TRIGONOMÉTRIE

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Démonstration des principales formules de trigonométrie

TABLE DES MATIÈRES

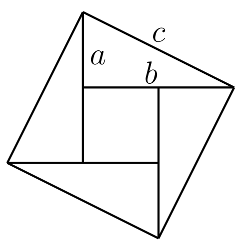
1 Identité de Pythagore 1
1.1 Expression de sinus et cosinus en fonction de tangente 2
2 Cercle trigonométrique 3
2.1 Parité des fonctions trigonométriques 3
2.2 Relations entre sinus et cosinus 4
3 Addition de deux angles 4
3.1 Angle double 6
3.2 Transformation de produits en sommes 6
3.3 Réduction du carré 7
3.4 Transformation de sommes en produits 7
4 Formule de De Moivre 7
5 Loi des cosinus 8

1 Identité de Pythagore

Théorème 1.1. *Théorème de Pythagore*
Le carré de l'hypothénus d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des autres côtés.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Démonstration. Exprimons la surface totale de la figure ci-dessous :



$$S = c^2$$

Date: 17 décembre 2025.

Or S est aussi la surface des quatre triangles et du carré central :

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \tfrac{1}{2}ab + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ &= b^2 + a^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

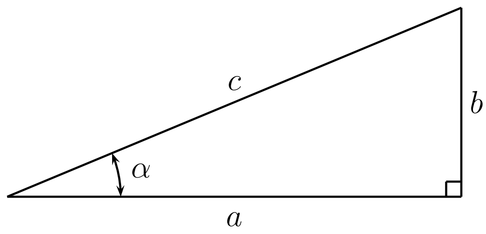
Définition 1.1. Fonctions trigonométriques

Dans le triangle rectangle ci-dessous, on définit les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &\triangleq \frac{b}{c} \\ \cos(\alpha) &\triangleq \frac{a}{c} \\ \tan(\alpha) &\triangleq \frac{b}{a} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



Théorème 1.2. *Identité de Pythagore*

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Démonstration. A partir du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1 \\ \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

□

1.1 Expression de sinus et cosinus en fonction de tangente

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}} \\ \cos(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \\ \cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}/\cos(\alpha)} \end{cases}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

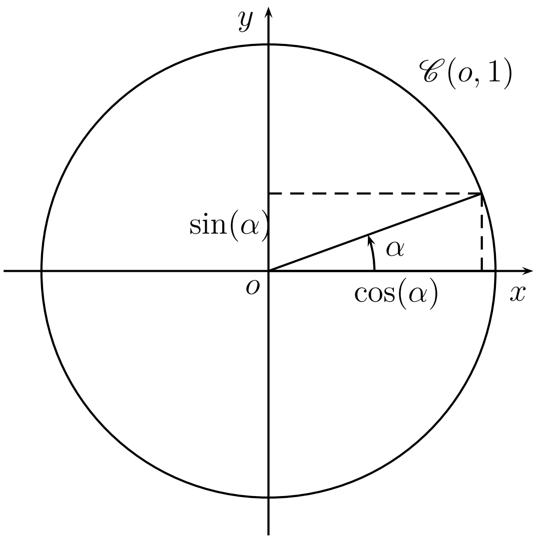
2 Cercle trigonométrique

On pose $c \neq 0$ pour s'assurer de l'existence du triangle. Par changement d'unité de longueur, nous posons $c = 1$ sans perte de généralité :

— si $\alpha = 0$ alors $b = 0$ et $a = c$.

— si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $a = 0$, $b = c$, et $\tan(\alpha)$ n'est plus définie.

Pour $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ou pour $\alpha < 0$, le triangle n'est plus défini. Nous redéfinissons les fonctions trigonométriques comme la projection perpendiculaire d'un segment de longueur unité sur les axes de coordonnées. On obtient alors le cercle trigonométrique :

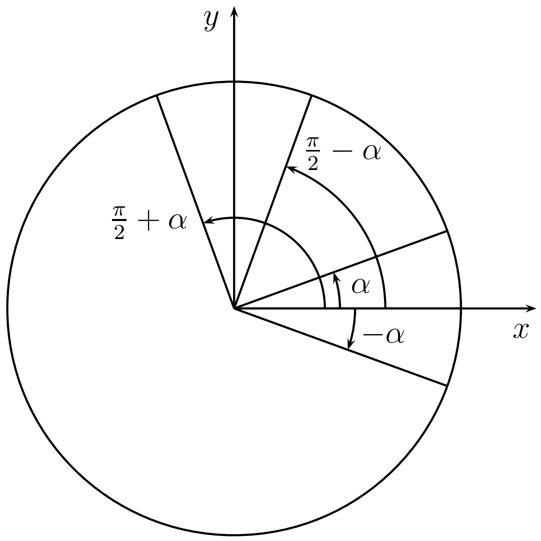


2.1 Parité des fonctions trigonométriques

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \tag{1}$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \tag{2}$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



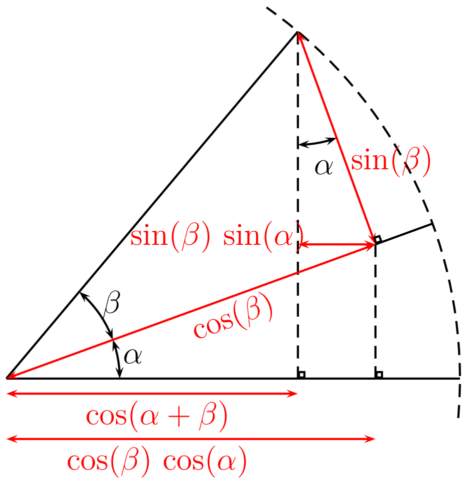
2.2 Relations entre sinus et cosinus

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$$

3 Addition de deux angles

Théorème 3.1.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$



Démonstration. Sur la figure ci-dessus, on retrouve l'angle α car les droites sont perpendiculaires deux à deux. Par conséquent :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{3}$$

En remplaçant β par $-\beta$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

En remplaçant α par $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dans la relation (3) :

$$\begin{aligned}\cos[(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)+\beta] &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\beta) - \sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

En remplaçant β par $-\beta$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(-\beta) - \cos(\alpha)\sin(-\beta)\\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Pour la fonction tangente :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)/[\cos(\alpha)\cos(\beta)] + \cos(\alpha)\sin(\beta)/[\cos(\alpha)\cos(\beta)]}{1-\sin(\alpha)\sin(\beta)/[\cos(\alpha)\cos(\beta)]}\\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

En remplaçant β par $-\beta$:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)} \qquad \square$$

L'identité (3) est la plus antisymétrique, c'est la seule à retenir.

3.1 Angle double

En posant $\beta = \alpha$ dans le théorème 3.1 :

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\\ &= 2\cos^2(\alpha) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha)\\ \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times \frac{2\cos(\alpha)}{2\cos(\alpha)}\\ &= \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$$

et :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times \frac{2\sin(\alpha)}{2\sin(\alpha)}\\ &= \frac{2\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

En se servant des identités (1) :

$$\begin{cases}\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\\ \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos(2\alpha) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha)} - \dfrac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\\ \sin(2\alpha) = 2\dfrac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\\ \sin(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

3.2 Transformation de produits en sommes

A partir du théorème 3.1, on déduit :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]\\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]\\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]\\ \sin(\beta)\cos(\alpha) &= \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]\end{aligned} \tag{4}$$

3.3 Réduction du carré

En posant $\alpha = \beta$ dans les identités précédentes :

$$\cos^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}[\cos(2\alpha) + 1]$$
$$\sin^2(\alpha) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)]$$

d'où :

$$\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha) + 1}$$

3.4 Transformation de sommes en produits

Dans les relations (4), en posant $\gamma = \alpha + \beta$ et $\delta = \alpha - \beta$, c'est à dire, $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$ et $\beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$, on a :

$$\cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$
$$\cos\delta - \cos\gamma = 2\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$
$$\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$
$$\sin\gamma - \sin\delta = 2\sin\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$$

4 Formule de De Moivre

Le développement en série de la fonction cosinus s'écrit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

et celui de la fonction sinus s'écrit :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Le développement en série de la fonction exponentielle s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

si bien que :

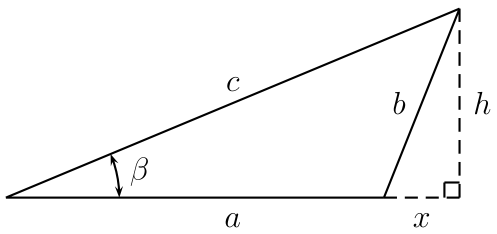
$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) \end{aligned}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

5 Loi des cosinus

Théorème 5.1. *Dans le triangle quelconque :*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$



Démonstration. Nous avons :

$$\begin{cases} \sin(\beta) = \dfrac{h}{c} \\ \cos(\beta) = \dfrac{a+x}{c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + x^2 \\ &= [c\sin(\beta)]^2 + [c\cos(\beta) - a]^2 \\ &= c^2\sin^2(\beta) + c^2\cos^2(\beta) - 2ac\cos(\beta) + a^2 \\ &= c^2 + a^2 - 2ac\cos(\beta) \end{aligned}$$

□

Remarque. Angle

Pour tout cercle, on remarque que la circonférence $\mathcal{C}$ est proportionnelle au diamètre D. Le coefficient de proportionnalité est noté π et l'on a :

$$\mathcal{C} = \pi D$$

$$\mathcal{C} = 2\pi r$$

où r est le rayon du cercle. Une longueur quelconque l d'un arc de cercle est par conséquent elle aussi proportionnelle au rayon du cercle :

$$l = \alpha r$$

On appelle α l'angle sous lequel on voit l'arc de longueur l depuis le centre du cercle. α est le rapport de deux longueur, il n'a donc pas de dimension, mais il a une unité, le radian. Quand $l = \mathcal{C}$, $\alpha = 2\pi$.

Adresse électronique : `o.castera@free.fr`
Site web : `https://sciences-physiques.neocities.org`