# TRANSFORMATION DE FOURIER

OLIVIER CASTÉRA

Table des matières



## 1 Signal sinusoïdal

**Définition 1.** *Signal sinusoïdal*
*Un signal est sinusoïdal de fréquence $f$ si son amplitude $s(t)$ en un point donné est une fonction circulaire, cosinus ou sinus, du temps $t$ :*

$$s(t) = A\sin(2\pi f\,t + \phi_0) \qquad \text{ou} \qquad s(t) = A\cos(2\pi f\,t + \phi_0)$$

- $A$ est *l'amplitude maximale* du signal
- $t$ est le temps écoulé depuis l'instant initial $t = 0$ noté $t_0$
- $\omega = 2\pi f$ est la *pulsation* du signal
- $\phi(t) = 2\pi f\,t - \phi_0$ est la *phase à l'instant* $t$ du signal
- $\phi_0$ est donc la *phase à l'instant initial* $t_0$

La dimension physique de l'amplitude du signal dépend de ce que l'on modélise. La phase n'a pas de dimension physique, elle a pour unité le radian (rapport de deux longueurs). C'est un nombre sans dimension puisque dans une fonction circulaire. Si elle avait une dimension, la valeur de la fonction circulaire dépendrait de l'unité choisie. Lorsqu'on ne considère qu'un seul signal il ne peut y avoir de déphasage puisqu'il est seul, $\phi_0 = 0$.

**Exemple.** Modélisons le son « pur » émis par un diapason donnant le la 440 par un signal sinusoïdal amorti. En un lieu donné, la variation de pression de l'air est une fonction sinusöidale du temps :

$$S(t) = A(t)\cos(2\pi f_0\,t)$$

$A(t)$ est *l'amplitude maximale* décroissante dans le temps de variation de pression de l'air, $f_0$ la *fréquence* à 440 Hz du son émis.

**Définition 2.** *Fonction périodique*
*Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est périodique s'il existe $X$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x + X)$$

*Date*: 17 décembre 2025.

$f(x)$ est dite périodique de période $X$, ou $X$-périodique. La plus petite période est appelée *la* période de $f$.

**Définition 3.** *Période d'un signal périodique dans le temps*
*La période d'un signal est la plus petite durée $T$ telle que son amplitude ait la propriété suivante :*

$$s(t) = s(t+T)$$

Posons $t_1 = t + T$, alors :

$$\begin{aligned} s(t) =& s(t_1) \\ =& s(t_1 + T) \\ =& s(t + 2T) \\ &\vdots \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad s(t) =& s(t + nT) \end{aligned}$$

Les fonctions circulaires étant périodiques de période $2\pi$, pour un signal sinusoïdal :

$$\begin{aligned} A\cos(2\pi f\,t + \phi_0 + 2\pi n) &= A\cos[2\pi f\,(t + nT) + \phi_0] \\ &= A\cos(2\pi f\,t + \phi_0 + 2\pi n f\,T) \\ T &= \frac{1}{f} \end{aligned}$$

**Exemple.** La période temporelle du la 440 vaut

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{440} \\ &= 0{,}002\ 27 \text{ s} \end{aligned}$$

**Définition 4.** *Valeur moyenne d'un signal sur sa période temporelle*

$$\begin{aligned} < s(t) > &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pour toute intégrale d'une fonction périodique, nous prendrons les bornes d'intégration de $t = 0$ à $T$.

**Théorème 1.** *Amplitude d'un signal sinusoïdal*
*Elle est donnée par :*

$$A = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(2\pi f t)\,\mathrm{d}t$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(2\pi f t)\,\mathrm{d}t &= \frac{2A}{T}\int_0^T \cos^2(2\pi f t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{T}\int_0^T 1+\cos(4\pi f t)\,\mathrm{d}t \\
&= A + \tfrac{A}{4\pi}\sin(4\pi f T) \\
&= A + \tfrac{A}{4\pi}\sin(4\pi) \\
&= A
\end{aligned}$$

□

**Théorème 2.** *Complexification*
*Un signal sinusoïdal est la somme de deux signaux complexes d'amplitude $\frac{A}{2}$, et de fréquences opposées $f$ et $-f$.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
S(t) &= A\cos(2\pi f t) \\
&= \tfrac{A}{2}e^{2\pi j f t} + \tfrac{A}{2}e^{-2\pi j f t}
\end{aligned}$$

□

## 2 Signal périodique à plusieurs fréquences

**Théorème 3.** *(Admis) Décomposition en série de Fourier*
*Tout signal physique périodique est décomposable en série de Fourier :*

$$\begin{aligned}
S(t) &= c_0 + c_1\cos(2\pi f t + \phi_1) + c_2\cos(4\pi f t + \phi_2) + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f t + \phi_n) \text{ avec } \phi_0 = 0 \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\cos(2\pi n f t + \phi_n)
\end{aligned}$$

La série de Fourier comporte :
- un signal constant $c_0$
- une sinusoïde de fréquence $f$ appelée le fondamental
- une infinité de sinusoïdes de fréquences $nf$ multiples de $f$, non nécessairement en phase, appelées harmoniques

**Remarque.** Le signal suivant

$$s(t) = c\cos(1,67 \times 2\pi f t)$$

est sinusoïdal bien que le coefficient $1,67$ soit non entier. Il suffit de définir la nouvelle fréquence $F = 1,67f$ pour s'en assurer :

$$s(t) = c\cos(2\pi F t)$$

Si le rapport des coefficients est un rationnel, le signal est périodique. Par exemple, pour le signal

$$s(t) = c_1\cos(1,67 \times 2\pi f t) + c_2\cos(2,338 \times 2\pi f t)$$

nous avons $2,338/1,67 = 1,4 = 7/5$, et le signal est périodique. Au bout de 5 périodes de la première sinusoïde qui correspondent à 7 de la seconde, le signal se répète identique à lui-même.

**Théorème 4.** *Décomposition en somme de cosinus et de sinus*

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + a_1\cos(2\pi ft) + b_1\sin(2\pi ft) + a_2\cos(4\pi ft) + b_2\sin(4\pi ft) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos(2\pi nft) + b_n\sin(2\pi nft)] \text{ avec } b_0 = 0 \end{aligned}$$

*Démonstration.* La phase à l'origine des temps pouvant être positive ou négative, le choix du signe la précédent est affaire de convention. À partir du théorème 3 p. 3 :

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\cos(2\pi nft - \phi_n) \quad \textit{avec } \phi_0 = 0 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n[\cos(2\pi nft)\cos(\phi_n) + \sin(2\pi nft)\sin(\phi_n)] \quad \textit{avec } \phi_0 = 0 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[c_n\cos(\phi_n)\cos(2\pi nft) + c_n\sin(\phi_n)\sin(2\pi nft)] \quad \textit{avec } \phi_0 = 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a_0 \overset{\text{def}}{=} c_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \overset{\text{def}}{=} c_n\cos(\phi_n) \\ b_0 \overset{\text{def}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n \overset{\text{def}}{=} c_n\sin(\phi_n) \end{cases}$$

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos(2\pi nft) + b_n\sin(2\pi nft)] \quad \textit{avec } b_0 = 0$$

□

**Théorème 5.** *Valeur des coefficients*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(2\pi nft)\,\mathrm{d}t$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T a_0\,\mathrm{d}t + \int_0^T a_1\cos(2\pi ft)\,\mathrm{d}t + \int_0^T b_1\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}t + \int_0^T a_2\cos(4\pi ft)\,\mathrm{d}t + \dots \\ &= a_0 T \end{aligned}$$

D'après la définition 4 p. 2, $a_0$ est la valeur moyenne du signal.

$$\begin{aligned} \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t &= \frac{2}{T}\int_0^T \sum_{m=0}^{+\infty}[a_m\cos(2\pi mft) + b_m\sin(2\pi mft)]\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T}\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\int_0^T a_m\cos(2\pi mft)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \int_0^T b_m\sin(2\pi mft)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t\right] \end{aligned}$$

Pour un $n$ donné, $m$ va de zéro à l'infini. Tant que $m \neq n$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^T S(t)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t|_{m\neq n} &= \left[\int_0^T a_m\cos(2\pi mft)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t + \int_0^T b_m\sin(2\pi mft)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^T a_m[\cos(2\pi mft+2\pi nft)+\cos(2\pi mft-2\pi nft)]\,\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^T b_m[\sin(2\pi mft+2\pi nft)+\sin(2\pi mft-2\pi nft)]\,\mathrm{d}t\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^T a_m\cos[(m+n)2\pi ft]\,\mathrm{d}t + \int_0^T a_m\cos[(m-n)2\pi ft]\,\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^T b_m[\sin[(m+n)2\pi ft]\,\mathrm{d}t + \int_0^T b_m\sin[(m-n)2\pi ft]\,\mathrm{d}t\right\}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Et lorsque $m = n$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^T S(t)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t|_{m=n} &= \left[\int_0^T a_n\cos^2(2\pi nft)\,\mathrm{d}t + \int_0^T b_n\sin(2\pi nft)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{1}{2}\left\{a_n\int_0^T 1+\cos(4\pi nft)\,\mathrm{d}t + \frac{b_n}{2\pi nf_0}\left[\cos^2(2\pi nft)\right]_0^T\right\}\\
&= \frac{a_n}{2}\left\{T + \frac{1}{4\pi f}\left[\sin(4\pi nft)\right]_0^T\right\}\\
&= \frac{a_nT}{2}
\end{aligned}$$

De même pour les coefficients $b_n$. □

**Remarque.** Amplitude et phase de chaque fréquence

$$\begin{cases} a_n = c_n\cos(\phi_n)\\ b_n = c_n\sin(\phi_n)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n^2 = a_n^2+b_n^2\\ \tan(\phi_n) = \left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\\ \phi_n = \arctan\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)\end{cases}$$

**Définition 5.** *Spectre de fréquences*
*Les représentations des couples $(a_n, b_n)$ ou $(c_n, \phi_n)$ sont appelées spectre de fréquences du signal $S(t)$. Quand le signal est périodique son spectre est un spectre de raies.*

**Théorème 6.** *Complexification*

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n\,e^{j2\pi nft}$$

*où les coefficients $A_n$ sont appelés coefficients de Fourier.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi n f t) + b_n \sin(2\pi n f t)] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \tfrac{1}{2}\left(e^{j2\pi n f t} + e^{-j2\pi n f t}\right) + b_n \tfrac{1}{2j}\left(e^{j2\pi n f t} - e^{-j2\pi n f t}\right)\right] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n)\, e^{-j2\pi n f t} + \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n)\, e^{j2\pi n f t}\right]
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases}
A_0 \overset{\text{def}}{=} a_0 \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n^* \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n)
\end{cases}$$

où $A_n^*$ est le complexe conjugué de $A_n$.

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n^*\, e^{-j2\pi n f t} + A_n\, e^{j2\pi n f t}\right)$$

En remplaçant $n$ par $-n$ dans le théorème 5 p. 4 :

$$\begin{cases}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{-n} = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(-2\pi n f t)\, \mathrm{d}t \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{-n} = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \sin(-2\pi n f t)\, \mathrm{d}t
\end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{-n} = a_n \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{-n} = -b_n
\end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
A_{-n} &= \tfrac{1}{2}(a_{-n} - j\, b_{-n}) \\
&= \tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n) \\
&= A_n^*
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
S(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_{-n}\, e^{-j2\pi n f t} + A_n\, e^{j2\pi n f t}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n\, e^{j2\pi n f t}
\end{aligned}$$

□

D'après ce théorème, les coefficients de Fourier $A_n$ contiennent toute l'information pour retrouver le signal $S(t)$.

**Remarque.**

$$\begin{aligned}
A_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \\
&= \tfrac{1}{2}[c_n \cos(\phi_n) - j\, c_n \sin(\phi_n)] \\
&= \tfrac{1}{2}\, c_n e^{-j\phi_n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A_n^* &= \tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n) \\
&= \tfrac{1}{2}[c_n \cos(\phi_n) + j\, c_n \sin(\phi_n)] \\
&= \tfrac{1}{2}\, c_n e^{j\phi_n}
\end{aligned}$$

**Théorème 7.** *Valeur des coefficients de Fourier*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, e^{-j2\pi nft}\mathrm{d}t$$

*Démonstration.* Avec le théorème 5 p. 4 :

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t - j\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(2\pi nft)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\left[\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t - j\sin(2\pi nft)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, e^{-j2\pi nft}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

Si le signal $S(t)$ n'est pas pair, on choisit $\tau$ tel que le signal $S_1(t) = S(t-\tau)$ soit pair. On effectue la transformation de Fourier de $S_1(t)$ puis on obtient la transformée de Fourier de $S(t)$ par changement de variable $t - \tau \to t$.

**Théorème 8.** *Signaux pairs*
*Pour les signaux pairs :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 0 \\ a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(2\pi nft)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = A_{-n} \end{cases}$$

*Démonstration.* D'après le théorème 4 p. 4,

$$\begin{cases} S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[c_n\cos(2\pi nft)\cos(\phi_n) + c_n\sin(2\pi nft)\sin(\phi_n)] \\ S(-t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[c_n\cos(2\pi nft)\cos(\phi_n) - c_n\sin(2\pi nft)\sin(\phi_n)] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= S(-t) \\ S(t) - S(-t) &= 0 \\ 2c_n\sin(2\pi nft)\sin(\phi_n) &= 0 \\ \sin(\phi_n) &= 0 \\ \phi_n &= 0 \pm k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} b_n &= c_n \sin(\phi_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{T+T} S(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(2\pi n f t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(2\pi n f t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Avec $b_n = 0$ :

$$\begin{cases} A_n = a_n \\ A_n^* = a_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_n &= A_n^* \\ &= A_{-n} \end{aligned}$$

□

## 3 Signal quelconque (non périodique)

Ce signal peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la période devient infiniment longue. Dans le domaine fréquentiel, son spectre devient continu. La fréquence du fondamental $f = 1/T$ tend vers zéro et les fréquences des harmoniques $nf$ se rapprochent les unes des autres. La série de Fourier devient une intégrale.

**Théorème 9.** *(Admis) Décomposition en intégrale de Fourier*
*Tout signal $S(t)$ physique est décomposable en intégrale de Fourier :*

$$S(t) = \int_0^{+\infty} c(f)\cos[2\pi f\,t - \phi(f)]\,\mathrm{d}f$$

$S(t)$ est décomposée en une infinité de composantes sinusoïdales de fréquences infiniment proches et d'amplitudes infinitésimales $c(f)\,\mathrm{d}f$.

**Théorème 10.** *Décomposition en cosinus et sinus*

$$S(t) = \int_0^{+\infty} a(f)\cos(2\pi f t) - b(f)\sin(2\pi f t)\,\mathrm{d}f$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{+\infty} c(f)\cos[2\pi f t - \phi(f)]\,\mathrm{d}f \\ &= \int_0^{+\infty} c(f)\cos(2\pi f t)\cos[\phi(f)] - c(f)\sin(2\pi f t)\sin[\phi(f)]\,\mathrm{d}f \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(f) \stackrel{\text{def}}{=} c(f)\cos[\phi(f)] \\ b(f) \stackrel{\text{def}}{=} c(f)\sin[\phi(f)] \end{cases}$$

$$S(t) = \int_0^{+\infty} a(f)\cos(2\pi f t) - b(f)\sin(2\pi f t)]\,\mathrm{d}f$$ □

**Théorème 11.** *Valeur des coefficients*

$$\begin{cases} a(f) = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\cos(2\pi f t)\,\mathrm{d}t \\ b(f) = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\sin(2\pi f t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

*Démonstration.* Par analogie avec la démonstration du théorème 5 p. 4. □

**Remarque.** Amplitude et phase de chaque fréquence

$$\begin{cases} a(f) = c(f)\cos[\phi(f)] \\ b(f) = c(f)\sin[\phi(f)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(f)^2 = a(f)^2 + b(f)^2 \\ \tan[\phi(f)] = \left(\dfrac{b(f)}{a(f)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(f) = \sqrt{a(f)^2 + b(f)^2} \\ \phi(f) = \arctan\left[\dfrac{b(f)}{a(f)}\right] \end{cases}$$

**Théorème 12.** *Complexification*

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f)\,e^{2\pi j f t}\mathrm{d}f$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{+\infty} a(f)\cos(2\pi f t) - b(f)\sin(2\pi f t)\,\mathrm{d}f \\ &= \int_0^{+\infty} a(f)\,\tfrac{1}{2}\left(e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}\right) - b(f)\,\tfrac{1}{2j}\left(e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}\right)\mathrm{d}f \\ &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2}\left[a(f) - j\,b(f)\right]e^{-j2\pi f t} + \tfrac{1}{2}\left[a(f) + j\,b(f)\right]e^{j2\pi f t}\mathrm{d}f \end{aligned}$$

On pose :

$$A(f) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}[a(f) - j\,b(f)]$$

$$S(t) = \int_0^{+\infty} A(f)\,e^{2\pi j f t}\mathrm{d}f + \int_0^{+\infty} A^*(f)\,e^{-2\pi j f t}\mathrm{d}f$$

Or :

$$\begin{aligned} c(-f) &= \sqrt{a^2(-f) + b^2(-f)} \\ &= \sqrt{a^2 + [-b(f)]^2} \\ &= c(f) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \phi(-f) &= \arctan\left[\frac{b(-f)}{a(-f)}\right] \\ &= -\arctan\left[\frac{b(f)}{a(f)}\right] \\ &= -\phi(f) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
A(f) &= \tfrac{1}{2}[a(f) - j\,b(f)] \\
&= \tfrac{1}{2}[c(f)\cos[\phi(f)] - j\,c(f)\sin[\phi(f)]] \\
&= \tfrac{1}{2}\,c(f)\,e^{-j\phi(f)} \\
A(-f) &= \tfrac{1}{2}\,c(-f)\,e^{-j\phi(-f)} \\
&= \tfrac{1}{2}\,c(f)\,e^{j\phi(f)} \\
&= A^*(f)
\end{aligned}$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f)\,e^{2\pi j f t}\mathrm{d}f \qquad \square$$

D'après ce théorème, la transformée de Fourier $A(f)$ contient toute l'information pour retrouver le signal $S(t)$.

**Définition 6.** *Transformée de Fourier*
*$A(f)$ est appelée transformée de Fourier de $S(t)$. La représentation spectrale du signal $S(t)$ est celle des fonctions $c(f)$ et $\phi(f)$, qui sont respectivement le double du module et l'argument changé de signe de $A(f)$.*
*$S(t)$ est appelée transformée de Fourier inverse de $A(f)$.*

**Théorème 13.** *Expression de la transformée de Fourier*

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,e^{-2\pi j f t}\mathrm{d}t$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
A(f) &= \tfrac{1}{2}[a(f) - j\,b(f)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\cos(2\pi f t)\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\sin(2\pi f t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,e^{-2\pi j f t}\mathrm{d}t \qquad \square
\end{aligned}$$

**Notation.** *La transformée de Fourier $A(f)$ est habituellement notée $\hat{S}(f)$.*

Adresse électronique : `o.castera@free.fr`
Site web : `https://sciences-physiques.neocities.org`