned}$$

L'énergie cinétique s'écrit alors

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= T_0 + T_1 + T_2\end{aligned}$$

où T_0 est indépendante des vitesses généralisées, T_1 est une fonction linéaire des vitesses généralisées et T_2 est une fonction quadratique des vitesses généralisées. T n'est donc pas une fonction homogène quadratique des vitesses généralisées : $T(\lambda \dot{q}) \neq \lambda^2 T(\dot{q})$. S'il n'y a pas de contraintes rhéonomes, le vecteur position ne contient pas explicitement le temps,

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$$

et l'énergie cinétique a pour expression :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$a_{jk}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

L'énergie cinétique est alors une fonction homogène quadratique des vitesses généralisées :

$$\begin{aligned}T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \lambda \dot{q}_j \lambda \dot{q}_k \\ &= \lambda^2 \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)\end{aligned}$$

Si le système est holonome scléronome et si le potentiel $V(q, t)$ ne dépend pas explicitement des vitesses généralisées, alors le hamiltonien se confond avec l'énergie mécanique :

$$\boxed{\mathcal{H} = E} \quad (4.12)$$

(4.9) page 134 donne alors :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} [T - V(q, t)] \\ &= \frac{\partial V(q, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Si de plus le potentiel ne dépend pas explicitement du temps $\partial_t V(q) = 0$, alors l'énergie mécanique se conserve dans le temps et le système est dit conservatif :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = E = c^{ste}$$

Si $V(q, t)$ dépend explicitement du temps alors le système est non conservatif :

$$\mathcal{H} = E \neq c^{ste}$$

Dans le cas où le système est rhéonome, nous pouvons avoir $\mathcal{H}$ constant, différent de l'énergie mécanique E .

Exemple 4.4.1 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

D'après l'ex. 4.2.2 page 131 le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - mgq \sin(\alpha)$$

Le hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, d'après (4.8) page 133 il se conserve. Le potentiel n'est pas fonction des vitesses généralisées et les contraintes sont holonomes scléronomes, par conséquent $\mathcal{H} = E$.

Lorsque $\mathcal{H} = E$ l'équivalence avec les équations de Newton est presque immédiate. En coordonnées rectangulaires, le premier groupe d'équations de Hamilton donne

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

qui sont les équations de la dynamique de Newton pour des forces conservatives. Le second groupe d'équations donne la définition de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \\ \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} \\ \dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial p_x} \\ \dot{y} = \frac{\partial T}{\partial p_y} \\ \dot{z} = \frac{\partial T}{\partial p_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2m} \frac{\partial p_x^2}{\partial p_x} \\ \dot{y} = \frac{1}{2m} \frac{\partial p_y^2}{\partial p_y} \\ \dot{z} = \frac{1}{2m} \frac{\partial p_z^2}{\partial p_z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{x} = p_x \\ m\dot{y} = p_y \\ m\dot{z} = p_z \end{cases}$$

4.5 Coordonnées cycliques

La relation de passage (4.7a) page 133,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}\right)_{p_j,t} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)_{\dot{q}_j,t}$$

montre que si une coordonnée est cyclique (d'après la déf. 3.3.2 page 108 elle n'apparaît pas dans le lagrangien) alors elle n'apparaît pas non plus dans le hamiltonien.

Supposons que q_n soit une coordonnée cyclique. Le lagrangien reste fonction de $\dot{q}_n$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

L'équation de Lagrange (4.3a) page 130 donne :

$$\dot{p}_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_n = c^{ste} = p_n(t=0) = \alpha \quad (4.13)$$

où la constante α est la valeur initiale de p_n . Le moment conjugué de toute coordonnée cyclique est une intégrale première du mouvement. La résolution complète du problème passe par la mécanique de Hamilton car elle utilise les moments conjugués p . Le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, \alpha, t)$$

Le problème ne fait plus intervenir maintenant que $2n - 2$ coordonnées et le temps. En intégrant l'équation de Hamilton (4.6b) page 132

$$\dot{q}_n = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \right|_{p_n=\alpha}$$

nous obtenons le comportement de la coordonnée cyclique.

4.6 Théorème de Liouville

Soient $(q_1, \dots, q_n)$ un ensemble de paramètres définissant la configuration spatiale d'un système dynamique $\mathcal{S}$. Ces paramètres peuvent être vus comme les coordonnées généralisées d'un point représentant la configuration spatiale de $\mathcal{S}$. Les n coordonnées généralisées sont reportées sur un système d'axes rectilignes orthogonaux et forment ainsi un espace euclidien à n dimensions, appelé *espace de configuration* de $\mathcal{S}$. Tous les points de l'espace de configuration de $\mathcal{S}$ ne sont en général pas accessibles par $\mathcal{S}$.

Le mouvement d'un point matériel unique est un problème à trois dimensions, dont l'espace de configuration est par conséquent aussi à trois dimensions. Le mouvement de deux points matériels

est équivalent au mouvement d'un point matériel unique dans un hyperspace de configuration à six dimensions. Plus généralement, un problème à N points matériels est équivalent à un problème à un point matériel unique dans un hyperspace de configuration à $3N$ dimensions.

L'espace des phases est un espace euclidien à $2n$ dimensions, dont les q et les p sont les coordonnées. Le sous-espace des q est l'espace de configuration, le sous-espace des p est appelé *espace des moments*. À chaque instant, l'état d'un système dynamique est représenté par un unique point ayant $2n$ coordonnées dans l'espace des phases.

À tout ensemble de conditions initiales $[q_0, p_0]$, les équations de Hamilton donnent une solution unique (à un départ, une seule arrivée) sous la forme de $2n$ équations paramétriques :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} q_j = q_j [q_0, p_0, t] \\ p_j = p_j [q_0, p_0, t] \end{cases}$$

Ces équations étant réversibles dans le temps, à toute solution correspond un ensemble unique de conditions initiales (à toute arrivée, un seul départ).

Le point représentatif du système décrit donc au cours du temps une courbe unique, appelée trajectoire de phase, donnée par les fonctions $q_1(t), \dots, q_n(t)$ et $p_1(t), \dots, p_n(t)$. Par exemple, pour le pendule simple plan, nous avons directement l'équation en coordonnées rectangulaires à partir de la conservation de l'énergie donnée par (11.4) page 293 :

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} - mg\rho \cos(\theta)$$

$$p_\theta = \pm \sqrt{2m\rho^2 [\mathcal{H} + mg\rho \cos(\theta)]}$$

L'unicité de solution des équations de Hamilton implique que deux trajectoires de l'espace des phases ne peuvent se croiser. Si c'était le cas, à deux ensembles de conditions initiales différentes correspondrait un même état au point où elles se croisent. Par conséquent, le nombre d'états dynamiques initial se conserve. De même, une trajectoire ne peut se couper car on aurait un mouvement perpétuel, le point de coupure servant de conditions initiales.

Les conditions initiales d'un système dynamique ne sont pas connues avec une précision infinie. On considère donc un hypervolume V de l'espace des phases, assez grand pour que la probabilité d'y trouver le système à l'instant initial soit proche de un. Cet hypervolume se déplace et se déforme au cours du temps. Prenons un élément d'hypervolume dV de cet hypervolume, et étudions comment varie la densité d'états ρ dans cet élément d'hypervolume. Considérons la projection de dV dans le plan de la coordonnée q_k et de l'impulsion conjuguée p_k :

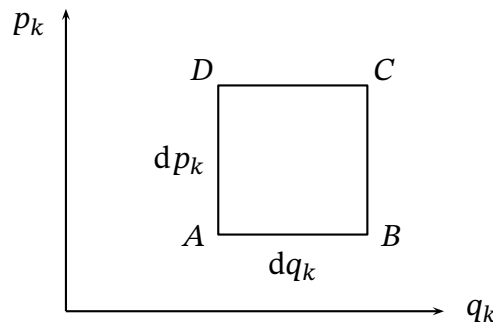


FIG. 4.2 – Projection de l'hypervolume élémentaire dans le plan q_k, p_k

Nombre d'états entrants par AD en un temps dt :

$$\rho \dot{q}_k dt dp_k$$

Pour des raisons de lisibilité, nous n'indiquerons plus les indices k dans ce qui suit, mais à la fin de la démonstration nous sommerons sur tous les k . Nombre d'états sortants par BC en un temps dt :

$$(\rho + \delta_q \rho)(\dot{q} + \delta_q \dot{q}) dt dp = (\rho \dot{q} + \delta_q \rho \dot{q} + \rho \delta_q \dot{q} + \delta_q \rho \delta_q \dot{q}) dt dp$$

où $\delta_q \rho$ est la variation de densité ρ selon la coordonnée q , c.-à-d.,

$$\delta_q \rho = \frac{\partial \rho}{\partial q} dq$$

En négligeant les éléments différentiels d'ordre deux devant ceux d'ordre un,

$$(\rho + \delta_q \rho)(\dot{q} + \delta_q \dot{q}) dt dp = \left(\rho \dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial q} dq \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} dq \right) dt dp$$

La différence entre ce qui entre et ce qui sort de l'élément de volume par les faces AD et BC en un temps dt vaut donc :

$$- \left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right) dt dp dq$$

De même, la différence entre ce qui entre et ce qui sort de l'élément de volume par les faces AB et DC en un temps dt vaut :

$$- \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) dt dq dp$$

Puisqu'il n'y a ni création, ni annihilation d'états, la différence entre ce qui entre et ce qui sort crée une variation locale du nombre d'états en un temps dt dans le volume considéré :

$$\begin{aligned} \delta_t \rho dq dp &= - \left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) dt dq dp \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} dt &= - \left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) dt \end{aligned}$$

ce qui donne, en remettant les indices,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} dp_k = -\rho \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) dt$$

et en considérant l'élément d'hypervolume :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} dp_j \right) &= -\rho \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) dt \\ d\rho &= -\rho \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) dt \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) \end{aligned}$$

Quel que soit le hamiltonien, les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_j} \\ \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_j} \end{cases}$$

Les dérivées partielles étant continues :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_j} \Rightarrow \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j}$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 4.6.1 : Théorème de Liouville

Pour tout système dynamique qui suit les équations canoniques, quel que soit le hamiltonien, la densité d'états se conserve au cours du mouvement :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \rho = c^{ste}$$

4.7 Applications de la mécanique de Hamilton

4.7.1 Masse sur une trappe

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{\rho}$. Le moment conjugué p de la coordonnée généralisée ρ a pour expression :

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p}{m}$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p\dot{\rho} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p^2}{m} - \left[\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2(t) + mg\rho \sin[\theta(t)] \right] \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2(t) - mg\rho \sin[\theta(t)] \end{aligned}$$

Le hamiltonien est une fonction explicite du temps (remplacer $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ par leurs expressions). Il ne se conserve pas car ces deux fonctions peuvent prendre n'importe quelle valeur au cours du temps. En particulier le moteur qui actionne la trappe peut fournir de l'énergie au système en

la refermant. Les équations de Hamilton donnent les équations du mouvement du 1^{er} ordre par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} \\ \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = m\rho\dot{\theta}^2(t) + mg \sin[\theta(t)] \\ \dot{\rho} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

L'énergie mécanique a pour expression :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2(t)] - mg\rho \sin[\theta(t)] \end{aligned}$$

L'énergie mécanique ne se conserve pas car la liaison rhéonome $\theta(t)$ et sa dérivée $\dot{\theta}(t)$ prennent n'importe quelle valeur en fonction du temps.

Le vecteur position de la masse m a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \mathbf{e}_\rho \\ &= \rho \cos[\theta(t)]\vec{i} - \rho \sin[\theta(t)]\vec{j} \end{aligned}$$

C'est une fonction explicite du temps (remplacer $\theta(t)$), c'est pourquoi le hamiltonien et l'énergie mécanique ne sont pas confondus :

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2(t) - mg\rho \sin[\theta(t)] \\ &= \mathcal{H} + m\rho^2\dot{\theta}^2(t) \end{aligned}$$

4.7.2 Pendule simple, plan, dont le point de suspension se déplace verticalement

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{\theta}$. Le moment conjugué de la coordonnée généralisée θ a pour expression :

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} - m\dot{h}\rho \sin(\theta) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p}{m\rho^2} + \frac{\dot{h} \sin(\theta)}{\rho}$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p\dot{\theta} - \mathcal{L} \\ &= m\rho^2\dot{\theta}^2 - m\dot{h}\rho\dot{\theta} \sin(\theta) - \left[\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - m\dot{h}\rho\dot{\theta} \sin(\theta) + mgh + mg\rho \cos(\theta) \right] \\ &= \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - mgh - mg\rho \cos(\theta) \\ &= \frac{p^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 \sin^2(\theta) + \frac{p\dot{h} \sin(\theta)}{\rho} - \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - mgh - mg\rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

Le hamiltonien est une fonction explicite du temps par l'intermédiaire de $h(t)$ et de $\dot{h}(t)$, il ne se conserve pas.

Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -m\dot{h}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{p\dot{h} \cos(\theta)}{\rho} - mg\rho \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{p}{m\rho^2} + \frac{\dot{h} \sin(\theta)}{\rho} \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -m\dot{h}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{\dot{h} \cos(\theta)}{\rho} [m\rho^2 \dot{\theta} - m\dot{h}\rho \sin(\theta)] - mg\rho \sin(\theta) \\ \ddot{\theta} = \frac{\dot{p}}{m\rho^2} + \frac{\ddot{h} \sin(\theta)}{\rho} + \frac{\dot{h}\dot{\theta} \cos(\theta)}{\rho} \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -m\rho\dot{h}\dot{\theta} \cos(\theta) - mg\rho \sin(\theta) \\ \ddot{\theta} = -\frac{\dot{h}\dot{\theta} \cos(\theta)}{\rho} - \frac{g \sin(\theta)}{\rho} + \frac{\ddot{h} \sin(\theta)}{\rho} + \frac{\dot{h}\dot{\theta} \cos(\theta)}{\rho} \end{cases} \\
 \rho\ddot{\theta} + (g - \ddot{h}) \sin(\theta) = 0
 \end{aligned}$$

L'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\
 &= \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - m\dot{h}\rho\dot{\theta} \sin(\theta) - mgh - mg\rho \cos(\theta) \\
 &= \mathcal{H} + m\dot{h}^2 - m\dot{h}\rho\dot{\theta} \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est une fonction explicite du temps par l'intermédiaire de $\dot{h}(t)$, elle ne se conserve pas. Du fait de la liaison rhéonome, le hamiltonien et l'énergie mécanique ne sont pas confondus.

Chapitre 5

LES TRANSFORMATIONS CANONIQUES

Sommaire

5.1 Transformations de coordonnées	145
5.2 Fonctions génératrices d'une transformation	147
5.3 Transformations canoniques infinitésimales	164
5.4 Transformations invariantes	168

Dans ce chapitre sur les transformations canoniques nous ne considérerons que les systèmes holonomes (Cf. § 1.7.3 page 19).

5.1 Transformations de coordonnées

Partons d'un exemple.

Exemple 5.1.1

Un mobile se déplaçant dans le plan a $n = 2$ degrés de liberté. La description de son mouvement nécessite donc 2 coordonnées généralisées, p. ex. :

- les coordonnées rectangulaires x, y notées q_1, q_2
- les coordonnées polaires ρ, θ notées Q_1, Q_2

Il correspond la transformation de coordonnées, ou changement de variables, des anciennes variables q_1, q_2 vers les nouvelles $Q_1(q_1, q_2), Q_2(q_1, q_2)$:

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \\ Q_2 = \arctan\left(\frac{q_1}{q_2}\right) \end{cases}$$

Réciproquement, des anciennes variables Q_1, Q_2 vers les nouvelles $q_1(Q_1, Q_2), q_2(Q_1, Q_2)$:

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 \cos(Q_2) \\ q_2 = Q_1 \sin(Q_2) \end{cases}$$

Soient T, V, L respectivement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le nouveau lagrangien exprimés dans les nouvelles coordonnées. À chaque instant t nous avons :

$$T - V = T - V$$

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t)$$

Dans le cas d'un mouvement à force centrale, à chaque instant

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{\rho}$$

où $k > 0$ pour une force dirigée vers le centre. Nous voyons que θ est une coordonnée cyclique alors que ni x ni y n'est cyclique. Le nombre de coordonnées cycliques dépend donc du choix des coordonnées généralisées.

De façon générale, les lagrangiens nouveau et ancien sont égaux à chaque instant lorsque la transformation de jauge ne dépend pas explicitement du temps (Cf. § 3.2.6 page 98) :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = L(Q, \dot{Q}, t)$$

5.1.1 Cas de la mécanique de Lagrange

L'exemple précédent montre que les nouvelles variables Q sont des fonctions des anciennes variables q , et éventuellement du temps. En mécanique de Lagrange, tous les changements de variables réversibles sont possibles.

Définition 5.1.1 : Transformations ponctuelles de l'espace des configurations

Les changements de coordonnées généralisées

$$\forall j = 1, \dots, n \quad Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, t)$$

sont appelés des *transformations ponctuelles de l'espace des configurations* (q).

Ce changement de coordonnées généralisées implique celui sur les vitesses généralisées :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \dot{Q}_j = \dot{Q}_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

Nous avons vu au § 3.2.8 page 102 que les équations de Lagrange sont covariantes par transformation des n coordonnées généralisées (elles s'écrivent sous la même forme fonctionnelle). Après un changement de variables, le lagrangien dit *transformé* s'écrit :

$$L(Q, \dot{Q}, t)$$

5.1.2 Cas de la mécanique de Hamilton

En mécanique de Hamilton nous pouvons envisager une classe plus large de transformations. En effet celles-ci peuvent s'appliquer sur l'ensemble des $2n$ coordonnées de l'espace des phases :

Définition 5.1.2 : Transformations ponctuelles de l'espace des phases

Les changements de coordonnées généralisées et d'impulsions généralisées

$$\forall j = 1, \dots, n \quad Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \quad \text{et} \quad P_j = P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

sont appelés des *transformations ponctuelles de l'espace des phases* (q, p) .

Toutes les transformations ponctuelles de l'espace des phases ne sont pas valables, en effet les anciennes variables q et p sont canoniquement conjuguées (déf. 4.2.2 page 132). Les nouvelles variables doivent également être conjuguées, elles doivent satisfaire les équations de Hamilton pour le hamiltonien transformé, qui s'écrit :

$$H(Q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - L(Q, \dot{Q}, t)$$

Définition 5.1.3 : Transformations canoniques

On appelle *transformation canonique* une transformation ponctuelle de l'espace des phases qui préserve la forme fonctionnelle des équations de Hamilton (4.6) page 132.

5.2 Fonctions génératrices d'une transformation

5.2.1 Fonctions génératrices de type 1

Considérons un système à deux degrés de liberté, de coordonnées généralisées q_1, q_2 , et de lagrangien $\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)$. Soient les quatre équations (inversibles) de transformation de variables suivantes :

$$\begin{cases} Q_1 = Q_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \\ Q_2 = Q_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_1 = P_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \\ P_2 = P_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Le lagrangien transformé s'écrit $L(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, t)$. D'après (3.26) page 98 les lagrangiens sont invariants de jauge.

Remarque 5.2.1

D'après le § 3.2.3 page 96 ils sont également invariants d'échelle, mais on ne considérera pas les changements d'échelle.

Les lagrangiens

$$\mathcal{L}'(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) + \frac{df(q_1, q_2, t)}{dt}$$

et

$$L'(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, t) = L(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, t) + \frac{dg(Q_1, Q_2, t)}{dt}$$

sont équivalents pour décrire l'évolution d'un système. D'après l'ex. (5.1.1) page 145, les lagrangiens $\mathcal{L}$ et L sont égaux à chaque instant. Nous avons alors :

$$\mathcal{L}'(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) - L'(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, t) = \frac{dF_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2, t)}{dt} \quad (5.2)$$

Remarque 5.2.2

Pour un système à n degrés de liberté, nous avons $2n$ anciennes variables q et p , $2n$ nouvelles variables Q et P , et le temps, soit $4n + 1$ variables. Comme nous avons également $2n$ équations de transformations, seules $2n + 1$ variables sont indépendantes. Les fonctions F auront donc toujours au plus $2n + 1$ variables indépendantes. Elles doivent contenir à la fois des anciennes et des nouvelles variables pour que l'on puisse effectuer le changement de variables.

Remarque 5.2.3

F_1 est fonction des anciennes variables q et des nouvelles variables Q , elle permet de passer de l'ancien lagrangien $\mathcal{L}$ au nouveau lagrangien L . Nous allons voir que le rôle de cette fonction est équivalent à un changement de coordonnées.

On omet les primes sur les lagrangiens. (4.3b) page 130 montre que la transformation du lagrangien implique celle des impulsions généralisées, et d'après la déf. 4.2.1 page 131 du hamiltonien, on a :

$$\begin{aligned} [(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2) - \mathcal{H}] - [(P_1\dot{Q}_1 + P_2\dot{Q}_2) - H] &= \frac{dF_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2, t)}{dt} \\ p_1dq_1 + p_2dq_2 - P_1dQ_1 - P_2dQ_2 + (H - \mathcal{H})dt &= dF_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2, t) \end{aligned}$$

Pour un système à n degrés de liberté :

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + (H - \mathcal{H})dt = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (5.3)$$

Remarque 5.2.4

Les coefficients devant les éléments différentiels sont égaux ssi on peut faire varier les q_i , les Q_j et le temps indépendamment, c.-à-d. ssi les variables q_i , Q_j et t sont indépendantes. Le temps étant indépendant (il n'est pas transformé dans une transformation ponctuelle de l'espace des phases), le déterminant suivant doit donc être non nul :

$$\left| \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \right| \neq 0$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i & (5.4a) \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i & (5.4b) \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} = H - \mathcal{H} & (5.4c) \end{cases}$$

La relation (5.4c) montre que le hamiltonien n'est pas modifié par la transformation si la fonction génératrice ne dépend pas explicitement du temps. La condition (5.3) (chaque membre de l'égalité est une différentielle totale exacte) est suffisante pour que la transformation soit canonique. Nous pouvons simplifier cette condition car une transformation est canonique indépendamment du système considéré, en particulier indépendamment du hamiltonien de départ. Une transformation canonique s'applique à tout système ayant le bon nombre de degrés de liberté. De plus le temps n'est pas transformé par une transformation canonique. La condition (5.3) devient la condition suffisante :

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \quad (5.5)$$

Les conditions de Schwarz pour que dF_1 soit une différentielle totale exacte s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$$

Exemple 5.2.1

Soit la fonction suivante appelée *transformation d'échange* :

$$F_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = q_1 Q_1 + q_2 Q_2$$

dF_1 est bien une différentielle totale exacte, la transformation est canonique :

$$dF_1(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = q_1 dQ_1 + Q_1 dq_1 + q_2 dQ_2 + Q_2 dq_2$$

Avec (5.4a), (5.4b) et (5.4c) :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = Q_2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} = q_1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} = q_2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = Q_1 \\ p_2 = Q_2 \\ -P_1 = q_1 \\ -P_2 = q_2 \\ H = \mathcal{H} \end{cases}$$

À partir d'une fonction du type $F_1(q, Q)$, nous obtenons la transformation des coordonnées grâce aux équations aux dérivées partielles (5.4a) et (5.4b) : F_1 est *génératrice* de la transformation canonique des coordonnées.

La transformation considérée est appelée transformation d'échange. Cet exemple montre que l'on peut échanger la coordonnée généralisée q_1 avec son moment conjugué p_1 , les équations de Hamilton étant invariantes sous la transformation $p_j \rightarrow Q_j$ et $q_j \rightarrow -P_j$. La distinction entre les variables q_j et p_j n'est plus qu'une question de nomenclature, c'est pourquoi en mécanique de Hamilton on les appelle simplement variables conjuguées, sans préciser lesquelles sont des coordonnées ou des impulsions.

Pour appliquer cette transformation aux n coordonnées, on prend la fonction génératrice

$$F_1(q, Q) = \sum_{i=1}^n q_i Q_i$$

et on obtient :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} Q_j = p_j \\ P_j = -q_j \\ H = \mathcal{H} \end{cases}$$

Réciproquement, étant donnée une transformation de coordonnées du type (5.1) page 147, l'intégration des équations aux dérivées partielles (5.4a) et (5.4b) donne la fonction génératrice.

Exemple 5.2.2

Soit la transformation de coordonnées :

$$Q_i = p_i \quad \text{et} \quad P_i = -q_i$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = Q_2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} = q_1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} = q_2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = Q_1 q_1 + \dots \\ F_1 = Q_2 q_2 + \dots \\ F_1 = q_1 Q_1 + \dots \\ F_1 = q_2 Q_2 + \dots \\ H = \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow F_1 = q_1 Q_1 + q_2 Q_2$$

Les fonctions génératrices qui sont fonction uniquement des coordonnées (anciennes et nouvelles) sont dites de type $F_1(q, Q, t)$, l'indice 1 servant à les distinguer des fonctions génératrices $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$, et $F_4(p, P, t)$ que nous allons voir après quelques exemples.

Exemple 5.2.3 : L'oscillateur harmonique

(Cf. ex. 6.7.3 page 183)

La fonction génératrice

$$F_1(q_1, Q_1) = \frac{1}{2} m \omega q_1^2 \cot(Q_1)$$

génère la transformation canonique suivante :

$$\begin{cases} m \omega q_1 \cot(Q_1) = p_1 \\ \frac{m \omega q_1^2}{2 \sin^2(Q_1)} = P_1 \\ 0 = H - \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \sqrt{\frac{2P_1}{m\omega}} \sin(Q_1) \\ p_1 = \sqrt{2m\omega P_1} \cos(Q_1) \\ H = \mathcal{H} \end{cases}$$

F_1 est appelée fonction génératrice de l'oscillateur harmonique simple à une dimension.

Exemple 5.2.4 : Accélération constante d'un mobile

L'équation du mouvement et la vitesse d'un mobile de masse m ayant une accélération

linéaire constante a selon l'axe des x s'écrit :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, \quad v(t) = at + v_0$$

En posant $p \stackrel{\text{def}}{=} mv$ la quantité de mouvement :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + \frac{p_0}{m}t + x_0, \quad p(t) = mat + p_0$$

1. Montrons que la transformation des coordonnées initiales x_0, p_0 aux coordonnées finales (et nouvelles) x, p est canonique en trouvant la fonction $F_1(x_0, x, t)$ génératrice de cette transformation.

Pour une transformation de type 1 les variables indépendantes q et Q sont ici x_0 et x , et les variables dépendantes p_0 et p sont données en fonction de x_0 et x par :

$$p_0 = \frac{m}{t}(x - x_0) - \frac{1}{2}mat \quad \text{et} \quad p = \frac{m}{t}(x - x_0) + mat$$

Écrivons la condition suffisante (5.5) page 149 pour avoir transformation canonique :

$$p_0 dx_0 - p dx = \left[\frac{m}{t}(x - x_0) - \frac{1}{2}mat \right] dx_0 - \left[\frac{m}{t}(x - x_0) + \frac{1}{2}mat \right] dx$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} = \frac{m}{t}(x - x_0) - \frac{1}{2}mat \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{m}{t}(x - x_0) - \frac{1}{2}mat \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 = -\frac{m}{2t}(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}matx_0 + f(x) + g(t) \\ F_1 = -\frac{m}{2t}(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}matx + f'(x_0) + g(t) \end{cases}$$

$$F_1(x_0, x, t) = -\frac{m}{2t}(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}mat(x_0 + x) + g(t)$$

où $g(t)$ est une fonction arbitraire du temps. Cet exemple montre qu'une fonction génératrice permet de faire évoluer le système des coordonnées initiales x_0, p_0 aux coordonnées finales x, p . Au § 5.3 page 164 nous chercherons la transformation infinitésimale qui fait évoluer le système entre l'instant t et l'instant dt . La succession de ces transformations infinitésimales fera évoluer le système entre deux instants quelconques.

2. Cherchons la fonction génératrice $F_1(x, x_0, t)$ des coordonnées finales x, p aux coordonnées initiales (et nouvelles) x_0, p_0 .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$x_0 = x(t) - \frac{1}{2}at^2 - v_0t, \quad v_0 = v(t) - at$$

En posant $p \stackrel{\text{def}}{=} mv$:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t) - \frac{1}{2}at^2 - \frac{p_0}{m}t, & \frac{p_0}{m} &= \frac{p(t)}{m} - at \\ &= x(t) + \frac{1}{2}at^2 - \frac{p}{m}t \end{aligned}$$

Pour une transformation de type 1, les variables dépendantes p et p_0 sont données en fonction des variables indépendantes x et x_0 :

$$p = \frac{m}{t}(x - x_0) + \frac{1}{2}mat \quad \text{et} \quad p_0 = \frac{m}{t}(x - x_0) - \frac{1}{2}mat$$

Écrivons la condition suffisante (5.5) page 149 pour une transformation canonique :

$$pdx - p_0dx_0 = \left[\frac{m}{t}(x - x_0) + \frac{1}{2}mat \right] dx - \left[\frac{m}{t}(x - x_0) - \frac{1}{2}mat \right] dx_0$$

$$\begin{aligned} F_1(x, x_0, t) &= \frac{m}{2t}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}mat(x_0 + x) + g(t) \\ &= -F_1(x_0, x, t) \end{aligned}$$

5.2.2 Fonctions génératrices de type 2

En effectuant la transformation de Legendre ((4.2) page 126) de la fonction génératrice F_1 pour les coordonnées Q , nous définissons la deuxième fonction génératrice F_2 :

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

Avec (5.4b) page 148 :

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \quad (5.6)$$

En reprenant (5.2) page 148,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - L &= \frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} \\ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} - \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i + H &= \frac{dF_2(q, P, t)}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i - \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i \\ \sum_{i=1}^n p_i dq_i + \sum_{i=1}^n Q_i dP_i + (H - \mathcal{H}) dt &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \end{cases} \quad (5.7a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \quad (5.7b)$$

Exemple 5.2.5 : Transformation identité

La fonction

$$F_2 = q_1 P_1 + q_2 P_2$$

est un cas particulier, elle génère la transformation canonique identité :

$$\begin{cases} P_1 = p_1 \\ P_2 = p_2 \\ q_1 = Q_1 \\ q_2 = Q_2 \\ H = \mathcal{H} \end{cases}$$

Dans le cas général, la fonction

$$F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i$$

génère la transformation canonique identité :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} P_j = p_j \\ q_j = Q_j \\ H = \mathcal{H} \end{cases}$$

Exemple 5.2.6 : Mobile dans un champ de gravitation

Le hamiltonien d'un mobile dans un champ de gravitation uniforme g s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

On souhaite que la nouvelle variable Q soit cyclique et que par conséquent le nouvel hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H = \alpha P$$

où α est une constante. La fonction génératrice est supposée ne pas dépendre explicitement du temps, les hamiltoniens ancien et nouveau sont égaux :

$$\begin{aligned} \alpha P &= \frac{p^2}{2m} + mgq \\ q &= \frac{\alpha}{mg} P - \frac{p^2}{2m^2 g} \end{aligned}$$

On pose $\alpha = mg$ et $A = (2m^2 g)^{-1}$:

$$q = P - Ap^2$$

La transformation cherchée est de la forme :

$$Q = \pm p \quad \text{et} \quad P = q + Ap^2$$

où il reste à déterminer le signe devant p . Montrons qu'elle est canonique en trouvant la fonction génératrice.

1. Choisissons une transformation de type 1, $F_1(q, Q)$. Les nouvelles variables p et P s'écrivent en fonction des anciennes q et Q :

$$p = \pm Q \quad \text{et} \quad P = q + AQ^2$$

La forme différentielle s'écrit :

$$pdq - PdQ = \pm Qdq - (q + AQ^2)dQ$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = \pm Q \\ \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q} = -(q + AQ^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1(q, Q) = \pm Qq + f(Q) \\ F_1(q, Q) = -\left(qQ + \frac{1}{3}AQ^3\right) + f'(q) \end{cases}$$

On conserve le signe négatif, $Q = -p$, car sinon la fonction $F_1(q, Q) = \frac{1}{3}AQ^3$ ne contient pas q :

$$F_1(q, Q) = -qQ - \frac{1}{3}AQ^3$$

La transformation cherchée est donc :

$$Q = -p \quad \text{et} \quad P = q + Ap^2$$

2. Choisissons à présent une transformation de type 2, $F_2(q, P)$.

(a) les nouvelles variables Q et p s'écrivent en fonction des anciennes q et P :

$$\begin{aligned} Q &= \pm p & P &= q + Ap^2 \\ Q &= \pm p & p^2 &= \frac{P - q}{A} \\ Q &= \epsilon_1 \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{P - q} & p &= \epsilon_2 \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{P - q} \end{aligned}$$

où $\epsilon_1 = \pm 1$ et $\epsilon_2 = \pm 1$ sont *a priori* indépendants.

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = \epsilon_2 \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{P - q} \\ \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} = \epsilon_1 \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{P - q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2(q, P) = \epsilon_2 \frac{-2}{3\sqrt{A}} (P - q)^{3/2} + f(P) \\ F_2(q, P) = \epsilon_1 \frac{2}{3\sqrt{A}} (P - q)^{3/2} + f'(q) \end{cases}$$

Par conséquent $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ sinon F_2 est nulle, et :

$$F_2(q, P) = \frac{\pm 2}{3\sqrt{A}} (P - q)^{3/2}$$

(b) formons la fonction génératrice F_2 en partant de F_1 , grâce à (5.6) page 152 :

$$\begin{aligned} F_2(q, P) &= F_1(q, Q) + QP \\ &= -qQ - \frac{1}{3}AQ^3 + Q(q + AQ^2) \\ &= \frac{2}{3}AQ^3 \\ &= \frac{\mp 2}{3\sqrt{A}} (P - q)^{3/2} \end{aligned}$$

On vérifie que l'on retrouve bien (5.7a) et (5.7b) page 152 :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A}} \sqrt{P-q} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\mp 1}{\sqrt{A}} \sqrt{P-q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q} = p \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \end{cases}$$

3. Cherchons le changement de variables correspondant à la fonction génératrice de type 2 suivante :

$$F_2(q, P) = \frac{-2}{3\sqrt{A}} (P-q)^{3/2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{P-q} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{-1}{\sqrt{A}} \sqrt{P-q} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{P-q} \\ Q = \frac{-1}{\sqrt{A}} \sqrt{P-q} \\ H = \mathcal{H} \end{cases}$$

soit

$$Q = -p \quad \text{et} \quad P = q + Ap^2$$

4. Les équations de Hamilton pour les nouvelles variables canoniques s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P} = 0 \\ \dot{Q} = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = P_0 \\ Q = mgt + Q_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t) = -Q \\ q(t) = P - Ap^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(t) = -mgt - Q_0 \\ q(t) = P_0 - A(-mgt - Q_0)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = -Q_0 \\ q_0 = P_0 - AQ_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t) = -mgt + p_0 \\ q(t) = P_0 - A(mgt)^2 - 2AmgtQ_0 - AQ_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{1}{2m^2g} (mgt)^2 - \frac{2}{2m^2g} mgtQ_0 + q_0 \\ &= -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + q_0 \end{aligned}$$

$(-Q_0)$ est la quantité de mouvement initiale. Que représente P_0 ? Lorsque le mobile atteint sa hauteur maximale la dérivée de la trajectoire par rapport au temps s'annule :

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= 0 \\ -gt + v_0 &= 0 \\ t &= \frac{v_0}{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{max} &= -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g}v_0 + q_0 \\ &= \frac{v_0^2}{2g} + q_0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} P_0 &= AQ_0^2 + q_0 \\ &= \frac{1}{2m^2g}(-mv_0)^2 + q_0 \\ &= q_{max} \end{aligned}$$

Exemple 5.2.7 : Transformations ponctuelles

Soit la fonction

$$F_2 = f_1(q_1, q_2, t)P_1 + f_2(q_1, q_2, t)P_2$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions différentiables quelconques. Elle génère la transformation canonique :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} P_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} P_2 = p_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} P_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} P_2 = p_2 \\ f_1(q_1, q_2, t) = Q_1 \\ f_2(q_1, q_2, t) = Q_2 \\ H(Q_1, Q_2, P_1, P_2, t) = \mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2, t) + \frac{\partial f_1}{\partial t} P_1 + \frac{\partial f_2}{\partial t} P_2 \end{cases}$$

Les deux premières relations sont une transformation linéaire des impulsions généralisées. Les deux relations suivantes sont une transformation ponctuelle de l'espace des configurations, du type de celles que l'on rencontre en mécanique de Lagrange.

Dans le cas général, la fonction

$$F_2 = \sum f_i(q, t)P_i$$

génère la transformation canonique :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i = p_j \\ f_j(q_i, t) = Q_j \\ H(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial t} P_i \end{cases}$$

a) Translation spatiale

Cherchons la fonction génératrice de la transformation des coordonnées correspondant à la translation spatiale selon l'axe des x . Soit a une constante :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ p'_x = p_x \end{cases}$$

Avec (5.7) :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = p_x \\ \frac{\partial F_2}{\partial p'_x} = x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = p'_x \\ \frac{\partial F_2}{\partial p'_x} = x + a \end{cases}$$

$$F_2(x, p'_x) = (x + a) p'_x$$

Dans le cas général d'une translation de vecteur $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ nous avons :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a} \\ \vec{p}' = \vec{p} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z, p'_x, p'_y, p'_z) &= (x + a_x) p'_x + (y + a_y) p'_y + (z + a_z) p'_z \\ F_2(\vec{r}, \vec{p}') &= (\vec{r} + \vec{a}) \cdot \vec{p}' \end{aligned} \quad (5.8)$$

b) Rotation spatiale

Cherchons la fonction génératrice de la transformation des coordonnées correspondant à la rotation spatiale d'un angle θ autour de l'axe des z . Pour les nouvelles coordonnées, nous avons,

$$\begin{cases} x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ y' = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ z' = z \end{cases}$$

(5.7b) donne

$$\frac{\partial F_2}{\partial p'_x} = x' \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial p'_y} = y' \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial p'_z} = z'$$

d'où,

$$F_2(x, y, z, p'_x, p'_y, p'_z) = [x \cos(\theta) + y \sin(\theta)] p'_x + [-x \sin(\theta) + y \cos(\theta)] p'_y + z p'_z$$

Pour les nouvelles impulsions, nous avons,

$$\begin{cases} p'_x = p_x \cos(\theta) + p_y \sin(\theta) \\ p'_y = -p_x \sin(\theta) + p_y \cos(\theta) \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

Inversons ces relations :

$$\begin{cases} p'_x \cos(\alpha) = p_x \cos^2(\alpha) + p_y \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ p'_y \sin(\alpha) = -p_x \sin^2(\alpha) + p_y \cos(\alpha) \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} p'_x \sin(\alpha) = p_x \cos(\alpha) \sin(\alpha) + p_y \sin^2(\alpha) \\ p'_y \cos(\alpha) = -p_x \sin(\alpha) \cos(\alpha) + p_y \cos^2(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x = p'_x \cos(\theta) - p'_y \sin(\theta) \\ p_y = p'_x \sin(\theta) + p'_y \cos(\theta) \\ p_z = p'_z \end{cases}$$

(5.7a) donne

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = p_x \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = p_y \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = p_z$$

et l'on retrouve la même fonction F_2 :

$$F_2(x, y, z, p'_x, p'_y, p'_z) = [p'_x \cos(\theta) - p'_y \sin(\theta)]x + [p'_x \sin(\theta) + p'_y \cos(\theta)]y + zp'_z$$

c) Transformation de Galilée

Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation selon l'axe des x à la vitesse uniforme v_x , $\mathcal{R}'$ se déplaçant dans le sens des x croissants. Quelle est la fonction génératrice de la transformation de Galilée ? La transformation de Galilée s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x - v_x t \\ p'_x = p_x - mv_x \end{cases}$$

(5.7) page 152 donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = p_x \\ \frac{\partial F_2}{\partial p'_x} = x' \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial x} = p'_x + mv_x \\ \frac{\partial F_2}{\partial p'_x} = x - v_x t \\ H = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2(x, p'_x, t) = (p'_x + mv_x)x + f(p'_x) + g_1(t) \\ F_2(x, p'_x, t) = (x - v_x t)p'_x + h(x) + g_2(t) \end{cases}$$

soit,

$$F_2(x, p'_x, t) = (x - v_x t)p'_x + mv_x x + g(t)$$

où $g(t)$ est une fonction quelconque du temps. Nous avons alors :

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = -p'_x v_x + \frac{\partial g(t)}{\partial t}$$

Dans le cas général, la transformation de Galilée s'écrit,

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ \vec{p}' = \vec{p} - m\vec{v} \end{cases} \quad (5.9)$$

et la fonction génératrice devient,

$$\begin{aligned} F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) &= (x - v_x t)p'_x + mv_x x + (y - v_y t)p'_y + mv_y y \\ &\quad + (z - v_z t)p'_z + mv_z z + g(t) \\ &= (\vec{r} - \vec{v}t) \cdot \vec{p}' + m\vec{v} \cdot \vec{r} + g(t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

qui donne :

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\vec{p}' \cdot \vec{v} + \frac{\partial g(t)}{\partial t}$$

Le hamiltonien transformé a pour expression :

$$\begin{aligned} H(\vec{r}', \vec{p}', t) &= \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) - \vec{p}' \cdot \vec{v} + \frac{\partial g(t)}{\partial t} \\ &= \mathcal{H}(\vec{r}' + \vec{v}t, \vec{p}' + m\vec{v}, t) - \vec{p}' \cdot \vec{v} + \frac{\partial g(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Par exemple la transformation de Galilée appliquée à un mobile libre [$\mathcal{H} = p^2/(2m)$] s'écrit en choisissant $g(t)$ nulle :

$$\begin{aligned} H(\vec{r}', \vec{p}', t) &= \frac{p'^2}{2m} - \vec{p}' \cdot \vec{v} \\ &= \frac{(\vec{p}' + m\vec{v})^2}{2m} - \vec{p}' \cdot \vec{v} \\ &= \frac{p'^2 + 2m\vec{p}' \cdot \vec{v} + m^2v^2}{2m} - \vec{p}' \cdot \vec{v} \\ &= \frac{p'^2}{2m} + \frac{mv^2}{2} \end{aligned}$$

5.2.3 Fonctions génératrices de type 3

Définissons une troisième fonction génératrice, $F_3(p, Q, t)$, en effectuant :

- soit une transformation de Legendre de $F_1(q, Q, t)$ pour les q :

$$\begin{aligned} F_3(p, Q, t) &= F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ &= F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i \end{aligned}$$

- soit une transformation de Legendre de $F_2(q, P, t)$ pour les P :

$$\begin{aligned} F_3(p, Q, t) &= F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ &= F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^n P_i Q_i \end{aligned}$$

En reprenant (5.2) page 148,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - L &= \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \\ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} - \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i + H &= \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n q_i p_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i \\ \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = -P_i \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (5.11a) \\ (5.11b) \\ (5.11c) \end{array}$$

Exemple 5.2.8 : Transformation identité

La fonction

$$F_3(p_1, Q_1) = p_1 Q_1$$

est un cas particulier, elle génère la transformation canonique identité avec changement de signe :

$$\begin{cases} Q_1 = -q_1 \\ p_1 = -P_1 \end{cases}$$

La transformation $F_3(p_1, Q_1) = -p_1 Q_1$ engendre la transformation identité.

Exemple 5.2.9

Nous pouvons additionner les différentes fonctions génératrices. En reprenant la fonction génératrice F_1 de l'ex. 5.2.1 page 149 et la fonction génératrice F_3 de l'exemple précédent, la fonction

$$\begin{aligned} F &= F_1(q_1, Q_1) + F_3(p_2, Q_2) \\ &= q_1 Q_1 + p_2 Q_2 \end{aligned}$$

génère la transformation canonique :

$$\begin{cases} Q_1 = p_1 \\ q_1 = -P_1 \\ Q_2 = -q_2 \\ p_2 = -P_2 \end{cases}$$

5.2.4 Fonctions génératrices de type 4

Une quatrième et dernière fonction génératrice, $F_4(p, P, t)$, est obtenue en effectuant :

- soit une transformation de Legendre de la fonction $F_2(q, P, t)$ pour les q :

$$\begin{aligned} F_4(p, P, t) &= F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ &= F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i \\ &= F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \end{aligned}$$

- soit une transformation de Legendre de la fonction $F_3(p, Q, t)$ pour les Q :

$$\begin{aligned} F_4(p, P, t) &= F_3(p, Q, t) - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ &= F_3(p, Q, t) + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ &= F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i + \sum_{i=1}^n Q_i P_i \end{aligned}$$

En reprenant (5.2) page 148,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} - L &= \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \\ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} - \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i + H &= \frac{d}{dt} F_4(p, P, t) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n q_i p_i - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i - \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i P_i \\ -\mathcal{H} + H &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum_{i=1}^n q_i \dot{p}_i - \sum_{i=1}^n Q_i \dot{P}_i \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i \\ \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i \\ \frac{\partial F_4}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases}$$

Exemple 5.2.10

La fonction $F_4(p_1, P_1) = p_1 P_1$ est un cas particulier, elle génère la transformation canonique d'échange avec un seul changement de signe :

$$\begin{cases} P_1 = -q_1 \\ p_1 = Q_1 \end{cases}$$

Le fait que la composition successive de deux transformations canoniques soit une transformation canonique suggère qu'elles forment un groupe. La composition de transformations canoniques est associative. Il existe un élément neutre qui est la transformation canonique identité. À chaque transformation canonique il existe une transformation inverse qui est elle-même canonique. Les transformations canoniques forment donc un groupe, appelé *groupe des transformations canoniques*.

5.2.5 Crochets de Lagrange

Les crochets de Lagrange permettent de savoir si une transformation est canonique. Dans (5.5) page 149, injectons (5.4a) et (5.4b) page 148 :

$$\begin{aligned} dF_1(q, Q) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) dq_i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) dQ_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) \end{aligned}$$

Les conditions de Schwarz pour que dF_1 soit une différentielle totale exacte s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j, \quad \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial q_j} \right) &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial q_i} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right) = \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) \\ \forall i, \forall j, \quad \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial Q_j} \right) &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial Q_i} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial P_i}{\partial Q_j} \right) = \left(\frac{\partial P_j}{\partial Q_i} \right) \\ \forall i, \forall j, \quad \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \right) &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \right) = - \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

Il existe une unique condition d'intégrabilité valable pour les quatre formes différentielles dF_1 , dF_2 , dF_3 et dF_4 . En effet, pour dF_1 :

$$\begin{aligned} dF_1(q, Q) &= \sum_{k=1}^n p_k dq_k - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_i} dP_i \right) - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - P_i \right) dQ_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} dP_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - P_i \right) dQ_i + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} dP_i \right] \end{aligned}$$

Nous avons fait apparaître les différentielles dQ_i et dP_i . Les conditions de Schwarz pour que dF_1 soit une différentielle totale exacte s'écrivent maintenant, pour deux coordonnées Q_i et Q_j :

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j, \quad \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial Q_j} \right) &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial Q_i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} - P_j \right) &= \frac{\partial}{\partial Q_j} \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - P_i \right) \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_i \partial Q_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_j \partial Q_i} \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} &= 0 \end{aligned}$$

De même, pour deux coordonnées P_i et P_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_i} \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_j} &= \frac{\partial}{\partial P_j} \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \frac{\partial q_k}{\partial P_j} - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_i \partial P_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \frac{\partial q_k}{\partial P_i} - \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_j \partial P_i} \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_j} \frac{\partial p_k}{\partial P_i} &= 0 \end{aligned}$$

Pour deux coordonnées Q_i et P_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} - P_j \right) &= \frac{\partial}{\partial Q_j} \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_i \partial Q_j} - \delta_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \frac{\partial q_k}{\partial P_i} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_j \partial P_i} \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_j} \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} = \delta_{ij}$$

Ce terme est appelé *crochet de Lagrange* de Q_i et P_j pour les variables (q_k, p_k) .

Définition 5.2.1 : Crochets de Lagrange

Soient deux fonctions $f(q, p, t)$ et $g(q, p, t)$ de l'espace des phases, leur *crochet de Lagrange* pour les variables canoniques (q, p) est la quantité :

$$\{f, g\}_{q,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial q_j}{\partial f} \frac{\partial p_j}{\partial g} - \frac{\partial p_j}{\partial f} \frac{\partial q_j}{\partial g} \right)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes en termes de crochets de Lagrange pour qu'une transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ soit canonique sont donc :

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (5.13)$$

De même, pour la différentielle dF_2 :

$$\begin{aligned} dF_2(q, P) &= \sum_{k=1}^n p_k dq_k + \sum_{i=1}^n Q_i dP_i \\ &= \sum_{k=1}^n p_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_i} dP_i \right) + \sum_{i=1}^n Q_i dP_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} dQ_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} + Q_i \right) dP_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} dQ_i + \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} + Q_i \right) dP_i \right] \end{aligned}$$

avec la condition d'intégrabilité pour deux coordonnées Q_i et P_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P_j} \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} &= \frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_j} + Q_j \right) \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial P_j \partial Q_i} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} \frac{\partial q_k}{\partial P_j} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_i \partial P_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i} \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial P_j} \frac{\partial p_k}{\partial Q_i} &= \delta_{ij} \\ \{Q_i, P_j\}_{q,p} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

De même pour F_3 et F_4 .

Exemple 5.2.11

Montrons qu'une rotation d'angle α dans l'espace des phases (q, p) , définie par la transformation des coordonnées,

$$\begin{cases} Q = q \cos(\alpha) + p \sin(\alpha) \\ P = -q \sin(\alpha) + p \cos(\alpha) \end{cases}$$

est une transformation canonique.

Montrons que la fonction génératrice est une différentielle totale exacte. Invertissons les relations précédentes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} Q \cos(\alpha) = q \cos^2(\alpha) + p \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ P \sin(\alpha) = -q \sin^2(\alpha) + p \cos(\alpha) \sin(\alpha) \end{cases} \\ \text{et} \quad \begin{cases} Q \sin(\alpha) = q \cos(\alpha) \sin(\alpha) + p \sin^2(\alpha) \\ P \cos(\alpha) = -q \sin(\alpha) \cos(\alpha) + p \cos^2(\alpha) \end{cases} \\ q = Q \cos(\alpha) - P \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad p = P \cos(\alpha) + Q \sin(\alpha) \\ \frac{\partial q}{\partial Q} = \cos(\alpha), \quad \frac{\partial q}{\partial P} = -\sin(\alpha), \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = \sin(\alpha), \quad \frac{\partial p}{\partial P} = \cos(\alpha) \\ \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

5.3 Transformations canoniques infinitésimales

Nous cherchons une transformation pour laquelle les nouvelles variables q et p seront très peu différentes des anciennes. L'ex. 5.2.5 page 153 montre que la fonction génératrice $F_2 = \sum q_i P_i$ génère la transformation identité. Soit ϵ un infinitésimal du 1^{er} ordre et soit $G(q, P, t)$ une fonction quelconque. Considérons la fonction génératrice :

$$F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \epsilon G(q, P, t)$$

Elle génère une transformation proche de l'identité appelée *transformation canonique infinitésimale* ou *transformation de contact* (parce que le déplacement est très faible), donnée par (5.7) page 152 :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i} = p_i \\ q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i} = Q_i \\ \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous négligeons les termes infinitésimaux du 2nd ordre en ϵ^2 , devant ceux du 1^{er} ordre en ϵ . La différence entre les nouvelles et les anciennes impulsions généralisées est du 1^{er} ordre en ϵ :

$$P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i}$$

Or, le terme impliquant G dans F_2 étant déjà du 1^{er} ordre (terme ϵG), nous pouvons donc remplacer P par p dans G (cela revient à ajouter ou soustraire un terme du 2nd ordre dans F_2 puisque $P_i - p_i$ est du 1^{er} ordre) :

$$F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \epsilon G(q, p, t) \quad (5.14)$$

$\epsilon G(q, p, t)$, appelé *générateur de la transformation infinitésimale*. Adoptons les notations suivantes, $\delta q_i = Q_i - q_i$ et $\delta p_i = P_i - p_i$:

$$\begin{cases} P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i} = p_i \\ q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i} = Q_i \\ \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i} \\ \delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i} \\ \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial t} = H - \mathcal{H} \end{cases} \quad (5.15)$$

Exemple 5.3.1

Trois exemples de générateur de transformations infinitésimales.

a) translation spatiale infinitésimale de vecteur $\delta \vec{a}$

D'après (5.8) page 157 :

$$\begin{aligned} F_2(\vec{r}, \vec{p}') &= (\vec{r} + \delta \vec{a}) \cdot \vec{p}' \\ &= \vec{r} \cdot \vec{p}' + \delta \vec{a} \cdot \vec{p}' \end{aligned}$$

Dans la fonction G nous remplaçons $\vec{p}'$ par $\vec{p}$:

$$F_2(\vec{r}, \vec{p}') = \vec{r} \cdot \vec{p}' + \delta \vec{a} \cdot \vec{p}$$

$\vec{r} \cdot \vec{p}'$ est la transformation identité, et $\delta \vec{a} \cdot \vec{p}$ est le générateur de la transformation canonique infinitésimale.

b) rotation spatiale infinitésimale d'angle $\delta\theta$

$$\begin{cases} x' = x \cos(\delta\theta) + y \sin(\delta\theta) \\ y' = x \sin(\delta\theta) + y \cos(\delta\theta) \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \left[1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2} \right] + y\delta\theta \\ y' = -x\delta\theta + y \left[1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2} \right] \\ z' = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + y\delta\theta \\ y' = -x\delta\theta + y \\ z' = z \end{cases}$$

(5.7b) page 152 donne

$$\frac{\partial F_2}{\partial p'_x} = x' \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial p'_y} = y' \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial p'_z} = z'$$

d'où,

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z, p'_x, p'_y, p'_z) &= (x + y\delta\theta) p'_x + (-x\delta\theta + y) p'_y + z p'_z \\ &= x p'_x + y p'_y + z p'_z + (y p'_x - x p'_y) \delta\theta \end{aligned}$$

Dans la fonction G , remplaçons p'_y par p_y et p'_x par p_x :

$$F_2(x, y, z, p'_x, p'_y, p'_z) = x p'_x + y p'_y + z p'_z + (y p_x - x p_y) \delta\theta$$

En notant L_z la composante en z du vecteur moment cinétique,

$$F_2(\vec{r}, \vec{p}') = \vec{r} \cdot \vec{p}' - L_z \delta\theta$$

où $\vec{r} \cdot \vec{p}'$ est la transformation identité, et $L_z \delta\theta$ est le générateur de la transformation canonique infinitésimale.

c) transformation de Galilée infinitésimale

Reprenons (5.9) page 158 :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \delta\vec{v}t \\ \vec{p}' = \vec{p} - m\delta\vec{v} \end{cases}$$

À partir de (5.10) page 158, avec $g(t)$ nulle et en négligeant les termes infinitésimaux du 2nd ordre :

$$\begin{aligned} F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) &= (\vec{r} - \delta\vec{v}t) \cdot \vec{p}' + m\delta\vec{v} \cdot \vec{r} \\ &= \vec{r} \cdot \vec{p}' - \delta\vec{v}t \cdot \vec{p}' + m\delta\vec{v} \cdot \vec{r} \\ &= \vec{r} \cdot \vec{p}' - \delta\vec{v} \cdot (t\vec{p}' - m\vec{r}) \end{aligned}$$

Dans la fonction G remplaçons $\vec{p}'$ par $\vec{p}$:

$$F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' - \delta\vec{v} \cdot (t\vec{p} - m\vec{r}) \quad (5.16)$$

$\vec{r} \cdot \vec{p}'$ est la transformation identité et $\delta\vec{v} \cdot (t\vec{p} - m\vec{r})$ est le générateur de la transformation canonique infinitésimale.

5.3.1 Évolution d'un système

Prenons pour fonction $G(q, p, t)$ le hamiltonien $\mathcal{H}(q, p, t)$, et pour ϵ une durée infinitésimale dt . (5.14) page 165 donne

$$F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \mathcal{H}(q, p, t) dt$$

et à partir de (5.15) page 165 (« δ » devient « d » car la variation est dans le temps) :

$$\begin{cases} dp_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial q_i} dt \\ dq_i = \frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial p_i} dt \\ H = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial t} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial p_i} \\ H = \mathcal{H} + d\mathcal{H} \end{cases}$$

On retrouve les équations de Hamilton. Le hamiltonien est par conséquent le générateur à chaque instant d'une transformation canonique infinitésimale. C'est une fonction génératrice qui transforme les coordonnées généralisées et leurs moments conjugués pris à l'instant t , en ceux à l'instant $t + dt$. De cette transformation résulte l'évolution dynamique du système dans le temps, qui correspond au déplacement infinitésimal du point représentatif du système dans l'espace des phases entre les instants t et $t + dt$. Une succession de transformations canoniques étant équivalente à une transformation canonique, deux points quelconques de la trajectoire d'un système dans l'espace des phases sont reliés par une transformation canonique.

Effectuons la transformation de Legendre de la fonction génératrice F_2 pour exprimer ce résultat avec la fonction génératrice F_1 . D'après (5.6) page 152 :

$$\begin{aligned} F_1(q, Q, t) &= F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^n q_i P_i + \mathcal{H}(q, p, t) dt - \sum_{i=1}^n Q_i P_i \\ &= - \sum_{i=1}^n P_i dq_i + \mathcal{H}(q, p, t) dt \\ &= - \sum_{i=1}^n (p_i + dp_i) dq_i + \mathcal{H}(q, p, t) dt \\ &= - \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q, p, t) \right] dt \\ &= -\mathcal{L} dt \end{aligned}$$

L'évolution temporelle d'un système est une succession infinie d'évolutions temporelles infinitésimales, chacune pouvant être décrite par une transformation canonique infinitésimale. Une succession de transformations canoniques étant elle-même une transformation canonique, on en déduit que l'évolution temporelle finie d'un système peut être décrite par une transformation canonique finie de fonction génératrice $-\int \mathcal{L} dt$.

5.4 Transformations invariantes

Après une transformation canonique $(q_j, p_j) \rightarrow (Q_j, P_j)$ les équations canoniques s'écrivent sous la même forme, elles sont covariantes par changement de coordonnées :

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j} \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \end{cases}$$

où le nouvel hamiltonien est :

$$H(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

C'est la définition même d'une transformation canonique (déf. 5.1.3 page 147). Il existe des cas où $\mathcal{H}$ et H ont même forme fonctionnelle, ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{H}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Exemple 5.4.1

$\mathcal{H} = p^2/(2m)$ et $H = P^2/(2m)$ ont même forme fonctionnelle. On a bien $H(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t)$, mais on a aussi $\mathcal{H}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t)$.

Une fois le hamiltonien remplacé par sa nouvelle expression, les équations canoniques ont alors elles aussi même forme fonctionnelle. Le système est dit *invariant* sous la transformation, elle-même dite *invariante*.

Supposons que la fonction génératrice infinitésimale $F_2(q, P, t)$ ((5.14) page 165) soit une transformation invariante. H et $\mathcal{H}$ ayant même forme fonctionnelle, (5.15) page 165 donne :

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} &= \mathcal{H}(Q, P, t) - \mathcal{H}(q, p, t) \\ &= \mathcal{H}(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i, t) - \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\ &= \delta \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \delta p_i \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Cette relation nous amène à définir les crochets de Poisson et leurs propriétés.

Chapitre 6

LES CROCHETS DE POISSON

Sommaire

6.1 Introduction	169
6.2 Crochets de Poisson et équations de Hamilton	170
6.3 Lien avec les crochets de Lagrange	170
6.4 Conditions d'intégrabilité et crochets de Poisson	172
6.5 Propriétés	175
6.6 Identités	177
6.7 Théorèmes	178

6.1 Introduction

Soit $U(q, p, t)$ une fonction quelconque des $2n$ variables canoniques et du temps. En utilisant les équations de Hamilton (4.6) page 132 :

$$\begin{aligned} dU(q, p, t) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial U}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial U}{\partial t} dt \\ \frac{dU(q, p, t)}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial U}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial U}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned}$$

Définition 6.1.1 : Crochets de Poisson

Soient deux fonctions $f(q, p, t)$ et $g(q, p, t)$ de l'espace des phases, leur *crochet de Poisson* pour les variables canoniques (q, p) est la quantité :

$$[f, g]_{q,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

On écrira donc :

$$\frac{dU(q, p, t)}{dt} = [U, \mathcal{H}]_{q,p} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (6.1)$$

6.2 Crochets de Poisson et équations de Hamilton

Reprenons les équations de Hamilton (4.6) page 132 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \\ \dot{q}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \end{cases}$$

Grâce aux crochets de Poisson elles deviennent symétriques :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_j = [p_j, \mathcal{H}]_{q,p} \\ \dot{q}_j = [q_j, \mathcal{H}]_{q,p} \end{cases} \quad (6.2a)$$

$$(6.2b)$$

6.3 Lien avec les crochets de Lagrange

Soient $U_k(q, p, t)$ $2n$ fonctions indépendantes des $2n$ variables canoniques (q, p) . Écrivons les crochets de Lagrange et de Poisson de ces fonctions pour les variables canoniques (q, p) sous forme de matrice, et effectuons la multiplication matricielle de la transposée de la matrice des crochets de Lagrange avec la matrice des crochets de Poisson :

$$\begin{pmatrix} \{U_1, U_1\} & \{U_2, U_1\} & \dots & \{U_{2n}, U_1\} \\ \{U_1, U_2\} & \{U_2, U_2\} & \dots & \{U_{2n}, U_2\} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{U_1, U_{2n}\} & \{U_2, U_{2n}\} & \dots & \{U_{2n}, U_{2n}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U_1, U_1] & [U_1, U_2] & \dots & [U_1, U_{2n}] \\ [U_2, U_1] & [U_2, U_2] & \dots & [U_2, U_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [U_{2n}, U_1] & [U_{2n}, U_2] & \dots & [U_{2n}, U_{2n}] \end{pmatrix}$$

Dans la matrice résultat, calculons le terme d'indices ij :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \{U_k, U_i\} [U_k, U_j] &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \left(\frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial p_a}{\partial U_i} - \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial q_a}{\partial U_i} \right) \left(\frac{\partial U_k}{\partial q_b} \frac{\partial U_j}{\partial p_b} - \frac{\partial U_k}{\partial p_b} \frac{\partial U_j}{\partial q_b} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \left(\frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial p_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_k}{\partial q_b} \frac{\partial U_j}{\partial p_b} - \frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial p_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_k}{\partial p_b} \frac{\partial U_j}{\partial q_b} - \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial q_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_k}{\partial q_b} \frac{\partial U_j}{\partial p_b} + \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial q_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_k}{\partial p_b} \frac{\partial U_j}{\partial q_b} \right) \end{aligned}$$

Avec

$$dq_a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_a}{\partial U_k} dU_k \quad \text{et} \quad dp_a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_a}{\partial U_k} dU_k$$

nous avons :

$$\frac{dq_a}{dq_b} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial q_b}, \quad \frac{dq_a}{dp_b} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial p_b}, \quad \frac{dp_a}{dq_b} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial q_b}, \quad \frac{dp_a}{dp_b} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial p_b}$$

Or nous avons aussi $\forall a, \forall b$,

$$\frac{dq_a}{dq_b} = \delta_{ab}, \quad \frac{dq_a}{dp_b} = 0, \quad \frac{dp_a}{dq_b} = 0, \quad \frac{dp_a}{dp_b} = \delta_{ab}$$

qui donne :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial q_b} = \delta_{ab}, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial p_b} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial q_b} = 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial p_a}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial p_b} = \delta_{ab}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \{U_k, U_i\} [U_k, U_j] &= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \left(\frac{\partial p_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_j}{\partial p_b} \delta_{ab} + \frac{\partial q_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_j}{\partial q_b} \delta_{ab} \right) \\ &= \sum_{a=1}^n \left(\frac{\partial p_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_j}{\partial p_a} + \frac{\partial q_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_j}{\partial q_a} \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} dU_j &= \sum_{a=1}^n \left(\frac{\partial U_j}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial U_j}{\partial q_a} dq_a \right) \\ \frac{dU_j}{dU_i} &= \sum_{a=1}^n \left(\frac{\partial p_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_j}{\partial p_a} + \frac{\partial q_a}{\partial U_i} \frac{\partial U_j}{\partial q_a} \right) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{2n} \{U_k, U_i\} [U_k, U_j] = \delta_{ij}$$

La matrice résultat est donc la matrice unité. La transposée de la matrice des crochets de Lagrange et la matrice des crochets de Poisson sont inverses l'une de l'autre.

6.4 Conditions d'intégrabilité et crochets de Poisson

Prenons le cas de quatre variables canoniques (q_1, q_2, p_1, p_2) . Utilisons le résultat du § précédent. Les conditions nécessaires et suffisantes (5.13) page 163 sur les crochets de Lagrange pour avoir une transformation canonique nous donne la matrice de gauche :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [Q_1, Q_1] & [Q_1, Q_2] & [Q_1, P_1] & [Q_1, P_2] \\ [Q_2, Q_1] & [Q_2, Q_2] & [Q_2, P_1] & [Q_2, P_2] \\ [P_1, Q_1] & [P_1, Q_2] & [P_1, P_1] & [P_1, P_2] \\ [P_2, Q_1] & [P_2, Q_2] & [P_2, P_1] & [P_2, P_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} [P_1, Q_1] &= 1, & [P_1, Q_2] &= 0, & [P_1, P_1] &= 0, & [P_1, P_2] &= 0 \\ [P_2, Q_1] &= 0, & [P_2, Q_2] &= 1, & [P_2, P_1] &= 0, & [P_2, P_2] &= 0 \\ [Q_1, Q_1] &= 0, & [Q_1, Q_2] &= 0, & [Q_1, P_1] &= 1, & [Q_1, P_2] &= 0 \\ [Q_2, Q_1] &= 0, & [Q_2, Q_2] &= 0, & [Q_2, P_1] &= 0, & [Q_2, P_2] &= 1 \end{aligned}$$

En généralisant, on en déduit les conditions nécessaires et suffisantes en termes de crochets de Poisson pour qu'une transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ soit canonique :

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0 \quad [P_i, P_j]_{p,q} = 0 \quad [Q_i, P_j]_{p,q} = \delta_{ij}$$

Ces conditions d'intégrabilité peuvent être obtenu d'une autre façon. En appliquant (6.1) page 170 aux fonctions pour l'instant arbitraires $P(q, p)$ et $Q(q, p)$:

$$\begin{cases} \dot{P} = [P, H]_{q,p} \\ \dot{Q} = [Q, H]_{q,p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{cases}$$

Rappelons un résultat classique de la dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(q, p, t) &= dH(Q, P, t) \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt &= \frac{\partial H}{\partial Q} dQ + \frac{\partial H}{\partial P} dP + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial H}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} dq + \frac{\partial Q}{\partial p} dp \right) + \frac{\partial H}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial q} dq + \frac{\partial P}{\partial p} dp \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) dq + \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

D'où les relations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \end{cases} \quad (6.3)$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) - \frac{\partial P}{\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \\ \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \\ \dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} [Q, P]_{q,p} \\ \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} [Q, P]_{q,p} \end{cases}$$

Ce résultat est valable quelles que soient les fonctions $Q(q, p)$ et $P(q, p)$. Si nous voulons que P et Q soient des variables canoniques, nous devons de plus retrouver les équations de Hamilton. Une condition suffisante est que $[Q, P]_{q,p} = k$, où k est une constante non nulle car on obtient :

$$\begin{cases} \dot{P} = -k \frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{\partial(kH)}{\partial Q} \\ \dot{Q} = k \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial(kH)}{\partial P} \end{cases}$$

Prendre $k \neq 1$ revient à effectuer un changement d'unités (Cf. § 3.2.3 page 96), et nous prendrons donc $k = 1$:

$$[Q, P]_{q,p} = 1$$

$[Q, P]_{q,p} = k$ est-elle une condition nécessaire pour retrouver les équations de Hamilton ? Si nous supposons qu'un hamiltonien $K(Q, P)$ existe, alors

$$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} [Q, P]_{q,p} \\ \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial P} [Q, P]_{q,p} \end{cases}$$

Il faut aussi que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K(Q, P)}{\partial Q \partial P} &= \frac{\partial^2 K(Q, P)}{\partial P \partial Q} \\ \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial H}{\partial P} [Q, P]_{q,p} \right) &= \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial H}{\partial Q} [Q, P]_{q,p} \right) \\ \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial [Q, P]_{q,p}}{\partial Q} &= \frac{\partial H}{\partial Q} \frac{\partial [Q, P]_{q,p}}{\partial P} \end{aligned}$$

Pour que cela soit toujours vrai nous devons avoir

$$\frac{\partial [Q, P]_{q,p}}{\partial Q} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial [Q, P]_{q,p}}{\partial P} = 0$$

c.-à-d.

$$[Q, P]_{q,p} = k$$

Exemple 6.4.1

Reprenons l'ex. 5.2.11 page 164. Montrons qu'une rotation d'angle α dans l'espace des

phases (q, p) , définie par la transformation des coordonnées,

$$\begin{cases} Q = q \cos(\alpha) + p \sin(\alpha) \\ P = -q \sin(\alpha) + p \cos(\alpha) \end{cases}$$

est une transformation canonique en calculant le crochet de Poisson des fonctions $Q(q, p)$ et $P(q, p)$ pour les variables canoniques (q, p) :

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \cos(\alpha), \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \sin(\alpha), \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\sin(\alpha), \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \cos(\alpha)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Exemple 6.4.2

Reprenons l'ex. 5.2.4 page 150. Montrons que la transformation suivante est canonique :

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2 + \frac{p_0}{m} t + x_0, \quad p(t) = mat + p_0$$

Calculons son crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} [x, p]_{x_0, p_0} &= \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\partial x}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial x_0} \\ &= 1 \times 1 - \frac{t}{m} \times 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 6.4.3

Montrons que la transformation suivante est canonique :

$$\begin{cases} Q = -\ln \sin p \\ P = q \tan p \end{cases}$$

Première méthode en calculant le crochet de Poisson :

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\cos p}{\sin p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \tan p, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{q}{\cos^2 p}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{1}{\tan p} \times \tan p = 1$$

Deuxième méthode en montrant que la fonction génératrice est une différentielle totale exacte :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dp} &= -\frac{\cos p}{\sin p} \\ dQ &= -\frac{dp}{\tan p} \end{aligned}$$

Et l'on a :

$$\begin{aligned}
 dF_1 &= pdq - PdQ \\
 &= pdq + q \tan p \frac{dp}{\tan p} \\
 &= pdq + qdp \\
 &= d(pq)
 \end{aligned}$$

Remarque 6.4.1

F_4 n'est pas génératrice de la transformation car elle est constante :

$$\begin{aligned}
 dF_4 &= -qdp - PdQ \\
 &= -qdp + qdp \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

6.5 Propriétés

6.5.1 Crochet de Poisson avec une fonction constante

Soient f et g deux fonctions de l'espace des phases. À partir de la définition, nous avons la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
 [f, c^{ste}]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial c^{ste}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial c^{ste}}{\partial q_k} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

6.5.2 Bilinéarité

Linéarité à gauche :

$$\begin{aligned}
 [f_1 + f_2, g] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f_1}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f_2}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
 &= [f_1, g] + [f_2, g]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad [\lambda f, g] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial (\lambda f)}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial (\lambda f)}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
 &= \lambda \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
 &= \lambda [f, g]
 \end{aligned}$$

Linéarité à droite :

$$\begin{aligned}
 [f, g_1 + g_2] &= [f, g_1] + [f, g_2] \\
 \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad [f, \mu g] &= \mu [f, g]
 \end{aligned}$$

6.5.3 Antisymétrie

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
 &= - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) \\
 &= -[g, f] \\
 [f, f] &= 0
 \end{aligned}$$

6.5.4 Crochet de Poisson fondamentaux

Les variables canoniques q étant indépendantes les unes des autres, et les variables canoniques p étant elles aussi indépendantes les unes des autres, nous avons :

$$[q_i, q_j]_{q,p} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right)$$

$$[q_i, q_j]_{q,p} = 0$$

$$[p_i, p_j]_{q,p} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right)$$

$$[p_i, p_j]_{q,p} = 0$$

$$\begin{aligned}
 [q_i, p_j]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk}
 \end{aligned}$$

$$[q_i, p_j]_{q,p} = \delta_{ij}$$

6.6 Identités

6.6.1 Identité de Leibniz

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} [fg, h] &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial(fg)}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial(fg)}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left(f \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} + g \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - f \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} - g \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \\ &= f \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) + g \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) \\ &= f[g, h] + g[f, h] \end{aligned}$$

□

6.6.2 Identité de Jacobi

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$$

Démonstration. Le premier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} [f, [g, h]] &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial [g, h]}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial [g, h]}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} \right) \right] \\ [f, [g, h]] &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial^2 g}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial p_k \partial q_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial^2 g}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_k \partial q_j} \right) \end{aligned}$$

En effectuant la permutation circulaire des trois fonctions f, g, h , l'ensemble s'annule. Par conséquent la somme des crochets de Poisson obtenus par permutation circulaire de trois fonctions est nulle, et le crochet de Poisson n'est pas associatif. □

6.7 Théorèmes

Théorème 6.7.1 : Crochet de Poisson et intégrale première

Si le crochet de Poisson d'une fonction ne dépend pas explicitement du temps avec le hamiltonien est nul, alors cette fonction est une intégrale première du mouvement.

Démonstration. La dérivée par rapport au temps d'une fonction $f(q, p, t)$ de l'espace des phases s'écrit :

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si les coordonnées et les moments varient selon une trajectoire réelle, ils satisfont les équations de Hamilton (4.6) page 132 et nous avons :

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = [f, \mathcal{H}] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.4)$$

Si le crochet de Poisson avec le hamiltonien est nul et si f ne dépend pas explicitement du temps, alors,

$$\frac{df(q, p)}{dt} = 0$$

et $f(q, p)$ est une intégrale première. □

Revenons sur (5.17) page 168. Le second membre est le crochet de Poisson de $\mathcal{H}$ et G , et l'on a :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = [\mathcal{H}, G]$$

Avec la propriété (6.5.3) page 176 d'antisymétrie des crochets de Poisson :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + [G, \mathcal{H}] = 0$$

Avec (6.4) cette relation équivaut à :

$$\frac{dG}{dt} = 0$$

Le générateur d'une transformation infinitésimale invariante est une intégrale première du mouvement.

Exemple 6.7.1

Reprenons les ex. 5.3.1 page 165 pour le cas d'un mobile libre.

a) lors d'une translation spatiale infinitésimale d'un vecteur $\delta \vec{a}$, le hamiltonien est

invariant de forme fonctionnelle :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow H = \frac{P^2}{2m}$$

Le générateur de la transformation étant $\delta \vec{a} \cdot \vec{p}$ nous en déduisons que le vecteur quantité de mouvement est une constante du mouvement.

- b) lors d'une rotation spatiale infinitésimale d'un angle $\delta\theta$ dans le plan (x, y) , le hamiltonien est invariant de forme fonctionnelle. Le générateur de la transformation est $L_z \delta\theta$, et par conséquent la composante en z du vecteur moment cinétique est une constante du mouvement.
- c) pour une transformation de Galilée infinitésimale ((5.9) page 158),

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \delta \vec{v} t \\ \vec{p}' = \vec{p} - m \delta \vec{v} \end{cases}$$

la fonction génératrice (5.16) page 166 s'écrit :

$$F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' - \delta \vec{v} \cdot (t \vec{p} - m \vec{r}) + g(t)$$

où $g(t)$ est une fonction quelconque du temps. De plus,

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ &= \frac{p^2}{2m} - \vec{p} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\partial g(t)}{\partial t} \\ &= \frac{(\vec{p}' + m \delta \vec{v})^2}{2m} - (\vec{p}' + m \delta \vec{v}) \cdot \delta \vec{v} + \frac{\partial g(t)}{\partial t} \\ &= \frac{p'^2}{2m} + \vec{p}' \cdot \delta \vec{v} + \frac{1}{2} m \delta v^2 - \vec{p}' \cdot \delta \vec{v} - m \delta v^2 + \frac{\partial g(t)}{\partial t} \\ &= \frac{p'^2}{2m} - \frac{1}{2} m \delta v^2 + \frac{\partial g(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Si l'on choisit,

$$g(t) = -\frac{1}{2} m v^2 t$$

alors,

$$H = \frac{p'^2}{2m}$$

et le hamiltonien est bien invariant de forme fonctionnelle. La fonction génératrice a pour expression :

$$F_2(\vec{r}, \vec{p}', t) = \vec{r} \cdot \vec{p}' - \delta \vec{v} \cdot (t \vec{p} - m \vec{r}) - \frac{1}{2} m v^2 t$$

et le générateur de la transformation de Galilée infinitésimale s'écrit $\delta \vec{v} \cdot (t \vec{p} - m \vec{r})$. Le terme entre parenthèses est donc une constante du mouvement. Nous pouvons le vérifier :

$$\begin{aligned} m \vec{r} - \vec{p} t &= m (\vec{r} - \vec{v} t) \\ &= m [\vec{r} - (\vec{r} - \vec{r}_0)] \\ &= m \vec{r}_0 \end{aligned}$$

où $\vec{r}_0$ est le vecteur position initiale du mobile.

Exemple 6.7.2

Reprenons l'ex. 3.1.4 page 78 pour un mobile de masse m et de charge q dans un champ magnétique uniforme orienté selon l'axe des z positifs. Son lagrangien est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q}{2} \begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}qB(xy - y\dot{x})\end{aligned}$$

Les impulsions généralisée ont pour expressions :

$$\begin{cases} p_x = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = m\dot{x} - \frac{1}{2}qBy \\ p_y = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{y} = m\dot{y} + \frac{1}{2}qBx \\ p_z = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{z} = m\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{x} = p_x + \frac{1}{2}qBy \\ m\dot{y} = p_y - \frac{1}{2}qBx \\ m\dot{z} = p_z \end{cases} \quad (6.5)$$

Le hamiltonien qui s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \mathcal{L} \\ &= \left(m\dot{x} - \frac{1}{2}qBy\right)\dot{x} + \left(m\dot{y} + \frac{1}{2}qBx\right)\dot{y} + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}qB(xy - y\dot{x}) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\end{aligned}$$

est égal à l'énergie cinétique. Exprimons-le en fonction des impulsions généralisées :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{1}{2}qBy\right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{1}{2}qBx\right)^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

Les équations du mouvement sont données par (6.2) page 170 :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = [m\dot{x}, \mathcal{H}] \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = [m\dot{y}, \mathcal{H}] \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = [m\dot{z}, \mathcal{H}] \end{cases}$$

En utilisant la linéarité à droite des crochets de Poisson :

$$\begin{aligned}[m\dot{x}, \mathcal{H}] &= \left[m\dot{x}, \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] \\ &= \frac{1}{2m} [m\dot{x}, (m\dot{x})^2] + \frac{1}{2m} [m\dot{x}, (m\dot{y})^2] + \frac{1}{2m} [m\dot{x}, (m\dot{z})^2]\end{aligned}$$

Avec l'identité de Leibniz et l'antisymétrie du crochet de Poisson, le premier terme est nul :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m} [m\dot{x}, (m\dot{x})^2] &= -\frac{1}{2m} [(m\dot{x})^2, m\dot{x}] \\ &= -\frac{1}{2m} \{m\dot{x} [m\dot{x}, m\dot{x}] + m\dot{x} [m\dot{x}, m\dot{x}]\} \\ &= 0\end{aligned}$$

Le dernier terme est également nul car $m\dot{z}$ n'est fonction que de p_z et la coordonnée z n'apparaît pas dans (6.5) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m} [m\dot{x}, (m\dot{z})^2] &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial m\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial (m\dot{z})^2}{\partial p_x} - \frac{\partial m\dot{x}}{\partial p_x} \frac{\partial (m\dot{z})^2}{\partial x} + \frac{\partial m\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial (m\dot{z})^2}{\partial p_y} - \frac{\partial m\dot{x}}{\partial p_y} \frac{\partial (m\dot{z})^2}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial m\dot{x}}{\partial z} \frac{\partial (m\dot{z})^2}{\partial p_z} - \frac{\partial m\dot{x}}{\partial p_z} \frac{\partial (m\dot{z})^2}{\partial z} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Il reste :

$$\begin{aligned}[m\dot{x}, \mathcal{H}] &= \frac{1}{2m} [m\dot{x}, (m\dot{y})^2] \\ &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial m\dot{x}}{\partial x} \frac{\partial (m\dot{y})^2}{\partial p_x} - \frac{\partial m\dot{x}}{\partial p_x} \frac{\partial (m\dot{y})^2}{\partial x} + \frac{\partial m\dot{x}}{\partial y} \frac{\partial (m\dot{y})^2}{\partial p_y} - \frac{\partial m\dot{x}}{\partial p_y} \frac{\partial (m\dot{y})^2}{\partial y} + 0 \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_y^2 - p_y q B x + \frac{q^2 B^2 x^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q B}{2} \frac{\partial}{\partial p_y} \left(p_y^2 - p_y q B x + \frac{q^2 B^2 x^2}{4} \right) + 0 \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_y q B + \frac{1}{2} q^2 B^2 x + q B p_y - \frac{1}{2} q^2 B^2 x \right) \\ &= q B \dot{y}\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}[m\dot{y}, \mathcal{H}] &= \left[m\dot{y}, \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] \\ &= \frac{1}{2m} [m\dot{y}, (m\dot{x})^2] + \frac{1}{2m} [m\dot{y}, (m\dot{y})^2] + \frac{1}{2m} [m\dot{y}, (m\dot{z})^2]\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment seul le premier terme est non nul.

$$\begin{aligned}[m\dot{y}, \mathcal{H}] &= \frac{1}{2m} [m\dot{y}, (m\dot{x})^2] \\ &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial m\dot{y}}{\partial x} \frac{\partial (m\dot{x})^2}{\partial p_x} - \frac{\partial m\dot{y}}{\partial p_x} \frac{\partial (m\dot{x})^2}{\partial x} + \frac{\partial m\dot{y}}{\partial y} \frac{\partial (m\dot{x})^2}{\partial p_y} - \frac{\partial m\dot{y}}{\partial p_y} \frac{\partial (m\dot{x})^2}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[-\frac{q B}{2} \frac{\partial}{\partial p_x} \left(p_x^2 - p_x q B y + \frac{q^2 B^2 y^2}{4} \right) - 0 + 0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_x^2 + p_x q B y + \frac{q^2 B^2 y^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left(-q B p_x + \frac{1}{2} q^2 B^2 y - p_x q B - \frac{1}{2} q^2 B^2 y \right) \\ &= -q B \dot{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [m\dot{z}, \mathcal{H}] &= \left[m\dot{z}, \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] \\
 &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\partial m\dot{z}}{\partial x} \frac{\partial (m\dot{x})^2}{\partial p_x} - \frac{\partial m\dot{z}}{\partial p_x} \frac{\partial (m\dot{x})^2}{\partial x} + \frac{\partial m\dot{z}}{\partial y} \frac{\partial (m\dot{y})^2}{\partial p_y} - \frac{\partial m\dot{z}}{\partial p_y} \frac{\partial (m\dot{y})^2}{\partial y} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Les équations du mouvement ont alors pour expression :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = qB\dot{y} \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -qB\dot{x} \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 \end{cases}$$

Théorème 6.7.2 : Théorème de Poisson

Le crochet de Poisson de deux intégrales premières du mouvement est une intégrale première du mouvement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{d[f, g]}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) \frac{\partial g}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial p_k} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{df}{dt} \right) \frac{\partial g}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{dg}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{df}{dt} \right) \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dg}{dt} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{df}{dt} \right) \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{df}{dt} \right) \frac{\partial g}{\partial q_k} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{dg}{dt} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dg}{dt} \right) \right] \\
 &= \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right]
 \end{aligned}$$

Si $d_t f = 0$ et $d_t g = 0$, alors $d_t[f, g] = 0$. □

Ce théorème permet de trouver de nouvelles intégrales premières du mouvement.

Théorème 6.7.3 : Invariance canonique des crochets de Poisson

Une transformation canonique préserve les crochets de Poisson.

Démonstration. Soit la transformation quelconque suivante :

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dQ(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Q}{\partial p_i} dp_i \\ dP(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial p_i} dp_i \end{cases}$$

Soient $f(q, p)$ et $g(q, p)$ deux fonctions des variables canoniques, de crochet de Poisson :

$$[f, g]_{q,p} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right)$$

En utilisant le rappel sur la dérivation des fonctions composées (6.3) page 172 appliqué à f et g :

$$\begin{aligned} [f, g]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \right] \\ [f, g]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial Q_j} [Q_i, Q_j]_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial P_j} [P_i, P_j]_{q,p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_j} [Q_i, P_j]_{q,p} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_j} [P_i, Q_j]_{q,p} \right) \end{aligned}$$

Les coordonnées généralisées étant indépendantes par hypothèse, on utilise les crochets de Poisson fondamentaux 6.5.4 page 176. Les deux premiers termes sont identiquement nuls, il reste :

$$\begin{aligned} [f, g]_{q,p} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \right) \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \right) \\ &= [f, g]_{Q,P} \end{aligned}$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions quelconques des variables canoniques est un invariant par transformation canonique, ou *invariant canonique*. $\square$

Exemple 6.7.3 : Oscillateur harmonique simple à une dimension

Pour de petites oscillations d'un système à un degré de liberté dans le champ de gravitation, on peut développer le potentiel V de la force gravitationnelle (ou énergie potentielle) autour

d'une position d'équilibre stable $\tilde{q}$. La position d'équilibre doit être stable car sinon le système n'oscille pas. D'après le § 1.10.1 page 25 cela implique $V''(\tilde{q}) > 0$:

$$V(q) = V(\tilde{q}) + V'(\tilde{q}) + \frac{1}{2}V''(\tilde{q})(q - \tilde{q})^2 + \dots$$

Comme l'on utilise toujours qu'une différence de potentiel, celui-ci n'est défini qu'à une constante près et l'on peut supprimer $V(\tilde{q})$. De plus, l'équilibre est réalisé dans un minimum de potentiel, et $V'(\tilde{q}) = 0$. En posant $k \stackrel{\text{def}}{=} V''(\tilde{q})$, nous avons :

$$V(q) = \frac{1}{2}k(q - \tilde{q})^2 + \dots$$

On effectue le changement de variable $q = q - \tilde{q}$. Les oscillations étant petites, q est petit, et nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2$$

On suppose le système holonome scléronome et d'après le § 4.4 page 134 puisque le potentiel ne dépend pas des vitesses généralisées le hamiltonien se confond avec l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(p, q) &= E \\ &= T + V \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}\end{aligned}$$

Il ne dépend pas explicitement du temps, donc d'après (4.8) page 133 il se conserve. L'énergie mécanique se conserve car toutes les forces dérivent d'un potentiel. En posant $k \stackrel{\text{def}}{=} m\omega^2$ avec ω une vitesse angulaire en rad/s, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(p, q) &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \\ &= \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2)\end{aligned}\tag{6.6}$$

Le hamiltonien est une somme de deux carrés. Nous cherchons une transformation des coordonnées (q, p) telle que l'une des nouvelles coordonnées soit cyclique, donc de la forme

$$\begin{cases} p = f(P) \cos Q \\ q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \end{cases}$$

car alors le nouvel hamiltonien a pour expression

$$\begin{aligned}H(P, Q) &= \frac{1}{2m} [f^2(P) \cos^2 Q + f^2(P) \sin^2 Q] \\ &= \frac{f^2(P)}{2m}\end{aligned}$$

où Q est cyclique. La fonction génératrice ne contenant pas explicitement le temps :

$$H = \mathcal{H}$$

Pour que les nouvelles variables Q et P soient des variables conjuguées, autrement dit pour que la transformation soit canonique, le crochet de Poisson doit être égal à l'unité :

$$\begin{aligned} [q, p]_{Q,P} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} \\ &= \frac{f(P)}{m\omega} \cos Q \cdot \frac{\partial f(P)}{\partial P} \cos Q + \frac{1}{m\omega} \frac{\partial f(P)}{\partial P} \sin Q \cdot f(P) \sin Q \\ &= \frac{f(P)}{m\omega} \frac{\partial f(P)}{\partial P} \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} \frac{f(P)}{m\omega} \frac{\partial f(P)}{\partial P} &= 1 \\ f(P) \frac{\partial f(P)}{\partial P} &= m\omega \\ f(P) &= \sqrt{2m\omega P} \end{aligned}$$

La transformation canonique s'écrit donc

$$\begin{cases} p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \\ q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \end{cases}$$

et le nouvel hamiltonien :

$$H = \frac{2m\omega P}{2m} = \omega P$$

Nous obtenons les équations de Hamilton pour les nouvelles variables :

$$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P} = 0 \\ \dot{Q} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \alpha \\ Q = \omega t + \beta \end{cases} \quad (6.7)$$

Remarque 6.7.1

$P = H/\omega$ est homogène à une action (en J s), et $Q = \omega t + \beta$ est homogène à un angle (en rad, c.-à-d. en m/m). Les variables action et angle sont donc conjuguées.

En utilisant

$$\mathcal{H} = E = H = \omega P = \omega \alpha \quad (6.8)$$

la solution en termes des anciennes coordonnées s'écrit donc :

$$\begin{cases} p(t) = \sqrt{2m\omega\alpha} \cos(\omega t + \beta) \\ q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta) \\ q(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (6.9)$$

La solution $q(t)$ étant sinusoïdale, l'oscillateur est appelé oscillateur harmonique.

Comparons les solutions données en termes d'anciennes et de nouvelles variables. Pour les anciennes variables (p, q) , les équations paramétriques (6.9) donnent les courbes suivantes (fig. 6.1) :

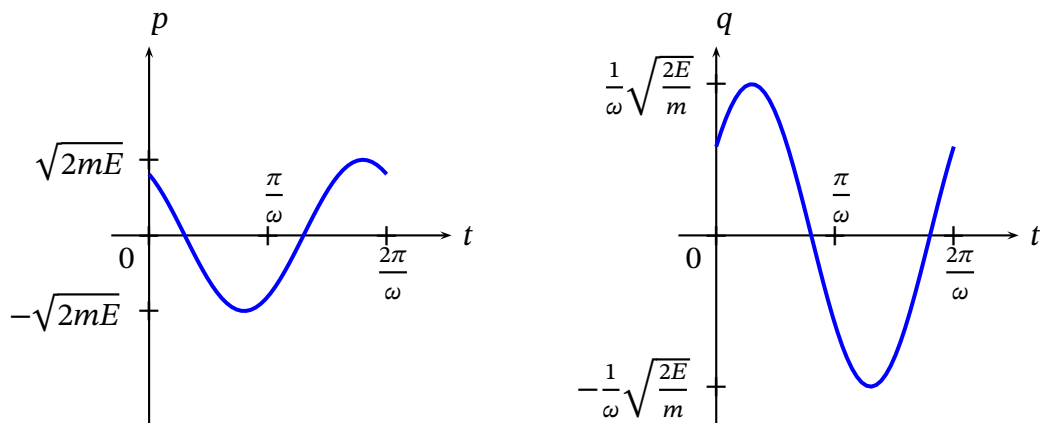


FIG. 6.1 – Oscillateur harmonique, $p = p(t)$ et $q = q(t)$, avec $\beta \neq 0$

Cherchons l'équation en coordonnées rectangulaires dans l'espace des phases. En prenant le carré des équations paramétriques (6.9) :

$$\begin{cases} \frac{p^2}{2mE} = \cos^2(\omega t + \beta) \\ \frac{m\omega^2 q^2}{2E} = \sin^2(\omega t + \beta) \end{cases} \Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/(m\omega^2)} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-axes $\sqrt{2mE}$ et $\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}$ (fig. 6.2) :

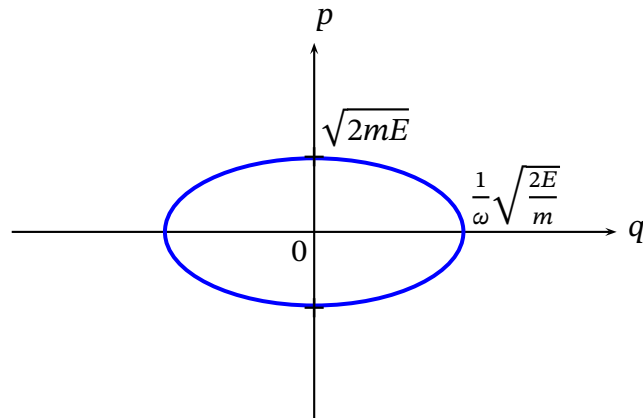


FIG. 6.2 – Oscillateur harmonique, $p = p(q)$

Pour les nouvelles variables (Q, P) , les équations paramétriques (6.7) page précédente donnent les courbes suivantes (fig. 6.3) :

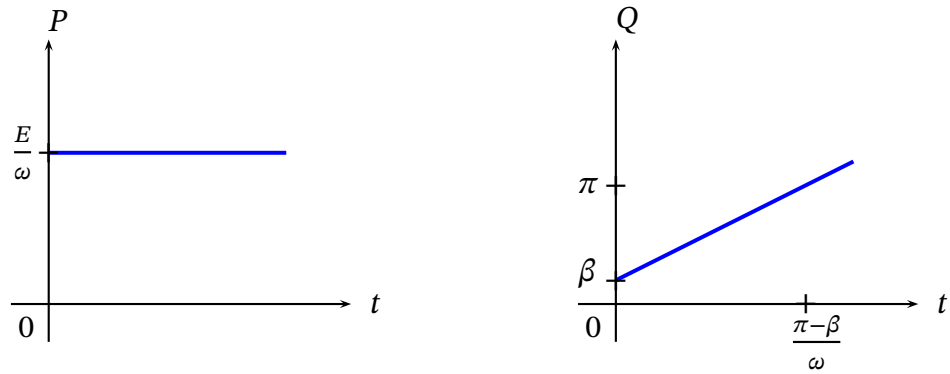


FIG. 6.3 – Oscillateur harmonique, $P = P(t)$ et $Q = Q(t)$

Dans l'espace des phases nous avons alors (fig. 6.4) :

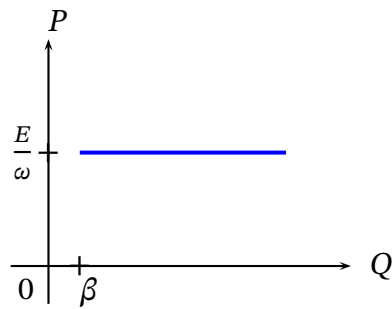


FIG. 6.4 – Oscillateur harmonique, $P = P(Q)$
()

Déterminons les constantes α et β en fonction des conditions initiales $q_0 = q(t = 0)$ et $p_0 = p(t = 0)$:

$$\begin{cases} p_0 = \sqrt{2m\omega\alpha} \cos(\beta) \\ q_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\beta) \end{cases}$$

Avec (6.8) page 185 et (6.6) page 184 à $t = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= H/\omega \\ &= \frac{1}{2m\omega} (p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2) \end{aligned}$$

Pour β :

$$\begin{aligned} \frac{q_0}{p_0} &= \frac{1}{m\omega} \tan(\beta) \\ \beta &= \arctan\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant α et β par leurs expressions dans (6.9) page 185 :

$$\begin{cases} p(t) = \sqrt{p_0^2 + m^2 \omega^2 q_0^2} \cos \left[\omega t + \arctan \left(m \omega \frac{q_0}{p_0} \right) \right] \\ q(t) = \frac{1}{m \omega} \sqrt{p_0^2 + m^2 \omega^2 q_0^2} \sin \left[\omega t + \arctan \left(m \omega \frac{q_0}{p_0} \right) \right] \end{cases}$$

Cherchons l'expression de la fonction génératrice $F_1(q, Q)$ de l'oscillateur harmonique.

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q} = p(q, Q) \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P(q, Q) \end{cases}$$

En injectant (6.8) page 185 dans la solution (6.9) page 185, exprimons p et P en fonction de q et Q :

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \\ q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \\ m\omega q^2 = 2P \sin^2 Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \sqrt{\frac{2m\omega m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}} \cos Q \\ P = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} p = m\omega q \cot Q \\ P = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \\ \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q + h(Q) \\ F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q + g(q) \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction génératrice est donc :

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

La théorie de Hamilton-Jacobi que nous allons voir dans le prochain chapitre permet de trouver la fonction génératrice qui rend toutes les nouvelles variables Q cycliques.

Chapitre 7

LA THÉORIE DE HAMILTON-JACOBI

Sommaire

7.1 Équation de Hamilton-Jacobi	189
7.2 Séparation des variables	192
7.3 Représentation de l'action de Hamilton	207
7.4 Mécanique ondulatoire	213
7.5 Action de Hamilton et lagrangien	216

7.1 Équation de Hamilton-Jacobi

Nous cherchons la fonction génératrice F_i de la transformation canonique qui rend toutes les nouvelles variables Q cycliques. Supposons qu'elles soient effectivement toutes cycliques et donc n'apparaissent pas dans le nouvel hamiltonien H . Les équations de Hamilton transformées s'écrivent :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{P}_j = -\frac{\partial H(P_i, t)}{\partial Q_j} \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial H(P_i, t)}{\partial P_j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P}_j = 0 \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial H(P_i, t)}{\partial P_j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_j = c^{ste} \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial H(P_i, t)}{\partial P_j} \Big|_{P_j=c^{ste}} \end{cases}$$

Soient $\alpha_j = P_j(t = 0)$, $w_j = \dot{Q}_j(t = 0)$ et $\beta_j = Q_j(t = 0)$ des constantes :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} P_j = P_j(t = 0) \\ \dot{Q}_j = c^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_j = \alpha_j \\ Q_j = w_j t + \beta_j \end{cases}$$

Les coordonnées étant cycliques et les impulsions constantes, le nouvel hamiltonien s'écrit :

$$H = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

Tous les hamiltoniens transformés s'écrivant sous la forme ci-dessus sont solutions de notre problème initial. Nous pouvons alors imposer la condition supplémentaire que le hamiltonien

transformé se conserve, $\partial_t H = 0$. Il ne dépend donc pas explicitement du temps et devient une constante :

$$H = c^{ste}$$

Tous les hamiltoniens transformés constants sont solutions, nous choisissons un hamiltonien transformé nul. Avec $H = 0$ les équations de Hamilton transformées deviennent

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{P}_j = 0 \\ \dot{Q}_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_j = \alpha_j \\ Q_j = \beta_j \end{cases} \quad (7.1)$$

où les constantes α_j et β_j sont les conditions initiales des P_j et des Q_j .

7.1.1 Fonction F1

Nous avons le choix parmi quatre fonctions génératrices. Commençons par $F_1(q, Q, t)$ et reprenons (5.4) page 148 en injectant $H = 0, P_j = \alpha_j, Q_j = \beta_j$:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_j} = p_j \\ \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_j} = -P_j \\ \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} = H - \mathcal{H}(q, p, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1(q, \beta, t)}{\partial q_j} = p_j \\ \frac{\partial F_1(q, \beta, t)}{\partial \beta_j} = -\alpha_j \\ \frac{\partial F_1(q, \beta, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial F_1}{\partial q}, t\right) = 0 \end{cases}$$

où l'on a reporté la première relation dans la troisième. Dans l'ex. 5.2.1 page 149, nous avons noté qu'étant donnée une transformation des coordonnées, l'intégration des $2n + 1$ équations aux dérivées partielles ci-dessus donne la fonction génératrice.

7.1.2 Fonction F2

Faisons à présent le choix historique de Jacobi et cherchons une fonction génératrice de type 2, notée $\mathcal{S}(q, P, t)$ et appelée *action*. On l'appelle aussi *action de Hamilton* pour la distinguer de l'action de Maupertuis (Cf. § 8.5.2 page 234), et *fonction principale de Hamilton* pour insister sur le fait qu'il s'agit d'une fonction. Comme précédemment, reprenons (5.7) page 152,

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}(q, P, t)}{\partial q_j} = p_j \\ \frac{\partial \mathcal{S}(q, P, t)}{\partial P_j} = Q_j \\ \frac{\partial \mathcal{S}(q, P, t)}{\partial t} = H - \mathcal{H}(q, p, t) \end{cases} \quad (7.2a)$$

et injectons les équations (7.1) de la dynamique de Hamilton $H = 0, P_j = \alpha_j, Q_j = \beta_j$:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial q_j} = p_j \\ \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_j} = \beta_j \\ \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial q_j}, t\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (7.3a) \\ (7.3b) \\ (7.3c) \end{matrix}$$

Remarque 7.1.1

$$\frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_j} \text{ est un abus de notation pour } \left. \frac{\partial \mathcal{S}(q, P, t)}{\partial P_j} \right|_{P_j = \alpha_j}.$$

(7.3a) permet de changer de variable dans (7.3c). Celle-ci est une équation différentielle aux dérivées partielles du 1^{er} ordre en q et du 1^{er} ordre en t , appelée *équation de Hamilton-Jacobi en représentation q* , qu'il faut intégrer pour trouver l'action de Hamilton $\mathcal{S}(q, \alpha, t)$ que nous cherchons. Nous pourrions l'intégrer car $\mathcal{H}$ est connu. Elle est à $n + 1$ variables (q, t) , et est non linéaire car $\mathcal{H}$ est une fonction quadratique des p , donc des $\partial \mathcal{S} / \partial q$. Lorsque $\mathcal{S}(q, \alpha, t)$ est déterminée, (7.3b) donnent les équations du mouvement $q_j(t)$.

$\mathcal{S}(q, \alpha, t)$ sera de fait la fonction génératrice de la transformation des coordonnées telle que toutes les nouvelles coordonnées Q soient cycliques.

L'intégration complète de l'équation de Hamilton-Jacobi fait apparaître une constante d'intégration pour chaque variable q et pour le temps, soit $n + 1$ constantes d'intégration arbitraires γ , si bien que la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q, \gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}, t)$$

$\mathcal{S}$ n'apparaît pas dans l'équation de Hamilton-Jacobi, seules ses dérivées partielles sont présentes. Par conséquent, si $\mathcal{S}$ est solution alors $\mathcal{S} + c^{ste}$ est aussi solution, et donc l'une des constantes est purement additive :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q, \gamma_1, \dots, \gamma_n, t) + \gamma_{n+1}$$

Mais une constante additive n'a pas d'importance pour une fonction génératrice puisque seules ses dérivées partielles sont utilisées dans les transformations canoniques (5.7 page 152). Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q, \gamma_1, \dots, \gamma_n, t)$$

Les $P_j = \alpha_j$ et les γ_j étant des constantes non encore fixées, nous pouvons poser $\gamma_j = \alpha_j$, et l'on retrouve :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = \mathcal{S}(q, \alpha, t) \quad (7.4)$$

7.1.3 Fonction F3

Faisons le choix d'une fonction génératrice de type 3. Injectons $H = 0, P_j = \alpha_j, Q_j = \beta_j$ dans (5.11) page 160 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_3(p, \beta, t)}{\partial p_j} = -q_j & (7.5a) \\ \frac{\partial F_3(p, \beta, t)}{\partial \beta_j} = -\alpha_j & (7.5b) \\ \frac{\partial F_3(p, \beta, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_3(p, \beta, t)}{\partial p}, p, t\right) = 0 & (7.5c) \end{cases}$$

(7.5c) est une équation différentielle aux dérivées partielles du 1^{er} ordre en p et du 1^{er} ordre en t , appelée *équation de Hamilton-Jacobi en représentation p* . Elle est à $n + 1$ variables (p, t) , et son degré dépend du degré de $\mathcal{H}$ en fonction de q .

7.1.4 Fonction F4

En injectant $H = 0, P_j = \alpha_j, Q_j = \beta_j$ dans une fonction de type 4 nous obtenons un système d'équations similaire au système d'équations d'une fonction de type 3 :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_4(p, \alpha, t)}{\partial p_j} = -q_j \\ \frac{\partial F_4(p, \alpha, t)}{\partial \alpha_j} = \beta_j \\ \frac{\partial F_4(p, \alpha, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_4}{\partial p}, p, t\right) = 0 \end{cases}$$

7.2 Séparation des variables

7.2.1 Équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps

Dans le cas où $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, c.-à-d. lorsque la somme des énergies potentielles ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q (7.3c) page 190 devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial t} &= -\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}(q, \alpha)\right) \\ \mathcal{S}(q, \alpha, t) &= -\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}(q, \alpha)\right)t + \mathcal{S}_0(q, \alpha) \end{aligned}$$

Cette relation n'est pas cohérente : $\mathcal{S}$ fonction de (q, α, t) dans le membre de gauche, et $\partial \mathcal{S} / \partial q$ fonction de (q, α) dans le membre de droite. Remplaçons $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}_0$ dans le hamiltonien puisque par hypothèse il ne dépend pas explicitement du temps :

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = -\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right)t + \mathcal{S}_0(q, \alpha)$$

$\mathcal{S}_0(q, \alpha)$ est appelée *fonction caractéristique de Hamilton* ou *action réduite*. (4.8) page 133 indique qu'un hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps se conserve, et donc n'est fonction que des constantes d'intégration :

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = -\mathcal{H}(\alpha)t + \mathcal{S}_0(q, \alpha) \quad (7.6)$$

Dans l'action de Hamilton $\mathcal{S}(q, \alpha, t)$, la variable temporelle est maintenant séparée des variables q . Au lieu de garder $\mathcal{H}$ comme fonction des n constantes α_j , il est parfois plus intéressant de poser simplement $\mathcal{H} = \alpha_1$.

D'après le § 4.4 page 134, lorsque le système est holonome scléronome et lorsque le potentiel de force $V(q)$ (la somme des énergies potentielles) ne dépend pas explicitement des vitesses généralisées, le hamiltonien se confond avec l'énergie mécanique et la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q est de la forme

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = -E(\alpha)t + \mathcal{S}_0(q, \alpha) \quad (7.7)$$

dans laquelle $\mathcal{H}(\alpha) = E(\alpha)$. D'après le § 4.4 page 134, l'énergie mécanique étant constante, le système est conservatif. Nous avons déterminé la fonction génératrice de type 2 qui donnera le changement de coordonnées

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} P_j = \alpha_j \\ Q_j = \beta_j \end{cases}$$

avec un nouvel hamiltonien nul :

$$H = 0$$

En remplaçant l'expression de $\mathcal{S}(q, \alpha, t)$ dans les transformations canoniques (7.3) page 190, et avec $\partial \mathcal{S} / \partial q_j = \partial \mathcal{S}_0 / \partial q_j$:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q_j} = p_j \\ -\frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_j} t + \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial \alpha_j} = \beta_j \\ -E + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right) = 0 \end{cases}$$

Remarque 7.2.1

Dans le hamiltonien, le potentiel ne dépendant par hypothèse que des q , seule l'énergie cinétique dépend des $\partial \mathcal{S}_0 / \partial q$.

Nous voyons que nous pouvons utiliser $\mathcal{S}_0$ à la place de $\mathcal{S}$ comme fonction génératrice de la transformation en écrivant :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q_j} = p_j & (7.9a) \\ \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial \alpha_j} = \beta_j + \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_j} t & (7.9b) \\ -E + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right) = 0 & (7.9c) \end{cases}$$

(7.9c) est l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps. La fonction $\mathcal{S}_0$ génère la transformation qui passe des coordonnées (q, p) aux coordonnées (Q_j, P_j) , telles que ((5.7) page 152) :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} P_j = \alpha_j \\ Q_j = \beta_j + \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_j} t \end{cases}$$

Pour trouver le nouvel hamiltonien H' associé à la fonction génératrice $\mathcal{S}_0$, reprenons la relation

générale (7.2a) page 190 :

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\partial \mathcal{S}(q, P, t)}{\partial t} + \mathcal{H}(q, p, t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} [-E(\alpha)t + \mathcal{S}_0(q, \alpha)] + \mathcal{H}(q, p, t) \\
 &= -E(\alpha) + \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial t} + \mathcal{H}(q, p, t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial t} + \mathcal{H}(q, p, t) = E(\alpha)$$

Or, la relation générale (7.2a) page 190 appliquée à H' avec $\mathcal{S}_0(q, \alpha)$ pour fonction génératrice donne :

$$\begin{aligned}
 H' &= \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial t} + \mathcal{H}(q, p, t) \\
 &= E(\alpha)
 \end{aligned}$$

Le nouvel hamiltonien n'est pas fonction des Q , les nouvelles coordonnées sont toutes cycliques.

Exemple 7.2.1 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse glisse sans frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

Pour appliquer la méthode de résolution de Hamilton-Jacobi en représentation q ou p , il faut l'expression du hamiltonien. À partir de sa définition, d'après l'ex. 4.2.2 page 131 :

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} - mgq \sin(\alpha)$$

Nous pouvons obtenir le hamiltonien d'une autre façon. D'après (4.8) page 133, il ne dépend pas explicitement du temps donc il se conserve. La liaison étant holonome scléronome et le potentiel ne dépendant pas des vitesses généralisées, l'énergie mécanique se confond avec le hamiltonien :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(q, p) &= E \\
 &= T + V \\
 &= \frac{p^2}{2m} - mgq \sin(\alpha)
 \end{aligned}$$

Dans cette relation, remplaçons l'impulsion généralisée grâce à (7.9a) page précédente :

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}\right)^2 - mgq \sin(\alpha)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps (7.9c) page 193

donne :

$$\begin{aligned}
 -E + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right) &= 0 \\
 -E + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}\right)^2 - mgq \sin(\alpha) &= 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q} &= \pm \sqrt{2mE + 2m^2 gq \sin(\alpha)} \\
 \mathcal{S}_0(q, E) &= \pm \int \sqrt{2mE + 2m^2 gq \sin(\alpha)} dq + c \\
 &= \pm \frac{1}{3m^2 g \sin(\alpha)} (2mE + 2m^2 gq \sin(\alpha))^{3/2} + c
 \end{aligned}$$

Nous pouvons oublier la constante d'intégration car seules les dérivées de la fonction principale de Hamilton interviennent dans la résolution du problème. (7.9b) page 193 donne l'équation du mouvement $t(q)$:

$$\begin{aligned}
 \beta &= -t + \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} \\
 &= -t \pm \frac{1}{mg \sin(\alpha)} \sqrt{2mE + 2m^2 gq \sin(\alpha)} \\
 &= -t \pm \frac{1}{g \sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2E}{m} + 2gq \sin(\alpha)}
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Remarque 7.2.2

Pour trouver (7.10) on peut aussi garder $\mathcal{S}$ sous forme d'intégrale et dériver sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \beta &= -t \pm \int \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{2mE + 2m^2 gq \sin(\alpha)} dq \\
 &= -t \pm m \int \frac{dq}{\sqrt{2mE + 2m^2 gq \sin(\alpha)}} \\
 &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 + \frac{mg \sin(\alpha)}{E} q}}
 \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$q' = \frac{mg \sin(\alpha)}{E} q \Rightarrow q = \frac{E}{mg \sin(\alpha)} q' \Rightarrow dq = \frac{E}{mg \sin(\alpha)} dq'$$

qui donne,

$$\begin{aligned}
 \beta &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{E}{mg \sin(\alpha)} \int \frac{dq'}{\sqrt{1 + q'}} \\
 &= -t \pm \frac{2}{g \sin(\alpha)} \sqrt{\frac{E}{2m}} \sqrt{1 + q'} \\
 &= -t \pm \frac{1}{g \sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 + \frac{mg \sin(\alpha)}{E} q} \\
 &= -t \pm \frac{1}{g \sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2E}{m} + 2gq \sin(\alpha)}
 \end{aligned}$$

et l'on retrouve bien le résultat (7.10).

En isolant la coordonnée généralisée q on trouve l'équation du mouvement $q(t)$:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2g \sin(\alpha)} \left\{ [\pm(t + \beta)g \sin(\alpha)]^2 - \frac{2E}{m} \right\} \\ &= \frac{1}{2} g(t + \beta)^2 \sin(\alpha) - \frac{E}{mg \sin(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} gt^2 \sin(\alpha) + g\beta t \sin(\alpha) + \frac{1}{2} g\beta^2 \sin(\alpha) - \frac{E}{mg \sin(\alpha)} \end{aligned}$$

Exprimons les constantes E et β en fonction des conditions initiales q_0 et $\dot{q}_0$. La constante β a même valeur à un instant t quelconque et à l'instant initial $t = 0$:

$$\beta = \pm \frac{1}{g \sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2E}{m} + 2gq_0 \sin(\alpha)}$$

L'énergie est constante, sa valeur est celle de l'instant initial :

$$E = \frac{p_0^2}{2m} - mgq_0 \sin(\alpha)$$

Avec (4.4) page 131 :

$$\dot{q}_0^2 = \frac{2E}{m} + 2gq_0 \sin(\alpha)$$

Si bien que

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} gt^2 \sin(\alpha) \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + 2gq_0 \sin(\alpha)} t + \frac{1}{2g \sin(\alpha)} \left(\frac{2E}{m} + 2gq_0 \sin(\alpha) \right) - \frac{E}{mg \sin(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} gt^2 \sin(\alpha) \pm \frac{\dot{q}_0}{m} t + q_0 \end{aligned}$$

Nous gardons le signe positif car si g et q_0 sont nuls alors q croît avec le temps lorsque $\dot{q}_0$ est positif :

$$q = \frac{1}{2} gt^2 \sin(\alpha) + \frac{\dot{q}_0}{m} t + q_0$$

Exemple 7.2.2 : Oscillateur harmonique simple à une dimension

D'après l'ex. 6.7.3 page 183, le hamiltonien est constant et se confond avec l'énergie mécanique :

$$\mathcal{H}(q, p) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \quad (7.11)$$

Remplaçons l'impulsion généralisée grâce à (7.9a) page 193 :

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2} q^2$$

L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps (7.9c) page 193 donne :

$$-E + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2} q^2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - mkq^2}$$

$$\mathcal{S}_0(q, E) = \pm \sqrt{2Em} \int \sqrt{1 - \frac{kq^2}{2E}} dq \quad (7.12)$$

où la constante est choisie nulle. Effectuons le changement de variable suivant :

$$q' = q\sqrt{\frac{k}{2E}} \Rightarrow q'^2 = \frac{kq^2}{2E} \quad \text{et} \quad q = q'\sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow dq = \sqrt{\frac{2E}{k}} dq'$$

qui donne,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(q, E, t) &= \pm \sqrt{2Em} \sqrt{\frac{2E}{k}} \int \sqrt{1 - q'^2} dq' \\ &= \pm 2E \sqrt{\frac{m}{k}} (q' \sqrt{1 - q'^2} + \arcsin q') \\ \mathcal{S}_0(q, E, t) &= \pm 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \left[q \sqrt{\frac{k}{2E}} \sqrt{1 - \frac{kq^2}{2E}} + \arcsin \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) \right] \\ &= \pm q \sqrt{2mE - mkq^2} \pm 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) \end{aligned}$$

(7.9b) page 193 donne l'équation du mouvement $t(q)$:

$$\begin{aligned} \beta &= -t + \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} \\ &= -t \pm \frac{qm}{\sqrt{2mE - mkq^2}} \pm 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) \mp 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \times \frac{q \sqrt{k/2}}{E \sqrt{4E - 2q^2 k}} \\ &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) \end{aligned}$$

Remarque 7.2.3

On peut aussi garder $\mathcal{S}$ sous forme d'intégrale et dériver sous l'intégrale :

$$\begin{aligned} \beta &= -t + \frac{\partial}{\partial E} \left(\pm \int \sqrt{2mE - mkq^2} dq \right) \\ &= -t \pm \int \frac{m dq}{\sqrt{2mE - mkq^2}} \\ &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E} q^2}} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Effectuons le même changement de variable que précédemment, nous avons

$$\begin{aligned} \beta &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \int \frac{dq'}{\sqrt{1 - q'^2}} \\ &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin q' \\ &= -t \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) \end{aligned}$$

et l'on retrouve le résultat.

En isolant la coordonnée généralisée q on trouve l'équation du mouvement $q(t)$:

$$\arcsin\left(q\sqrt{\frac{k}{2E}}\right) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \beta)$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \beta)\right]$$

En posant,

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$\varphi_0 = \omega\beta \quad (7.14)$$

nous avons :

$$q = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (7.15)$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q}$$

$$= \pm\sqrt{2mE - mkq^2}$$

$$= \pm\sqrt{2mE - 2mE \sin^2\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \beta)\right]}$$

$$= \pm\sqrt{2mE} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.16)$$

Déterminons les constantes E et φ_0 en fonction des conditions initiales q_0 et p_0 :

$$\begin{cases} q_0 = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\varphi_0) \\ p_0 = \pm\sqrt{2mE} \cos(\varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0^2 = \frac{2E}{m\omega^2} \sin^2 \varphi_0 \\ p_0^2 = 2mE \cos^2 \varphi_0 \end{cases}$$

$$2mE(\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2$$

$$E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{k}{2} q_0^2$$

Nous retrouvons (7.11) page 196. Pour φ_0 nous avons,

$$\frac{q_0}{p_0} = \frac{1}{m\omega} \tan \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \arctan(m\omega q_0/p_0)$$

et à partir de (7.14) nous avons l'expression de la constante β :

$$\beta = \varphi_0/\omega$$

$$= \arctan(m\omega q_0/p_0)/\omega$$

7.2.2 Équation de Hamilton-Jacobi en représentation p indépendante du temps

Dans le cas où $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation p (7.5c) page 191 devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3(p, \beta, t)}{\partial t} &= -\mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_3}{\partial p}(p, \beta), p\right) \\ F_3(p, \beta, t) &= -\mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_3}{\partial p}(p, \beta), p\right)t + F_{30}(p, \beta)\end{aligned}$$

Remplaçons F_3 par F_{30} dans le hamiltonien puisque par hypothèse il ne dépend pas explicitement du temps :

$$F_3(p, \beta, t) = -\mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_{30}(p, \beta)}{\partial p}, p\right)t + F_{30}(p, \beta)$$

(4.8) page 133 indique qu'un hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps se conserve, et donc n'est fonction que des constantes d'intégration :

$$F_3(p, \beta, t) = -\mathcal{H}(\beta)t + F_{30}(p, \beta)$$

D'après le § 4.4 page 134, lorsque le système est holonome scléronome et lorsque le potentiel de force $V(q, t)$ (la somme des énergies potentielles) ne dépend pas explicitement des vitesses généralisées, le hamiltonien se confond avec l'énergie mécanique et la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q est de la forme

$$F_3(p, \beta, t) = -E(\beta)t + F_{30}(p, \beta)$$

dans laquelle $\mathcal{H}(\beta) = E(\beta)$.

En remplaçant l'expression de $F_3(p, \beta, t)$ dans les transformations canoniques (7.5) page 191, et avec $\partial F_3/\partial p_j = \partial F_{30}/\partial p_j$:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_{30}(p, \beta)}{\partial p_j} = -q_j \\ \frac{\partial F_3(p, \beta, t)}{\partial \beta_j} = -\alpha_j \\ -E(\beta) + \mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_{30}}{\partial p}, p\right) = 0 \end{cases} \quad (7.17a)$$

(7.17a) est l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation p indépendante du temps. Nous voyons que nous pouvons utiliser F_{30} à la place de F_3 comme fonction génératrice de la transformation :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial F_{30}(p, \beta)}{\partial p_j} = -q_j \\ \frac{\partial F_{30}(p, \beta, t)}{\partial \beta_j} = t - \alpha_j \\ -E(\beta) + \mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_{30}}{\partial p}, p\right) = 0 \end{cases} \quad (7.18a)$$

Exemple 7.2.3

Reprenons l'ex. 7.2.1 page 194 d'une masse glissant sans frottements sur un plan incliné. Le hamiltonien a pour expression :

$$\mathcal{H}(q, p) = E = \frac{p^2}{2m} - mgq \sin(\alpha)$$

Remplaçons la coordonnée généralisée grâce à (7.18a) :

$$\mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_{30}(p, \beta)}{\partial p_j}, p\right) = \frac{p^2}{2m} + mg \frac{\partial F_{30}(p, \beta)}{\partial p_j} \sin(\alpha)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation p indépendante du temps (7.17a) donne :

$$\begin{aligned} -E(\beta) + \mathcal{H}\left(-\frac{\partial F_{30}}{\partial p}, p\right) &= 0 \\ -E + \frac{p^2}{2m} + mg \frac{\partial F_{30}}{\partial p} \sin(\alpha) &= 0 \\ \frac{\partial F_{30}}{\partial p} &= \frac{1}{mg \sin(\alpha)} \left(E - \frac{p^2}{2m}\right) \\ F_{30} &= \frac{1}{mg \sin(\alpha)} \int E - \frac{p^2}{2m} dp \\ &= \frac{1}{mg \sin(\alpha)} \left(V - \frac{p^3}{6m}\right) + c \end{aligned}$$

où l'on a supprimé la constante d'intégration. (7.5b) page 191 donne $p(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= t - \frac{\partial F_{30}}{\partial E} \\ &= t - \frac{p}{mg \sin(\alpha)} \\ p &= mg \sin(\alpha) (t - \alpha_1) \end{aligned}$$

Notons p_0 la condition initiale sur l'impulsion :

$$p_0 = -mg \sin(\alpha) \alpha_1$$

(7.5a) page 191 donne l'équation du mouvement $q(t)$,

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial F_{30}}{\partial p} \\ &= -\frac{1}{mg \sin(\alpha)} \left(E - \frac{p^2}{2m}\right) \\ &= -\frac{E}{mg \sin(\alpha)} + \frac{1}{2m^2 g \sin(\alpha)} [m^2 g^2 \sin^2(\alpha) (t - \alpha_1)^2] \\ &= \frac{1}{2} g (t - \alpha_1)^2 \sin(\alpha) - \frac{E}{mg \sin(\alpha)} \end{aligned}$$

7.2.3 Cas des coordonnées cycliques

Nous parlons ici des anciennes variables, les nouvelles étant toutes cycliques. Supposons que q_1 n'apparaisse pas dans le hamiltonien. D'après le § 3.3.2 page 108, si q_1 est cyclique alors son moment conjugué p_1 est constant :

$$\mathcal{H}\left(q_2, \dots, q_n, p_1, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_n}, t\right)$$

Dans l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q dépendante du temps (7.3c) page 190, la coordonnée q_1 n'apparaissant pas dans le membre de droite elle ne peut apparaître dans celui de gauche :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(q_2, \dots, q_n, p_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) = -\mathcal{H}\left(q_2, \dots, q_n, p_1, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_n}, t\right)$$

Par conséquent

$$\mathcal{S}(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = p_1 q_1 + \mathcal{S}_1(q_2, \dots, q_n, p_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t)$$

et l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q dépendante du temps se réécrit :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(q_2, \dots, q_n, p_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) = -\mathcal{H}\left(q_2, \dots, q_n, p_1, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_n}, t\right)$$

Les équations de Hamilton-Jacobi permettent la séparation des variables cycliques.

Exemple 7.2.4 : Balistique

Étudions le mouvement dans le plan (x, y) d'un projectile dans le champ de gravitation terrestre en l'absence de frottement de l'air. La force de pesanteur dérivant d'une énergie potentielle, le hamiltonien se conserve et est égal à l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy \\ &= E\end{aligned}$$

Le temps est cyclique, l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps (7.9c) page 193 s'écrit :

$$\begin{aligned}-E + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right) &= 0 \\ \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial y} \right)^2 \right] + mgy &= E\end{aligned}$$

La variable x étant cyclique, appliquons la séparation des variables :

$$\mathcal{S}_0(x, y, E, \alpha_2, t) = \alpha_2 x + \mathcal{S}_1(y, E, \alpha_2, t)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m} \left[\alpha_2^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial y} \right)^2 \right] + mgy &= E \\ \left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial y} \right)^2 &= 2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2 \\ \mathcal{S}_1 &= \pm \int \sqrt{2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2} dy + c \\ &= \mp \frac{1}{3m^2g} (2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2)^{3/2} + c\end{aligned}$$

L'action (de Hamilton) s'écrit,

$$\mathcal{S} = -Et + \alpha_2 x \mp \frac{1}{3m^2g} (2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2)^{3/2}$$

définie à une constante additive près. (7.3b) page 190 donnent d'une part l'équation du mouvement $t(y)$:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} \\ &= -t \mp \frac{1}{3m^2g} \times \frac{3}{2} (2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2)^{1/2} \times 2m \\ &= -t \mp \frac{1}{mg} \sqrt{2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2}\end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de la constante β_1 , prenons l'instant initial ($t = 0$) :

$$\beta_1 = \mp \frac{1}{mg} \sqrt{2mE - 2m^2gy_0 - \alpha_2^2}$$

On inverse la relation pour trouver l'équation du mouvement $y(t)$:

$$\begin{aligned}[mg(t + \beta_1)]^2 &= 2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2 \\ 2m^2gy &= -m^2g^2(t + \beta_1)^2 + 2mE - \alpha_2^2 \\ y &= -\frac{g}{2}(t + \beta_1)^2 + \frac{E}{mg} - \frac{\alpha_2^2}{2m^2g} \\ y_0 &= -\frac{g\beta_1^2}{2} + \frac{E}{mg} - \frac{\alpha_2^2}{2m^2g}\end{aligned}$$

Nous pouvons exprimer β_1 en fonction des conditions initiales :

$$\dot{y} = -g(t + \beta_1) \Rightarrow \dot{y}_0 = -g\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\dot{y}_0}{g}$$

D'autre part, (7.3b) page 190 donnent l'équation de la trajectoire $x(y)$:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[-Et + \alpha_2 x \mp \frac{1}{3m^2g} (2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2)^{3/2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= x \mp \frac{1}{3m^2g} \times \frac{3}{2} (2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2)^{1/2} \times (-2)\alpha_2 \\ &= x \pm \frac{\alpha_2}{m^2g} \sqrt{2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2}\end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de la constante β_2 , on considère l'instant initial :

$$\begin{aligned}\beta_2 &= x_0 \pm \frac{\alpha_2}{m^2g} \sqrt{2mE - 2m^2gy_0 - \alpha_2^2} \\ &= x_0 - \frac{\alpha_2\beta_1}{m} \\ &= x_0 + \frac{\alpha_2\dot{y}_0}{mg}\end{aligned}$$

On inverse la relation pour trouver l'équation de la trajectoire $y(x)$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{m^2g}{\alpha_2} (\beta_2 - x) \right]^2 &= 2mE - 2m^2gy - \alpha_2^2 \\ 2m^2gy &= -\frac{m^4g^2}{\alpha_2^2} (\beta_2 - x)^2 + 2mE - \alpha_2^2 \\ y &= -\frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2 - x)^2 + \frac{E}{mg} - \frac{\alpha_2^2}{2m^2g} \\ &= -\frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2^2 - 2\beta_2x + x^2) + y_0 + \frac{g\beta_1^2}{2} \\ &= -\frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2^2 - 2\beta_2x + x^2) + y_0 + \frac{\dot{y}_0^2}{2g}\end{aligned}\tag{7.19}$$

Notons x_0 la condition initiale sur la position horizontale :

$$\begin{aligned}y_0 &= -\frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2^2 - 2\beta_2x_0 + x_0^2) + y_0 + \frac{\dot{y}_0^2}{2g} \\ \frac{\dot{y}_0^2}{2g} &= \frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2^2 - 2\beta_2x_0 + x_0^2)\end{aligned}$$

En remplaçant $\dot{y}_0^2/(2g)$ puis β_2 dans (7.19) :

$$\begin{aligned}y &= -\frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2^2 - 2\beta_2x + x^2) + \frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (\beta_2^2 - 2\beta_2x_0 + x_0^2) + y_0 \\ &= \frac{m^2g}{\alpha_2^2} \beta_2(x - x_0) - \frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (x^2 - x_0^2) + y_0 \\ &= \frac{m^2g}{\alpha_2^2} \left(x_0 + \frac{\alpha_2\dot{y}_0}{mg} \right) (x - x_0) - \frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (x^2 - x_0^2) + y_0 \\ &= \frac{m^2g(x - x_0)}{\alpha_2^2} \left[x_0 + \frac{\alpha_2\dot{y}_0}{mg} - \frac{(x + x_0)}{2} \right] + y_0 \\ &= \frac{m^2g(x - x_0)}{\alpha_2^2} \left[\frac{\alpha_2\dot{y}_0}{mg} - \frac{(x - x_0)}{2} \right] + y_0 \\ &= -\frac{m^2g}{2\alpha_2^2} (x - x_0)^2 + \frac{m\dot{y}_0}{\alpha_2} (x - x_0) + y_0\end{aligned}$$

Avec (7.3a) page 190,

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \\ m\dot{x}_0 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

nous avons l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2\dot{x}_0^2} (x - x_0)^2 + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} (x - x_0) + y_0 \quad (7.20)$$

7.2.4 Équation de Hamilton-Jacobi et forme du hamiltonien

Lorsque le hamiltonien est de la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_1}\right) + \mathcal{H}_a\left(q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}_a}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_a}{\partial q_n}, t\right)$$

nous supposons que q_1 est une variable séparable la fonction principale de Hamilton :

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = \mathcal{S}_a(q_2, \dots, q_n, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) + \mathcal{S}_1(q_1, \alpha_1)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q dépendante du temps (7.3c) page 190 devient

$$\frac{\partial \mathcal{S}_a(q_2, \dots, q_n, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t)}{\partial t} + \mathcal{H}_1\left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_1}\right) + \mathcal{H}_a\left(q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}_a}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_a}{\partial q_n}, t\right) = 0$$

$\mathcal{H}_1$ étant la seule fonction de q_1 , nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1\left(q_1, \frac{d\mathcal{S}_1(q_1, \alpha_1)}{dq_1}\right) = \alpha_1 \\ \frac{\partial \mathcal{S}_a(q_2, \dots, q_n, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t)}{\partial t} + \mathcal{H}_a\left(q_2, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}_a}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_a}{\partial q_n}, t\right) = -\alpha_1 \end{cases}$$

La première équation différentielle, du 1^{er} ordre en q_1 et du second degré en $d\mathcal{S}_1/dq_1$, permet d'obtenir $\mathcal{S}_1$. De même, si le hamiltonien est de la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_1}\right) + \mathcal{H}_2\left(q_2, \frac{d\mathcal{S}_2}{dq_2}\right) + \mathcal{H}_b\left(q_3, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial q_n}, t\right)$$

nous supposons q_1 et q_2 séparables dans la fonction principale de Hamilton :

$$\mathcal{S}(q, \alpha, t) = \mathcal{S}_b(q_3, \dots, q_n, \alpha_3, \dots, \alpha_n, t) + \mathcal{S}_1(q_1, \alpha_1) + \mathcal{S}_2(q_2, \alpha_2)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q dépendante du temps (7.3c) page 190 devient

$$\frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial t} + \mathcal{H}_1\left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial q_1}\right) + \mathcal{H}_2\left(q_2, \frac{d\mathcal{S}_2}{dq_2}\right) + \mathcal{H}_b\left(q_3, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial q_n}, t\right) = 0$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1\left(q_1, \frac{d\mathcal{S}_1(q_1, \alpha_1)}{dq_1}\right) = \alpha_1 \\ \mathcal{H}_2\left(q_2, \frac{d\mathcal{S}_2(q_2, \alpha_2)}{dq_2}\right) = \alpha_2 \\ \frac{\partial \mathcal{S}_b(q_3, \dots, q_n, \alpha_3, \dots, \alpha_n, t)}{\partial t} + \mathcal{H}_b\left(q_3, \dots, q_n, \frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial q_3}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}_b}{\partial q_n}, t\right) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{cases}$$

Les équations de Hamilton-Jacobi permettent parfois la séparation de variables non cycliques, selon comment elles apparaissent dans le hamiltonien.

Exemple 7.2.5 : Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , la vitesse a pour expression,

$$\vec{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

et l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} T &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

On considère un mobile dans un champ de force d'énergie potentielle $V(q)$ indépendante des vitesses généralisées $\dot{q}$. D'après la déf. 3.4.1 page 109 les impulsions généralisées ont pour expressions

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} \end{cases}$$

et le hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2(\theta)} \right) + V(r, \theta, \phi)$$

et les variables pourront être séparées si,

$$V(r, \theta, \phi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2\sin^2(\theta)}$$

où $a(r)$, $b(\theta)$ et $c(\phi)$ sont des fonctions arbitraires, car alors le hamiltonien aura la forme vue au § 7.2.4 page ci-contre. La symétrie sphérique étant rompue par le $\sin^2(\theta)$, le terme $c(\phi)$ est choisi nul :

$$V(r, \theta) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q dépendante du temps (7.3c) page 190 s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}(q, \alpha, t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}, t\right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \right)^2 \right] + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons vu ((7.4) page 191) que le nombre de constantes dans $\mathcal{S}$ est égale au nombre de coordonnées généralisées. Le hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps et l'énergie potentielle n'étant pas fonction des vitesses généralisées, nous cherchons une solution de la forme (7.7) page 193 :

$$\mathcal{S}(r, \theta, \phi, E, \alpha_2, \alpha_3, t) = -Et + S_0(r, \theta, \phi, E, \alpha_2, \alpha_3)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \phi} \right)^2 \right] + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} = E$$

La coordonnée ϕ étant cyclique (elle n'apparaît pas dans $\mathcal{H}$) son moment conjugué p_ϕ est constant, d'après le § 7.2.3 page 201 nous pouvons la séparer :

$$\mathcal{S}_0(r, \theta, \phi, E, p_\phi, \alpha_3) = p_\phi \phi + \mathcal{S}_1(r, \theta, E, p_\phi, \alpha_3)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right] + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} &= E \\ r^2 \left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial r} \right)^2 + 2mr^2 a(r) - 2mr^2 E + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)} + 2mb(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

D'après le § 7.2.4 page 204, nous supposons les variables séparables dans l'expression de l'action de Hamilton (donc aussi dans $\mathcal{S}_1$) :

$$\mathcal{S}_1(r, \theta, \phi, E, p_\phi, \alpha_3) = \mathcal{S}_2(r, E, p_\phi, \alpha_3) + \mathcal{S}_3(\theta, E, p_\phi, \alpha_3)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{d\mathcal{S}_2}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\mathcal{S}_3}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right] + a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} &= E \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{d\mathcal{S}_2}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[\left(\frac{d\mathcal{S}_3}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)} + 2mb(\theta) \right] &= E \end{aligned}$$

et donne le système suivant,

$$\begin{cases} \left(\frac{d\mathcal{S}_3}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)} + 2mb(\theta) = \alpha_3 \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{d\mathcal{S}_2}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\alpha_3}{2mr^2} = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\mathcal{S}_3}{d\theta} = \pm \sqrt{\alpha_3 - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)}} \\ \frac{d\mathcal{S}_2}{dr} = \pm \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\alpha_3}{r^2}} \end{cases}$$

où α_3 est la dernière constante arbitraire (après p_ϕ et E). L'intégration donne :

$$\mathcal{S} = -Et + p_\phi \phi \pm \int \sqrt{\alpha_3 - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)}} d\theta \pm \int \sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\alpha_3}{r^2}} dr$$

(7.3b) page 190 donne l'équation du mouvement $t(q)$:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} = \beta_1, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p_\phi} = \beta_2, \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_3} = \beta_3$$

7.3 Représentation de l'action de Hamilton

Considérons un mobile se déplaçant dans un champ de *forces conservatives* (chaque force dérive d'un potentiel). Prenons les coordonnées rectangulaires comme coordonnées généralisées :

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z \quad \text{et} \quad p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z$$

D'après (7.3a) page 190 :

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} [\mathcal{S}(\vec{r}, t)] \quad (7.21)$$

Le gradient d'une fonction f quelconque est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentiellles ($f = c^{ste}$) de cette fonction. Par conséquent les trajectoires sont à la fois tangentes au vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ et normales aux surfaces équipotentiellles $\mathcal{S}$, surfaces pour lesquelles l'action est constante. Les trajectoires sont les rayons des surfaces équi-action.

Supposons de plus que l'énergie potentielle ne dépende pas explicitement du temps (elle dépend toujours implicitement du temps par l'intermédiaire de la position du mobile). Sous cette condition, l'énergie mécanique E se conserve dans le temps et devient une constante du mouvement. Nous cherchons alors une solution de la forme (7.7) page 193,

$$\mathcal{S}(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = -Et + \mathcal{S}_0(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (7.22)$$

ce qui implique

$$\overrightarrow{\text{grad}} [\mathcal{S}(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)] = \overrightarrow{\text{grad}} [\mathcal{S}_0(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)]$$

(7.21) devient :

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial z} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}} [\mathcal{S}_0(\vec{r})] \quad (7.23)$$

Réciproquement, à un champ $\mathcal{S}_0$ donné correspond toutes les trajectoires perpendiculaires aux surfaces équipotentiellles de $\mathcal{S}_0$ et nous avons :

$$\Delta \mathcal{S}_0 = \int \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Au signe négatif près, l'impulsion $\vec{p}$ est analogue à un champ électrique et les surfaces $\mathcal{S}_0$ aux équipotentiellles de ce champ.

Les surfaces équi-action $\mathcal{S}$ qui dans l'espace de configuration coïncident à chaque instant avec les différentes surfaces équi-action $\mathcal{S}_0$ s'identifient aux surfaces d'onde progressives équi-phases. Les surfaces équi-action $\mathcal{S}_0$ sont fixes dans l'espace puisqu'indépendantes du temps. En un point donné de l'espace, la valeur des surfaces équi-action $\mathcal{S}$ évolue dans le temps selon (7.22). Cependant, nous pouvons aussi considérer que les surfaces équi-action $\mathcal{S}$ se déplacent dans l'espace au cours du temps selon cette même équation.

Remarque 7.3.1

Ceci a pour analogue en mécanique des fluides, la représentation de Lagrange dans laquelle on suit une particule du fluide, et celle d'Euler où l'on se place en un point donné duquel on observe le mouvement du fluide.

Suivons p. ex. le trajet de la surface équiaction $\mathcal{S} = 0$:

À $t = 0$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$. Elle est donc superposée avec la surface équiaction $\mathcal{S}_0 = 0$.

À $t = 1$, $\mathcal{S} = -E + \mathcal{S}_0$. Elle est superposée avec la surface équiaction $\mathcal{S}_0 = E$.

À $t = 2$, $\mathcal{S} = -2E + \mathcal{S}_0$. Elle est superposée avec la surface équiaction $\mathcal{S}_0 = 2E$.

Les surfaces d'action constantes $\mathcal{S}$ se déplacent donc dans l'espace au cours du temps à travers les surfaces $\mathcal{S}_0$ constantes, dans le sens des $\mathcal{S}_0$ croissantes si l'énergie mécanique E est positive.

Calculons la vitesse à laquelle ces surfaces $\mathcal{S}$ constantes se déplacent dans l'espace au cours du temps. (7.22) montre que pour rester constante au cours du temps, la surface $\mathcal{S}$ doit en se déplaçant de surface $\mathcal{S}_0$ en surface $\mathcal{S}_0$ compenser le gain ou la perte de valeur $-Et$. Ce sont donc le gradient des $\mathcal{S}_0$ et l'énergie mécanique E qui vont intervenir dans la vitesse des surfaces $\mathcal{S}$. Plaçons-nous à bord d'une surface $\mathcal{S}$. D'une part

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = 0$$

car la valeur de cette surface est constante dans le temps pour un observateur qui lui est lié, et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= -E + \frac{d\mathcal{S}_0}{dt} \\ &= -E + \overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{S}_0) \cdot \frac{d\vec{r}_{\mathcal{S}_0}}{dt} \\ &= -E + \vec{p} \cdot \vec{v}_{\mathcal{S}_0} \end{aligned}$$

où $\vec{v}_{\mathcal{S}_0}$ est le vecteur vitesse de chacune des surfaces $\mathcal{S}_0$ vu depuis $\mathcal{S}$, donc vers « l'arrière ». Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{v}_{\mathcal{S}_0}$ étant perpendiculaires aux surfaces $\mathcal{S}$, ils sont colinéaires. De plus ils sont de sens contraire :

$$\vec{p} \cdot \vec{v}_{\mathcal{S}_0} = -\|\vec{p}\| \|\vec{v}_{\mathcal{S}_0}\|$$

Nous avons donc, vu d'une surface $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} -E - \|\vec{p}\| \|\vec{v}_{\mathcal{S}_0}\| &= 0 \\ \|\vec{v}_{\mathcal{S}_0}\| &= \frac{-E}{\|\vec{p}\|} \end{aligned}$$

Plaçons-nous maintenant à bord d'une surface $\mathcal{S}_0$ pour observer une surface $\mathcal{S}$:

$$\|\vec{v}_{\mathcal{S}}\| = \frac{E}{\|\vec{p}\|} \quad (7.24)$$

À énergie mécanique E constante, plus la vitesse des particules est grande, c.-à-d. plus $\|\vec{p}\|$ est grand, plus les surfaces $\mathcal{S}$ sont lentes. Nous reconnaissons l'expression d'une vitesse de phase. Les surfaces d'action constante sont des surfaces d'ondes progressives dans l'espace des q , qui restent les mêmes au cours du temps et dont la vitesse de phase est donnée par (7.24).

Nous obtenons la vitesse de la particule à partir de (7.22) page 207 :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= \mathcal{S} + Et \\ \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} &= t \\ \frac{\partial}{\partial E}(\mathrm{d}\mathcal{S}_0) &= \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Soit s la distance parcourue par la particule mesurée le long de sa trajectoire :

$$\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial s} \mathrm{d}s \right)$$

Avec (7.23) page 207

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t &= \frac{\partial p}{\partial E} \mathrm{d}s \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial p}{\partial E}\end{aligned}$$

D'où :

$$v_{\text{particule}} = \frac{\partial E}{\partial p}$$

Nous reconnaissons l'expression d'une vitesse de groupe.

Exemple 7.3.1

Reprenons l'ex. 7.2.4 page 201 de balistique, en trois dimensions pour l'exemple (bien entendu, la solution est en deux dimensions). L'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps s'écrit :

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = E$$

Les variables x et y étant cycliques, nous appliquons la séparation des variables,

$$\mathcal{S}_0(x, y, z, E, \alpha_x, \alpha_y, t) = \alpha_x x + \alpha_y y + \mathcal{S}_z(z, E, \alpha_x, \alpha_y, t) \quad (7.25)$$

et l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m} \left[\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_z}{\mathrm{d}z} \right)^2 \right] + mgz &= E \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_z}{\mathrm{d}z} \right)^2 + mgz &= E - \frac{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}{2m} \\ &= \alpha_z\end{aligned}$$

L'introduction de cette nouvelle constante α_z permet de simplifier la résolution du problème.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_z &= \pm \int \sqrt{2m(\alpha_z - mgz)} \mathrm{d}z + c \\ &= \mp \frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (\alpha_z - mgz)^{3/2} + c\end{aligned}$$

On pose α_z de la forme $\alpha_z = mgh$, avec h constante,

$$\begin{cases} \mathcal{S}_z = \mp \frac{2m}{3} \sqrt{2g} (h - z)^{3/2} + c \\ E = \frac{1}{2m} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2) + mgh \end{cases}$$

si bien que l'action de Hamilton s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -Et + \alpha_x x + \alpha_y y + \mathcal{S}_z \\ &= - \left[\frac{1}{2m} (\alpha_x^2 + \alpha_y^2) + mgh \right] t + \alpha_x x + \alpha_y y \mp \frac{2m}{3} \sqrt{2g} (h - z)^{3/2} \end{aligned}$$

définie à une constante additive près. (7.3b) page 190 donnent les équations du mouvement,

$$\beta_x = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_x}, \quad \beta_y = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_y}, \quad \beta_z = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_z}$$

où,

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_z} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial (mgh)}$$

Nous savons que $\partial \mathcal{S} / \partial \alpha_z$ est un abus de notation, nous ne pouvons pas dériver par rapport à une constante. Dans mgh , seule h est une nouvelle constante car m et g apparaissent déjà dans $\mathcal{S}$. Donc h est supposée variable pour effectuer la dérivation puis posée constante :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_z} = \frac{1}{mg} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial h}$$

β_z étant une constante quelconque, on peut supprimer mg et poser $\beta_z = \partial \mathcal{S} / \partial h$.

$$\beta_x = x - \frac{\alpha_x t}{m}, \quad \beta_y = y - \frac{\alpha_y t}{m}, \quad \beta_z = \mp m \sqrt{2g(h - z)} - mgt$$

(7.3a) page 190 donne les impulsions généralisées :

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} = \alpha_x, \quad p_y = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} = \alpha_y, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} = \pm m \sqrt{2g(h - z)}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} p_z^2 &= 2gm^2(h - z) \\ \frac{p_z^2}{2m} &= mgh - mgz \end{aligned}$$

et l'on vérifie que :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgh \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz \end{aligned}$$

mgz est l'énergie potentielle fonction de la hauteur z , et h est la hauteur maximale atteinte par le projectile. Reprenons les expressions des impulsions :

$$m\dot{x} = \alpha_x, \quad m\dot{y} = \alpha_y, \quad m\dot{z} = \pm m \sqrt{2g(h - z)}$$

La vitesse dans le plan horizontal (x, y) est constante et vaut la vitesse initiale :

$$m\dot{x}_0 = \alpha_x, \quad m\dot{y}_0 = \alpha_y, \quad \dot{z}_0 = \pm\sqrt{2g(h - z_0)} \quad (7.26)$$

La fonction caractéristique de Hamilton, (7.25) page 209, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \alpha_x x + \alpha_y y + \mathcal{S}_z \\ &= m\dot{x}_0 x + m\dot{y}_0 y \mp \frac{2}{3}m\sqrt{2g}(h - z)^{3/2} \end{aligned}$$

Si l'on pose que la vitesse dans le plan horizontal est nulle

$$\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$$

ainsi que la hauteur maximale atteinte en z

$$h = 0$$

cela correspond à un tir parfaitement vertical dirigé vers le haut, de hauteur maximale $h = 0$. Alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mp \frac{2}{3}m\sqrt{2g}(-z)^{3/2}$$

$z \leq 0$ puisque la hauteur maximale est nulle. De plus $\mathcal{S}_0 = c^{ste}$ implique $z = c^{ste}$: les surfaces $\mathcal{S}_0 = c^{ste}$ sont des plans à z constante inférieure à zéro (plans parallèles au plan (x, y)).

En $z = 0$, $\mathcal{S}_0 = 0$

En $z = -1$, $\mathcal{S}_0 = \mp \frac{2}{3}m\sqrt{2g}$

En $z = -2$, $\mathcal{S}_0 = \mp \frac{8}{3}m\sqrt{g}$

La fonction principale de Hamilton $\mathcal{S}$ se propage dans le sens des $\mathcal{S}_0$ croissantes. D'abord vers le haut car $\mathcal{S}_0$ est négative et croît pour atteindre 0 en h , puis vers le bas car $\mathcal{S}_0$ est positive et croît vers le bas. Les trajectoires sont donc des demi-droites verticales ascendantes jusqu'à h , puis descendantes.

Prenons maintenant une vitesse horizontale constante strictement positive, p. ex. :

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2g}, \quad h = 0$$

La fonction caractéristique de Hamilton s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= m\dot{y}_0 y \mp \frac{2}{3}m\sqrt{2g}(-z)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}m\sqrt{2g} y \mp \frac{2}{3}m\sqrt{2g}(-z)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}m\sqrt{2g} [y \mp (-z)^{3/2}] \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_0 = c^{ste}$ implique,

$$\begin{aligned} y \mp (-z)^{3/2} &= c^{ste} \\ y &= c^{ste} \pm (-z)^{3/2} \end{aligned}$$

qui est l'équation de deux paraboles semi-cubiques, de sommet l'axe des y , représentées fig. 7.1 pour une constante égale à 1.

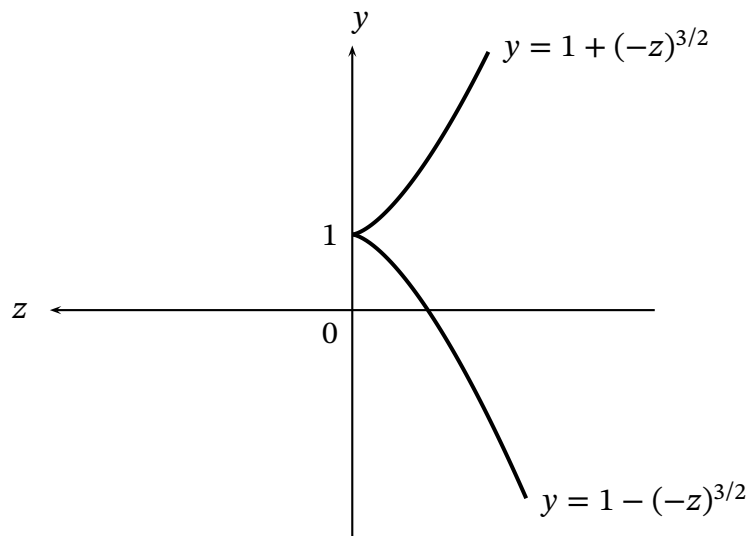


FIG. 7.1 – $y = 1 \pm (-z)^{3/2}$

Les surfaces $\mathcal{S}_0 = c^{ste}$ sont deux cylindres engendrés par une droite qui se déplace parallèlement à l'axe des x , en suivant les deux paraboles semi-cubiques. Lorsque $\mathcal{S}_0$ augmente ($\mathcal{S}_0$ est la constante qui vaut 1 sur la fig. 7.1), le sommet des paraboles semi-cubiques se déplace dans le sens des y croissants.

En reprenant (7.20) page 204 avec l'axe z vertical, toujours avec $\dot{y}_0 = 2\sqrt{2g}/3$ et avec $y_0 = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{g}{2\dot{y}_0^2} y^2 + \frac{\dot{z}_0}{\dot{y}_0} y + z_0 \\ &= -\frac{9}{16} y^2 + \frac{3}{2\sqrt{2g}} \dot{z}_0 y + z_0 \end{aligned}$$

(7.26) page précédente donne $\dot{z}_0$:

$$z = -\frac{9}{16} y^2 \pm \frac{3}{2} \sqrt{-z_0} y + z_0$$

Choisissons un tir vers le haut, $\dot{z}_0 > 0$,

$$z = -\frac{9}{16} y^2 + \frac{3}{2} \sqrt{-z_0} y + z_0$$

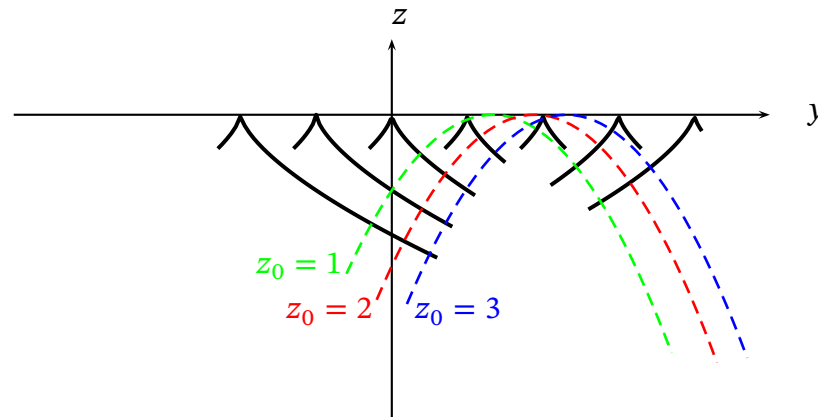


FIG. 7.2 – $z = -\frac{9}{16}y^2 + \frac{3}{2}\sqrt{-z_0}y + z_0$

Les trajectoires sont des paraboles perpendiculaires aux paraboles semi-cubiques, ayant pour plus hauts points l'axe des y , le projectile se déplaçant selon les y croissants.

7.4 Mécanique ondulatoire

7.4.1 Relation de de Broglie

Au § précédent nous avons obtenu une famille de surfaces équiaction S_0 orthogonales aux trajectoires des particules. Cela suggère une analogie entre mécanique et optique géométrique, où dans la théorie de Huygens les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'ondes. Cherchons l'analogue optique de (7.23) page 207. Les surfaces d'onde de phase constante, surfaces équiphasse, sont les analogues des surfaces équiaction. Elles ont pour expression :

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t \\ &= c^{ste}\end{aligned}$$

Remarque 7.4.1

La forme de cette relation est analogue à la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps (7.7) page 193 :

$$S(q, \alpha, t) = S_0(q, \alpha) - E(\alpha)t$$

La dérivation dans l'espace donne l'expression du vecteur d'onde :

$$\vec{k}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}[\phi(\vec{r})]$$

qui est l'analogue optique de (7.23) page 207. Le vecteur d'onde est l'analogue optique du vecteur impulsion généralisée.

La relation de Planck-Einstein, tirée de l'expérience,

$$E = h\nu$$

fait le lien entre une notion mécanique, l'énergie, et une notion ondulatoire, la fréquence. Elle permet de sortir de la simple analogie pour établir des relations entre mécanique et optique. Il nous faut le lien entre action et énergie, et entre phase et fréquence. La dérivée par rapport au temps de (7.22) page 207 valable lorsque le système est conservatif et l'énergie potentielle indépendante du temps, nous donne la première relation :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

La dérivation dans le temps de la phase donne la seconde relation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -2\pi\nu$$

En remplaçant dans la relation de Planck-Einstein :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Si on admet la relation

$$S = \hbar\phi$$

alors on trouve la relation de de Broglie :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\text{grad}}(S) \\ &= \hbar \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \\ &= \hbar \vec{k}\end{aligned}$$

7.4.2 Équation de Schrödinger

Cherchons l'équation d'onde qui donnera la fonction d'onde associée à la particule. Pour cela servons-nous de la vitesse de phase (7.24) page 208 :

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

où v_g est la vitesse de propagation d'une onde ψ dans le milieu (vitesse de phase). Le mouvement du point matériel est associé à la propagation de cette onde. Cherchons une solution de la forme

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}, t) &= \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t)} \\ &= \psi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-2i\pi\nu t} \\ &= e^{-2i\pi\nu t} \psi(\vec{r})\end{aligned}$$

où l'amplitude maximale ψ_0 est réelle, et $\vec{k}$ est le vecteur d'onde. On utilise la relation de Planck-Einstein, tirée de l'expérience, liant l'énergie d'une onde à sa fréquence :

$$E = h\nu$$

L'énergie étant supposée constante dans le temps :

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}, t) &= e^{-2i\pi Et/h} \psi(\vec{r}) \\ \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{-2i\pi E}{h} e^{-2i\pi Et/h} \psi(\vec{r}) \\ \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{-4\pi^2 E^2}{h^2} e^{-2i\pi Et/h} \psi(\vec{r})\end{aligned}$$

Avec (7.24) page 208 donnant l'expression de la vitesse de phase, l'équation d'onde indépendante du temps s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta \psi(\vec{r}, t) + \frac{4\pi^2 E^2}{v_s^2 h^2} \psi(\vec{r}, t) &= 0 \\ e^{-2i\pi vt} \Delta \psi(\vec{r}) + \frac{4\pi^2 E^2}{v_s^2 h^2} e^{-2i\pi vt} \psi(\vec{r}) &= 0 \\ \Delta \psi(\vec{r}) + \frac{4\pi^2 \vec{p}^2}{h^2} \psi(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

Lorsque le système est conservatif l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation q indépendante du temps d'une particule de masse m et d'énergie E dans un potentiel de force $V(q)$ est donnée par (7.9c) page 193 :

$$-E + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right) = 0$$

Supposons les conditions remplies pour avoir (4.12) page 136 et remplaçons $\mathcal{H}$ par $T + V$

$$-E + T\left(q, \frac{\partial \mathcal{S}_0(q, \alpha)}{\partial q}\right) + V(q) = 0$$

qui n'est autre que l'équation de conservation de l'énergie mécanique. Avec (7.23) page 207 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m} \{\overrightarrow{\text{grad}}[\mathcal{S}_0(q)]\}^2 &= E - V(q) \\ \vec{p}^2 &= 2m[E - V(q)]\end{aligned}$$

Nous trouvons l'équation de Schrödinger indépendante du temps, d'une particule dans un champ conservatif :

$$\Delta \psi(\vec{r}) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(q)] \psi(\vec{r}) = 0$$

Cette relation est la relation fondamentale de la *mécanique ondulatoire*. La mécanique classique¹ du point matériel est donc une approximation de la mécanique ondulatoire lorsque la longueur d'onde de l'onde de phase associée au corpuscule (relation de de Broglie $\vec{p} = \hbar \vec{k}$) est considérée comme très petite. Le même lien unit l'optique géométrique et l'optique physique, de ce fait, on peut appeler la mécanique classique du point matériel, *mécanique géométrique*.

1. classique signifiant non relativiste et non quantique

7.5 Action de Hamilton et lagrangien

D'après (7.1) page 190, les impulsions généralisées P étant constantes dans la fonction principale de Hamilton $\mathcal{S}(q, P, t)$:

$$d\mathcal{S}(q, P, t) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt$$

Avec (5.7) page 152 et avec $H = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{dt} &= p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt} \quad (7.27)$$

définie à une constante additive près. L'action (de Hamilton) est donc l'intégrale indéfinie du lagrangien par rapport au temps.

Exemple 7.5.1

Vérifions le sur l'ex. 7.2.2 page 196 de l'oscillateur harmonique. Reprenons l'expression (7.15) page 198 de la coordonnée généralisée :

$$\begin{aligned} q &= \pm \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow q^2 = \frac{2E}{m\omega^2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{dq}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow dq = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\omega t + \varphi_0) dt \end{aligned}$$

En partant de l'expression (7.12) page 197 de l'action de Hamilton, avec $k = m\omega^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -Et \pm \sqrt{2mE} \int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} q^2} dq \\ &= -Et + \sqrt{2mE} \int \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)} \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos(\omega t + \varphi_0) dt \\ &= 2E \int \left[\cos^2(\omega t + \varphi_0) - \frac{1}{2} \right] dt \\ &= E \int \cos 2(\omega t + \varphi_0) dt \end{aligned}$$

Reprenons l'expression (7.16) page 198 de l'impulsion :

$$p = \pm \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow p^2 = 2mE \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Le lagrangien s'écrit,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \\ &= E \cos^2(\omega t + \varphi_0) - \frac{m\omega^2}{2} \frac{2E}{m\omega^2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= 2E \left[\cos^2(\omega t + \varphi_0) - \frac{1}{2} \right] \\ &= E \cos 2(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Nous avons bien

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt$$

Chapitre 8

LE PRINCIPE VARIATIONNEL

Sommaire

8.1 Principe de moindre distance	219
8.2 Principe de moindre temps	221
8.3 Passage de l'optique à la mécanique	223
8.4 La brachistochrone	225
8.5 Principes de moindre action	233

8.1 Principe de moindre distance

En étudiant la réflexion de la lumière sur un miroir (D) , Héron d'Alexandrie observe l'égalité des angles incident i et réfléchi r . La normale au miroir est représentée en traits interrompus.

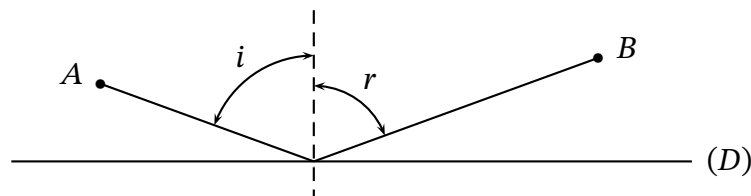


FIG. 8.1 – Égalité des angles incident et réfléchi sur un miroir

Il montre que la lumière emprunte le chemin le plus court en distance pour aller de A à B . En effet, si B' est le symétrique de B par rapport à (D) , alors

$$\begin{aligned}\forall M \in (D), MB &= MB' \\ AM + MB &= AM + MB'\end{aligned}$$

où $AM, MB, MB', \dots$ sont des distances positives ou nulles. Appelons M le point d'incidence et utilisons les angles complémentaires notés avec une barre :

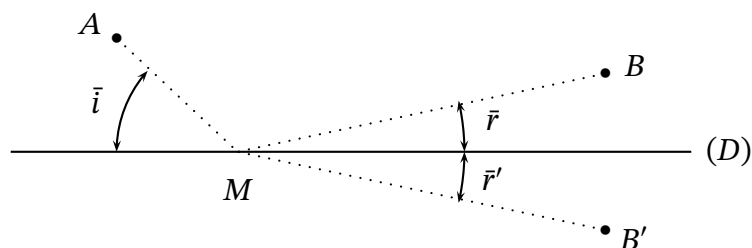


FIG. 8.2 – B' symétrique de B par rapport à (D)

$$\begin{aligned}
 AM + MB \text{ minimal} &\Leftrightarrow AM + MB' \text{ minimal} \\
 &\Leftrightarrow M \in (AB') \\
 &\Leftrightarrow \bar{i} = \bar{r}' \\
 &\Leftrightarrow \bar{i} = \bar{r} \\
 &\Leftrightarrow i = r
 \end{aligned}$$

Le trajet le plus court en distance pour aller du point A au point B en touchant le miroir (D) est donc celui pour lequel les angles d'incidence et de réflexion sont égaux, et réciproquement. Évidemment, le trajet le plus court en distance pour la lumière est aussi le plus court en distance pour un corps quelconque, cette notion est absolue et ne dépend pas de ce qui parcourt le trajet.

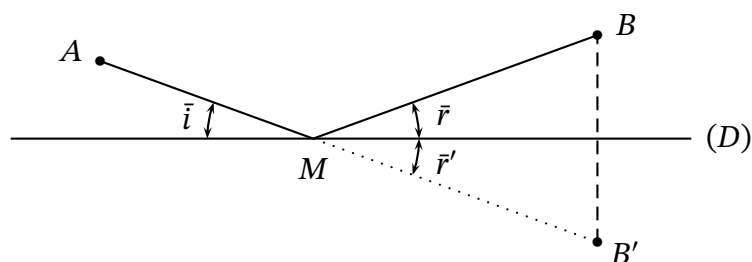


FIG. 8.3 – Chemin le plus court en distance

Pour la réflexion, la lumière suit donc un principe de moindre distance. C'est aussi un principe de moindre temps si la vitesse de ce qui parcourt le trajet ne varie pas pendant le trajet.

8.2 Principe de moindre temps

Le principe de moindre distance donne toujours une droite par franchissement d'un dioptré (surface de séparation de deux milieux transparents d'indices de réfraction différents) et par conséquent ce principe ne peut expliquer la réfraction de la lumière. Pierre de Fermat applique donc le principe de moindre temps et non celui de moindre distance, pour généraliser son application de la réflexion à la réfraction.

La démonstration qui suit s'applique à tout corps subissant un changement de vitesse par changement de milieu. Un sauveteur côtier courant plus vite sur la plage qu'il ne nage, choisit son point d'entrée dans l'eau de façon à minimiser le temps total jusqu'à la personne à secourir, son angle r est plus petit que son angle i . En optique le milieu ② est dit plus réfringent que le milieu ①, autrement dit la vitesse de la lumière est plus petite dans le milieu ②.

Soit M le point d'incidence et (D) le dioptré :

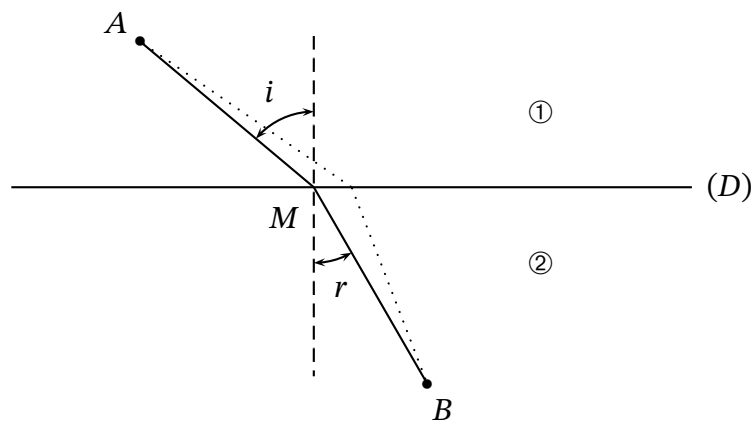


FIG. 8.4 – Réfraction en M dans le cas $v_2 < v_1 \Leftrightarrow r < i$

Le temps de trajet est minimal si pour un trajet infiniment proche (représenté en pointillés sur la fig. 8.4) la variation du temps de trajet est nulle à l'ordre un. Soient t_1 et t_2 les temps de trajets respectifs dans les milieux ① et ②.

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2) \text{ minimal} &\Leftrightarrow d(t_1 + t_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow dt_1 + dt_2 = 0 \end{aligned}$$

Soient c , v_1 et v_2 les vitesses respectives de la lumière dans le vide et dans les milieux ① et ②. Autour du trajet de temps minimal, si la longueur du trajet augmente dans un milieu, elle diminue dans l'autre (voir fig. 8.4), d'où le signe négatif :

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2) \text{ minimal} &\Leftrightarrow \frac{d[AM]}{v_1} - \frac{d[MB]}{v_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c d[AM]}{v_1 [MM']} - \frac{c d[MB]}{v_2 [MM']} = 0 \end{aligned}$$

Soient $n_1 \stackrel{\text{def}}{=} c/v_1$ et $n_2 \stackrel{\text{def}}{=} c/v_2$ les indices de réfraction respectifs des milieux ① et ② :

$$(t_1 + t_2) \text{ minimal} \Leftrightarrow n_1 \frac{d[AM]}{[MM']} - n_2 \frac{d[MB]}{[MM']} = 0$$

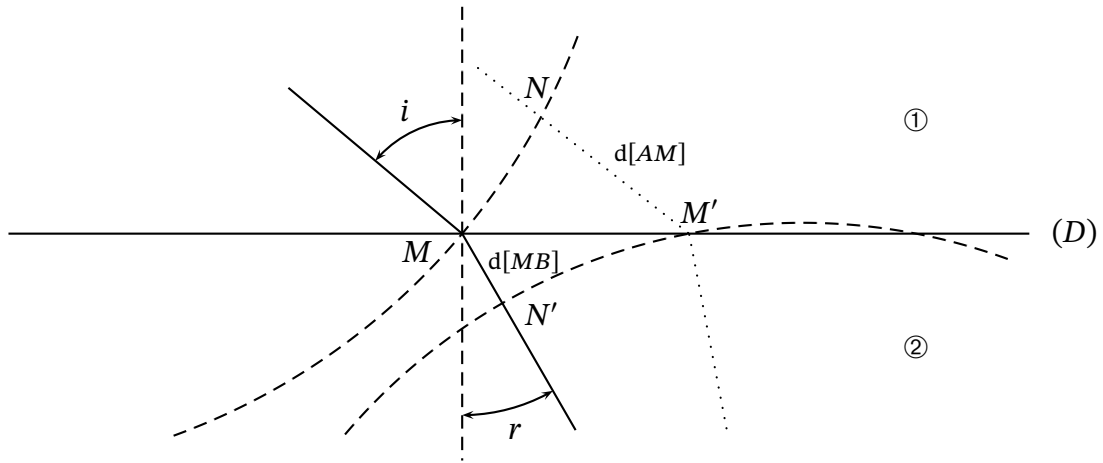


FIG. 8.5 – Différence de marche dans le cas $v_2 < v_1 \Leftrightarrow r < i \Leftrightarrow n_2 > n_1$

Lorsque M' tend vers M , l'arc de cercle MN se confond avec sa corde, le triangle $MM'N$ devient rectangle en N , l'angle en M' tend vers $\bar{i}$ et :

$$\frac{d[AM]}{MM'} \approx \sin(i)$$

De même, lorsque M' tend vers M , l'arc de cercle $M'N'$ se confond avec sa corde, le triangle $MM'N'$ devient rectangle en N' , l'angle en M' tend vers r et :

$$\frac{d[MB]}{MM'} \approx \sin(r)$$

Fermat trouve l'équivalence

$$(t_1 + t_2) \text{ minimal} \Leftrightarrow n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$$

et retrouve donc la loi des sinus de Descartes. On vérifie que si $v_2 < v_1$ alors $n_2 > n_1$ donc $r > i$ le rayon réfracté se referme sur la normale.

Lorsqu'un trajet est de temps minimum, chacune de ses parties est de temps minimum. Cette remarque permet de généraliser le principe de temps minimum à une succession de dioptries :

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n \text{ minimal}$$

Faisons tendre le nombre de dioptries vers l'infini, la vitesse varie de façon continue :

$$\int_{\text{trajet}} dt \text{ minimal} = \int_{\text{trajet}} \frac{ds}{v(s)} \text{ minimal}$$

Pour la lumière, multiplions par la constante c pour faire apparaître l'indice de réfraction. L'intégrale sur le trajet passe par un extremum ssi sa variation infinitésimale est nulle :

$$\delta \int_{\text{trajet}} n ds = 0$$

Le principe de moindre temps appliqué à la lumière est appelé *principe de Fermat*.

Jean Bernoulli est en possession de deux méthodes pour trouver l'équation d'un trajet de temps minimal, la loi des sinus de Descartes et le principe de Fermat. Grâce à la loi des sinus, il va résoudre le problème de la détermination de l'équation de la brachistochrone posé par Galilée en 1633 :

Quelle est la courbe, appelée brachistochrone, joignant deux points A et B du plan vertical, telle qu'un corps pesant partant au repos du point le plus haut $A(x_A, y_A)$ et glissant sans frottements le long de cette courbe sous l'influence d'un champ de gravitation uniforme, arrive au point $B(x_B, y_B)$ en un temps minimal ?

En 1696 ayant trouvé la solution, il adresse le problème aux mathématiciens de son temps.

8.3 Passage de l'optique à la mécanique

Jean Bernoulli applique la loi des sinus de Descartes à un indice variant de façon discontinue puis passe à la limite pour avoir une variation d'indice continue. Si les milieux sont moins réfringents à mesure que y diminue, la trajectoire prend la forme suivante :

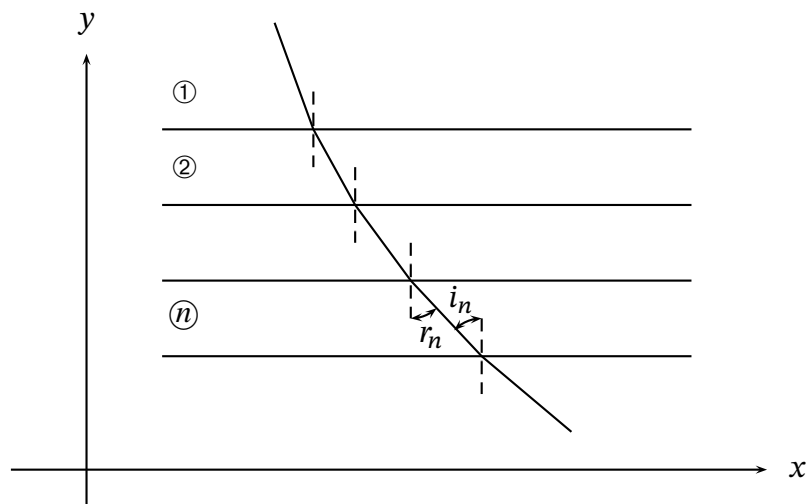


FIG. 8.6 – Couches d'indices de réfraction dans le cas $v_2 > v_1 \Leftrightarrow n_2 < n_1 \Leftrightarrow r > i$

Au franchissement de chaque dioptre, la loi des sinus de Descartes s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(r_{n+1})}{v_{n+1}} &= \frac{\sin(i_n)}{v_n} \\ \frac{\sin(r_{n+2})}{v_{n+2}} &= \frac{\sin(i_{n+1})}{v_{n+1}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tout angle réfracté devient angle d'incidence

$$\forall n, \quad r_n = i_n$$

si bien que

$$\frac{\sin(i_n)}{v_n} = \frac{\sin(i_{n+1})}{v_{n+1}} = \frac{\sin(i_{n+2})}{v_{n+2}} = \dots = \frac{1}{k}$$

où k est une constante. Faisons tendre le nombre de couche vers l'infini, ce qui revient à une variation continue de l'indice de réfraction :

$$\frac{\sin[i(x)]}{v[i(x)]} = \frac{1}{k}$$

Pour un corps autre que la lumière, lorsque la vitesse est nulle le sinus doit aussi être nul pour que leur rapport donne une constante

$$v[i(x)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin[i(x)] = 0$$

L'angle d'incidence est nul ssi la vitesse est nulle, la trajectoire est alors normale au dioptré. La vitesse croît avec le sinus. Lorsque le sinus tend vers 1, l'angle d'incidence tend vers $\pi/2$, la trajectoire devient horizontale et la vitesse atteint son maximum possible (si la trajectoire se prolonge jusque là) :

$$v(\pi/2) = k \tag{8.1}$$

Soit $y = f(x)$ l'équation de la trajectoire suivie en un temps minimum. En tout point de cette trajectoire la dérivée est la tangente de l'angle que fait cette trajectoire avec l'horizontale :

$$y'(x) = \tan(\bar{r})$$

Or

$$\begin{aligned} \sin(i) &= \sin(r) \\ &= \cos(\bar{r}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\bar{r})}} \\ \frac{v(x)}{v(\pi/2)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation différentielle il nous faut l'expression explicite de la vitesse en fonction de x . Prenons le cas d'un corps qui tombe en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre, de vitesse nulle en A . Si l'on néglige les frottements de l'air, la force d'interaction gravitationnelle étant conservative (elle dérive d'une énergie potentielle, appelée énergie potentielle de gravitation ou de pesanteur), on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(x) + mgy(x) &= \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A \\ \frac{1}{2}mv^2(x) &= mg[y_A - y(x)] \\ v(x) &= \sqrt{2g[y_A - y(x)]} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Effectuons le changement de variable :

$$\begin{aligned}y(x) &= y_A - y(x) \\ y' &= -y'(x) \\ y'^2(x) &= y'^2(x)\end{aligned}$$

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2gy(x)}}{v(\pi/2)} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \\ \sqrt{2gy(x)[1+y'^2(x)]} &= v(\pi/2) \\ y(x)[1+y'^2(x)] &= \frac{v^2(\pi/2)}{2g}\end{aligned}\tag{8.3}$$

Revenons à la variable $y(x)$:

$$\begin{aligned}[y_A - y(x)][1+y'^2(x)] &= \frac{v^2(\pi/2)}{2g} \\ y(x)[1+y'^2(x)] &= y_A - \frac{v^2(\pi/2)}{2g}\end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle d'ordre un non linéaire de degré deux d'une cycloïde. La brachistochrone est donc un arc de cycloïde de concavité vers le bas, de tangente verticale au point de départ.

8.4 La brachistochrone

Retrouvons le résultat de Jean Bernoulli en utilisant le calcul des variations. Cherchons l'expression de la durée d'une trajectoire quelconque $y(x)$ entre les points A et B . Soit ds un élément infinitésimal de cette trajectoire. La vitesse (instantanée) a pour expression :

$$\begin{aligned}v &= \frac{ds}{dt} \\ dt &= \frac{ds}{v} \\ \Delta t_{AB} &= \int_A^B \frac{ds}{v}\end{aligned}\tag{8.4}$$

Dans un système de coordonnées rectilignes orthogonales (x, y) , le carré de l'élément infinitésimal de trajectoire a pour expression :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Mettons dx ou dy en facteur :

$$\begin{cases} ds^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2 \\ ds^2 = \left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right) dy^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} |dx| \\ ds = \sqrt{1 + x'^2(y)} |dy| \end{cases}\tag{8.5}$$

où le prime indique la dérivation par rapport à la coordonnée restante. La conservation de l'énergie mécanique (8.2) page 224 donne l'expression de la vitesse. En remplaçant v et ds dans (8.4) nous obtenons les deux expressions suivantes pour la durée d'un trajet quelconque :

$$\begin{cases} \Delta t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)}} |dx| \\ \Delta t_{AB} = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{\frac{1 + x'^2}{2g(y_A - y)}} |dy| \end{cases} \quad (8.6a)$$

Nous supposons x croissant le long de la trajectoire. Nous conservons (8.6a) sans la valeur absolue. Posons :

$$f(y(x), y'(x)) = \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g[y_A - y(x)]}} \quad (8.7)$$

où le prime désigne la dérivation par rapport à x . La durée d'un trajet Δt_{AB} le long d'une trajectoire quelconque est donc la fonction de fonction, appelée *fonctionnelle*, suivante :

$$\Delta t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} f(y(x), y'(x)) dx$$

La variation de durée entre la trajectoire de durée minimale et une trajectoire infiniment proche est nulle

$$\begin{aligned} \delta \Delta t_{AB} &= 0 \\ \delta \int_{x_A}^{x_B} f(y(x), y'(x)) dx &= 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

où $y(x)$ est supposée être la trajectoire de durée minimale.

Remarque 8.4.1

Mathématiquement, cette condition de durée stationnaire est nécessaire mais n'est pas suffisante pour avoir une durée minimale car elle pourrait aussi être maximale ou admettre un point-selle (point d'inflexion horizontal, aussi appelé point-col). Cependant, en physique parler d'une trajectoire de durée maximale n'a pas de sens. La comparaison de la durée du trajet solution avec la durée de trajets voisins montrera que c'est effectivement le trajet de durée minimale.

Soient donc $y(x)$ la trajectoire de durée minimale, et $g(x)$ une autre trajectoire entre les mêmes points de départ et d'arrivée.

Comparons leurs durées :

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta t_{AB}) &= \int_{x_A}^{x_B} f(g(x), g'(x)) dx - \int_{x_A}^{x_B} f(y(x), y'(x)) dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} f(g(x), g'(x)) - f(y(x), y'(x)) dx \end{aligned}$$

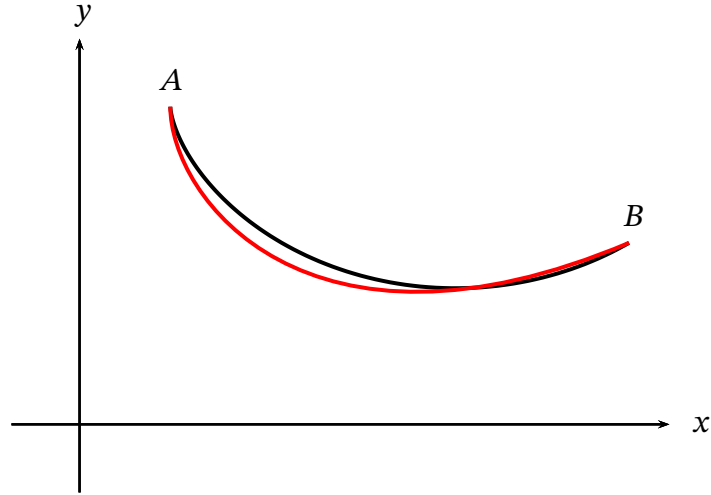


FIG. 8.7 – La brachistochrone (noire) et une trajectoire très proche

Notons $\Delta y(x)$ la différence en ordonnées entre les fonctions $y(x)$ et $g(x)$, c.-à-d. la différence en y pour un x fixé, nulle aux points de départ et d'arrivée car les deux fonctions passent par les points A et B :

$$\Delta(\Delta t_{AB}) = \int_{x_A}^{x_B} f(y(x) + \Delta y(x), y'(x) + \Delta y'(x)) - f(y(x), y'(x)) dx$$

Remarque 8.4.2

Il n'y a pas de variation en x mais seulement en y et en y' , par conséquent pour une fonction $f(y(x), y'(x), x)$ explicite de la variable x , nous aurions la même résolution.

Supposons les deux trajectoires infiniment proches :

$$\begin{aligned} \delta(\Delta t_{AB}) &= \int_{x_A}^{x_B} f(y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x)) - f(y(x), y'(x)) dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \delta f(y, y') dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx \end{aligned}$$

On intègre par partie le second terme en posant $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$ et $v' = \delta y'$:

$$\delta(\Delta t_{AB}) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

La variation δy étant nulle aux extrémités de la trajectoire :

$$\begin{aligned} \delta(\Delta t_{AB}) &= \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \end{aligned}$$

Écrivons la condition nécessaire :

$$\begin{aligned} \forall \delta y, \quad \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

appelée équation d'Euler. La fonction $f(y(x), y'(x))$ donnée par (8.7) page 226 ne dépendant pas explicitement de la variable x , nous pouvons intégrer l'équation différentielle une première fois :

$$\begin{aligned} df(y, y') &= \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' \\ \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \end{aligned}$$

En utilisant l'équation d'Euler (8.9) pour remplacer le terme $\partial_y f$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) \\ \frac{d}{dx} \left(f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) &= 0 \\ f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' &= \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (8.10)$$

où k est une constante par rapport à x . L'équation différentielle (8.9) est maintenant du 1^{er} ordre en $y(x)$. Dans la fonction f , effectuons le changement de variable :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_A - y(x) \\ y'(x) &= -y'(x) \\ y'^2(x) &= y'^2(x) \end{aligned}$$

L'axe « y » a pour origine y_A et est dirigé vers le bas. Reprenons l'expression (8.7) page 226 de la fonction f :

$$\begin{aligned} f(y(x), y'(x)) &= \left[\frac{1 + y'^2}{2g(y_A - y)} \right]^{1/2} \\ f(y(x), y'(x)) &= \left(\frac{1 + y'^2}{2gy} \right)^{1/2} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gy} \right)^{-1/2} \times \frac{2y'}{2gy} \\ &= \left(\frac{2gy}{1 + y'^2} \right)^{1/2} \times \frac{y'}{2gy} \\ &= \frac{y'}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} \end{aligned}$$

En notant que $y' = -y'$ implique $dy' = -dy'$:

$$\begin{aligned} df(y', y) &= df(y', y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' &= \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= -\frac{\partial f}{\partial y'} \end{aligned}$$

Remplaçons dans l'équation différentielle (8.10) :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} + \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} (-y') &= \frac{1}{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} &= \frac{1}{k} \\ y(1+y'^2) &= \frac{k^2}{2g} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Nous retrouvons l'équation d'une cycloïde (8.3) page 225.

8.4.1 Résolution de l'équation différentielle

Cherchons la solution $y(x)$ de cette équation différentielle sous la forme de deux équations paramétriques $y(\theta)$ et $x(\theta)$ où le paramètre θ est une fonction du temps qu'il faudra déterminer, $\theta = \theta(t)$. Effectuons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} y'(\theta) &= 1/\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1+y'^2(\theta) &= 1 + \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Remplaçons dans l'équation différentielle (8.11) :

$$\begin{aligned} y(\theta) &= \frac{k^2}{2g} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{k^2}{4g} [1 - \cos(\theta)] \end{aligned} \quad (8.13)$$

Revenons à la variable y :

$$y(\theta) = y_A + \frac{k^2}{4g} [\cos(\theta) - 1]$$

Cherchons l'expression de $x(\theta)$. À partir de (8.12) :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1/\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ dx &= \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) dy \end{aligned}$$

En dérivant (8.13),

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{k^2}{2g} 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$dy = \frac{k^2}{2g} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Nous avons donc :

$$dx = \frac{k^2}{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\int_{x_A}^x dx = \frac{k^2}{2g} \int_{\theta_A}^{\theta} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$x - x_A = \frac{k^2}{4g} \int_0^{\theta} 1 - \cos(\theta) d\theta$$

$$x(\theta) = x_A + \frac{k^2}{4g} [\theta - \sin(\theta)]$$

Centrons le repère (x, y) sur le point A qui a alors pour coordonnées $(0, 0)$, nous obtenons

$$\begin{cases} y(\theta) = \frac{k^2}{4g} [\cos(\theta) - 1] \\ x(\theta) = \frac{k^2}{4g} [\theta - \sin(\theta)] \end{cases} \quad (8.14)$$

qui sont les équations paramétriques d'une cycloïde de paramètre θ , dont la concavité est dirigée vers le bas. Cherchons les valeurs de θ qui annulent la dérivée de $y(\theta)$:

$$\frac{k^2}{4g} \sin(\theta) = 0$$

$$\theta = 0 [\pi]$$

En ces points les fonctions $y(\theta)$ et $x(\theta)$ prennent les valeurs :

$$\begin{cases} y(0) = 0 & y(\pi) = -k^2/2g & y(2\pi) = 0 \\ x(0) = 0 & x(\pi) = \pi k^2/4g & x(2\pi) = \pi k^2/2g \end{cases}$$

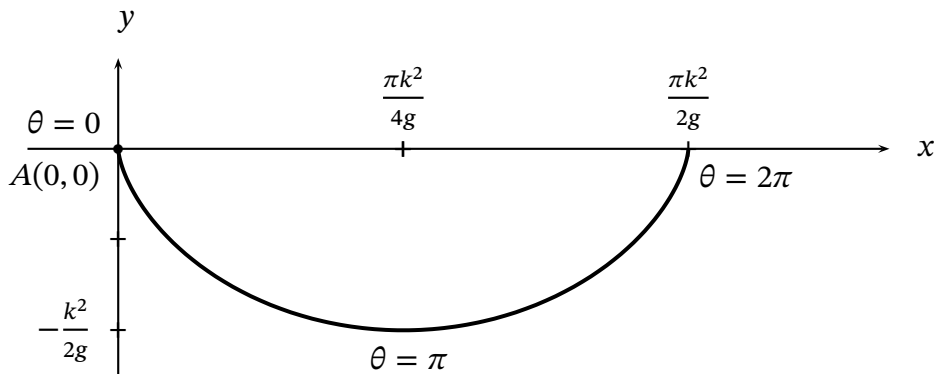


FIG. 8.8 – Arche de cycloïde : premier cycle ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

La hauteur de chute est maximale en $\theta = \pi$. En ce point nous avons la relation :

$$x(\pi) = -\frac{\pi}{2} y(\pi)$$

La cycloïde est la courbe engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule sur une droite. Le diamètre du cercle est égale à la hauteur de chute maximale, $k^2/(2g)$.

En notant $H = y_A - y_B$ la hauteur finale de chute et $D = x_B - x_A$ la distance parcourue en x , le système d'équations (8.14) donne :

$$\begin{cases} H = \frac{k^2}{4g} [1 - \cos(\theta_B)] \\ D = \frac{k^2}{4g} [\theta_B - \sin(\theta_B)] \end{cases}$$

Si $D \leq \frac{\pi}{2}H$ (c.-à-d. si $\theta \leq \pi$) le corps descend directement au point B .

Si $D > \frac{\pi}{2}H$ le corps passe par une hauteur minimale puis remonte jusqu'au point B .

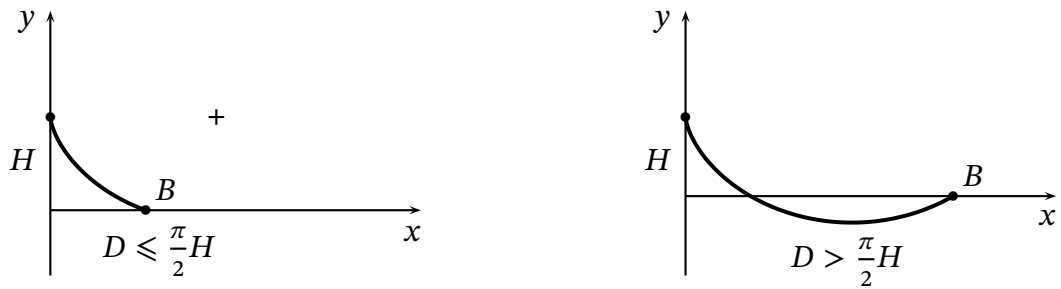


FIG. 8.9 – Brachistochrones

En dérivant par rapport au temps (8.14) page ci-contre, nous obtenons la vitesse en fonction du paramètre θ :

$$\begin{aligned} v^2(\theta) &= v_y^2(\theta) + v_x^2(\theta) \\ &= \left(\frac{dy[\theta(t)]}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx[\theta(t)]}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \left[\frac{k^2}{4g} \sin(\theta) \dot{\theta} \right]^2 + \left[\frac{k^2}{4g} (\cos(\theta) - 1) \dot{\theta} \right]^2 \\ &= \frac{k^4 \dot{\theta}^2}{16g^2} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) + 1) \\ &= \frac{k^4 \dot{\theta}^2}{8g^2} [1 - \cos(\theta)] \\ v(\theta) &= \frac{k^2 \dot{\theta}}{2g\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos(\theta)} \end{aligned}$$

À partir du carré de la vitesse, ((8.2) page 224) :

$$\begin{aligned}v^2(\theta) &= -2gy(\theta) \\ \frac{k^4 \dot{\theta}^2}{8g^2} [1 - \cos(\theta)] &= \frac{k^2}{2} [1 - \cos(\theta)] \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{4g^2}{k^2} \\ \dot{\theta} &= \pm \frac{2g}{k}\end{aligned}$$

si bien que

$$v(\theta) = \frac{\pm k}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos(\theta)}$$

La vitesse maximale possible est en $\theta = \pi$, on retrouve le résultat (8.1) page 224 :

$$v(\pi) = k$$

La constante k est donc positive et :

$$v(\theta) = \frac{v(\pi)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos(\theta)}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{2g}{v(\pi)} \\ \int_{\theta_A=0}^{\theta_B} d\theta &= \frac{2g}{v(\pi)} \int_{t_A=0}^{t_B} dt \\ \theta_B &= \frac{2gt_B}{v(\pi)} \\ t_B &= \frac{\theta_B v(\pi)}{2g}\end{aligned}$$

Pour $\theta_B = \pi$ (plus longue descente « directe »)

$$v(\pi) = \sqrt{2gH}$$

La relation de cinématique classique $x = \frac{1}{2}gt^2$ donne le temps de chute libre d'une hauteur H

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}t_B &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \\ &= \frac{\pi}{2} T\end{aligned}$$

8.5 Principes de moindre action

8.5.1 Principe de moindre action de Hamilton

Dans les équations d'Euler (8.9) page 228, en remplaçant la fonction f par le lagrangien et la variable x par le temps, nous retrouvons l'équation de Lagrange pour la coordonnée y :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

Par analogie de (8.8) page 226 qui donne les équations d'Euler (8.9), on déduit que les équations de Lagrange dérive du principe variationnel

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(y(t), \dot{y}(t), t) dt = 0$$

où la trajectoire est variée mais pas le temps, la durée du parcours est fixée à $t_B - t_A$. Ce principe est appelé *principe de moindre action de Hamilton*. L'intégrale du lagrangien par rapport au temps est l'action de Hamilton ((7.27) page 216) :

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

L'action de Hamilton n'est pas toujours minimale, elle est extrémale (ou stationnaire) car dans certains cas elle peut être maximale pour la totalité de la trajectoire. Cependant elle est toujours minimale pour chaque partie suffisamment petite de la trajectoire. De façon explicite, le principe de moindre action s'écrit

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} (T - V) dt = 0$$

Lorsqu'un système évolue dans l'espace et dans le temps, la différence entre énergie cinétique et potentielle est la plus petite possible au cours du temps.

Pour généraliser le principe variationnel au cas de plusieurs fonctions d'une même variable, considérons une fonctionnelle de deux fonctions supposées linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$, de première variation nulle :

$$\delta \int f(y_1(x), y_2(x), \partial_x y_1(x), \partial_x y_2(x), x) dx = 0 \quad (8.15)$$

Appelons $\mathcal{J}$ cette fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} &= \int_{x_A}^{x_B} \delta f(y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x), x) dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1'} \delta y_1' \right) dx + \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx \end{aligned}$$

En intégrant par partie,

$$\delta \mathcal{J} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) \right] \delta y_1 dx + \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) \right] \delta y_2 dx$$

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ étant linéairement indépendantes, $\delta \mathcal{J}$ est nulle quelles que soient δy_1 et δy_2 si et seulement si f satisfait les équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_2'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

En remplaçant la fonction f par le lagrangien et la variable x par le temps, nous retrouvons les équations de Lagrange pour les coordonnées $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

(8.15) donnant les équations (8.16), on en déduit que les équations de Lagrange dérivent du principe variationnel

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), t) dt = 0 \quad (8.17)$$

La généralisation à plus de deux coordonnées est immédiate.

8.5.2 Principe de moindre action de Maupertuis

Lorsque le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, d'après (4.8) page 133 il se conserve dans le temps le long de la trajectoire réelle :

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{H} dt = 0$$

Ajoutons ce terme nul au principe de moindre action de Hamilton (8.17) de la présente page :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt + \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{H} dt &= 0 \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} + \mathcal{H} dt &= 0 \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt &= 0 \end{aligned}$$

où l'intégrale est appelée *action de Maupertuis* :

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt$$

La variation de l'action de Maupertuis est donc nulle :

$$\delta W = 0$$

Cette relation est appelée *principe de moindre action de Maupertuis*.

Remarque 8.5.1

En utilisant la linéarité de la fonction intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt &= \sum_{j=1}^n \int_{t_A}^{t_B} p_j \dot{q}_j dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_A^B p_j dq_j \\ &= \int_A^B \sum_{j=1}^n p_j dq_j \end{aligned}$$

Remarque 8.5.2

Avec $\mathcal{H}$ constant dans le temps :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L} dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j dt - \mathcal{H} \int_{t_A}^{t_B} dt \end{aligned}$$

D'après (7.6) page 192, l'action de Maupertuis se confond avec l'action réduite $\mathcal{S}_0$.

À partir de la définition de l'impulsion généralisée 3.4.1 page 109, avec $V(q)$ indépendant des vitesses généralisées (et du temps) :

$$\begin{aligned} p_j &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

Si le hamiltonien constant est égal à l'énergie totale E , d'après l'identité d'Euler (4.10) page 134 :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$$

Le principe de moindre action de Maupertuis devient :

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} 2T dt = 0 \quad (8.18)$$

Exemple 8.5.1

Pour un mobile libre, l'énergie cinétique se confond avec l'énergie totale constante du mobile :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} dt &= 0 \\ \delta(t_B - t_A) &= 0 \\ t_B - t_A &\text{ minimal} \end{aligned}$$

Le principe de moindre action de Maupertuis devient un principe de moindre temps.

Exprimons l'énergie cinétique à partir de la vitesse et de l'abscisse curviligne (élément de longueur sur la trajectoire) :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ dt &= \frac{ds}{\sqrt{2T/m}} \end{aligned}$$

Le principe de moindre action de Maupertuis (8.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} 2T dt &= 0 \\ \delta \int_A^B \frac{2T}{\sqrt{2T/m}} ds &= 0 \\ \delta \int_A^B \sqrt{2mT} ds &= 0 \\ \delta \int_A^B \sqrt{2m[E - V(q)]} ds &= 0 \end{aligned}$$

Nous voyons que la condition d'extrémum est directement sur la trajectoire, sans passer par l'équation horaire. C'est là l'intérêt principal du principe de moindre action de Maupertuis. Cependant ce principe est moins général que le principe de moindre action de Hamilton puisqu'il ne s'applique que pour les systèmes conservatifs.

Exemple 8.5.2

Pour un mobile libre l'énergie potentielle est nulle et l'énergie totale constante :

$$\begin{aligned} \delta \int_A^B \sqrt{2m[E - V(q)]} ds &= 0 \\ \delta(\mathcal{S}_B - \mathcal{S}_A) &= 0 \\ \mathcal{S}_B - \mathcal{S}_A &\text{ minimal} \end{aligned}$$

Le principe de moindre action de Maupertuis devient un principe de moindre chemin parcouru.

Exemple 8.5.3 : Balistique

Reprenons l'ex. 7.2.4 page 201, concernant l'étude du mouvement dans le plan (x, y) d'un projectile dans le champ de gravitation terrestre en l'absence de frottement de l'air. Nous pouvons utiliser le principe de moindre action de Maupertuis car la force de pesanteur dérivant d'une énergie potentielle, le hamiltonien se conserve et est égal à l'énergie

mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy \\ &= E\end{aligned}$$

Avec l'énergie potentielle de pesanteur $V(y) = mgy$, l'action réduite s'écrit

$$W = \int_A^B \sqrt{2m[E - mgy(x)]} ds$$

En se servant des l'expressions (8.5) page 225 pour l'élément de trajectoire, nous obtenons deux expressions pour l'action de Maupertuis :

$$\begin{cases} W = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{2m(E - mgy)} \sqrt{1 + y'^2(x)} |dx| \\ W = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{2m(E - mgy)} \sqrt{1 + x'^2(y)} |dy| \end{cases}$$

Le principe de moindre action de Maupertuis s'écrit

$$\begin{cases} \delta \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{2m[E - mgy(x)]} \sqrt{1 + y'^2(x)} |dx| = 0 \\ \delta \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{2m[E - mgy(x)]} \sqrt{1 + x'^2(y)} |dy| = 0 \end{cases}$$

de la forme

$$\begin{cases} \delta \int_{x_A}^{x_B} \mathcal{L}(y(x), y'(x), x) |dx| = 0 \\ \delta \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{L}(x(y), x'(y), y) |dy| = 0 \end{cases}$$

avec les lagrangiens respectifs

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y(x), y'(x), x) = \sqrt{2m[E - mgy(x)]} \sqrt{1 + y'^2(x)} \\ \mathcal{L}(x(y), x'(y), y) = \sqrt{2m[E - mgy(x)]} \sqrt{1 + x'^2(y)} \end{cases}$$

Nous pouvons appliquer le principe de moindre action de Hamilton (8.17) page 234 (!) où le paramètre temps est remplacé par la coordonnée x ou y . Plutôt que d'écrire les équations de Lagrange, remarquons que dans le second lagrangien la coordonnée x est cyclique. Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} &= c^{ste} \\ \frac{\partial \sqrt{2m(E - mgy)} \sqrt{1 + x'^2(y)}}{\partial x'} &= c^{ste} \\ \frac{\sqrt{2m(E - mgy)} x'(y)}{\sqrt{1 + x'^2(y)}} &= c^{ste}\end{aligned}$$

Il reste à résoudre cette équation différentielle. Soit H la hauteur maximale atteinte par le projectile en x_m . En ce point l'énergie potentielle mgH est maximale et l'énergie cinétique est minimale, le vecteur vitesse est horizontal. On pose

$$\begin{aligned} T(x_m) &= \frac{1}{2}mv_x^2 \\ &= mgA \\ A &= v_x^2/(2g) \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2m^2g(H+A-y)}x'(y)}{\sqrt{1+x'^2(y)}} &= C \\ H+A-y &= \frac{C^2[1+x'^2(y)]}{2m^2gx'^2(y)} \end{aligned}$$

On pose

$$B = \frac{C^2}{2m^2g}$$

si bien que

$$\begin{aligned} H+A-y &= B\left(\frac{1}{x'^2(y)} + 1\right) \\ &= B\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

Or $dy/dx = 0$ en $y = H$, d'où $A = B$:

$$\begin{aligned} H-y &= A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{H-y}{A}} &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_x^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{A}} &= \int_y^H \frac{dy}{\sqrt{H-y}} \\ \frac{1}{\sqrt{A}}[x]_x^{x_m} &= -[2\sqrt{H-y}]_y^H \\ \frac{1}{\sqrt{A}}(x_m - x) &= 2\sqrt{H-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= H - \frac{1}{4A}(x_m - x)^2 \\ &= H - \frac{g}{2v_x^2}(x_m - x)^2 \end{aligned}$$

On trouve l'équation de la parabole sans passer par l'équation horaire.

Exemple 8.5.4 : Force centrale

Dans le cas d'un mobile soumis à une force centrale le mouvement est plan. En coordonnées polaire (ρ, θ) , l'énergie potentielle s'écrit $V(\rho)$. L'action réduite a pour expression

$$W = \int_A^B \sqrt{2m[E - V(\rho)]} ds$$

En coordonnées polaires (ρ, θ) , le carré de l'élément infinitésimal de trajectoire a pour expression :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

Mettons $d\rho$ ou $d\theta$ en facteur :

$$\begin{cases} ds^2 = \left(1 + \rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2}\right) d\rho^2 \\ ds^2 = \left(\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2\right) d\theta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ds = \sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)} |d\rho| \\ ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)} |d\theta| \end{cases}$$

où le prime indique la dérivation par rapport à la coordonnée restante. Le principe de moindre action de Maupertuis s'écrit

$$\begin{cases} \delta \int_{\rho_A}^{\rho_B} \sqrt{2m[E - V(\rho)]} \sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)} |d\rho| = 0 \\ \delta \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{2m[E - V(\rho)]} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)} |d\theta| = 0 \end{cases}$$

de la forme

$$\begin{cases} \delta \int_{\rho_A}^{\rho_B} \mathcal{L}(\theta(\rho), \theta'(\rho), \rho) |d\rho| = 0 \\ \delta \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{L}(\rho(\theta), \rho'(\theta), \theta) |d\theta| = 0 \end{cases}$$

avec les lagrangiens respectifs

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\theta(\rho), \theta'(\rho), \rho) = \sqrt{2m[E - V(\rho)]} \sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)} \\ \mathcal{L}(\rho(\theta), \rho'(\theta), \theta) = \sqrt{2m[E - V(\rho)]} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2(\theta)} \end{cases}$$

Dans le premier lagrangien la coordonnée θ est cyclique. Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} &= c^{ste} \\ \frac{\partial \sqrt{2m[E - V(\rho)]} \sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)}}{\partial \theta'} &= c^{ste} \\ \rho^2 \theta'(\rho) \frac{\sqrt{2m[E - V(\rho)]}}{\sqrt{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)}} &= c^{ste} \end{aligned}$$

Cette constante est la norme L du moment cinétique du mobile. Réécrivons cette équation différentielle :

$$L = \rho^2 \theta'(\rho) \sqrt{\frac{2m[E - V(\rho)]}{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)}}$$

$$\frac{L^2}{2m\rho^2} = \rho^2 \theta'^2(\rho) \frac{E - V(\rho)}{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)}$$

$$E - V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} = \rho^2 \theta'^2(\rho) \frac{[E - V(\rho)][1 + \rho^2 \theta'^2(\rho) - \rho^2 \theta'^2(\rho)]}{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right]} = \sqrt{\frac{2}{m} \left[\frac{E - V(\rho)}{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)} \right]}$$

$$m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)} = \rho^2 \sqrt{\frac{2m[E - V(\rho)]}{1 + \rho^2 \theta'^2(\rho)}}$$

$$= \frac{L}{\theta'(\rho)}$$

$$\theta'(\rho) = L / \left[m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)} \right]$$

On appelle potentiel effectif le terme :

$$U_{eff}(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

Nous avons alors :

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{L}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{eff}(\rho)]}}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L/m}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{eff}(\rho)]}} d\rho$$

Chapitre 9

LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION DE HAMILTON

Sommaire

9.1 Dérivation des équations du mouvement	241
9.2 Propriétés du lagrangien	246
9.3 Symétries et lois de conservation	247
9.4 Principe de relativité de Galilée	249
9.5 Lagrangien d'un mobile libre	250
9.6 Lagrangien d'un système	251
9.7 Le temps comme quatrième coordonnée	252

Le principe de moindre action peut servir d'axiome de départ à toute la mécanique.

9.1 Dérivation des équations du mouvement

9.1.1 Les équations de Lagrange

Pour obtenir la trajectoire d'un système il nous faut établir les équations de son mouvement. Celles-ci sont données par

- une loi générale du mouvement (p. ex. la RFD)
- un modèle propre au système (p. ex. $-kx$ pour le ressort dans sa partie linéaire), fonction des coordonnées, des vitesses et du temps
- les conditions initiales du système que sont sa position et sa vitesse à un instant donné, appelé instant initial

On suppose que tout système mécanique est modélisé par une fonction des coordonnées, des vitesses et du temps, que l'on appelle lagrangien du système $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)$.

Posons la loi générale du mouvement suivante : entre un point de départ A à l'instant t_A et un point d'arrivée B à l'instant t_B , le système prend la trajectoire qui rend extrémale l'intégrale du lagrangien entre les instants de départ et d'arrivée. Suivons le raisonnement inverse du § 8.4 page 225 :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j dt + \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt}(\delta q_j) dt &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant par partie le second terme :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j dt + \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt &= 0 \\ \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt &= 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

Les variations δq sont nulles aux extrémités de trajectoires prisent entre les mêmes points de départ et d'arrivée $\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0$. On retrouve les équations de Lagrange (3.11) page 74 :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt &= 0 \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 9.1.1

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \delta \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\delta \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\delta q_j} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_j}$ s'appelle la dérivée variationnelle de $\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ par rapport à q_j .

9.1.2 Les équations de Hamilton

On pose

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Le principe de moindre action s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q_j, p_j, t) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt &= 0 \end{aligned}$$

car $\delta t = 0$. En intégrant par partie le second terme :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \int_{t_A}^{t_B} p_j \delta \dot{q}_j dt &= [p_j \delta q_j]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} \dot{p}_j \delta q_j dt \\ &= - \int_{t_A}^{t_B} \dot{p}_j \delta q_j dt \end{aligned}$$

car les variations δq sont nulles aux extrémités de trajectoires prises entre les mêmes points de départ et d'arrivée. Si bien que,

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\delta p_j \dot{q}_j - \dot{p}_j \delta q_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j \right) dt &= 0 \\ \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt &= 0 \end{aligned}$$

Dans l'espace des phases, les trajectoires variées peuvent avoir des coordonnées et/ou des impulsions différentes, les variations δq_j et δp_j sont donc indépendantes :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left[\left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt &= 0 \\ \forall j = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve le système d'équations de Hamilton (4.6) page 132.

9.1.3 L'équation de Hamilton-Jacobi

L'action donne l'équation de la trajectoire $q_j = q_j(t)$, autrement dit l'action est fonction des q_j et du temps :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(q_j, t)$$

$$ds = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt$$

Si l'on a la différentielle d'une fonction, c.-à-d. les dérivées partielles de cette fonction par rapport à chacune de ses variables, alors on a la fonction à une constante près. Pour trouver l'expression de $\partial \mathcal{S} / \partial q_j$ en fonction de t et des q_j , cherchons comment varie l'action entre deux trajectoires réelles infiniment proches, qui commencent au même endroit et se terminent au même moment mais pas exactement au même endroit :

$$\delta \mathcal{S} = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_j} \delta q_j \right]_{t_A}^{t_B}$$

Par exemple pour deux brachistochrones :

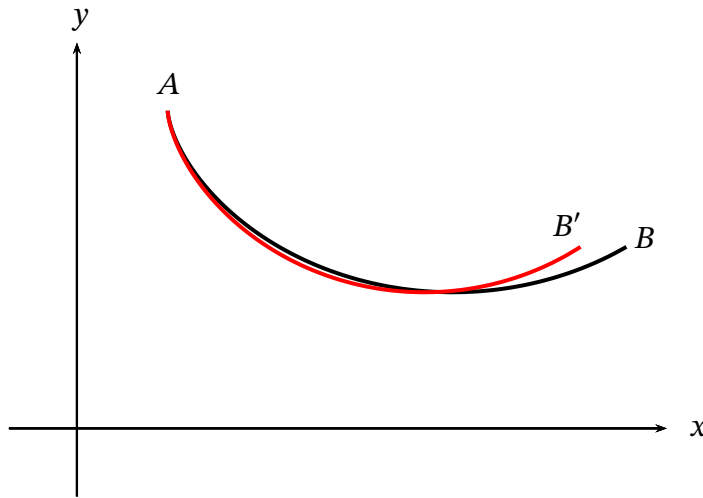


FIG. 9.1 – Deux brachistochrones infiniment proches, finissant au même moment mais pas au même endroit

Avec (9.1) page 242 :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt$$

Puisque les trajectoires sont réelles, elles vérifient les équations de Lagrange et l'intégrale est nulle :

$$\delta S = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_A}^{t_B}$$

Le lagrangien du système étant connu, nous avons trouvé la première dérivée partielle de S :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

On pose

$$\forall j = 1, \dots, n \quad p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

et l'on a :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j$$

C'est la relation (7.3a) page 190. De façon analogue, pour trouver l'expression de $\partial S / \partial t$ en fonction de t et des q_j , cherchons comment varie l'action entre deux trajectoires confondues, qui commencent au même endroit et se terminent au même endroit mais pas exactement au même moment (les deux trajectoires ne peuvent être réelles, car pour une trajectoire il n'existe qu'un seul temps de parcours possible) :

$$\delta S = \left[\frac{\partial S}{\partial t} \delta t \right]_{q_A}^{q_B}$$

Plutôt que de varier l'intégrale, partons de la différentielle de S :

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\partial S}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \mathcal{L} - \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j \end{aligned}$$

Nous avons trouvé le terme $\partial S / \partial t$. On réécrit cette relation sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t \right) = 0$$

Les $\partial S / \partial q_j$ et le hamiltonien $\mathcal{H}$ étant connus, on trouve $\partial S / \partial t$ grâce à cette relation. C'est l'équation de Hamilton-Jacobi (7.3c) page 190. En résolvant cette équation, et en remontant les inférences précédentes, on obtient dS , donc S à une constante près.

9.2 Propriétés du lagrangien

9.2.1 Changement d'unités

La multiplication du lagrangien par une constante α ne change pas l'action correspondante, donc la trajectoire trouvée :

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_A}^{t_B} \alpha \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \alpha \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt &= 0 \\ \delta \mathcal{S} &= 0\end{aligned}$$

Cela correspond à un changement d'unités (Cf. § 3.2.3 page 96).

9.2.2 Additivité du lagrangien

Soit un système isolé, constitué de deux sous-systèmes. La trajectoire de ce système est donnée par le principe de moindre action de ce système :

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

Si les deux sous-systèmes sont eux aussi isolés, donc n'interagissent pas l'un avec l'autre, chacun aura sa propre trajectoire indépendante de l'autre :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{S}_1 = 0 \\ \delta \mathcal{S}_2 = 0 \end{cases}$$

La trajectoire du système est la somme des trajectoires des deux sous-systèmes :

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{S} &= \delta \mathcal{S}_1 + \delta \mathcal{S}_2 \\ &= \delta(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) \\ \delta \int \mathcal{L} &= \delta \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\end{aligned}$$

Nous retrouvons l'additivité du lagrangien, § 3.2.5 page 98.

9.2.3 Invariance de jauge du lagrangien

Établissons l'invariance de jauge du lagrangien du § 3.2.6 page 98. Soient deux lagrangiens ne différant que de la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps :

$$\begin{aligned}
 L(q, \dot{q}, t) &= \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) \\
 \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(q, t) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + [f(q, t)]_{t_1}^{t_2} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1) \\
 \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \\
 \delta S &= \delta \mathcal{S}
 \end{aligned}$$

Le lagrangien n'est donc défini qu'à la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque des coordonnées et du temps près.

9.3 Symétries et lois de conservation

Si l'on place le principe de moindre action comme axiome de départ de toute la mécanique, il faut trouver l'expression du lagrangien des systèmes, à commencer par le lagrangien le plus simple, celui du système libre ou isolé, c.-à-d., non soumis à une influence extérieure.

9.3.1 Conservation de l'énergie

Le lagrangien d'un système libre ne peut dépendre de l'époque à laquelle un observateur galiléen le considère, ceci est une conséquence de l'homogénéité du temps, toutes les époques se valent. Une translation dans le temps ne change pas le lagrangien d'un mobile libre :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(q, \dot{q}, t + dt) &= \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \\
 \mathcal{L}(q, \dot{q}, t + dt) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &= 0 \\
 \delta \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &= 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt &= 0 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}$$

En conséquence le lagrangien d'un mobile libre ne dépend pas explicitement du temps.

Remarque 9.3.1

Nous avons vu au § 3.3.1 page 107 que cela implique la conservation de l'énergie généralisée, et donc du hamiltonien. Cette dernière est donc liée à l'homogénéité du temps.

9.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Le lagrangien d'un système libre ne peut dépendre de l'endroit où il se trouve dans le référentiel d'un observateur galiléen, ceci est une conséquence de l'homogénéité de l'espace, tous les lieux se valent. Une translation dans l'espace ne change pas le lagrangien d'un mobile libre :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q + dq, \dot{q}) &= \mathcal{L}(q, \dot{q}) \\ \mathcal{L}(q + dq, \dot{q}) - \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= 0 \\ \delta \mathcal{L}(q + dq, \dot{q}) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} dq &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0\end{aligned}$$

En conséquence le lagrangien ne dépend pas explicitement des coordonnées généralisées.

Remarque 9.3.2

En coordonnées rectangulaires

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

La coordonnées x est cyclique, d'après le § 3.3.2 page 108 la quantité de mouvement selon l'axe x , donc selon n'importe quel axe, se conserve. Cette dernière est donc liée à l'homogénéité de l'espace.

La quantité de mouvement d'un système formé de deux sous-systèmes est la somme des quantités de mouvement des deux sous-systèmes, car elle ne dépend pas de l'interaction entre les deux sous-systèmes. Elle est donc additive.

9.3.3 Conservation du moment cinétique

Le lagrangien d'un système libre ne peut dépendre de son orientation dans un référentiel galiléen, ceci est une conséquence de l'isotropie de l'espace, toutes les directions se valent. Il ne peut donc être fonction que de la norme de sa vitesse, autrement dit de v^2 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2) \quad (9.2)$$

Montrons que l'isotropie de l'espace implique la conservation du moment cinétique. Imaginons la rotation infinitésimale d'un système libre par rapport au référentiel d'un observateur galiléen. Chaque vecteur position passe de la position $\vec{r}_i$ à la position $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$ avec

$$d\vec{r}_i = d\vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Chaque vecteur vitesse passe de $\vec{v}_i$ à $\vec{v}_i + d\vec{v}_i$ avec

$$d\vec{v}_i = d\vec{\omega} \times \vec{v}_i$$

La rotation dans l'espace ne change pas le lagrangien d'un système libre. Utilisons la notation vectorielle de la remarque 3.2.1 page 94 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\vec{r}_i + d\vec{r}_i, \vec{v}_i + d\vec{v}_i) &= \mathcal{L}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) \\
 \mathcal{L}(\vec{r}_i + d\vec{r}_i, \vec{v}_i + d\vec{v}_i) - \mathcal{L}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) &= 0 \\
 d\mathcal{L}(\vec{r}_i, \vec{v}_i) &= 0 \\
 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \cdot d\vec{v}_i \right) &= 0 \\
 \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\vec{r}_i + d\vec{r}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \cdot (d\vec{\omega} \times \vec{v}_i) \right] &= 0 \\
 \sum_{i=1}^N \left[\vec{p}_i \cdot (d\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i \cdot (d\vec{\omega} \times \vec{v}_i) \right] &= 0
 \end{aligned}$$

On utilise la propriété suivante des produits mixtes, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N [d\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) + d\vec{\omega} \cdot (\vec{v}_i \times \vec{p}_i)] &= 0 \\
 d\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N [(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) + (\vec{v}_i \times \vec{p}_i)] &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i &= 0
 \end{aligned}$$

Le moment cinétique total du système se conserve dans le temps. Le moment cinétique d'un système formé de deux sous-systèmes est la somme des moments cinétiques des deux sous-systèmes, car il ne dépend pas de l'interaction entre les deux sous-systèmes. Il est donc additif.

9.4 Principe de relativité de Galilée

D'après (9.2) page ci-contre, le lagrangien d'un système libre n'est fonction que de v . Les équations de Lagrange donnent :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}(v)} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial \vec{v}} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_x} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_y} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_z} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_x} = C_1^{ste/t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_y} = C_2^{ste/t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(v)}{\partial v_z} = C_3^{ste/t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(v) = C_1^{ste/t} v_x + f(v_y, v_z) \\ \mathcal{L}(v) = C_2^{ste/t} v_y + h(v_x, v_z) \\ \mathcal{L}(v) = C_3^{ste/t} v_z + g(v_x, v_y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = c_1^{ste/t} \\ v_y = c_2^{ste/t} \\ v_z = c_3^{ste/t} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{C}^{ste/t}$$

Dans un référentiel galiléen, tout système libre se déplace avec une vitesse constante en grandeur et en direction. C'est la *loi de l'inertie*. Elle définit les référentiels galiléens et les systèmes libres.

Les coordonnées $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ d'un même point dans deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, dont le second se déplace par rapport au premier avec la vitesse $\vec{V}$, sont liées par la transformation de Galilée

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$$

où le temps est le même dans les deux référentiels.

Remarque 9.4.1

Remarquons que nous pouvons redéfinir les référentiels galiléens comme des référentiels dans lesquels l'espace est homogène et isotrope, et le temps homogène.

9.5 Lagrangien d'un mobile libre

Cherchons l'expression du lagrangien d'un mobile libre. D'après le § précédent, son lagrangien n'est fonction que de la norme de sa vitesse dans un référentiel galiléen. Supposons une vitesse relative infinitésimale $d\vec{v}$ entre deux référentiels galiléens. On prend le carré pour ne prendre en compte que la norme :

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \vec{v} + d\vec{v} \\ v'^2 &= (\vec{v} + d\vec{v})^2 \\ &= v^2 + 2d\vec{v} \cdot \vec{v} + (dv)^2 \end{aligned}$$

Si nous voulons que la trajectoire du mobile soit la même dans le second référentiel galiléen, l'action doit être identique dans les deux référentiels, autrement dit le lagrangien ne doit différer que de la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des coordonnées et du temps :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v) &= \mathcal{L}(v') + \frac{dF}{dt} \\ \mathcal{L}(v) &= \mathcal{L}(v + dv) + \frac{dF}{dt} \\ \mathcal{L}(v^2) &= \mathcal{L}(v^2 + 2d\vec{v} \cdot \vec{v} + (dv)^2) + \frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} \end{aligned}$$

On effectue le développement limité au 1^{er} ordre en $d\vec{v}$ de la fonction $\mathcal{L}(v^2)$, du type

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$$

En négligeant le terme d'ordre deux $(dv)^2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(v^2) &= \mathcal{L}(v^2) + 2d\vec{v} \cdot \vec{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} + \frac{dF}{dt} \\ \frac{dF}{dt}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= -2d\vec{v} \cdot \vec{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Cette égalité n'est vérifiée que si

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2} &= C \\ \mathcal{L} &= Cv^2\end{aligned}$$

En effet, dans ce cas, en se souvenant que $d\vec{v}$ est constant :

$$\begin{aligned}\frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} &= -2Cd\vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= -2Cd\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ F(\vec{r}, t) &= -2Cd\vec{v} \cdot \vec{r} \quad \text{où } d\vec{v} \text{ est constant.}\end{aligned}$$

Remarque 9.5.1

Dans le cas où $\partial_{v^2}\mathcal{L} = f(r, v, t)$ non constante :

$$\begin{aligned}\frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} &= -2f(r, v, t)d\vec{v} \cdot \vec{v} \\ F(\vec{r}, t) &= -2d\vec{v} \cdot \int f(r, v, t)\vec{v} dt\end{aligned}$$

ce qui est impossible car la fonction F n'est pas fonction de la vitesse $\vec{v}$ et l'intégrale la fait apparaître.

La constante doit caractériser le système, on pose $C = m/2$ et on appelle masse du système la constante m . La masse ne peut être négative, sans quoi l'intégrale du lagrangien ne pourrait passer par un minimum. D'après le § 9.2.1 page 246, la constante 1/2 ne change pas le lagrangien, elle correspond au choix des unités :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2$$

Le lagrangien d'un mobile libre se confond avec son *énergie cinétique*, que nous noterons T .

9.6 Lagrangien d'un système

9.6.1 Lagrangien d'un système libre

Pour un système libre constitué de deux mobiles libres, d'après le § 9.2.2 page 246, les lagrangiens s'additionnent. L'énergie cinétique est donc la somme des énergies cinétiques des parties du système :

$$T(q, \dot{q}, t) = \sum_i T_i(q, \dot{q}, t)$$

C'est en cela que la masse n'est pas une simple constante que l'on pourrait supprimer du lagrangien. Elle intervient lorsque le système est constitué de plusieurs parties mobiles.

Pour un système libre constitué de deux mobiles en interaction, nous devons ajouter au lagrangien des deux mobiles isolés, une fonction qui modélise des interactions dans le système. Elle doit donc être fonction des coordonnées généralisées des mobiles, et de même dimension que le premier terme d'énergie cinétique. En mécanique classique on suppose que l'interaction se propage à vitesse infinie, elle est instantanée et ne dépend pas du temps. Nous l'appelons l'énergie potentielle $V(q)$. Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q)$$

Le signe négatif est affaire de convention car $V(q)$ doit être remplacé par un modèle. Tout dépend de ce que l'on souhaite appeler énergie potentielle, p. ex. $\frac{1}{2}kx^2$ ou $-\frac{1}{2}kx^2$ pour l'énergie potentielle élastique d'un ressort dans sa partie linéaire.

9.6.2 Lagrangien d'un système dans un champ extérieur

Si le système est plongé dans un champ extérieur variable dans le temps alors

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

9.7 Le temps comme quatrième coordonnée

Dérivons le lagrangien par rapport au temps :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \\ \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \end{aligned}$$

Avec les équations de Lagrange (3.11) page 74 :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_j} \ddot{q}_j \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} q_j \right) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Supposons que dans l'intervalle (t_0, t_1) la variable t maintenant indépendante varie de δt sauf aux extrémités de la trajectoire. Nous avons alors $\delta q_j = 0$ (où ici le delta n'est dû qu'à la variation temporelle), et :

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{q}_j &= \delta \left(\frac{dq_j}{dt} \right) \\
 &= \frac{\delta(dq_j)dt - dq_j\delta(dt)}{(dt)^2} \\
 &= \frac{d\delta q_j}{dt} - \frac{dq_j}{dt} \frac{\delta(dt)}{dt} \\
 &= -\dot{q}_j \frac{d\delta t}{dt}
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties et avec (9.3) de la présente page :

$$\begin{aligned}
 \delta \int \mathcal{L} dt &= \int \mathcal{L} \delta dt + \int \delta \mathcal{L} dt \\
 &= \int \mathcal{L} d\delta t + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \\
 &= \int \mathcal{L} \frac{d}{dt}(\delta t) dt + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t dt - \int \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \frac{d}{dt}(\delta t) dt \\
 &= - \int \frac{d\mathcal{L}}{dt} \delta t dt + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t dt + \int \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t dt \\
 &= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) \delta t dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

La contribution de la variation temporelle est donc nulle. Par conséquent on peut traiter le temps comme si c'était une quatrième coordonnée, le principe de moindre action de Hamilton incluant le temps comme paramètre est équivalent au principe de Hamilton sans le temps. Dans un espace V_4 à quatre dimensions, de paramètres q_1, q_2, q_3, t , les trois équations

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad q_j = q_j(t)$$

représentent une courbe appelée *ligne d'univers*. Réciproquement, toute courbe peut être représentée de la sorte dans V_4 . Imaginons un mobile soumis à des forces et répondant aux équations de Lagrange. Sa trajectoire dans l'espace et dans le temps, c.-à-d. sa ligne d'univers dans V_4 , est telle que $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$ en prenant le temps comme quatrième coordonnée, les extrémités spatiales et temporelles restant fixes.

Chapitre 10

LE THÉORÈME DE NOETHER

Sommaire

10.1 Transformations invariantes	255
10.2 Transformations infinitésimales	259
10.3 Transformations de l'espace et du temps	262

10.1 Transformations invariantes

10.1.1 Définition des transformations invariantes

Lors d'une transformation ponctuelle de l'espace des configurations (déf. 5.1.1 page 146), on exprime les anciennes coordonnées généralisées q en fonction des nouvelles q' :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad q_j = q_j(q'_1, \dots, q'_n, t)$$

Les anciennes vitesses généralisées $\dot{q}$ s'expriment *de facto* en fonction des q' et des $\dot{q}'$:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(q'_1, \dots, q'_n, \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_n, t)$$

On obtient le nouveau lagrangien $\mathcal{L}'$ en injectant ce changement de variables dans l'ancien $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}[q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t] \quad (10.1)$$

Ces lagrangiens sont égaux à chaque instant t , mais en général ils n'ont pas la même forme fonctionnelle. En revanche, les équations de Lagrange (3.11) page 74 gardent la même forme fonctionnelle :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'(q'_j, \dot{q}'_j, t)}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'(q'_j, \dot{q}'_j, t)}{\partial q'_j} = 0$$

Les équations explicites du mouvement écrites en fonction des nouvelles variables sont habituellement différentes de celles écrites en fonction des anciennes, elles n'ont pas même forme fonctionnelle. En général, on ne peut pas obtenir les équations explicites du mouvement simplement en changeant les anciennes variables par les nouvelles.

Exemple 10.1.1 : Des coordonnées rectangulaires du plan aux coordonnées polaires

En coordonnées rectangulaires, la force gravitationnelle (force centrale attractive) s'écrit en posant $k > 0$:

$$\vec{F} = -\frac{k}{x^2 + y^2} \vec{e}_r$$

Cette force dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$V = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Le lagrangien a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Reprenons le changement de coordonnées polaires vers rectangulaires ((2.2) page 56) :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos(\theta) - \rho \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin(\theta) + \rho \dot{\theta} \cos(\theta) \end{cases}$$

L'énergie cinétique devient :

$$\begin{aligned} T'(\dot{\rho}, \dot{\theta}) &= T[\dot{x}(\dot{\rho}, \dot{\theta}), \dot{y}(\dot{\rho}, \dot{\theta})] \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(\dot{\rho}, \dot{\theta}) + \dot{y}^2(\dot{\rho}, \dot{\theta})] \\ &= \frac{1}{2}m\{[\dot{\rho} \cos(\theta) - \rho \dot{\theta} \sin(\theta)]^2 + [\dot{\rho} \sin(\theta) + \rho \dot{\theta} \cos(\theta)]^2\} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

L'énergie potentielle devient :

$$\begin{aligned} V'(\rho, \theta) &= V[x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)] \\ &= \frac{-k}{\sqrt{x^2(\rho, \theta) + y^2(\rho, \theta)}} \\ &= \frac{-k}{\sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}} \\ &= -\frac{k}{\rho} \end{aligned}$$

Le nouveau lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t) &= \mathcal{L}[x(\rho, \theta, t), y(\rho, \theta, t), \dot{x}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t), \dot{y}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t), t] \\ &= T'(\dot{\rho}, \dot{\theta}) + V'(\rho, \theta) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{\rho} \end{aligned}$$

Remarque 10.1.1

Si le nouveau lagrangien avait eu même forme fonctionnelle on aurait eu :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t) &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + \theta^2}} \\ &= \mathcal{L}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t)\end{aligned}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent de la même façon (elles ont même forme fonctionnelle) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t)}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t)}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t)}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

En revanche les équations du mouvement à force centrale ne s'écrivent pas de la même façon en coordonnées (ρ, θ) et en coordonnées (x, y) .

Cependant, il existe des transformations de coordonnées pour lesquelles les équations explicites du mouvement sont les mêmes, elles ont même forme fonctionnelle et l'on peut passer des unes aux autres simplement en échangeant les anciennes et les nouvelles coordonnées.

Définition 10.1.1 : Transformations invariantes

Les transformations de coordonnées qui laissent invariantes les équations explicites du mouvement sont appelées des *transformations invariantes*.

Remarque 10.1.2

Ne pas confondre l'invariance de forme fonctionnelle d'un lagrangien $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t)$ pour laquelle les variables sont les mêmes, et l'égalité à chaque instant $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.

Il est certain que si le lagrangien est invariant de forme fonctionnelle par changement de coordonnées, c.-à-d. si

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (10.2)$$

alors les équations de Lagrange (qui sont toujours invariantes de forme fonctionnelle), donneront des équations du mouvement invariantes de forme fonctionnelle. Nous pouvons ajouter au lagrangien la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction f des n coordonnées généralisées $q(t)$ et du temps (Cf. § 3.2.6 page 98) :

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) \equiv \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{df(q', t)}{dt} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \equiv \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

Avec (10.2) de la présente page on obtient la condition générale d'invariance de la transformation, par exemple pour les coordonnées primées :

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{df(q', t)}{dt} \quad (10.3)$$

La relation (10.1) page 255 toujours vraie lors d'un changement de coordonnées, donne la condition sur le lagrangien de départ $\mathcal{L}$ pour avoir une transformation invariante :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{df(q', t)}{dt} \quad (10.4)$$

Exemple 10.1.2 : Mobile libre en une dimension

Le lagrangien d'un mobile de masse m libre en une dimension s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Considérons la possible invariance de ce système par une transformation de la forme,

$$\begin{aligned}x' &= x + g(t) \\x &= x' - g(t) \\\dot{x} &= \dot{x}' - \dot{g}(t)\end{aligned}$$

et cherchons $g(t)$. Par changement de variables, le nouveau lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x', \dot{x}', t) &= \frac{1}{2}m[\dot{x}(x, \dot{x}, t)]^2 \\&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2(x, \dot{x}, t) \\&= \frac{1}{2}m[\dot{x}' - \dot{g}(t)]^2 \\&= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}m\dot{g}^2(t) - m\dot{x}'\dot{g}(t) \\&= \mathcal{L}(x', \dot{x}', t) + \frac{1}{2}m\dot{g}^2(t) - m\dot{x}'\dot{g}(t)\end{aligned}$$

Pour que la transformation soit invariante la relation (10.3) page précédente doit être vérifiée :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x', \dot{x}', t) &= \mathcal{L}(x', \dot{x}', t) + \frac{df(x', t)}{dt} \\\frac{1}{2}m\dot{g}^2(t) - m\dot{x}'\dot{g}(t) &= \frac{df(x', t)}{dt} \\&= \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f(x', t)}{\partial t} dt \right) \\&= \frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} \dot{x}' + \frac{\partial f(x', t)}{\partial t}\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}m\dot{g}^2(t)$ et $\frac{\partial f(x', t)}{\partial t}$ ne sont pas des fonctions explicites de $\dot{x}'$, donc seule possibilité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} \dot{x}' &= -m\dot{x}'\dot{g}(t) \\\frac{\partial f(x', t)}{\partial x'} &= -m\dot{g}(t) \\f(x', t) &= -m\dot{g}(t)x' + h_1(t)\end{aligned}$$

Il reste :

$$\frac{\partial f(x', t)}{\partial t} = \frac{1}{2}m\dot{g}^2(t)$$

Les conditions de Schwarz pour que $f(x', t)$ soit une différentielle totale exacte s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x'} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} [-m\dot{g}(t)] &= \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{2} m \dot{g}^2(t) \right] \\ \frac{\partial \dot{g}(t)}{\partial t} &= 0 \\ \dot{g}(t) &= \beta \\ g(t) &= \alpha + \beta t\end{aligned}$$

où α et β sont des constantes.

Remarque 10.1.3

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x', t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} m \beta^2 \quad \text{et} \quad f(x', t) = -m\beta x' + h_1(t) \\ f(x', t) &= \frac{1}{2} m \beta^2 t + h_2(x')\end{aligned}$$

La fonction a pour expression :

$$f(x', t) = -m\beta x' + \frac{1}{2} m \beta^2 t$$

La transformation invariante la plus générale avec les hypothèses que nous avons prises est donc la suivante :

$$x' = x + \alpha + \beta t$$

Pour $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ il s'agit d'un déplacement purement spatial, et pour $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ d'une transformation galiléenne (changement de référentiel galiléen pour une vitesse relative β).

Remarque 10.1.4

On note qu'une transformation de coordonnées vers un référentiel accéléré n'est pas une transformation invariante, puisque nous avons montré que seuls un déplacement spatial et une transformation galiléenne sont possibles. En mécanique de Newton cela est clair par l'apparition de forces fictives, aussi appelées force d'inertie.

10.2 Transformations infinitésimales

10.2.1 Définition des transformations infinitésimales

Certaines transformations ont des paramètres ajustables, par exemple α et β dans l'exemple précédent. Notons α_k ces paramètres :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad q'_j = q'_j(q_i, \alpha_k, t)$$

Pour certaines valeurs α_k^0 des paramètres, la transformation devient la transformation identité :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \begin{aligned} q'_j &= q'_j(q_i, \alpha_k^0, t) \\ &= q_j \end{aligned}$$

Définition 10.2.1 : Transformations infinitésimales

Les transformations de coordonnées pour lesquelles les paramètres α_k sont infiniment proches des α_k^0 et pour lesquelles les nouvelles coordonnées généralisées q'_j ne diffèrent qu'infiniment peu des anciennes coordonnées généralisées q_i sont appelées des *transformations infinitésimales*. Pour ces transformations :

$$\alpha_k = \alpha_k^0 + \delta\alpha_k \quad \text{et} \quad \forall j \quad q'_j = q_j + \delta q_j \quad \text{avec} \quad \delta q_j = \sum_k \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \alpha_k} \right)_{\alpha_k^0} \delta\alpha_k$$

Reprenons la condition (10.4) page 257 sur le lagrangien de départ pour avoir une transformation invariante, et considérons une transformation infinitésimale invariante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &= \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{df(q', t)}{dt} \\ &= \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] \end{aligned}$$

Remarque 10.2.1

Pour que les lagrangiens soient infiniment proches, la fonction f doit prendre une valeur infiniment petite, d'où le δf . Ici δf n'est pas une petite variation de la fonction f , mais signifie que f prend une valeur infiniment petite du premier ordre.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) &= \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] \\ -\delta \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) &= \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] \\ \delta \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] &= 0 \end{aligned}$$

Un changement de coordonnées δq_j induit un changement de vitesse généralisée $\delta \dot{q}_j$:

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n \quad \delta \dot{q}_j &= \delta \left(\frac{dq_j}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\delta q_j) \end{aligned}$$

La transformation infinitésimale invariante s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) + \frac{d}{dt} [\delta f(q', t)] &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \delta f(q', t) \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \delta f(q', t) &= C_{/temps}^{ste} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Théorème 10.2.1 : Théorème de Noether

À toute transformation infinitésimale invariante est associée une constante du mouvement, appelée intégrale première.

Exemple 10.2.1

Nous avons vu (Cf. (4.13) page 138) que l'impulsion généralisée associée à une coordonnée cyclique est une constante du mouvement. C'est un cas particulier du résultat que nous venons d'obtenir. La variable cyclique q_{cy} n'apparaissant pas dans le lagrangien, ce dernier est invariant sous toute transformation de coordonnées impliquant cette variable,

$$\begin{aligned} q' &= q_{cy} + \alpha \\ q' - q_{cy} &= \alpha \\ \delta q_{cy} &= \delta \alpha \end{aligned}$$

où $\delta \alpha$ est une constante arbitraire infiniment petite du premier ordre. La condition 10.4 page 257 sur le lagrangien de départ est respectée, avec $df(q', t)/dt = 0$, soit $f(q', t) = 0$. D'après (10.5) de la présente page, la constante du mouvement associée à la transformation infinitésimale correspondant à cette transformation invariante est l'impulsion généralisée $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_{cy}$, conjuguée de la coordonnée cyclique q_{cy} .

Exemple 10.2.2

Reprenons l'exemple 10.1.2 page 258. La transformation suivante est invariante pour un mobile libre en une dimension :

$$x' = x + \alpha + \beta t$$

La transformation infinitésimale correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} x + \delta x &= x + \alpha + \beta t \\ \delta x &= \alpha + t\beta \\ &= \delta \alpha + t\delta \beta \end{aligned}$$

Remarque 10.2.2

$\delta \alpha$ n'est pas une petite variation de α mais signifie que α est un nombre infiniment petit du premier ordre. De même pour $\delta \beta$.

D'après la remarque 10.1.3 page 259, la fonction a pour expression :

$$f(x', t) = -mx'\beta + \frac{1}{2}m\beta^2 t$$

$$\delta f = -mx'\delta\beta + \frac{1}{2}m(\delta\beta)^2 t$$

En négligeant les infiniments petits d'ordre deux devant ceux d'ordre un :

$$f(x', t) = -m(x + \delta x)\delta\beta$$

$$= -mx\delta\beta$$

D'après le théorème de Noether 10.2.1 page précédente, pour $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, la constante du mouvement associée à cette transformation infinitésimale invariante s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \delta f(q', t) = m\dot{x}(\delta\alpha + t\delta\beta) - mx\delta\beta$$

$$= m\dot{x}\delta\alpha + (m\dot{x}t - mx)\delta\beta$$

Au déplacement purement spatial, $\delta\alpha \neq 0$ et $\delta\beta = 0$, est associée la conservation de la quantité de mouvement $m\dot{x}$. À la transformation de Galilée, $\delta\alpha = 0$ et $\delta\beta \neq 0$, est associée la conservation de $x_0 = x(t) - \dot{x}t$, c.-à-d. la position initiale du mobile.

10.3 Transformations de l'espace et du temps

10.3.1 Homogénéité de l'espace

Considérons un système libre. Dans le cas général, ce système est constitué de plusieurs parties qui peuvent être en interaction les unes avec les autres. Ces parties peuvent être en mouvement, la i^e partie est repérée par son vecteur position $\vec{r}_i(t)$ éventuellement fonction du temps. Ce système contient de l'énergie potentielle V (dite interne), par exemple un gaz sous pression, un ressort tendu, un volant d'inertie, etc. Dans le cas général donc, le lagrangien du système libre constitué de N parties s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2 + V$$

Une expérience de physique donne les mêmes résultats quel que soit l'endroit où elle est faite, ce qui implique l'homogénéité de l'espace. La physique est invariante par une transformation des coordonnées consistant en une translation arbitraire d'un vecteur $\vec{a}$ dans l'espace. La translation est arbitraire pour le système global donc pour chacune de ses parties :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \vec{r}'_i(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{a}$$

Remarque 10.3.1

La translation spatiale peut être vue indifféremment comme une transformation active, pour laquelle c'est le système qui se déplace, ou comme une transformation passive, pour laquelle c'est l'observateur qui se déplace.

Une constante du mouvement est donc associée à la transformation infinitésimale invariante correspondante :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \begin{aligned} \vec{r}_i(t) + \delta \vec{r}_i &= \vec{r}_i(t) + \delta \vec{a} \\ \delta \vec{r}_i &= \delta \vec{a} \end{aligned}$$

La vitesse de chacune des parties du système reste invariante lors d'une translation dans l'espace,

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \begin{aligned} \vec{r}'_i(t) &= \vec{r}_i(t) + \dot{\vec{a}} \\ &= \vec{r}_i(t) \end{aligned}$$

donc aussi l'énergie cinétique totale du système. De même, traduire un système dans l'espace laisse invariante son énergie potentielle interne. Le lagrangien du système est donc invariant de forme fonctionnelle par une translation dans l'espace :

$$\mathcal{L}'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t) = \mathcal{L}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t)$$

D'après (10.5) page 261 la constante du mouvement associée à la transformation infinitésimale invariante s'écrit :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{a} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{a}$$

On pose

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (10.6)$$

la constante du mouvement. On l'appelle quantité de mouvement totale du système.

Remarque 10.3.2

Notez que ce résultat est indépendant de l'énergie potentielle interne du système.

10.3.2 Isotropie de l'espace

On considère que le même système libre que précédemment. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quelle que soit l'orientation spatiale qu'on lui donne, ce qui implique l'isotropie de l'espace. La physique est invariante par une transformation des coordonnées consistant en une rotation arbitraire d'un angle θ dans l'espace. Dans le cas d'une transformation active, on tourne le système d'un angle θ autour de l'axe des z . Si l'axe des z ne passe pas par le centre d'inertie du système, celui-ci subit une rotation et un déplacement spatial, mais nous avons vu que l'espace est homogène. Dans le cas d'une transformation passive l'observateur tourne d'un angle $-\theta$ autour du même axe z , le système subit une rotation et un déplacement spatial fictif. La transformation des coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ z' = z \end{cases}$$

Une constante du mouvement est donc associée à la transformation infinitésimale invariante correspondante :

$$\begin{cases} x + \delta x = x \cos(\delta\theta) - y \sin(\delta\theta) \\ y + \delta y = x \sin(\delta\theta) + y \cos(\delta\theta) \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \delta x = x - y\delta\theta \\ y + \delta y = x\delta\theta + y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = -y\delta\theta \\ \delta y = x\delta\theta \\ z' = z \end{cases}$$

L'énergie cinétique du système et son énergie potentielle interne ne sont pas affectées par une rotation de l'espace. Le lagrangien du système est donc invariant, et par conséquent la transformation des coordonnées aussi. D'après (10.5) page 261 à cette transformation infinitésimale invariante est associée la constante du mouvement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i \right) &= \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} y_i \delta\theta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} x_i \delta\theta \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \delta\theta \\ &= L_z \delta\theta \end{aligned}$$

où L_z est la composante en z du moment angulaire total du système. De même, en considérant des rotations autour des axes x et y , on montre que les composantes L_x et L_y sont des constantes du mouvement. Le moment cinétique total du système est donc une constante du mouvement.

Remarque 10.3.3

Les vecteurs étant indépendants de tout système de coordonnées, une égalité (ici $\vec{L} = \vec{e}^{ste}$) démontrée dans un système de coordonnées particulier (ici rectangulaire) est valable dans tout système de coordonnées.

Nous pouvons refaire cette démonstration sous forme vectorielle, sans utiliser de système de coordonnées. Soit $\vec{a}$ un vecteur unitaire porté par l'axe de rotation passant par le centre du système de coordonnées, alors :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}_i &= \vec{a} \times \vec{r}_i \\ \delta \vec{r}_i &= \delta \vec{a} \times \vec{r}_i \end{aligned}$$

où $\delta \vec{a} = \delta\theta \vec{a}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \vec{r}_i \right) &= \sum_{i=1}^N [m_i \dot{\vec{r}}_i \times (\delta \vec{a} \times \vec{r}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i) \delta \vec{a} \\ &= \vec{L} \cdot \delta \vec{a} \end{aligned}$$

10.3.3 Changement de référentiel galiléen

Une expérience de physique donne les mêmes résultats quel que soit le référentiel galiléen dans lequel se trouve le système et quel que soit le référentiel galiléen dans lequel se trouve l'observateur. La physique est invariante par une transformation de galilée des coordonnées. Dans une transformation active, le système voit sa vitesse augmenter de $\vec{v}$. Dans une transformation passive, la vitesse nulle de l'observateur devient $-\vec{v}$. La transformation de coordonnées de l'ancien référentiel galiléen $\mathcal{R}$ vers le nouveau $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\vec{r}'_i(t) = \vec{r}_i(t) + t\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}'_i = \dot{\vec{r}}_i + \vec{v}$$

La nouvelle énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\vec{r}}'_i - \vec{v}\|^2 \\ &= T - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle interne n'est pas affectée par un changement de référentiel. Le nouveau lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}') = \mathcal{L}(q', \dot{q}') - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{v}\|^2$$

Le lagrangien n'est pas invariant, mais le terme de droite est la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction de la position et du temps :

$$f = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{v}\|^2 t$$

Une constante du mouvement est donc associée à la transformation infinitésimale invariante :

$$\begin{aligned} \vec{r}_i + \delta \vec{r}_i &= \vec{r}_i + t \delta \vec{v} \\ \delta \vec{r}_i &= t \delta \vec{v} \end{aligned}$$

D'après (10.5) page 261 à cette transformation infinitésimale invariante est associée la constante du mouvement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \vec{r}_i + \delta f[\vec{r}'(t), t] &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{v} t - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i \cdot \delta \vec{v} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i t - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta \vec{v} \\ &= \left(\vec{P} t - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta \vec{v} \end{aligned}$$

où $\vec{P}$ la quantité de mouvement totale du système se conserve (déf. 10.6 page 263). En posant

$$\vec{R}_G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i(t)$$

le vecteur position du centre d'inertie G du système :

$$\begin{aligned}\vec{P}t + M\vec{R}_G &= \vec{c}^{ste} \\ &= M\vec{R}_G(t = 0)\end{aligned}$$

La constante du mouvement est donc le vecteur position initial du centre d'inertie du système.

10.3.4 Décalage temporel

Les transformations invariantes et les transformations infinitésimales concernent les transformations des coordonnées spatiales uniquement, les variables dépendantes. Pour la variable indépendante, le temps, la relation (4.9) page 134 montre que si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, de sorte que les équations du mouvement sont invariantes lors d'un décalage temporel, alors le hamiltonien se conserve.

Chapitre 11

COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉCANIQUES

Sommaire

11.1 Double plan incliné	267
11.2 Poulies coaxiales	273
11.3 Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe	277
11.4 Pendule simple, plan	287
11.5 Pendule simple à ressort, plan	295
11.6 Pendule sphérique	300

11.1 Double plan incliné

Deux masses m_1 et m_2 sur un double plan incliné sont reliées entre elles par un câble de longueur constante passant par une poulie. Les masses se déplacent sans frottements. Quelle est l'équation de leur mouvement ?

11.1.1 Résolution par la mécanique de Newton

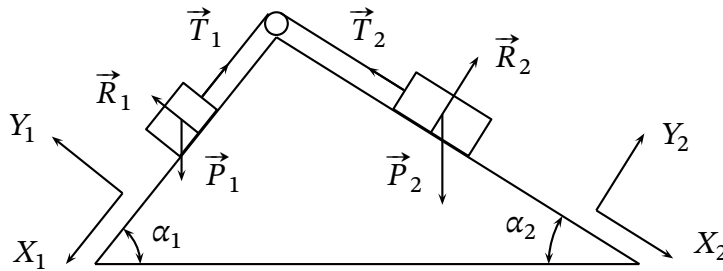


FIG. 11.1 – Double plan incliné

a) Grâce à la relation fondamentale de la dynamique

Pour chaque masse, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} \end{aligned}$$

Pour la masse m_1 :

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1$$

En projetant sur les axes X_1 et Y_1 , on obtient le système

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin(\alpha_1) - T \\ 0 = -m_1 g \cos(\alpha_1) + R_1 \end{cases}$$

De même, pour la masse m_2 , en projetant sur les axes X_2 et Y_2 :

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin(\alpha_2) - T \\ 0 = -m_2 g \cos(\alpha_2) + R_2 \end{cases}$$

Avec ce choix d'axes de projection, les positions et les vitesses des masses sont liées par :

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\ddot{x}_1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 &= m_1 g \sin(\alpha_1) - m_2 g \sin(\alpha_2) \\ \ddot{x}_1 &= \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{m_1 + m_2} g \\ \dot{x}_1 &= \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{(m_1 + m_2)} g t + \dot{x}_1(t=0) \\ x_1 &= \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{2(m_1 + m_2)} g t^2 + \dot{x}_1(t=0) t + x_1(t=0) \end{aligned}$$

b) Grâce aux intégrales premières

À $n = 1$ degré de liberté correspond $2n - 1 = 1$ intégrale première. Toutes les forces extérieures dérivent d'un potentiel donc l'énergie mécanique se conserve. Elle a pour expression :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1gx_1 \sin(\alpha_1) - m_2gx_2 \sin(\alpha_2) \\ &= c^{ste} \end{aligned}$$

Avec notre choix d'axes de projection :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_1^2 - m_1gx_1 \sin(\alpha_1) + m_2gx_1 \sin(\alpha_2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 - g[m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)]x_1 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 - Ax_1 \end{aligned}$$

où l'on a posé $A = g[m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)]$. On prend les conditions initiales sur la position $x_1(t = 0) = 0$ et sur la vitesse $\dot{x}_1(t = 0) = 0$, par conséquent m_1 descend et :

$$E = 0$$

Nous avons alors

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2Ax_1}{m_1 + m_2}}$$

On ne conserve que le signe positif pour la vitesse car nous avons supposé que la masse m_1 descend. La seule variable x_1 est notée x dans ce qui suit :

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{Ax}}$$

On pose $X = Ax$ donc $dx = dX/A$:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{A} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{X}} \\ &= \frac{2}{A} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \left[\sqrt{X} \right]_0^X \\ &= \frac{1}{A} \sqrt{2(m_1 + m_2)X} \end{aligned}$$

Revenons à la variable x :

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)}{A}} \sqrt{x} \\ x &= \frac{A}{2(m_1 + m_2)} t^2 \\ &= \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{2(m_1 + m_2)} gt^2 \end{aligned}$$

11.1.2 Résolution par le principe des travaux virtuels

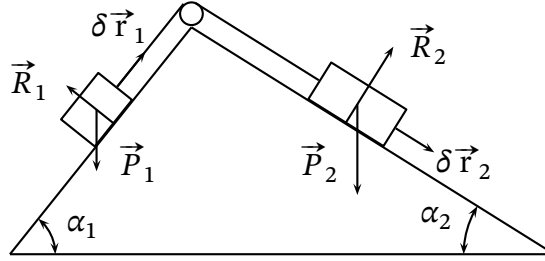


FIG. 11.2 – Double plan incliné

Le système est soumis la liaison holonome :

$$\|\delta \vec{r}_1\| = \|\delta \vec{r}_2\|$$

On choisit des déplacements virtuels $\delta \vec{r}_1$ et $\delta \vec{r}_2$ compatibles entre eux et avec les liaisons. Le principe des travaux virtuels (2.1) page 54 s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\vec{P}_1 + \vec{R}_1 - \vec{p}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{R}_2 - \vec{p}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0 \\ & (-m_1 g \sin(\alpha_1) - m_1 \|\vec{p}_1\|) \|\delta \vec{r}_1\| + (m_2 g \sin(\alpha_2) - m_2 \|\vec{p}_2\|) \|\delta \vec{r}_2\| = 0 \end{aligned}$$

Avec $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\|$ et la condition de liaison holonome :

$$\begin{aligned} & -m_1 g \sin(\alpha_1) - m_1 \|\vec{p}_1\| + m_2 g \sin(\alpha_2) - m_2 \|\vec{p}_1\| = 0 \\ & (-m_1 - m_2) \|\vec{p}_1\| - m_1 g \sin(\alpha_1) + m_2 g \sin(\alpha_2) = 0 \\ & \|\vec{p}_1\| = \frac{m_2 \sin(\alpha_2) - m_1 \sin(\alpha_1)}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

Résolvons ce problème en utilisant les multiplicateurs indéterminés de Lagrange. Soit λ le multiplicateur, le principe des travaux virtuels et la condition de liaison s'écrivent en une seule équation :

$$\begin{aligned} & (\vec{P}_1 + \vec{R}_1 - \vec{p}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{R}_2 - \vec{p}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 + \lambda (\|\delta \vec{r}_1\| - \|\delta \vec{r}_2\|) = 0 \\ & [-m_1 g \sin(\alpha_1) - m_1 \|\vec{p}_1\|] \|\delta \vec{r}_1\| + [m_2 g \sin(\alpha_2) - m_2 \|\vec{p}_2\|] \|\delta \vec{r}_2\| + \lambda [\|\delta \vec{r}_1\| - \|\delta \vec{r}_2\|] = 0 \\ & [-m_1 g \sin(\alpha_1) - m_1 \|\vec{p}_1\| + \lambda] \|\delta \vec{r}_1\| + [m_2 g \sin(\alpha_2) - m_2 \|\vec{p}_2\| - \lambda] \|\delta \vec{r}_2\| = 0 \end{aligned}$$

$\|\delta \vec{r}_1\|$ et $\|\delta \vec{r}_2\|$ étant non nuls et $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\|$:

$$\begin{cases} -m_1 g \sin(\alpha_1) - m_1 \|\vec{p}_1\| + \lambda = 0 \\ m_2 g \sin(\alpha_2) - m_2 \|\vec{p}_2\| - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow m_2 g \sin(\alpha_2) - m_1 g \sin(\alpha_1) - (m_1 + m_2) \|\vec{p}_1\| = 0$$

$$\|\vec{p}_1\| = \frac{m_2 \sin(\alpha_2) - m_1 \sin(\alpha_1)}{m_1 + m_2} g$$

11.1.3 Résolution par la mécanique de Lagrange

Soient q_1 la distance du sommet du double plan à la masse m_1 , et q_2 celle à la masse m_2 . Le système est soumis à la liaison holonome :

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= c^{ste} \\ dq_1 + dq_2 &= 0 \\ \dot{q}_1 &= -\dot{q}_2 \end{aligned}$$

Il n'y a qu'un seul degré de liberté donc une seule coordonnée généralisée, p. ex. q_1 .

En prenant le sommet du double plan comme origine des énergies potentielles, le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - (-m_1g q_1 \sin(\alpha_1) - m_2g q_2 \sin(\alpha_2)) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + [m_1 q_1 \sin(\alpha_1) + m_2 (C - q_1) \sin(\alpha_2)] g \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_1^2 + (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 &= (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g \\ \ddot{q}_1 &= \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{m_1 + m_2} g \end{aligned}$$

11.1.4 Résolution par la mécanique de Hamilton

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{q}_1$. Le moment conjugué de la variable q_1 a pour expression :

$$p_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m_1 + m_2} \quad (11.1)$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p_1\dot{q}_1 - \mathcal{L} \\ &= \frac{p_1^2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{p_1^2}{(m_1 + m_2)^2} - (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 \\ &= \frac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} \\ \dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g \\ \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) gt + p_1(t=0) \\ \dot{q}_1 = \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{m_1 + m_2} gt + \frac{p_1(t=0)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

soit, en utilisant (11.1) page précédente,

$$q_1 = \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{2(m_1 + m_2)} gt^2 + \dot{q}_1(t=0)t + q_1(t=0)$$

11.1.5 Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi

Avec (7.3a) page 190 le hamiltonien a pour expression :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1} \right)^2 - (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1$$

L'équation de Hamilton-Jacobi (7.3c) page 190 s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{S}(q_1, \alpha, t)}{\partial t} + \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1} \right)^2 - (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 = 0$$

D'après (4.8) page 133, le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps donc il se conserve. La liaison étant holonome scléronome et le potentiel ne dépendant pas des vitesses généralisées, l'énergie mécanique se confond avec le hamiltonien :

$$\begin{aligned} -E + \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_1} \right)^2 - (m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_1} &= \pm \sqrt{2(m_1 + m_2) [(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 + E]} \\ \mathcal{S}_0(q_1, E) &= \pm \sqrt{2(m_1 + m_2)} \int \sqrt{(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 + E} dq_1 + c \\ &= \pm \frac{2}{3} \sqrt{2(m_1 + m_2)} \frac{[(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 + E]^{3/2}}{(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g} + c \\ &= \pm \frac{2\sqrt{2(m_1 + m_2)}}{3(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g} [(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 + E]^{3/2} \end{aligned}$$

où nous avons supprimé la constante d'intégration. (7.9b) page 193 donne l'équation du mouvement $t(q_1)$:

$$\begin{aligned} \beta &= -t + \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} \\ &= -t \pm \frac{\sqrt{2(m_1 + m_2)}}{(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g} \sqrt{(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g q_1 + E} \end{aligned}$$

En isolant la coordonnée généralisée q_1 on trouve l'équation du mouvement $q_1(t)$:

$$q_1 = \frac{m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)}{2(m_1 + m_2)} g(\beta + t)^2 - \frac{E}{(m_1 \sin(\alpha_1) - m_2 \sin(\alpha_2)) g}$$

11.2 Poulies coaxiales

Soient deux poulies coaxiales, de rayons R_1 et R_2 , supportant les poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$. Quelle est l'équation du mouvement des poids ?

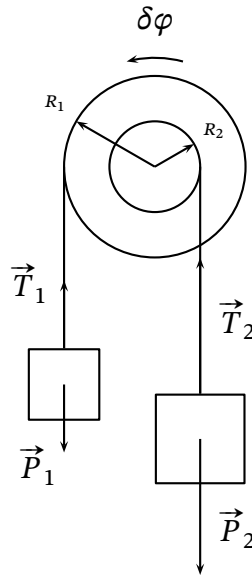


FIG. 11.3 – Poulies coaxiales

11.2.1 Résolution par la mécanique de Newton

a) Grâce au théorème du moment cinétique

La dérivée totale par rapport au temps du moment cinétique d'un système par rapport à un point o quelconque, est égale à la somme des moments par rapport au même point o des forces extérieures appliquées à ce système :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_0^{(e)}$$

L'ensemble des poids et des poulies coaxiales constitue le système. Les tensions $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$ sont des forces intérieures qui n'interviennent pas. En prenant le centre commun des poulies coaxiales comme point o , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{R}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{R}_2 \times m_2 \vec{v}_2) &= \vec{R}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{R}_2 \times \vec{P}_2 \\ \frac{d}{dt} (R_1 \cdot m_1 R_1 \dot{\phi} + R_2 \cdot m_2 R_2 \dot{\phi}) &= R_1 \cdot m_1 g - R_2 \cdot m_2 g \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g \\ \dot{\phi} &= \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g t + \dot{\phi}(t=0) \\ \phi &= \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} g t^2 + \dot{\phi}(t=0) t + \phi(t=0)\end{aligned}$$

b) Grâce aux intégrales premières

À $n = 1$ degré de liberté correspond $2n - 1 = 1$ intégrale première. Toutes les forces extérieures dérivent d'un potentiel donc l'énergie mécanique se conserve. Elle a pour expression :

$$\begin{aligned}E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2} (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \dot{\phi}^2 - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \phi \\ &= c^{ste}\end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\begin{aligned}(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \dot{\phi} \ddot{\phi} - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{\phi} &= \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g\end{aligned}$$

11.2.2 Résolution par le principe des travaux virtuels

Donnons aux poulies une rotation virtuelle d'angle $\delta\phi$. Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54 aux deux parties mobiles ($N = 2$), les masses m_1 et m_2 :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P}_1 - \vec{p}_1) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\vec{P}_2 - \vec{p}_2) \cdot \delta \vec{r}_2 &= 0 \\ (m_1 g - m_1 R_1 \ddot{\phi}) R_1 \delta\phi + (-m_2 g - m_2 R_2 \ddot{\phi}) R_2 \delta\phi &= 0 \\ m_1 g R_1 - m_1 R_1^2 \ddot{\phi} - m_2 g R_2 - m_2 R_2^2 \ddot{\phi} &= 0 \\ \ddot{\phi} (-m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2) &= m_2 g R_2 - m_1 g R_1 \\ \ddot{\phi} &= \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g\end{aligned}$$

11.2.3 Résolution par la mécanique de Lagrange

On choisit le centre des poulies coaxiales comme origine des énergies potentielles :

$$\begin{aligned} V &= -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 \\ &= -[m_1 (C_1 + R_1 \varphi) + m_2 (C_2 - R_2 \varphi)] g \\ &= -(m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi \end{aligned}$$

Il n'y a qu'une seule coordonnée généralisée, $q_1 = \varphi$. Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2} (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \dot{\varphi}^2 + (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \\ (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \ddot{\varphi} &= (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \\ \ddot{\varphi} &= \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g \end{aligned}$$

11.2.4 Résolution par la mécanique de Hamilton

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{\varphi}$. Le moment conjugué de la coordonnée généralisée φ a pour expression :

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$$

Le hamiltonien a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p \dot{\varphi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p^2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} - \frac{1}{2} (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \dot{\varphi}^2 - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi \\ &= \frac{p^2}{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi \\ &= E \end{aligned}$$

Il ne dépend pas explicitement du temps donc il se conserve. Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \\ \dot{\varphi} = \frac{p}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = (m_1 R_1 - m_2 R_2) g t + p(t=0) \\ \varphi = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g t + \frac{p(t=0)}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} \end{cases}$$

11.2.5 Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi

Avec (7.3a) page 190 le hamiltonien a pour expression :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi} \right)^2 - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi$$

L'équation de Hamilton-Jacobi (7.3c) page 190 s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{S}(\varphi, \alpha, t)}{\partial t} + \frac{1}{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi} \right)^2 - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi = 0$$

D'après (4.8) page 133, le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps donc il se conserve. La liaison étant holonome scléronome et le potentiel ne dépendant pas des vitesses généralisées, l'énergie mécanique se confond avec le hamiltonien :

$$-E + \frac{1}{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \varphi} \right)^2 - (m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \varphi} = \pm \sqrt{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) [(m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi + E]}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(\varphi, E) &= \pm \sqrt{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} \int \sqrt{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi + E} d\varphi + c \\ &= \pm \frac{2}{3} \sqrt{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} \frac{[(m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi + E]^{3/2}}{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g} + c \\ &= \pm \frac{2\sqrt{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)}}{3(m_1 R_1 - m_2 R_2) g} [(m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi + E]^{3/2} \end{aligned}$$

où nous avons supprimé la constante d'intégration. (7.9b) page 193 donne l'équation du mouvement $t(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \beta &= -t + \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} \\ &= -t \pm \frac{\sqrt{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)}}{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g} \sqrt{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g \varphi + E} \end{aligned}$$

En isolant la coordonnée généralisée φ on trouve l'équation du mouvement $\varphi(t)$:

$$\varphi = \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)}{2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)} g(\beta + t)^2 - \frac{E}{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g}$$

11.3 Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe

Une masses m glisse sans frottements sur un plan incliné de masse M , lui-même glissant sans frottements sur une surface horizontale. Quelles sont les équations du mouvement de la masse m et du plan incliné ?

11.3.1 Résolution par la mécanique de Newton

(a) Grâce à la relation fondamentale de la dynamique

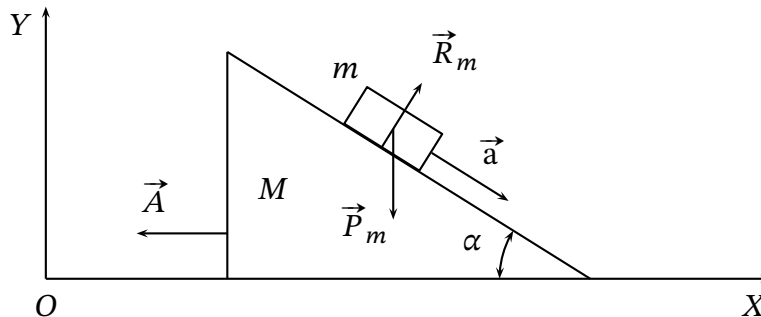


FIG. 11.4 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe

Soit $\vec{a}$ le vecteur accélération de la masse m relative au plan incliné, et soit $\vec{A}$ le vecteur accélération du plan incliné.

Pour le plan incliné de masse M , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{f}_M^{(e)} = M\vec{A}$$

La force exercée par la masse m sur le plan incliné n'est pas son poids total $\vec{P}_m$, mais sa composante perpendiculaire au plan incliné, $-\vec{R}_m$. À la limite où l'angle α tend vers 90° , cette composante du poids tend vers zéro et la masse m tombe en chute libre.

$$\vec{P}_M + \vec{R}_M + (-\vec{R}_m) = M\vec{A}$$

En projetant sur les axes X et Y , nous avons :

$$\begin{cases} -R_m \sin(\alpha) = MA_x \\ -Mg + (Mg + R_m \cos(\alpha)) - R_m \cos(\alpha) = MA_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = -\frac{R_m}{M} \sin(\alpha) \\ A_y = 0 \end{cases}$$

donc le vecteur accélération $\vec{A}$ est horizontal et la composante A_x est négative. En notant A la norme de $\vec{A}$,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2} \\ &= -A_x \end{aligned}$$

Donc,

$$MA = R_m \sin(\alpha) \quad (11.2)$$

L'accélération de la masse m dans un référentiel galiléen est la somme des accélérations $\vec{a} + \vec{A}$.
Pour la masse m , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum \vec{f}_m^{(e)} &= m(\vec{a} + \vec{A}) \\ \vec{P}_m + \vec{R}_m &= m(\vec{a} + \vec{A}) \end{aligned}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle au plan incliné. En projetant sur les axes X et Y , nous avons :

$$\begin{cases} R_m \sin(\alpha) = ma_x + mA_x \\ -mg + R_m \cos(\alpha) = ma_y \end{cases}$$

donc la composante a_x est positive et la composante a_y est négative.

$$\begin{cases} R_m \sin^2(\alpha) = ma_x \sin(\alpha) - mA \sin(\alpha) \\ R_m \cos^2(\alpha) = mg \cos(\alpha) + ma_y \cos(\alpha) \end{cases}$$

En notant a la norme de $\vec{a}$,

$$\begin{cases} R_m \sin^2(\alpha) = ma \cos(\alpha) \sin(\alpha) - mA \sin(\alpha) \\ R_m \cos^2(\alpha) = mg \cos(\alpha) - ma \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow R_m = mg \cos(\alpha) - mA \sin(\alpha)$$

On isole a en multipliant par $\cos(\alpha)$ la première équation, et par $\sin(\alpha)$ la seconde,

$$\begin{cases} R_m \sin(\alpha) \cos(\alpha) = ma \cos^2(\alpha) - mA \cos(\alpha) \\ R_m \cos(\alpha) \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha) - ma \sin^2(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a = A \cos(\alpha) + g \sin(\alpha)$$

En combinant (11.2) et (11.3.1),

$$\begin{aligned} MA &= mg \cos(\alpha) \sin(\alpha) - mA \sin^2(\alpha) \\ A(m \sin^2(\alpha) + M) &= mg \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ A &= \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} g \end{aligned}$$

En combinant (11.3.1) de la présente page et (11.2) de la présente page,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\cos^2(\alpha) \sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} g + g \sin(\alpha) \\ &= \left(\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} + 1 \right) g \sin(\alpha) \\ &= \frac{m \cos^2(\alpha) + m \sin^2(\alpha) + M}{m \sin^2(\alpha) + M} g \sin(\alpha) \\ &= \frac{m + M}{m \sin^2(\alpha) + M} g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Si l'on suppose la masse du plan incliné M très petite devant celle du solide m , on a :

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{m}{m \sin^2(\alpha)} g \sin(\alpha) \\ &\approx \frac{g}{\sin(\alpha)} > g \end{aligned}$$

car $0 < \alpha < \pi/2$. Plus l'angle α est petit, et plus l'accélération *relative* du solide par rapport au plan incliné est importante. L'accélération verticale $a \sin(\alpha)$ a pour expression $a \sin(\alpha) \approx g$, la masse m tombe en chute libre. De même, pour le plan incliné nous avons :

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} g \\ &\approx \frac{g}{\tan(\alpha)} > g \end{aligned}$$

Plus l'angle α est petit, plus le plan incliné est accéléré vers la gauche.

(b) Grâce aux intégrales premières

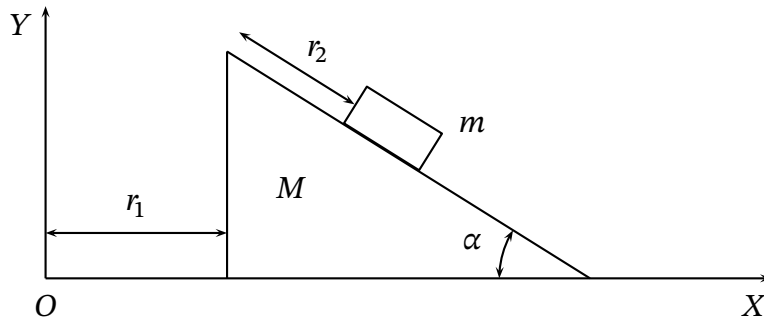


FIG. 11.5 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe

À $n = 2$ degrés de liberté correspond $2n - 1 = 3$ intégrales premières. La seule force est la force de pesanteur qui dérive d'un potentiel, donc l'énergie mécanique se conserve. Soit $\vec{v}$ la vitesse de la masse m exprimée dans le repère OXY , elle a pour composantes

$$\begin{cases} v_x = \dot{r}_1 + \dot{r}_2 \cos(\alpha) \\ v_y = \dot{r}_2 \sin(\alpha) \end{cases}$$

Le carré de sa norme vaut

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= \dot{r}_1^2 + 2\dot{r}_1\dot{r}_2 \cos(\alpha) + \dot{r}_2^2 \cos^2(\alpha) + \dot{r}_2^2 \sin^2(\alpha) \\ &= \dot{r}_1^2 + 2\dot{r}_1\dot{r}_2 \cos(\alpha) + \dot{r}_2^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques de m et M :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}_1^2 + 2\dot{r}_1\dot{r}_2 \cos(\alpha) + \dot{r}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}_2^2 + m \dot{r}_1\dot{r}_2 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

En prenant l'origine de l'énergie potentielle au sommet du plan incliné, elle a pour expression :

$$V = -mgr_2 \sin(\alpha)$$

L'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}_2^2 + m \dot{r}_1 \dot{r}_2 \cos(\alpha) - mgr_2 \sin(\alpha) \\ &= c^{ste} \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps,

$$(M + m) \ddot{r}_1 \dot{r}_1 + m \ddot{r}_2 \dot{r}_2 + m \dot{r}_1 \ddot{r}_2 \cos(\alpha) + m \dot{r}_2 \ddot{r}_1 \cos(\alpha) - mg \dot{r}_2 \sin(\alpha) = 0$$

Le système n'est pas isolé puisque dans un champ de gravitation. Cependant, ce champ est selon l'axe des Y, par conséquent la quantité de mouvement se conserve selon l'axe des X et nous avons une deuxième intégrale première du mouvement :

$$\begin{aligned} (M + m) \dot{r}_1 + m \dot{r}_2 \cos(\alpha) &= c^{ste} \\ (M + m) \ddot{r}_1 + m \ddot{r}_2 \cos(\alpha) &= 0 \\ \ddot{r}_1 &= -\frac{m}{M + m} \ddot{r}_2 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit maintenant :

$$-m \ddot{r}_2 \dot{r}_1 \cos(\alpha) + m \dot{r}_2 \ddot{r}_2 - \frac{m^2 \cos^2(\alpha)}{M + m} \dot{r}_2 \ddot{r}_2 + m \dot{r}_2 \ddot{r}_1 \cos(\alpha) - mg \dot{r}_2 \sin(\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} m \ddot{r}_2 - \frac{m^2 \cos^2(\alpha)}{M + m} \ddot{r}_2 &= mg \sin(\alpha) \\ \ddot{r}_2 \left[1 - \frac{m \cos^2(\alpha)}{M + m} \right] &= g \sin(\alpha) \\ \ddot{r}_2 \frac{M + m - m [1 - \sin^2(\alpha)]}{M + m} &= g \sin(\alpha) \\ \ddot{r}_2 &= \frac{M + m}{m \sin^2(\alpha) + M} g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

et pour la coordonnée r_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= -\frac{m \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{m \sin^2(\alpha) + M} g \\ &= -\frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} g \end{aligned}$$

11.3.2 Résolution par le principe des travaux virtuels

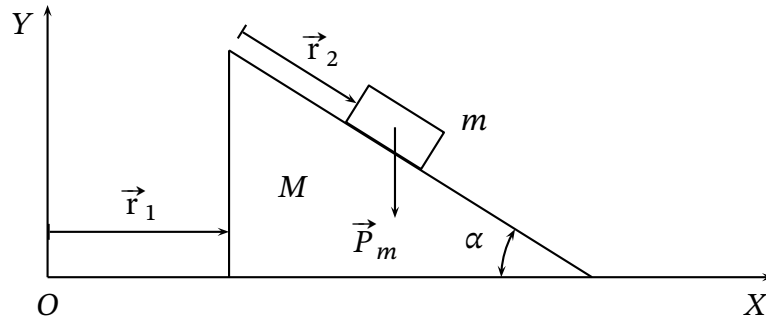


FIG. 11.6 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe

Le système possède deux degrés de liberté. Choisissons r_1 et r_2 comme coordonnées généralisées. Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54 aux deux parties mobiles ($N = 2$), la masse m et l'ensemble $M + m$:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$(\sum \vec{F}_{M+m} - \vec{p}_{M+m}) \cdot \delta \vec{r}_1 + (\sum \vec{F}_m - \vec{p}_m) \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

Les déplacements virtuels $\delta \vec{r}_1$ et $\delta \vec{r}_2$ sont indépendants. Le premier terme concerne l'ensemble $M + m$. Posons $\delta \vec{r}_1 = \delta r_1 \vec{i}$:

$$\{\vec{P}_M + \vec{R}_{M+m} + \vec{P}_m - [(M+m)\ddot{r}_1 + m\ddot{r}_2]\} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$$

$$(M+m)\ddot{r}_1 + m\ddot{r}_2 \cos(\alpha) = 0$$

Le second terme concerne la masse m seule.

Posons $\delta \vec{r}_2 = \delta r_2 (\cos(\alpha) \vec{i} - \sin(\alpha) \vec{j})$:

$$[\vec{P}_m + \vec{R}_m - m(\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2)] \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

$$mg \sin(\alpha) - m(\ddot{r}_1 \cos(\alpha) + \ddot{r}_2) = 0$$

Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{r}_1 + m\ddot{r}_2 \cos(\alpha) = 0 \\ \ddot{r}_1 \cos(\alpha) + \ddot{r}_2 = g \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{r}_1 + m\ddot{r}_2 \cos(\alpha) = 0 \\ m\ddot{r}_1 \cos^2(\alpha) + m\ddot{r}_2 \cos(\alpha) = mg \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 (M+m - m \cos^2(\alpha)) = -mg \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \ddot{r}_2 = g \sin(\alpha) - \ddot{r}_1 \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r}_1 = \frac{-mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{M+m - m(1 - \sin^2(\alpha))} \\ \ddot{r}_2 = g \sin(\alpha) + \frac{mg \sin(\alpha) \cos^2(\alpha)}{M+m \sin^2(\alpha)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{r}_1 = -\frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} g \\ \ddot{r}_2 = \frac{M+m}{M+m \sin^2(\alpha)} g \sin(\alpha) \end{cases}$$

11.3.3 Résolution par la mécanique de Lagrange

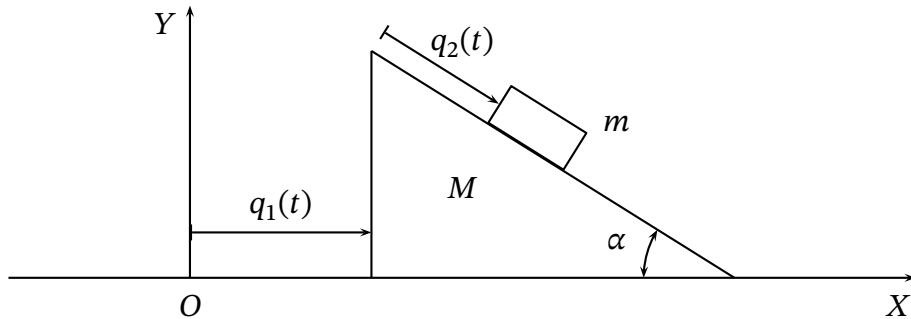


FIG. 11.7 – Masse glissant sans frottements sur un plan incliné non fixe

Le système possède deux degrés de liberté. Le choix des coordonnées généralisées est libre. Choisissons q_1 et q_2 comme coordonnées généralisées. Pour q_2 nous aurions pu choisir la hauteur y de la masse m . Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 + m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(\alpha) + mgq_2 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

La coordonnée q_1 est cyclique, elle n'apparaît pas dans le lagrangien. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} [(M + m) \dot{q}_1 + m \dot{q}_2 \cos(\alpha)] &= 0 \\ (M + m) \dot{q}_1 + m \dot{q}_2 \cos(\alpha) &= c^{ste}\end{aligned}$$

On retrouve l'intégrale première du mouvement correspondant à la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe des X. Les équations de Lagrange pour chaque coordonnée généralisée s'écrivent :

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} [(M + m) \dot{q}_1 + m \dot{q}_2 \cos(\alpha)] = 0 \\ \frac{d}{dt} (m \dot{q}_1 \cos(\alpha) + m \dot{q}_2) = mg \sin(\alpha) \end{cases} \\ \begin{cases} (M + m) \ddot{q}_1 + m \ddot{q}_2 \cos(\alpha) = 0 \\ \ddot{q}_1 \cos(\alpha) + \ddot{q}_2 = g \sin(\alpha) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (M + m) \ddot{q}_1 + m \ddot{q}_2 \cos(\alpha) = 0 \\ m \ddot{q}_1 \cos^2(\alpha) + m \ddot{q}_2 \cos(\alpha) = mg \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{cases} \\ \begin{cases} \ddot{q}_1 (M + m - m \cos^2(\alpha)) = -mg \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \ddot{q}_2 = g \sin(\alpha) - \ddot{q}_1 \cos(\alpha) \end{cases} & \\ \begin{cases} \ddot{q}_1 = \frac{-mg \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{M + m - m (1 - \sin^2(\alpha))} \\ \ddot{q}_2 = g \sin(\alpha) + \frac{mg \sin(\alpha) \cos^2(\alpha)}{M + m \sin^2(\alpha)} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} g \\ \ddot{q}_2 = \frac{M + m}{M + m \sin^2(\alpha)} g \sin(\alpha) \end{cases}\end{aligned}$$

11.3.4 Résolution par la mécanique de Hamilton

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour les vitesses généralisées $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$. Les moments conjugués des variables q_1 et q_2 ont pour expression :

$$\begin{cases} p_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \\ p_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = (M + m) \dot{q}_1 + m \dot{q}_2 \cos(\alpha) \\ p_2 = m \dot{q}_1 \cos(\alpha) + m \dot{q}_2 \end{cases}$$

Invertissons ces relations grâce à la méthode de Cramer :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M + m & m \cos(\alpha) \\ m \cos(\alpha) & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Notons Δ le déterminant de la matrice,

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} p_1 & m \cos(\alpha) \\ p_2 & m \end{vmatrix} \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} M + m & p_1 \\ m \cos(\alpha) & p_2 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{m p_1 - m p_2 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \\ \dot{q}_2 = \frac{(M + m) p_2 - m p_1 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \\ &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (M + m) \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 - m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(\alpha) - mg q_2 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Inutile d'expliciter davantage le hamiltonien en fonction de p_1 et p_2 . Les équations de Hamilton pour la coordonnée q_1 s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} \\ \dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{q}_1 = \frac{m p_1 - m p_2 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

Les équations de Hamilton pour la coordonnée q_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_2 = mg \sin(\alpha) \\ \dot{q}_2 = \frac{(M + m) p_2 - m p_1 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

En intégrant,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} p_1 = c_1^{ste} \\ p_2 = mg \sin(\alpha) t + c_2^{ste} \end{cases} \\ &\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{-m^2 g \sin \alpha \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} t + c^{ste} \\ \dot{q}_2 = \frac{(M + m) mg \sin \alpha}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} t + c^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = -\frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha) + M/m} g t + c^{ste} \\ \dot{q}_2 = \frac{M + m}{m \sin^2(\alpha) + M} g \sin(\alpha) t + c^{ste} \end{cases} \end{aligned}$$

11.3.5 Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (M + m) \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 - m \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(\alpha) - mgq_2 \sin(\alpha) \\ &= \frac{mp_1^2 - mp_1 p_2 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{(M + m) p_2^2 - mp_1 p_2 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \\ &\quad - \frac{1}{2} (M + m) \left[\frac{mp_1 - mp_2 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} m \left[\frac{(M + m) p_2 - mp_1 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} \right]^2 \\ &\quad - \frac{(m^2 p_1 \cos(\alpha) - m^2 p_2 \cos^2(\alpha)) [(M + m) p_2 - mp_1 \cos(\alpha)]}{[m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)]^2} - mgq_2 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= [m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)]^{-2} \{ [mp_1^2 + (M + m) p_2^2 - 2mp_1 p_2 \cos(\alpha)] \\ &\quad [m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)] - \frac{1}{2} (M + m) m^2 p_1^2 - \frac{1}{2} (M + m) m^2 p_2^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad + (M + m) m^2 p_1 p_2 \cos(\alpha) - \frac{1}{2} (M + m)^2 m p_2^2 - \frac{1}{2} m^3 p_1^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad + (M + m) m^2 p_1 p_2 \cos(\alpha) - (M + m) m^2 p_1 p_2 \cos(\alpha) \\ &\quad + (M + m) m^2 p_2^2 \cos^2(\alpha) + m^3 p_1^2 \cos^2(\alpha) - m^3 p_1 p_2 \cos^3 \alpha \} - mgq_2 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= [m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)]^{-2} \left[(M + m) m^2 p_1^2 + (M + m)^2 m p_2^2 \right. \\ &\quad - 2(M + m) m^2 p_1 p_2 \cos(\alpha) - m^3 p_1^2 \cos^2(\alpha) - (M + m) m^2 p_2^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad + 2m^3 p_1 p_2 \cos^3 \alpha - \frac{1}{2} (M + m) m^2 p_1^2 + \frac{1}{2} (M + m) m^2 p_2^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad + (M + m) m^2 p_1 p_2 \cos(\alpha) - \frac{1}{2} (M + m)^2 m p_2^2 + \frac{1}{2} m^3 p_1^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad \left. + -m^3 p_1 p_2 \cos^3 \alpha \right] - mgq_2 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= [m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)]^{-2} \left[\frac{1}{2} (M + m) m^2 p_1^2 + \frac{1}{2} (M + m)^2 m p_2^2 \right. \\ &\quad - (M + m) m^2 p_1 p_2 \cos(\alpha) - \frac{1}{2} m^3 p_1^2 \cos^2(\alpha) - \frac{1}{2} (M + m) m^2 p_2^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad \left. + m^3 p_1 p_2 \cos^3 \alpha \right] - mgq_2 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{mp_1^2}{2[m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)]} + \frac{(M + m) p_2^2}{2[m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)]} \\ &\quad - \frac{mp_1 p_2 \cos(\alpha)}{m(M + m) - m^2 \cos^2(\alpha)} - mgq_2 \sin(\alpha) \\ &= \frac{mp_1^2 + (M + m) p_2^2 - 2mp_1 p_2 \cos(\alpha)}{2[mM + m^2 - m^2(1 - \sin^2(\alpha))]} - mgq_2 \sin(\alpha) \\ &= \frac{mp_1^2 + (M + m) p_2^2 - 2mp_1 p_2 \cos(\alpha)}{2m(m \sin^2(\alpha) + M)} - mgq_2 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Avec (7.3a) page 190 le hamiltonien a pour expression :

$$\mathcal{H} = \frac{m\partial_{q_1}\mathcal{S}^2 + (M+m)\partial_{q_2}\mathcal{S}^2 - 2m\partial_{q_1}\mathcal{S}\partial_{q_2}\mathcal{S}\cos(\alpha)}{2m(m\sin^2(\alpha) + M)} - mgq_2\sin(\alpha)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi (7.3c) page 190 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_1, q_2, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_2}, t\right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{m\partial_{q_1}\mathcal{S}^2 + (M+m)\partial_{q_2}\mathcal{S}^2 - 2m\partial_{q_1}\mathcal{S}\partial_{q_2}\mathcal{S}\cos(\alpha)}{2m(m\sin^2(\alpha) + M)} - mgq_2\sin(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

La variable temps étant cyclique, on pose :

$$\mathcal{S}(q_1, q_2, E, \alpha_2, t) = -Et + \mathcal{S}_0(q_1, q_2, E, \alpha_2)$$

et l'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\frac{m\partial_{q_1}\mathcal{S}_0^2 + (M+m)\partial_{q_2}\mathcal{S}_0^2 - 2m\cos(\alpha)\partial_{q_1}\mathcal{S}_0\partial_{q_2}\mathcal{S}_0}{2m(m\sin^2(\alpha) + M)} - mgq_2\sin(\alpha) = E$$

La variable q_1 étant cyclique, $p_1 = \alpha_2$, et l'on pose :

$$\mathcal{S}_0(q_1, q_2, E, \alpha_2) = \mathcal{S}_1(q_2, E, \alpha_2) + \alpha_2 q_1$$

et l'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\frac{m\alpha_2^2 + (M+m)\partial_{q_2}\mathcal{S}_1^2 - 2m\alpha_2\cos(\alpha)\partial_{q_2}\mathcal{S}_1}{2m(m\sin^2(\alpha) + M)} - mgq_2\sin(\alpha) = E$$

soit,

$$\begin{aligned} (M+m)\partial_{q_2}\mathcal{S}_1^2 - 2m\alpha_2\cos(\alpha)\partial_{q_2}\mathcal{S}_1 - 2m^2gq_2\sin(\alpha)(m\sin^2(\alpha) + M) + m\alpha_2^2 \\ = 2mE(m\sin^2(\alpha) + M) \end{aligned}$$

Polynôme du second degré en $\partial_{q_2}\mathcal{S}_1$, de la forme,

$$a\partial_{q_2}\mathcal{S}_1^2(q_2) + b\partial_{q_2}\mathcal{S}_1(q_2) + c = 0$$

avec,

$$\begin{aligned} a &= M + m \\ b &= -2m\alpha_2\cos(\alpha) \\ b' &= -m\alpha_2\cos(\alpha) \\ c &= d q_2 + e \\ d &= -2m^2g\sin(\alpha)(m\sin^2(\alpha) + M) \\ e &= m\alpha_2^2 - 2mE(m\sin^2(\alpha) + M) \end{aligned}$$

Le discriminant réduit s'écrit,

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

Les racines sont :

$$\begin{aligned}\partial_{q_2} \mathcal{S}_1 &= \frac{-b'}{a} \pm \frac{\sqrt{b'^2 - ac}}{a} \\ &= \frac{-b'}{a} \pm \frac{\sqrt{b'^2 - ad q_2 - ae}}{a}\end{aligned}$$

On intègre :

$$\mathcal{S}_1(q_2) = \frac{-b'}{a} q_2 \mp \frac{2(b'^2 - ad q_2 - ae)^{3/2}}{3a^2 d}$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \frac{m\alpha_2 \cos(\alpha)}{M+m} q_2 \pm \frac{1}{3(M+m)^2 m^2 g \sin(\alpha) (m \sin^2(\alpha) + M)} \\ &\times \{m^2 \alpha_2^2 \cos^2(\alpha) + 2(M+m) m^2 g \sin(\alpha) (m \sin^2(\alpha) + M) q_2 \\ &\quad - (M+m) m \alpha_2^2 + 2m(M+m) E (m \sin^2(\alpha) + M)\}^{3/2} \\ &= \frac{m\alpha_2 \cos(\alpha)}{M+m} q_2 \pm \frac{1}{3(M+m)^2 m^2 g \sin(\alpha) (m \sin^2(\alpha) + M)} \\ &\times \{[2(M+m)(E + mgq_2 \sin(\alpha)) - \alpha_2^2] m (m \sin^2(\alpha) + M)\}^{3/2} \\ &= \pm \frac{\sqrt{m \sin^2(\alpha) + M}}{3(M+m)^2 \sqrt{mg \sin(\alpha)}} [2(M+m)(E + mgq_2 \sin(\alpha)) - \alpha_2^2]^{3/2} + \frac{m\alpha_2 \cos(\alpha)}{M+m} q_2\end{aligned}$$

L'action de Hamilton s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{S}_1(q_2, E, \alpha_2) - Et + \alpha_2 q_1 \\ &= \pm \frac{\sqrt{m \sin^2(\alpha) + M}}{3(M+m)^2 \sqrt{mg \sin(\alpha)}} [2(M+m)(E + mgq_2 \sin(\alpha)) - \alpha_2^2]^{3/2} + \frac{m\alpha_2 \cos(\alpha)}{M+m} q_2 \\ &\quad - Et + \alpha_2 q_1\end{aligned}$$

(7.3b) page 190 donne les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} \\ &= \pm \frac{\sqrt{(m \sin^2(\alpha) + M) [2(M+m)(E + mgq_2 \sin(\alpha)) - \alpha_2^2]}}{(M+m) \sqrt{mg \sin(\alpha)}} - t\end{aligned}$$

Isolons q_2 ,

$$2(M+m)(E + mgq_2 \sin(\alpha)) - \alpha_2^2 = \frac{m(\beta_1 + t)^2 [(M+m) g \sin(\alpha)]^2}{m \sin^2(\alpha) + M} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned}mgq_2 \sin(\alpha) &= \frac{1}{2(M+m)} \left\{ \frac{m(\beta_1 + t)^2 [(M+m) g \sin(\alpha)]^2 + \alpha_2^2}{m \sin^2(\alpha) + M} \right\} - E \\ q_2 &= \frac{\alpha_2^2 - 2(M+m)E}{2(M+m)mg \sin(\alpha)} + \frac{(\beta_1^2 + \beta_1 t + t^2)(M+m)g \sin(\alpha)}{2(m \sin^2(\alpha) + M)}\end{aligned}$$

(7.3b) page 190 donne :

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_2} \\ &= \mp \frac{\alpha_2 \sqrt{m \sin^2(\alpha) + M}}{(M+m)^2 \sqrt{mg \sin(\alpha)}} \sqrt{2(M+m)(E + mgq_2 \sin(\alpha)) - \alpha_2^2} + \frac{m \cos(\alpha)}{M+m} q_2 + q_1\end{aligned}$$

Avec (11.3) :

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \mp \frac{\alpha_2 \sqrt{m \sin^2(\alpha) + M}}{(M+m)^2 \sqrt{mg \sin(\alpha)}} \times \frac{\sqrt{m}(\beta_1 + t)(M+m)g \sin(\alpha)}{\sqrt{m \sin^2(\alpha) + M}} + \frac{m \cos(\alpha)}{M+m} q_2 + q_1 \\ &= \mp \frac{\alpha_2(\beta_1 + t)}{M+m} + \frac{m \cos(\alpha)}{M+m} q_2 + q_1 \\ q_1 &= \beta_2 \pm \frac{\alpha_2(\beta_1 + t)}{M+m} - \frac{m \cos(\alpha)}{M+m} q_2\end{aligned}$$

11.4 Pendule simple, plan

Soit une masse m attachée à une tige de longueur ρ constante, dans un champ de gravitation $-g\vec{j}$, oscillant dans le plan (x, y) . Quelle est l'équation du mouvement de la masse m ?

11.4.1 Résolution par la mécanique de Newton

a) Grâce à la relation fondamentale de la dynamique

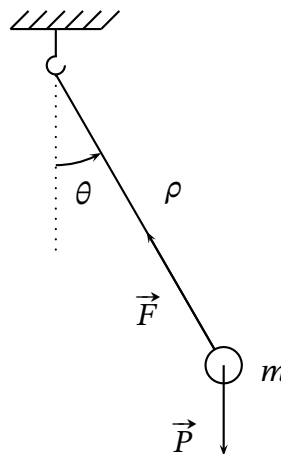


FIG. 11.8 – Pendule simple, plan

On note $\vec{F}$ la force exercée par la tige sur la masse m et $\vec{P}$ son poids. (2.4) page 57 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P} + \vec{F} \\ m\rho\ddot{\vec{e}}_\theta - m\rho\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho &= -mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta + mg\cos(\theta)\vec{e}_\rho - F\vec{e}_\rho \end{aligned}$$

qui donne le système,

$$\begin{cases} m\rho\dot{\theta}^2 + mg\cos(\theta) = F \\ \rho\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

La seconde relation est l'équation différentielle de l'élongation $\theta(t)$ du pendule simple. Dans l'approximation des petites oscillations, on utilise le développement limité de la fonction sinus à l'ordre un. L'équation devient :

$$\rho\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du 2nd ordre par rapport au temps est de forme sinusoïdale, fonction sinus ou cosinus au choix, la phase à l'origine des temps φ_0 permettant de passer d'une fonction circulaire à l'autre :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A\sin(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{\theta}(t) &= A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{\theta}(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

où A est l'amplitude (élongation maximale) et $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase du mouvement oscillatoire. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve l'expression de la pulsation propre,

$$\begin{aligned} -\rho A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) + gA\sin(\omega t + \varphi_0) &= 0 \\ \omega &= \pm\sqrt{\frac{g}{\rho}} \end{aligned}$$

pour laquelle on ne conserve que la valeur positive. L'amplitude A et la phase à l'origine des temps φ_0 sont les deux constantes de ce système à un degré de liberté :

$$\begin{cases} \theta = \theta(t, A, \varphi_0) \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}(t, A, \varphi_0) \end{cases}$$

En posant $\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\omega t_0$,

$$\begin{cases} \theta = A\sin(\omega t - \omega t_0) \\ \dot{\theta} = A\omega\cos(\omega t - \omega t_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = A\sin[\omega(t - t_0)] \\ \dot{\theta} = A\omega\cos[\omega(t - t_0)] \end{cases}$$

puis $\tau = t - t_0$,

$$\begin{cases} \theta = A\sin(\omega\tau) \\ \dot{\theta} = A\omega\cos(\omega\tau) \end{cases}$$

nous supprimons la constante φ_0 . Il ne reste comme constante que l'amplitude A . À l'instant initial $\tau = 0$,

$$\begin{cases} \theta_0 = A \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases}$$

et l'on a :

$$\theta(\tau) = \theta_0 \sin(\omega\tau)$$

L'intégrale première A n'est autre que la racine carrée de l'énergie mécanique à un facteur multiplicatif près. En effet, en prenant l'origine de l'énergie potentielle au point le plus bas de la trajectoire, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho[1 - \cos(\theta)]$$

Pour de petites oscillations, on utilise le développement limité de la fonction cosinus $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$:

$$E \approx \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho\left(\frac{1}{2}\theta^2\right)$$

Relation valable en particulier à l'instant initial :

$$E \approx \frac{1}{2}mg\rho A^2$$

Pour de petites oscillations, $\theta(t)$ est donc une fonction sinusoïdale du temps :

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

avec $\omega = \sqrt{g/\rho}$. Nous pouvons exprimer les constantes A et φ_0 en fonction des conditions initiales sur la position θ_0 et sur la vitesse $\dot{\theta}_0$:

$$\begin{cases} \theta^2 = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{\theta}^2 = A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

donne pour l'amplitude A :

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2 + \theta^2}$$

où l'on ne conserve que le signe positif car l'amplitude est positive. À l'instant initial :

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\right)^2 + \theta_0^2}$$

Pour la phase à l'origine des temps φ_0 , nous avons :

$$\begin{cases} \theta_0 = A \sin(\varphi_0) \\ \dot{\theta}_0 = A\omega \cos(\varphi_0) \end{cases}$$

soit :

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega\theta_0}{\dot{\theta}_0}\right)$$

La solution s'écrit :

$$\theta(t) = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\right)^2 + \theta_0^2} \sin\left[\omega t + \arctan\left(\frac{\omega\theta_0}{\dot{\theta}_0}\right)\right]$$

- b) Grâce au théorème du moment cinétique Prenons le moment cinétique du pendule par rapport au point d'attache o du pendule :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_o}{dt} &= \sum \vec{\Gamma}_o^{(e)} \\ \frac{d}{dt}(\vec{\rho} \times m\vec{v}) &= \vec{\rho} \times \vec{P} + \vec{\rho} \times \vec{F} \\ \frac{d}{dt}[\rho \vec{e}_\rho \times m(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta)] &= \rho \vec{e}_\rho \times (-mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + mg \cos(\theta) \vec{e}_\rho - F \vec{e}_\rho) \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2 \dot{\theta} \vec{e}_k) &= -mg\rho \sin(\theta) \vec{e}_k \\ \rho \ddot{\theta} + g \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

- c) Grâce aux intégrales premières

À $n = 1$ degré de liberté correspond $2n - 1 = 1$ intégrale première. La force de pesanteur est la seule force extérieure, elle dérive d'une énergie potentielle. L'énergie mécanique est donc une intégrale première qui fournira une équation pour la seule variable θ . Prenons l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point de suspension du pendule. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned}E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - mgh \\ &= \frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\theta}^2 - mg\rho \cos(\theta) \\ &= -mg\rho \cos(\theta_{\max}) \\ &= c^{\text{ste}}\end{aligned}$$

Nous reportons l'approximation des petites oscillations à la fin des calculs :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\theta}^2 - mg\rho \cos(\theta) &= -mg\rho \cos(\theta_{\max}) \\ \frac{1}{2}\rho \dot{\theta}^2 &= g[\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2g}{\rho}} \sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})} \\ t - t_0 &= \sqrt{\frac{\rho}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_{\max})}}\end{aligned}$$

On utilise la formule de trigonométrie de l'angle double $\cos(x) = 1 - 2 \sin^2(x/2)$:

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \sqrt{\frac{\rho}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \sin^2(\theta_{\max}/2) - 2 \sin^2(\theta/2)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_{\max}/2) - \sin^2(\theta/2)}}\end{aligned}$$

Une période est le quadruple du temps mis pour aller de $\theta = 0$ à $\theta_{\max}$:

$$T = 2 \sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\theta_{\max}/2) - \sin^2(\alpha/2)}}$$

On pose $\alpha = \theta/2$, donc $\alpha_{max} = \theta_{max}/2$ et $d\theta = 2d\alpha$:

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_0^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\alpha_{max}) - \sin^2(\alpha)}} \\ &= \frac{4}{\sin(\alpha_{max})} \sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_0^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left[\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_{max})} \right]^2}} \end{aligned}$$

On pose

$$\sin(\xi) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_{max})}$$

Pour $\alpha = 0$ nous avons $\xi = 0$, et pour $\alpha = \alpha_{max}$ nous avons $\xi = \pi/2$. Dérivons le changement de variable pour trouver l'expression du nouvel élément différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{d \sin(\xi)}{d\xi} &= \frac{d \sin(\xi)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\xi} \\ \cos(\xi) &= \frac{1}{\sin(\alpha_{max})} \frac{d \sin(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\xi} \\ \frac{d\alpha}{\sin(\alpha_{max})} &= \frac{\cos(\xi)}{\cos(\alpha)} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\xi)}{1 - \sin^2(\alpha)}} d\xi \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha_{max}) \sin(\xi) \\ \sin^2(\alpha) &= \sin^2(\alpha_{max}) \sin^2(\xi) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{\sin(\alpha_{max})} &= \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\xi)}{1 - \sin^2(\alpha_{max}) \sin^2(\xi)}} d\xi \\ T &= \sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2(\xi)}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\xi)}{1 - \sin^2(\alpha_{max}) \sin^2(\xi)}} \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_{max}/2) \sin^2(\xi)}} \end{aligned}$$

L'intégrale

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\xi)}}$$

où k est un paramètre, est une *intégrale elliptique complète de première espèce* sous sa forme trigonométrique. Pour de petites oscillations $\theta_{max} \ll 1$, le développement de la fonction K donne :

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_{max}^2 + \frac{9}{1024} \theta_{max}^4 + \dots \right)$$

11.4.2 Résolution par le principe des travaux virtuels

Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54 à la seule partie mobile ($N = 1$) :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$(\vec{P} + \vec{F} - \vec{p}) \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Choisissons un déplacement virtuel pour lequel la force de liaison ne travaille pas :

$$\delta \vec{r} = \rho \delta \theta \vec{e}_\theta$$

(2.4) page 57 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. Avec ρ constant, nous avons :

$$\vec{p} = m \vec{a}$$

$$= -m\rho\dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho + m\rho\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

donc,

$$(-mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + mg \cos(\theta) \vec{e}_\rho - F \vec{e}_\rho + m\rho\dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho - m\rho\ddot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \rho \delta \theta \vec{e}_\theta = 0$$

$$(-mg \sin(\theta) - m\rho\ddot{\theta}) \rho \delta \theta = 0$$

$$\rho\ddot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$$

Pour trouver l'expression de la tension F dans la tige, on choisit un déplacement virtuel pour lequel la force de liaison travaille :

$$\delta \vec{r} = \delta \rho \vec{e}_\rho$$

donc,

$$(-F + mg \cos(\theta) + m\rho\dot{\theta}^2) \delta \rho = 0$$

$$m\rho\dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta) = F$$

11.4.3 Résolution par la mécanique de Lagrange

Le système possède deux dimensions x et y , et une contrainte holonome :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

$$= c^{ste}$$

donc un seul degré de liberté. Prenons θ comme coordonnée généralisée, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} T - V$$

$$= \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 - [-mg\rho \cos(\theta)]$$

$$= \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + mg\rho \cos(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta)$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} (\rho \dot{\theta}) &= -g \sin(\theta) \\ \rho \ddot{\theta} + g \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

Remarque 11.4.1

Si l'on ne connaît pas l'expression du potentiel V , on calcule la force généralisée à partir de la déf. 3.1.1 page 71. Par exemple, la force généralisée de pesanteur a pour expression :

$$\begin{aligned}Q_j &= \sum_{i=1}^m \vec{P}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -mg \vec{j} \cdot \frac{\partial (\rho \vec{e}_\theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &= -mg \rho \sin(\theta)\end{aligned}$$

puis l'on se sert de (3.8) page 72 :

$$\begin{aligned}\forall j = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j \\ \frac{d}{dt} (m \rho^2 \dot{\theta}) &= -mg \rho \sin(\theta) \\ \rho \ddot{\theta} + g \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

11.4.4 Résolution par la mécanique de Hamilton

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{\theta}$. Le moment conjugué de la coordonnée généralisée θ a pour expression :

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m \rho^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p}{m \rho^2}$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} p \dot{\theta} - \mathcal{L} \\ &= m \rho^2 \dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + mg \rho \cos(\theta) \right] \\ &= \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 - mg \rho \cos(\theta) \\ &= \frac{p^2}{2m \rho^2} - mg \rho \cos(\theta) \\ &= E\end{aligned} \tag{11.4}$$

Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{p} = -mg \rho \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{p}{m \rho^2} \end{cases}$$

11.4.5 Résolution par la mécanique de Hamilton-Jacobi

Avec (7.3a) page 190 le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{p^2}{2m\rho^2} - mg\rho \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 - mg\rho \cos(\theta)\end{aligned}$$

Pour de petites oscillations $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 - mg\rho \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \\ &= \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{mg\rho}{2} \theta^2\end{aligned}$$

à une constante près. L'équation de Hamilton-Jacobi (7.3c) page 190 s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{S}(\theta, \alpha, t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\theta, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}, t\right) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{mg\rho}{2} \theta^2 &= 0\end{aligned}$$

La variable temps étant cyclique, on pose :

$$\mathcal{S}(\theta, E, t) = -Et + \mathcal{S}_0(\theta, E)$$

et l'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{mg\rho}{2} \theta^2 &= E \\ \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \theta} \right)^2 &= 2m\rho^2 \left(E - \frac{mg\rho}{2} \theta^2 \right) \\ \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \theta} &= \pm \rho \sqrt{2mE - m^2 g \rho \theta^2} \\ \mathcal{S}_0 &= \pm \rho \int \sqrt{2mE - m^2 g \rho \theta^2} d\theta\end{aligned}$$

et l'action de Hamilton a pour expression :

$$\mathcal{S} = -Et \pm \rho \int \sqrt{2mE - m^2 g \rho \theta^2} d\theta$$

(7.3b) page 190 donne l'équation du mouvement $t(\theta)$:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} \\ &= \frac{\partial}{\partial E} \left(-Et \pm \rho \int \sqrt{2mE - m^2 g \rho \theta^2} d\theta \right)\end{aligned}$$

En se servant de la résolution de (7.13) page 197, avec $k = mg\rho$,

$$\beta = -t \pm \sqrt{\frac{\rho}{g}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{mg\rho}{2E}} \theta\right)$$

soit, en isolant la coordonnée généralisée θ :

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\sqrt{\frac{mg\rho}{2E}} \theta\right) &= \pm \sqrt{\frac{g}{\rho}} (t + \beta) \\ \theta &= \pm \sqrt{\frac{2E}{mg\rho}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\rho}} (t + \beta)\right) \end{aligned}$$

Résolution en utilisant l'ex. 6.7.3 page 183

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m\rho^2} - mg\rho \cos(\theta)$$

Pour de petites oscillations $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m\rho^2} + \frac{mg\rho}{2} \theta^2$$

On pose $M = m\rho^2$ et $\omega = \sqrt{g/\rho}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{p^2}{2M} - \frac{1}{2}M\omega^2\theta^2 \\ &= \frac{1}{2M}(p^2 - M^2\omega^2\theta^2) \end{aligned}$$

De la forme de (6.9) page 185. La solution est donc :

$$\begin{cases} p(t) = \sqrt{2ME} \cos(\omega t + \beta) \\ q(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{M}} \sin(\omega t + \beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(t) = \rho \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta) \\ q(t) = \sqrt{\frac{2E}{mg\rho}} \sin(\omega t + \beta) \end{cases}$$

11.5 Pendule simple à ressort, plan

Soit un pendule simple, à ressort, de longueur $\rho(t)$ variable. La masse m est supposée osciller dans le plan. Quelle est l'équation de son mouvement ?

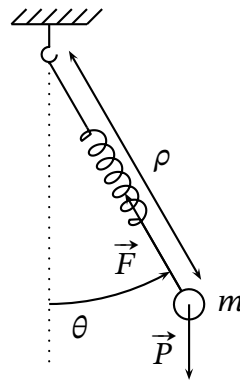


FIG. 11.9 – Pendule plan à ressort

11.5.1 Résolution par la mécanique de Newton

a) Grâce à la relation fondamentale de la dynamique

(2.4) page 57 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique,

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \sum \vec{f}^{(e)} \\ &= \vec{P} + \vec{F} \end{aligned}$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta = -mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + mg \cos(\theta) \vec{e}_\rho + F \vec{e}_\rho$$

qui donne le système,

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = \frac{F}{m} \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Si le modèle de la force de rappel du ressort est de la forme,

$$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0) \vec{e}_\rho$$

alors,

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = -\frac{k}{m}(\rho - \rho_0) \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

b) Grâce aux intégrales premières

À $n = 2$ degrés de liberté correspond $2n - 1 = 3$ intégrales premières. Il nous faut deux équations, c.-à-d. deux intégrales premières, pour deux inconnues ρ et θ . Si le modèle de la force de rappel du ressort dérive d'une énergie potentielle alors l'énergie mécanique se conserve. Supposons que le modèle de la force de rappel soit de la forme

$$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0) \vec{e}_\rho$$

qui dérive de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2$$

L'énergie est alors une intégrale première :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - mg\rho \cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2 \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\ddot{\theta} + m\rho^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mg\dot{\rho}\cos(\theta) + mg\rho\dot{\theta}\sin(\theta) + k\dot{\rho}(\rho - \rho_0) = 0 \quad (11.5)$$

Le vecteur moment cinétique est aussi une intégrale première. Calculons-le par rapport au point d'attache o du pendule :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_o}{dt} &= \sum \vec{\Gamma}_o^{(e)} \\ \frac{d}{dt}(\vec{\rho} \times m\vec{v}) &= \vec{\rho} \times \vec{P} + \vec{\rho} \times \vec{F} \\ \frac{d}{dt}[\rho \vec{e}_\rho \times m(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta} \vec{e}_\theta)] &= \rho \vec{e}_\rho \times (-mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + mg \cos(\theta) \vec{e}_\rho - F\vec{e}_\rho) \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta} \vec{e}_k) &= -mg\rho \sin(\theta) \vec{e}_k \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

On multiplie cette équation par $m\rho\dot{\theta}$ et l'on soustrait de (11.5) :

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = -\frac{k}{m}(\rho - \rho_0) \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

11.5.2 Résolution par le principe des travaux virtuels

Appliquons le principe des travaux virtuels (2.1) page 54 à la seule partie mobile ($N = 1$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{(a)} - \vec{p}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\vec{P} + \vec{F} - \vec{p}) \cdot \delta \vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

(2.4) page 57 donne l'expression de l'accélération en coordonnées polaires dans la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$. Il y a deux coordonnées généralisées, donc deux déplacements virtuels.

$$\begin{aligned} \begin{cases} [mg \cos(\theta) \vec{e}_\rho - mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + F\vec{e}_\rho - m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho - m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta] \cdot \delta \rho \vec{e}_\rho = 0 \\ [mg \cos(\theta) \vec{e}_\rho - mg \sin(\theta) \vec{e}_\theta + F\vec{e}_\rho - m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho - m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta] \cdot \rho \delta \theta \vec{e}_\theta = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} mg \cos(\theta) + F - m\ddot{\rho} + m\rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ -mg \sin(\theta) - m\rho\ddot{\theta} - 2m\dot{\rho}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = \frac{F}{m} \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si le modèle de force est de la forme $\vec{F} = -k(\rho - \rho_0) \vec{e}_\rho$, alors,

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = -\frac{k}{m}(\rho - \rho_0)$$

11.5.3 Résolution par la mécanique de Lagrange

Le système possède deux degrés de liberté, donc deux coordonnées généralisées, ρ et θ . Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} T - V \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - \left[-mg\rho \cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + mg\rho \cos(\theta) - \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2\end{aligned}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\theta}^2 - mg \cos(\theta) + k(\rho - \rho_0) = 0 \\ \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\theta}) + mg\rho \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) + \frac{k}{m}(\rho - \rho_0) = 0 \\ m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\dot{\rho}\dot{\theta} + mg\rho \sin(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = -\frac{k}{m}(\rho - \rho_0) \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Si le modèle de la force de rappel du ressort ne dérive pas d'un potentiel, on utilise la force généralisée $\vec{Q}$ dont les composantes sont données par la déf. 3.1.1 page 71 :

$$\begin{aligned}Q_j &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ Q_\rho &= F \vec{e}_\rho \cdot \frac{\partial \rho \vec{e}_\rho}{\partial \rho} \\ &= F \\ Q_\theta &= 0\end{aligned}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = F \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\theta}^2 - mg \cos(\theta) = F \\ \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\theta}) + mg\rho \sin(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = \frac{F}{m} \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} + g \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

11.5.4 Résolution par la mécanique de Hamilton

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour les vitesses généralisées $\dot{\rho}$ et $\dot{\theta}$. Les moments conjugués des variables ρ et θ ont pour expression :

$$\begin{cases} p_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \\ p_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\rho = m\dot{\rho} \\ p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\rho^2} \end{cases}$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \\ &= m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - mg\rho \cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - mg\rho \cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2 \\ &= \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} - mg\rho \cos(\theta) + \frac{1}{2}k(\rho - \rho_0)^2 \\ &= E \end{aligned}$$

D'après (4.8) page 133 le hamiltonien n'étant pas une fonction explicite du temps, il se conserve. Les équations de Hamilton pour la variable ρ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} \\ \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_\rho = \frac{p_\theta^2}{m\rho^3} + mg \cos(\theta) - k(\rho - \rho_0) \\ \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \end{cases} \\ &\begin{cases} \dot{p}_\rho = m\rho\dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta) - k(\rho - \rho_0) \\ \dot{p}_\rho = m\ddot{\rho} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous vérifions qu'elles redonnent bien l'équation :

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) = -\frac{k}{m}(\rho - \rho_0)$$

Les équations de Hamilton pour la variable θ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_\theta = -mg\rho \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\rho^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_\theta = -mg\rho \sin(\theta) \\ \dot{p}_\theta = m\rho^2\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}\rho\dot{\rho} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous vérifions qu'elles redonnent bien l'équation :

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\rho} + g \sin(\theta) = 0$$

11.6 Pendule sphérique

Soit un pendule de masse m et de longueur r pouvant osciller dans toutes les directions. Quelle est l'équation du mouvement de la masse m ?

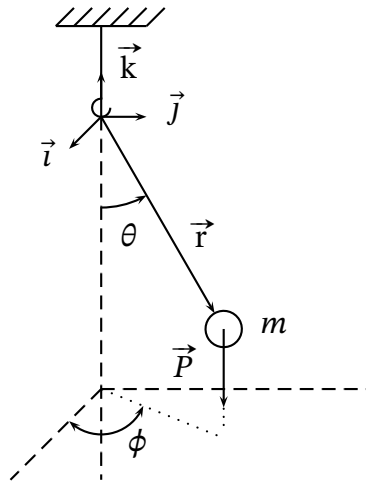


FIG. 11.10 – Pendule sphérique

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, en coordonnées rectangulaires (x, y, z) , le vecteur position a pour expression :

$$\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le changement de coordonnées sphériques à rectangulaires est le suivant :

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = -r \cos(\theta) \end{cases}$$

Nous employons ici deux méthodes pour déterminer l'expression du carré de la vitesse.

1. En restant dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et en passant aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , le vecteur position s'écrit

$$\vec{r}(r, \theta, \phi) = r \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + r \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} - r \cos(\theta) \vec{k}$$

En dérivant et en prenant $\dot{r} = 0$, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [r\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - r\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi)] \vec{i} \\ &\quad + [r\dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + r\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi)] \vec{j} + r\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{k} \\ v^2 &= r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \cos^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \sin^2 \phi - 2r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\phi) \\ &\quad + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \sin^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \cos^2 \phi + 2r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi) \\ &\quad + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \\ &= r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

2. En passant dans la base sphérique unitaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$:

$$\begin{aligned}\vec{r}(r, \theta, \phi) &= r \vec{e}_r \\ d\vec{r}(r, \theta, \phi) &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right)_{\theta, \phi} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)_{r, \phi} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right)_{r, \theta} \\ &= \left[\sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} - \cos(\theta) \vec{k}\right] dr \\ &\quad + r \left[\cos(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k}\right] d\theta \\ &\quad - r \left[\sin(\theta) \sin(\phi) \vec{i} - \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{j}\right] d\phi \\ &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\phi \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression des vecteurs unitaires de la base sphérique dans la base orthonormée,

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} - \cos(\theta) \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos(\theta) \cos(\phi) \vec{i} + \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + \sin(\theta) \vec{k} \\ \vec{e}_\phi = -\sin(\phi) \vec{i} + \cos(\phi) \vec{j} \end{cases}$$

et l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques dans la base unitaire sphérique :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{e}_\phi \\ &= r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{e}_\phi \\ v^2 &= r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2\end{aligned}$$

11.6.1 Résolution par la mécanique de Newton, grâce aux intégrales premières

À $n = 2$ degrés de liberté correspond $2n - 1 = 3$ intégrales premières. Il nous faut deux équations, c.-à-d. deux intégrales premières, pour deux inconnues θ et ϕ . Le vecteur moment cinétique est une intégrale première. Calculons-le par rapport au point d'attache o du pendule :

$$\begin{aligned}\vec{L}_o &= \vec{r} \times m \vec{v} \\ &= r \vec{e}_r \times m r (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{e}_\phi) \\ &= m r^2 (\dot{\theta} \vec{e}_\phi - \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

Sa norme est constante

$$L_o = m r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2)$$

ainsi que sa projection sur n'importe quel axe fixe, en particulier sur l'axe z :

$$\begin{aligned}\vec{L}_o \cdot \vec{k} &= m r^2 (\dot{\theta} \vec{e}_\phi \cdot \vec{k} - \sin(\theta) \dot{\phi} \vec{e}_\theta \cdot \vec{k}) \\ L_{z0} &= m r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}\end{aligned} \tag{11.6}$$

Les forces dérivant toutes d'un potentiel, l'énergie mécanique se conserve :

$$\begin{aligned}E &\stackrel{\text{def}}{=} T + V \\ &= \frac{1}{2} m r^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2] - mgr \cos(\theta) \\ &= \frac{m r^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{L_{z0}^2}{2 m r^2 \sin^2(\theta)} - mgr \cos(\theta)\end{aligned} \tag{11.7}$$

On isole $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{mr^2} \left[E - \frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta) \right]}$$

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mr^2} \left[E - \frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta) \right]}}$$

C'est une intégrale elliptique de première espèce. Avec (11.6), nous avons l'expression de l'autre variable :

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\theta}$$

$$= \frac{L_{z0}}{mr^2 \sin^2(\theta)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mr^2} \left[E - \frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta) \right]}}$$

$$\phi = \frac{L_{z0}}{r\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \sqrt{E - \frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta)}}$$

C'est une intégrale elliptique de troisième espèce. (11.7) donne

$$\frac{mr^2 \dot{\theta}^2}{2} = E - \frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta)$$

par conséquent :

$$E - \frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + mgr \cos(\theta) \geq 0$$

$$\frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} - mgr \cos(\theta) \geq E$$

Les limites du mouvement sont atteintes lorsque l'énergie cinétique est nulle, c.-à-d. lorsque

$$\frac{L_{z0}^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} - mgr \cos(\theta) = E$$

C'est une équation du troisième degré en $\cos(\theta)$, ayant deux racines $\cos(\theta)_1$ et $\cos(\theta)_2$ entre -1 et $+1$. Ces racines déterminent la position de deux cercles parallèles $\theta_1 = c_1^{ste}$ et $\theta_2 = c_2^{ste}$, sur la sphère, entre lesquels est comprise toute la trajectoire du pendule.

11.6.2 Résolution par la mécanique de Lagrange

L'énergie cinétique a pour expression,

$$T = \frac{1}{2}mr^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta))$$

et l'énergie potentielle :

$$V = -mgr \cos(\theta)$$

Le lagrangien a pour expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + mgr \cos(\theta)$$

La coordonnée généralisée ϕ étant cyclique, son moment conjugué p_ϕ est une intégrale première du mouvement. Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + mgr \sin(\theta) = 0 \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi} \sin^2(\theta)) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} mr^2 \ddot{\theta} - mr^2 \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + mgr \sin(\theta) = 0 \\ \dot{\phi} \sin^2(\theta) = c^{ste} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation différentielle du 2nd ordre par rapport au temps suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{g \sin(\theta)}{r} \\ &= \dot{\phi}^2 \sin^4 \theta \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g \sin(\theta)}{r} \\ &= c^{ste} \times \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g \sin(\theta)}{r} \end{aligned} \quad (11.8)$$

11.6.3 Résolution par la mécanique de Hamilton

Effectuons la transformation de Legendre du lagrangien pour les vitesses généralisées $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$:

$$\begin{cases} p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \\ p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\theta = mr^2 \dot{\theta} \\ p_\phi = mr^2 \dot{\phi} \sin^2(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2(\theta)} \end{cases}$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \\ &= p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \left[\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) + mgr \cos(\theta) \right] \\ &= \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2 \sin^2(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{mr^2 \sin^2(\theta)} - mgr \cos(\theta) \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} - mgr \cos(\theta) \end{aligned}$$

Le hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, d'après (4.8) page 133 il se conserve. On retrouve le fait que la coordonnée généralisée ϕ est cyclique et par conséquent que p_ϕ est une

intégrale première du mouvement. Deux équations de Hamilton redonnent la transformation de Legendre :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta}} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\phi}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{mr^2} \\ \dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{mr^2 \sin^2(\theta)} \end{cases}$$

Les deux autres donnent les équations de la dynamique :

$$\begin{cases} \dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \\ \dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_{\theta} = \frac{p_{\phi}^2 \cos(\theta)}{mr^2 \sin^3(\theta)} - mgr \sin(\theta) \\ \dot{p}_{\phi} = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons l'équation différentielle du mouvement :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\dot{p}_{\theta}}{mr^2} \\ &= \frac{p_{\phi}^2 \cos(\theta)}{m^2 r^4 \sin^3(\theta)} - \frac{g \sin(\theta)}{r} \\ &= c^{ste} \times \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g \sin(\theta)}{r} \end{aligned}$$

Pour établir cette équation nous avons dû dériver $\dot{\theta}$. Nous retrouvons alors l'équation différentielle de la méthode de Lagrange, (11.8) page précédente.

Index

Accélération constante d'un mobile, 150

Action de Hamilton
représentation, 207

Additivité du lagrangien, 246

Balistique, 201, 236

Bernoulli Jean, 5, 223, 225

Brachistochrone, 225

Comparaison des mécaniques, 267

Conditions d'intégrabilité, 172

Coordonnées
cycliques, 138, 201
généralisées définition, 19
polaires, 55

Crochet
de Lagrange définition, 163
de Poisson définition, 170

Cylindre roulant sans glisser, 85

D'Alembert, 53

Degrés de liberté, 19

Disque roulant sans glissement, 22

Double plan incliné, 23, 27

Énergie
cinétique, 69
définition, 72
mécanique, 134
potentielle, 24

Équations
de Hamilton, 132
de Hamilton-Jacobi
en représentation p, 199
en représentation q, 190
de Lagrange, 74, 78

Fonctions génératrices
de type 1, 147
de type 2, 152
de type 3, 159
de type 4, 160

Force(s)
centrale(s), 239
de frottements
sec, 81
visqueux, 82

Galilée, 4, 6, 94, 158, 166

Hamiltonien
conservation, 133
et énergie mécanique, 134

Impulsion généralisée définition, 109

Intégrales premières du mouvement, 104

Invariance de jauge, 247

Lagrangien
additivité, 246
d'un mobile libre, 250
d'un système
dans un champ, 252
libre, 252
invariance de jauge, 247

Le principe du levier, 11

Liaison(s)
cinématiques, 18
exemples, 18
géométriques, 18
holonome(s), 19
rhéonome(s), 21
scléronome(s), 20
rhéonome(s), 19
scléronome(s), 19
équation
intégrable, 88
non intégrable, 88

Masse
glissant sans frottements sur un plan incliné,
7, 64, 75, 105, 108, 131, 137, 194
motorisé, 65
sur une trappe, 66

- Masses reliées par une poulie, [59](#)
- Mobile
 - dans un champ de gravitation, [153](#)
 - libre en une dimension, [258](#)
- Multiplicateurs de Lagrange, [23](#)
- Nature de l'équilibre, [25](#)
- Oscillateur harmonique, [150](#), [183](#), [196](#)
- Palan, [13](#), [61](#)
- Particule chargée dans un champ em, [78](#)
- Pendule
 - attaché à un point tournant, [77](#)
 - mathématique, [75](#), [106](#)
 - statique, [9](#)
- Poulies coaxiales, [15](#), [26](#)
- Principe
 - de D'Alembert, [54](#)
 - de moindre
 - distance, [219](#)
 - temps, [221](#)
 - de moindre action
 - de Hamilton, [233](#)
 - de Maupertuis, [234](#)
 - de relativité de Galilée, [249](#)
 - des déplacements virtuels, [3](#)
 - des travaux virtuels, [6](#)
 - en dynamique, [54](#)
 - en statique, [5](#)
- Propriétés
 - des équations de Lagrange, [89](#)
 - du lagrangien, [89](#)
- Stevin, [2](#), [3](#)
- Symbole de Kronecker, [19](#)
- Séparation des variables, [192](#)
- Théorème
 - Crochet de Poisson et intégrale première, [178](#)
 - d'Euler, [134](#)
 - d'invariance canonique des crochets, [182](#)
 - de Liouville, [141](#)
 - de Noether, [261](#)
 - de Poisson, [182](#)
 - du moment cinétique, [273](#)
- Transformation(s)
 - canonique(s), [147](#)
 - infinitésimale(s), [164](#)
 - de Legendre, [125](#)
 - identité, [153](#), [160](#)
 - infinitésimale(s)
 - définition, [260](#)
 - invariante(s), [168](#)
 - définition, [257](#)
 - ponctuelle(s), [156](#)
- Volant d'inertie, [57](#)

