

LA FORMULE DE STIRLING

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Démonstration de la formule d'approximation de James Stirling, $\ln(n!) \approx n \ln n - n$.

TABLE DES MATIÈRES

1 Résultats préliminaires	1
1.1 Fonction Π de Gauss	1
1.2 Intégrale de Gauss	2
2 Démonstration de la formule de Stirling	3

1 RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1 Fonction Π de Gauss

Théorème 1.1. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

Démonstration. On intègre par parties en posant : $u = x^n$, $u' = nx^{n-1}$, $v' = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= \left[-x^n e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nx^{n-1} (-e^{-x}) dx \\ &= - \left[x^n e^{-x} \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx\end{aligned}$$

On réitère l'intégration par parties sur le dernier terme :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= - \left[x^n e^{-x} \right]_0^{+\infty} - n \left[x^{n-1} e^{-x} \right]_0^{+\infty} + n(n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx \\ &= - \left[(x^n + nx^{n-1}) e^{-x} \right]_0^{+\infty} + n(n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx \\ &= - \left\{ \left[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n(n-1) \times \dots \times [n - (n-1)]x \right] e^{-x} \right\}_0^{+\infty} + n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= n! \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} \\ &= n!\end{aligned}$$

□

1.2 Intégrale de Gauss

Théorème 1.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Démonstration.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^{1/2}$$

Les coordonnées cartésiennes x et y étant indépendantes,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]^{1/2}$$

Passons en coordonnées polaires,

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

Cherchons l'expression de l'élément de surface $d^2s(\rho, \theta)$ qui remplacera celui en coordonnées cartésiennes $dx dy$. Le vecteur position s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= \rho \cos \theta \mathbf{i} + \rho \sin \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

et les vecteurs de base,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho} \\ &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} \\ &= -\rho \sin \theta \mathbf{i} + \rho \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

Nous en déduisons leurs normes,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_\rho\| &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= 1 \\ \|\mathbf{e}_\theta\| &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta} \\ &= \rho \end{aligned}$$

Pour construire l'élément de surface d^2s , prenons une variation le long de la coordonnée ρ ,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{OM} &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho} d\rho \\ &= \mathbf{e}_\rho d\rho \end{aligned}$$

et une variation le long de la coordonnée θ ,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{OM} &= \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} d\theta \\ &= \mathbf{e}_\theta d\theta \end{aligned}$$

puis prenons la norme de leur produit vectoriel :

$$\begin{aligned} d^2s &= \|\mathbf{e}_\rho d\rho \times \mathbf{e}_\theta d\theta\| \\ &= \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

L'espace est parcouru dans son ensemble pour ρ variant de 0 à $+\infty$ et pour θ variant de 0 à 2π , si bien que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho \right)^{1/2} \\ &= \left(2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \right)^{1/2} \\ &= \left\{ 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

□

2 DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING

Théorème 2.1. $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

Démonstration. D'après le théorème (1.1) :

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

On commence par sortir n^{n+1} de l'intégrale grâce au changement de variable $x = ns$, $dx = nds$. Les bornes d'intégration restent inchangées.

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^{+\infty} (ns)^n e^{-ns} nds \\ &= n^{n+1} \int_0^{+\infty} s^n e^{-ns} ds \end{aligned}$$

On regroupe les termes sous l'exponentielle,

$$n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n(\ln s - s)} ds$$

dans le but futur de sortir e^{-n} de l'intégrale. Pour pouvoir utiliser le développement en séries entières de la fonction logarithme népérien on effectue le changement de variable $s = 1 + w$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\begin{aligned}
n! &= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n[\ln(1+w)-(1+w)]} dw \\
&= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n\left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} + \frac{w^7}{7} - \frac{w^8}{8} + \frac{w^9}{9} - \frac{w^{10}}{10} + \frac{w^{11}}{11} - \frac{w^{12}}{12} + \dots - 1 - w\right)} dw \\
&= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n\left(-1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} + \frac{w^7}{7} - \frac{w^8}{8} + \frac{w^9}{9} - \frac{w^{10}}{10} + \frac{w^{11}}{11} - \frac{w^{12}}{12} + \dots\right)} dw \\
&= n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{-n} \times e^{\frac{-nw^2}{2}} \times e^{\frac{nw^3}{3}} \times e^{\frac{-nw^4}{4}} \times e^{\frac{nw^5}{5}} \times e^{\frac{-nw^6}{6}} \\
&\quad \times e^{\frac{nw^7}{7}} \times e^{\frac{-nw^8}{8}} \times e^{\frac{nw^9}{9}} \times e^{\frac{-nw^{10}}{10}} \times e^{\frac{nw^{11}}{11}} \times e^{\frac{-nw^{12}}{12}} \times \dots \times dw \\
&= n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times e^{\frac{nw^3}{3}} \times e^{\frac{-nw^4}{4}} \times e^{\frac{nw^5}{5}} \times e^{\frac{-nw^6}{6}} \\
&\quad \times e^{\frac{nw^7}{7}} \times e^{\frac{-nw^8}{8}} \times e^{\frac{nw^9}{9}} \times e^{\frac{-nw^{10}}{10}} \times e^{\frac{nw^{11}}{11}} \times e^{\frac{-nw^{12}}{12}} \times \dots \times dw
\end{aligned}$$

et nous avons sorti e^{-n} de l'intégrale. Dans l'intégrale, on développe en série entière les fonctions exponentielles, excepté la première.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
n! &= n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times \left(1 + \frac{nw^3}{3} + \frac{n^2 w^6}{18} + \frac{n^3 w^9}{162} + \frac{n^4 w^{12}}{1944} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{nw^4}{4} + \frac{n^2 w^8}{32} - \frac{n^3 w^{12}}{384} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{nw^5}{5} + \frac{n^2 w^{10}}{50} + \frac{n^3 w^{15}}{750} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{nw^6}{6} + \frac{n^2 w^{12}}{72} - \frac{n^3 w^{18}}{1296} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{nw^7}{7} + \frac{n^2 w^{14}}{98} + \frac{n^3 w^{21}}{2058} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{nw^8}{8} + \frac{n^2 w^{16}}{128} - \frac{n^3 w^{24}}{3072} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{nw^9}{9} + \frac{n^2 w^{18}}{162} + \frac{n^3 w^{27}}{4374} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{nw^{10}}{10} + \frac{n^2 w^{20}}{200} - \frac{n^3 w^{30}}{6000} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{nw^{11}}{11} + \frac{n^2 w^{22}}{242} + \frac{n^3 w^{33}}{7986} + \dots\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{nw^{12}}{12} + \frac{n^2 w^{24}}{288} - \frac{n^3 w^{36}}{10368} + \dots\right) \\
&\quad \times \dots \times dw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times & \left(1 + \frac{nw^3}{3} - \frac{nw^4}{4} + \frac{nw^5}{5} - \frac{nw^6}{6} + \frac{nw^7}{7} - \frac{nw^8}{8} + \frac{nw^9}{9} \right. \\
& - \frac{nw^{10}}{10} + \frac{nw^{11}}{11} - \frac{nw^{12}}{12} + \dots + \frac{n^2 w^6}{18} - \frac{n^2 w^7}{12} + \frac{n^2 w^8}{32} \\
& + \frac{n^2 w^8}{15} - \frac{n^2 w^9}{20} - \frac{n^2 w^9}{18} + \frac{n^2 w^{10}}{24} + \frac{n^2 w^{10}}{21} + \frac{n^2 w^{10}}{50} \\
& - \frac{n^2 w^{11}}{30} - \frac{n^2 w^{11}}{28} - \frac{n^2 w^{11}}{24} + \frac{n^2 w^{12}}{35} + \frac{n^2 w^{12}}{32} + \frac{n^2 w^{12}}{72} \\
& + \dots + \frac{n^3 w^9}{162} - \frac{n^3 w^{10}}{72} + \frac{n^3 w^{11}}{96} + \frac{n^3 w^{11}}{90} - \frac{n^3 w^{12}}{108} \\
& \left. + \dots + \frac{n^4 w^{12}}{1944} + \dots \right) dw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} & \left[1 + \frac{nw^3}{3} - \frac{nw^4}{4} + \frac{nw^5}{5} + \left(-\frac{n}{6} + \frac{n^2}{18} \right) w^6 \right. \\
& + \left(\frac{n}{7} - \frac{n^2}{12} \right) w^7 + \left(-\frac{n}{8} + \frac{47n^2}{480} \right) w^8 + \left(\frac{n}{9} - \frac{19n^2}{180} + \frac{n^3}{162} \right) w^9 \\
& + \left(-\frac{n}{10} + \frac{459n^2}{4200} - \frac{n^3}{72} \right) w^{10} + \left(\frac{n}{11} - \frac{93n^2}{840} + \frac{31n^3}{1440} \right) w^{11} \\
& \left. + \left(-\frac{n}{12} + \frac{743n^2}{10080} - \frac{n^3}{108} + \frac{n^4}{1944} \right) w^{12} + \dots \right] dw
\end{aligned}$$

Pour intégrer l'exponentielle dans l'intégrale, on effectue le changement de variable $v = \sqrt{\frac{n}{2}} w$, d'où $w = \sqrt{\frac{2}{n}} v$ et $dw = \sqrt{\frac{2}{n}} dv$. La borne d'intégration inférieure, $w = -1$, devient $v = -\sqrt{\frac{n}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{nw^3}{3} &= \frac{n}{3} \left(\frac{2}{n} \right)^{3/2} v^3 \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} v^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{nw^4}{4} &= \frac{n}{4} \left(\frac{2}{n} \right)^2 v^4 \\
&= \frac{v^4}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{nw^5}{5} &= \frac{n}{5} \left(\frac{2}{n} \right)^{5/2} v^5 \\
&= \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{n}{6} + \frac{n^2}{18} \right) w^6 &= \left(-\frac{n}{6} + \frac{n^2}{18} \right) \frac{8}{n^3} v^6 \\
&= \left(-\frac{4}{3n^2} + \frac{4}{9n} \right) v^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{7} - \frac{n^2}{12}\right) w^7 &= \left(\frac{n}{7} - \frac{n^2}{12}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{7/2} v^7 \\ &= \left(\frac{8}{7} \sqrt{\frac{2}{n^5}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}}\right) v^7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{8} + \frac{47n^2}{480}\right) w^8 &= \left(-\frac{n}{8} + \frac{47n^2}{480}\right) \frac{16}{n^4} v^8 \\ &= \left(-\frac{2}{n^3} + \frac{47}{30n^2}\right) v^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{9} - \frac{19n^2}{180} + \frac{n^3}{162}\right) w^9 &= \left(\frac{n}{9} - \frac{19n^2}{180} + \frac{n^3}{162}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{9/2} v^9 \\ &= \left(\frac{16}{9} \sqrt{\frac{2}{n^7}} - \frac{76}{45} \sqrt{\frac{2}{n^5}} + \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}}\right) v^9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{10} + \frac{459n^2}{4200} - \frac{n^3}{72}\right) w^{10} &= \left(-\frac{n}{10} + \frac{459n^2}{4200} - \frac{n^3}{72}\right) \frac{32}{n^5} v^{10} \\ &= \left(-\frac{16}{5n^4} + \frac{612}{175n^3} - \frac{4}{9n^2}\right) v^{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{11} - \frac{93n^2}{840} + \frac{31n^3}{1440}\right) w^{11} &= \left(\frac{n}{11} - \frac{93n^2}{840} + \frac{31n^3}{1440}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{11/2} v^{11} \\ &= \left(\frac{16}{9} \sqrt{\frac{2}{n^9}} - \frac{744}{210} \sqrt{\frac{2}{n^7}} + \frac{31}{45} \sqrt{\frac{2}{n^5}}\right) v^{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{12} + \frac{743n^2}{10080} - \frac{n^3}{108} + \frac{n^4}{1944}\right) w^{12} &= \left(-\frac{n}{12} + \frac{743n^2}{10080} - \frac{n^3}{108} + \frac{n^4}{1944}\right) \times \frac{64}{n^6} v^{12} \\ &= \left(-\frac{16}{3n^5} + \frac{1486}{315n^4} - \frac{16}{27n^3} + \frac{8}{243n^2}\right) v^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n! &= n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} v^3 - \frac{v^4}{n} + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4v^6}{9n} - \frac{4v^6}{3n^2} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^7 + \frac{47v^8}{30n^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}} v^9 - \frac{4v^{10}}{9n^2} + \frac{8v^{12}}{243n^2} + \dots \right) dv\end{aligned}$$

où les termes suivants sont en n^{-k} avec $k > 2$.

$$\begin{aligned}
n! = \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n & \left(\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} dv + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^3 e^{-v^2} dv \right. \\
& - \frac{1}{n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^5 e^{-v^2} dv \\
& + \frac{4}{9n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv - \frac{4}{3n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\
& - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^7 e^{-v^2} dv + \frac{47}{30n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \\
& + \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^9 e^{-v^2} dv - \frac{4}{9n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \\
& \left. + \frac{8}{243n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^{12} e^{-v^2} dv + \dots \right)
\end{aligned}$$

de la forme,

$$\begin{aligned}
n! = \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n & (\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_4 I_4 + \alpha_5 I_5 + \alpha_6 I_6 \\
& + \alpha_7 I_7 + \alpha_8 I_8 + \alpha_9 I_9 + \alpha_{10} I_{10} + \alpha_{11} I_{11} + \dots)
\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{n}, \quad \alpha_4 = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{n^3}}, \\
\alpha_5 &= \frac{4}{9n}, \quad \alpha_6 = -\frac{4}{3n^2}, \quad \alpha_7 = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{n^3}}, \quad \alpha_8 = \frac{47}{30n^2}, \\
\alpha_9 &= \frac{8}{81} \sqrt{\frac{2}{n^3}}, \quad \alpha_{10} = -\frac{4}{9n^2}, \quad \alpha_{11} = \frac{8}{243n^2}
\end{aligned}$$

On calcule chaque intégrale en faisant tendre n vers l'infini. Pour la première on utilise le théorème (1.2) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^3 e^{-v^2} dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

car la fonction dans I_2 est impaire. De même $I_4 = I_7 = I_9 = 0$.

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^3$, $y' = 3v^2$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\{ \left[-\frac{1}{2}v^3e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2e^{-v^2} dv \end{aligned}$$

On intègre de nouveau par parties :

$$y = v, y' = 1, z' = ve^{-v^2}, z = -\frac{1}{2}e^{-v^2},$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{2}ve^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^6e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^5$, $y' = 5v^4$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_5 &= \left\{ \left[-\frac{1}{2}v^5e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{5}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^4e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^6e^{-v^2} dv \\ &= \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^8e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^7$, $y' = 7v^6$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_8 &= \left\{ \left[-\frac{1}{2}v^7e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^6e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^6e^{-v^2} dv \\ &= \frac{7}{2} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{105}{16} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10}e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^9$, $y' = 9v^8$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_{10} &= \left\{ \left[-\frac{1}{2}v^9 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \\ &= \frac{9}{2} \times \frac{105}{16} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{945}{32} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{12} e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^{11}$, $y' = 11v^{10}$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_{11} &= \left\{ \left[-\frac{1}{2}v^{11} e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{11}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \right\} \\ &= \frac{11}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \\ &= \frac{11}{2} \times \frac{945}{32} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{10395}{64} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n (\alpha_1 I_1 + \alpha_3 I_3 + \alpha_5 I_5 + \alpha_6 I_6 + \alpha_8 I_8 + \alpha_{10} I_{10} + \alpha_{11} I_{11} + \dots) \\ &= \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(\sqrt{\pi} - \frac{1}{n} \times \frac{3}{4} \sqrt{\pi} + \frac{4}{9n} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} - \frac{4}{3n^2} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{47}{30n^2} \times \frac{105}{16} \sqrt{\pi} - \frac{4}{9n^2} \times \frac{945}{32} \sqrt{\pi} + \frac{8}{243n^2} \times \frac{10395}{64} \sqrt{\pi} + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 - \frac{3}{4n} + \frac{5}{6n} - \frac{5}{2n^2} + \frac{329}{32n^2} - \frac{105}{8n^2} + \frac{385}{72n^2} + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

A partir du théorème 2.1 p.3 nous obtenons directement la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &\approx \ln(\sqrt{2\pi n}) + n \ln\left(\frac{n}{e}\right) \\ &\approx \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \ln n - n \ln e \end{aligned}$$

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n$$