https ://sciences-physiques.neocities.org
o.castera@free.fr

Relativité restreinte et générale

Olivier Castéra

Le 9 décembre 2025

Table des matières

Chapitre 1. La notion d'espace 1
1 Systèmes de coordonnées 1
2 Variétés 7
3 Géodésiques d'un espace 9
4 Plongement d'un espace 10
5 Courbure 10
5.1 Courbure positive 10
5.2 Courbure négative 11
6 Géométrie dans l'espace 11
7 Distance 12

Chapitre 2. Notations 15
1 Notation indicielle 15
2 Identités en notation indicielle 17
3 Symbole de Kronecker 18
4 Symbole d'antisymétrie 19

Chapitre 3. Vecteurs 21
1 Représentation géométrique 21
1.1 Opérations sur les vecteurs 21
1.2 Propriétés des lois de composition vectorielles 25
1.3 Quelques propriétés des vecteurs 26
1.4 Définition des espaces vectoriels 27
2 Représentation algébrique 28
2.1 Base vectorielle 31
2.2 Repère 32
2.3 Dérivée ordinaire d'un vecteur 36
2.4 Continuité et différentiabilité 36
2.5 Dérivée partielle d'un vecteur 37
2.6 Formules de dérivation des vecteurs 38
2.7 Base et repère naturels 38
2.8 Opérations sur les composantes 43
2.9 Propriétés des lois de composition vectorielles 43
2.10 Composantes d'un vecteur 45

Chapitre 4. Matrices 51
1 Système d'équations linéaires 51
2 Addition matricielle 52
2.1 Propriétés de l'addition matricielle 54

3 Multiplication matricielle 54
3.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire 54
3.2 Multiplication de deux matrices 55
4 Matrice colonne et matrice ligne 57
5 Matrice transposée 57
5.1 Propriétés de la transposition matricielle 58
6 Notation indicielle des matrices 58
7 Matrice identité 60
8 Inverse d'une matrice carrée 60
9 Déterminant d'une matrice carrée 61

Chapitre 5. Transformation de coordonnées 65
1 Matrice jacobienne et jacobien 65
2 Matrice changement de base 69
3 Matrice de passage 72
4 Changement de base naturelle 73
5 Changement de repère 75
6 Transformation des composantes d'un vecteur 76
6.1 Transformation des composantes contravariantes 76
6.2 Transformation des composantes covariantes 81

Chapitre 6. Formes quadratiques 87
1 Définitions 87
2 Matrice symétrique associée à une forme quadratique 90
3 Réduction de Gauss 92
4 Loi d'inertie de Sylvester 93

Chapitre 7. Applications linéaires 95
1 Définition d'une application linéaire 95
2 Transformations actives et passives 98
3 Isométrie 100
4 Principales transformations linéaires 101
4.1 Rotation 101
4.2 Inversion 103
4.3 Changement d'échelle 103
4.4 Réflexion ou symétrie orthogonale 103
4.5 Transvection 104
5 Transformation affine 104
6 Application bilinéaire 105
7 Application multilinéaire 106

Chapitre 8. Espaces euclidiens 107
1 Histoire de la géométrie euclidienne 107
2 Métrique de l'espace euclidien 109
2.1 Coordonnées rectangulaires ou cartésiennes normales 109
2.2 Coordonnées cartésiennes 111
2.3 Coordonnées curvilignes 112
2.4 Coordonnées orthogonales 112
2.5 Coordonnées obliques 112
2.6 Coordonnées polaires 112
2.7 Coordonnées cylindriques 113

2.8 Coordonnées sphériques 114
3 Longueur d'une courbe 115
4 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires 116
5 Norme 119
5.1 Norme euclidienne 119
5.2 Définition d'une norme 119
5.3 Pseudo-norme 121
5.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz 122
6 Produit scalaire 123
6.1 Représentation géométrique 123
6.2 Représentation algébrique du produit scalaire 125
7 Produit scalaire et norme 127
8 Expression analytique du produit scalaire 127
9 Composantes covariantes 128
10 Covecteurs 129

Chapitre 9. Mécanique classique 131
1 Notions intuitives et définitions 131
1.1 Temps 132
1.2 Espace 132
1.3 Corps 132
1.4 Force 132
1.5 Vitesse 133
1.6 Accélération 133
1.7 Champ gravitationnel 133
2 Cinématique 133
2.1 Vecteurs vitesse et accélération 133
2.2 Référentiels 134
2.3 Référentiels galiléens 135
2.4 Principe de relativité 136
2.5 Principe d'équivalence 137
2.6 Référentiels inertiels 138
2.7 Principe de Mach 140
2.8 Forces de marée 141
3 Mouvement rectiligne 142
3.1 Inertie du mouvement rectiligne 142
3.2 Masse inerte et quantité de mouvement 144
3.3 Moment de masse 151
3.4 Modèle de force 152
3.5 Relation fondamentale de la dynamique 152
3.6 Masse grave et force de gravitation 156
3.7 Énergie 161
4 Mouvement de rotation 169
4.1 Inertie en rotation 170
4.2 Moment cinétique 171
4.3 Moment de force 174
5 Un seul axiome pour la mécanique 176
6 Loi de conservation 177
6.1 Opérateur divergence 177

6.2 Théorème de Gauss 179
6.3 Hypothèse d'un milieu continu 181
7 Opérateur nabla 184

Chapitre 10. Gravitation newtonienne 187
1 Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire 187
2 Champ gravitationnel créé par une sphére homogène 190
3 Champ gravitationnel créé par une boule homogène 192
4 Équations de Poisson et de Laplace 192
4.1 Loi de Gauss pour la gravitation 193

Chapitre 11. Espaces non euclidiens 195
1 La sphère 195
2 Métrique d'une surface 197
3 Longueur d'une courbe 199
4 Vecteur tangent à une courbe 199

Chapitre 12. Tenseur métrique 201
1 Définition 201
2 Tenseur métrique et composantes 204
3 Les différentes notations du produit scalaire 205
4 Notation matricielle des covecteurs 207
5 Tenseur métrique dual 208
6 Différentielle du déterminant du tenseur métrique 210
7 Tenseur métrique et norme 211
8 Tenseur métrique et bases 211
8.1 Base orthonormée 211
8.2 Base orthogonale non normée 213
8.3 Base oblique normée 214

Chapitre 13. Relativité restreinte 217
1 Référentiels et principe de relativité 218
2 Transformation de Galilée des coordonnées 220
3 Quadridistance spatio-temporelle - Intervalle d'univers 222
4 Vitesse de la lumière et vitesse limite 225
5 Invariants relativistes - Sphère de lumière 226
6 Convention de genre temps 227
7 Espace homogène et isotrope, temps homogène 228
8 Loi de composition interne 228
9 Intervalle infinitésimal d'univers 229
10 Métrique de Minkowski 230
11 Géodésique de l'espace-temps de Minkowski 233
12 Transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées 235
12.1 Transformation spéciale de Lorentz 235
12.2 Symétrie de la transformation spéciale de Lorentz 237
12.3 Écriture matricielle de la transformation spéciale de Lorentz 237
12.4 Transformation spéciale de Lorentz inverse 238
12.5 Linéarité de la transformation spéciale de Lorentz 238
12.6 Système d'unités géométriques 239
12.7 Transformation spéciale de Lorentz en notation indicielle 239
12.8 Transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque 240

13 Temps propre - Durée propre 241
14 Jumeaux de Langevin 245
15 Longueur propre 246
16 Longueur d'une courbe en relativité restreinte 247
17 Vecteur tangent à une courbe 248
18 Longueur d'une courbe 248
19 Courbe régulière 250
20 Diagramme d'espace-temps en cinématique classique 251
20.1 Diagramme spatial 251
20.2 Diagramme spatial et temporel 252
21 Diagramme d'espace-temps de Minkowski 254
21.1 Approximation de la transformation spéciale de Lorentz 256
21.2 Hyper-cône de lumière 257
21.3 Hyperboles invariantes 257
21.4 Causalité 261
22 Diagramme d'espace-temps de Poincaré 262
23 Cinématique relativiste 266
23.1 Changement de référentiel 266
23.2 Quadrivecteurs 267
23.3 Trivecteur position relativiste 268
23.4 Quadrivecteur position 268
23.5 Quadriproduit scalaire 273
23.6 Trivecteur vélocité relativiste 274
23.7 Trivecteur vitesse propre relativiste 278
23.8 Quadrivecteur vitesse 281
23.9 Trivecteur-accélération relativiste 284
23.10 Trivecteur-accélération propre relativiste 288
23.11 Quadrivecteur accélération 290
23.12 Quadrivecteur d'onde 297
23.13 Quadrivecteur densité numérique-flux 305
24 Dynamique relativiste 307
24.1 Masse inerte 307
24.2 Quadrivecteur impulsion 307
24.3 Énergie relativiste 308
24.4 Quadrivecteur force 314
25 Quadri-opérateur nabla 316
26 Quadrigradient 317
26.1 Quadrinorme du quadrigradient 318
27 Équation de conservation 318

Chapitre 14. Espaces riemanniens 321
1 Les différents espaces 321
2 Propriétés du tenseur métrique 322

Chapitre 15. Formes linéaires 325
1 Formes et formes linéaires 325
2 Expression analytique d'une forme linéaire 330
3 Espace vectoriel dual d'un espace vectoriel 331
4 Base duale d'une base 332
5 Base réciproque 333

6 Indépendance linéaire des vecteurs réciproques 335
7 Composantes contravariantes dans la base réciproque 338
8 Composantes covariantes dans la base réciproque 339
9 Transformation des composantes en bases réciproques 340
9.1 Transformation des composantes contravariantes 340
9.2 Transformation des composantes covariantes 341
9.3 Transformation des vecteurs de base de la base réciproque 341

Chapitre 16. Formes bilinéaires 343
1 Définition d'une forme bilinéaire 343
2 Expression analytique d'une forme bilinéaire 345
2.1 Expression analytique d'une forme bilinéaire symétrique 345
2.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire antisymétrique 345
3 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique 346
4 Expression analytique d'une forme quadratique 347
5 Matrices et formes bilinéaires 347

Chapitre 17. Produit de Kronecker 351
1 Propriétés du produit de Kronecker 351
2 Formes bilinéaires 354

Chapitre 18. Espaces vectoriels pré-euclidiens 355
1 Définitions 355
2 Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien 356
3 Angle entre deux vecteurs 359
3.1 Espace vectoriel euclidien 360
3.2 Espace vectoriel pseudo-euclidien 364

Chapitre 19. Espaces ponctuels 365
1 Définitions 365
2 Repère et coordonnées d'un point 366
3 Distance 366
4 Dérivée et différentielle d'un vecteur et d'un point 369

Chapitre 20. Gradient 373
1 Différentielle d'un champ de scalaires 373
2 Définition du gradient d'un champ de scalaires 374
3 Représentation du gradient 381
4 Base réciproque de la base naturelle 382

Chapitre 21. Algèbre tensorielle 385
1 Introduction 385
2 Composantes deux fois contravariantes 388
3 Produit tensoriel 390
3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs 390
3.2 Expression analytique du produit tensoriel 391
3.3 Éléments d'un espace produit tensoriel 392
3.4 Produit tensoriel de deux espaces identiques 393
3.5 Non commutativité du produit tensoriel 394
3.6 Associativité du produit tensoriel 394
3.7 Produit tensoriel de plusieurs espaces 395

4 Produit scalaire 396
4.1 Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base 396
4.2 Composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux 397
4.3 Produit scalaire de deux tenseurs contravariants d'ordre deux 398
5 Base 398
5.1 Base duale d'un espace produit tensoriel 398
5.2 Composantes mixtes 398
5.3 Changement de base 400
6 Transformation des composantes d'un tenseur 401
6.1 Transformation des composantes contravariantes 401
6.2 Transformation des composantes covariantes 403
6.3 Transformation des composantes mixtes 406
7 Définition d'un tenseur 409
8 Le tenseur métrique 412
9 Symétrie et antisymétrie des tenseurs 414
9.1 Tenseurs deux fois contravariant ou deux fois covariant 414
9.2 Symétrie des tenseurs mixtes 414
9.3 Décomposition d'un tenseur 415
10 Opérations sur les tenseurs 416
10.1 Propriétés des lois de composition tensorielles 416
10.2 Combinaison linéaire de tenseurs 417
10.3 Classification des tenseurs 418
10.4 Multiplication tensorielle 418
10.5 Contraction des composantes 418
10.6 Multiplication contractée 420
10.7 Produit complètement contracté 422
11 Équations tensorielles 423
11.1 Changement de système de coordonnées 423
11.2 Règles sur les indices 424

Chapitre 22. Espace euclidien en coordonnées curvilignes 425
1 Élément linéaire de l'espace euclidien 425
2 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes 428
3 Volume élémentaire de l'espace euclidien 434
4 Les symboles de Christoffel 436
4.1 Le problème fondamental de l'analyse tensorielle 437
4.2 Relations entre symboles de Christoffel de 1re et 2^{e} espèce 439
4.3 Symétrie des symboles de Christoffel par rapport aux indices 440
4.4 Symboles de Christoffel en fonction du tenseur métrique 441
4.5 Symboles de Christoffel de 2^{e} espèce contractés 442
4.6 Symboles de Christoffel en coordonnées cartésiennes 443
4.7 Symboles de Christoffel en coordonnées orthogonales 443
4.8 Formules de Christoffel 446
5 Transport parallèle en espace euclidien 446
6 Dérivée absolue - Dérivée covariante 448
6.1 Différentielle absolue d'un vecteur 448
6.2 Dérivée absolue d'un champ de vecteurs par rapport à son paramètre 450
6.3 Dérivée absolue d'un champ de scalaire par rapport à son paramètre 451
6.4 Dérivée covariante d'un vecteur 451

6.5 Vecteur accélération d'un point mobile 454
6.6 Équations de Lagrange 455
7 Différentielle absolue d'un tenseur 456
8 Dérivée covariante d'un tenseur 458
9 Théorème et identités de Ricci 458
10 Opérateurs différentiels 459
10.1 Gradient d'un champ de scalaires 459
10.2 Divergence d'un champ de vecteurs 459
10.3 Divergence d'un champ de tenseurs 460
10.4 Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs 461
10.5 Laplacien d'un champ de scalaires 462
11 Dérivée covariante seconde d'un vecteur 463
12 Règles de dérivation des tenseurs 464
12.1 Dérivée covariante 464
12.2 Différentielle absolue 464

Chapitre 23. Géométrie des variétés riemanniennes 467
1 Métrique euclidienne tangente en un point 468
1.1 Espace pré-euclidien tangent à un espace riemannien en un point 468
1.2 Caractère intrinsèque 469
1.3 Représentation du premier ordre 470
1.4 Propriétés déduites des métriques euclidiennes tangentes 471
1.5 Représentation du second ordre 473
1.6 Transport parallèle en espace courbe 476
1.7 Équipollence 477
2 Trajectoires dans un espace riemannien 477
2.1 Vecteur accélération dans un espace riemannien 477
2.2 Principe de Mach 478
2.3 Masse inerte et masse grave 479
2.4 Forces de marée 480
2.5 Géodésiques d'un espace riemannien 482
3 Métrique euclidienne de raccordement 487
3.1 Développement d'une courbe de $\mathcal{R}_n$ sur l'espace ponctuel euclidien 487
3.2 Métrique euclidienne de raccordement le long d'une courbe 488
3.3 Application géométrique à la métrique euclidienne de raccordement 491
4 Tenseur de courbure d'un espace riemannien 491
4.1 Quasi-parallélogramme 492
4.2 Développement du quasi-parallélogramme 493
4.3 Tenseur rotation 495
4.4 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2^{de} espèce 495
4.5 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1^{re} espèce 497
4.6 Système de coordonnées localement géodésiques 498
4.7 Propriétés du tenseur de courbure 500
4.8 Dérivées covariantes secondes d'un vecteur 507
4.9 Tenseur de courbure de Ricci 507
4.10 Courbure riemannienne scalaire 509
4.11 Secondes identités de Bianchi 510
4.12 Tenseur d'Einstein 511

Chapitre 24. Dynamique classique 513

1 Applications de la géométrie riemannienne 513
2 Systèmes holonomes à liaisons scléronomes 514
2.1 Cinématique 514
2.2 Les équations de la dynamique lagrangienne 516
2.3 Absence de forces extérieures 517
2.4 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle 518
2.5 Recherche d'une géodésique 519
3 Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes 521
3.1 Les équations de la dynamique 523
3.2 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle généralisée 524
4 Dynamique classique des milieux continus 525
4.1 Milieux continus 525
4.2 Dérivée particulaire 526
4.3 Tenseur des contraintes 526
4.4 Équations de la dynamique des milieux continus 530
4.5 Écriture des équations en fonction de l'impulsion 531
4.6 Forme générale des équations de la dynamique des milieux continus 532
4.7 Écriture des équations générales en fonction de l'impulsion 532

Chapitre 25. Compléments de relativité restreinte 533
1 Quadritenseurs 533
1.1 Poussière 533
1.2 Densité d'énergie 534
1.3 Quadritenseur énergie-impulsion 534
1.4 Produit extérieur 535
1.5 Quadritenseur moment cinétique 536
1.6 Transformation des composantes d'un quadritenseur 537
2 Principe d'inertie 541
3 Dynamique relativiste des milieux continus 542
4 Forme tensorielle des équations du mouvement 544
5 Principe de moindre action en relativité restreinte 547
5.1 Trajectoire d'un système libre 548
5.2 Impulsion relativiste 550
5.3 Énergie relativiste 550
5.4 Quadritenseur moment cinétique 550
5.5 Équation de Hamilton-Jacobi relativiste pour un mobile libre 552

Chapitre 26. Gravitation relativiste 555
1 Métrique de la relativité générale 555
2 Champ gravitationnel faible 556
3 Écoulement du temps dans un champ gravitationnel 560
4 Décalage gravitationnel vers le rouge 562
5 Métrique d'un champ gravitationnel 564
6 Lien potentiel gravitationnel et quadritenseur énergie-impulsion 567
7 Trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel 567
8 Les équations du champ gravitationnel 569
8.1 Cas intérieur 569
8.2 Cas extérieur 571
9 Principe de moindre action en relativité générale 572
9.1 Cas extérieur 572

9.2 Lagrangien du champ gravitationnel 575
9.3 Constante cosmologique 577
9.4 Cas intérieur 578
10 Champ gravitationnel à symétrie sphérique 579
10.1 La métrique de Schwarzschild 579
10.2 Le tenseur métrique de Schwarzschild 580
10.3 Le tenseur métrique dual de Schwarzschild 580
10.4 Symboles de Christoffel en métrique de Schwarzschild 581
10.5 Symboles de Christoffel contractés en métrique de Schwarzschild 582
10.6 Tenseur de Ricci pour la métrique de Schwarzschild 582
10.7 Équation de la trajectoire d'un corps de faible masse 588
10.8 Avance du périhélie de Mercure 592
11 Déviation des rayons lumineux 594

Chapitre 27. Annexes 599
1 Implication et causalité 599
1.1 Implication 599
1.2 Relation de causalité 600
1.3 Équivalence 600
2 Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 600
3 Bases non holonomiques 602

Index 603

Chapitre 1

LA NOTION D'ESPACE

Sommaire

1	Systèmes de coordonnées	1
2	Variétés	7
3	Géodésiques d'un espace	9
4	Plongement d'un espace	10
5	Courbure	10
6	Géométrie dans l'espace	11
7	Distance	12

Disons de suite que l'on ne peut définir tous les termes, certaines notions *primitives* sont sans définition. Par exemple certaines définitions sont circulaires, elles dépendent d'autres définitions qui dépendent elles-mêmes de ce que l'on cherche à définir. La mise en place des premières notions est souvent un procédé itératif, on doit en parler avant de les avoir définies.

On fonctionne par analogie avec notre perception de l'environnement, principalement la feuille de papier et la surface de la Terre.

1 Systèmes de coordonnées

Les systèmes de coordonnées ont probablement pour origine les premières cartes de navigation indiquant les parallèles et les méridiens.

Définition 1.1: Coordonnées

Les n valeurs ordonnées $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ aussi notées (p_i), permettant de repérer un point P sont appelées les coordonnées de ce point.

Réciproquement, un point P est l'ensemble des n valeurs ordonnées $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Avant de définir les systèmes de coordonnées nous devons définir les espaces topologiques.

Définition 1.2: Espace topologique

Un espace topologique est un ensemble de points dans lequel le voisinage (arbitraiement petit) de chaque point est défini, grâce auquel on définit les concepts de continuité, de limite et de connexité. C'est donc un espace dont les éléments sont des points, muni d'une structure appelée topologie, qui définit la notion de voisinage d'un point.

C'est l'espace le plus général dans lequel on puisse faire des mathématiques.

Définition 1.3: Système de coordonnées - repère

Un ensemble de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est un système de coordonnées (ou repère) d'un espace topologique à n dimensions, si à chaque ensemble de valeurs prises par ces n variables correspond un point de cet espace.

Remarque 1.1

Selon cette définition, à un point de l'espace topologique peut correspondre plusieurs ensemble de valeurs d'un même système de coordonnées.

Notation 1.1

Un système de coordonnées est noté $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou (x_i).

Définition 1.4: Ligne de coordonnée

Dans un espace topologique à n dimensions de système de coordonnées (x_i), une ligne de coordonnée, ou courbe-coordonnée, est le lieu des points pour lesquels seule la coordonnée x_j est différente d'un point à l'autre. Soient p un paramètre et c_i des constantes :

$$\begin{cases} x_i = c_i & \forall i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n \\ x_j = x_j(p) & i = j \end{cases}$$

Remarque 1.2

En un point d'un espace topologique de dimension n se croisent n lignes de coordonnée.

Afin de poursuivre nous avons besoin des définitions suivantes. Des êtres, aussi bien physiques (caillou, table, humain...) qu'objet de notre pensée (nombre, fonction...) sont bien définis si nous possédons un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets sont soit identiques soit distincts. La notion d'ensemble correspond aux notions courantes d'ensemble, de collection, de groupement, de classe, etc. d'objets de nature quelconque, tels ceux considérés précédemment. Ces objets sont les éléments, membres, individus... de l'ensemble, de la collection, du groupement... Nous dirons qu'un ensemble est constitué d'éléments. Un ensemble est bien défini lorsque l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet, qu'il appartient ou non à l'ensemble.

Définition 1.5: Application

Une application ou fonction est une relation qui à tout élément d'un ensemble de départ associe ou fait correspondre un unique élément d'un ensemble d'arrivé.

Définition 1.6: Bijection

Une application bijective, bijection, correspondance biunivoque, ou encore correspondance un à un, est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée B possède exactement un antécédent dans l'ensemble de départ A. Autrement dit, à tout élément de l'ensemble A, correspond un élément et un seul de l'ensemble B, et inversement, à tout élément de B, correspond un élément et un seul de A.

Remarque 1.3

D'après la déf. 1.5 p. 2 d'une application, comme il s'agit d'une application tous les éléments de l'ensemble de départ ont une image par l'application bijective.

Définition 1.7: Équipotence

Deux ensembles en bijection sont dits équipotents. L'ensemble A est équipotent à l'ensemble B s'il existe une bijection de A dans B, et l'on écrit

$$A \leftrightarrow B$$

La relation binaire ainsi définie s'appelle *équipotence*.

Définition 1.8: Système de coordonnées non dégénéré

Un système de coordonnées est non dégénéré s'il assigne un unique ensemble de coordonnées à chaque point, et réciproquement un point unique à chaque ensemble de coordonnées, de sorte qu'il existe une bijection entre les deux.

Deux droites sécantes définissent un plan et peuvent servir de système de coordonnées pour ce plan. De même, trois droites non coplanaires deux à deux, sécantes en un point, définissent l'espace à trois dimensions et peuvent servir de système de coordonnées pour ce volume.

Définition 1.9: Système de coordonnées cartésiennes

Un système de coordonnées dont les axes de coordonnées sont des droites toutes sécantes en un même point est appelé système de coordonnées rectilignes, ou système de coordonnées affines, ou système de coordonnées cartésiennes.

Le système de coordonnées cartésiennes est non dégénéré.

Exemple 1.1: Système de coordonnées cartésiennes obliques du plan

Le point M a pour coordonnées (x^1_M, x^2_M) :

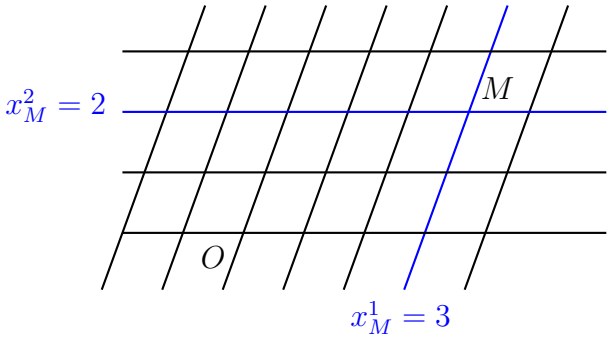


FIG. 1.1 – Lignes de coordonnées cartésiennes obliques

Remarque 1.4

Pour des raisons historiques de traduction des travaux du physicien et philosophe français René Descartes, partout ailleurs qu'en France le système de coordonnées cartésiennes désigne un système de coordonnées rectilignes et orthogonales, autrement dit rectangulaires. En France, le système de coordonnées cartésiennes désigne un système de coordonnées rectilignes non nécessairement orthogonales.

Définition 1.10: Système de coordonnées curviligne

Lorsque les axes de coordonnées ne sont pas tous des droites mais l'un au moins est une courbe, le système est appelé système de coordonnées curviligne.

Définition 1.11: Système de coordonnées dégénéré

Si la correspondance n'est pas biunivoque entre chaque point de l'espace topologique et les valeurs des coordonnées, le système de coordonnées est dit dégénéré.

Exemple 1.2

Le système de coordonnés polaires est un système de coordonnées curvilignes dégénéré au point origine, l'angle pouvant prendre n'importe quelle valeur en ce point. La coordonnée radiale ρ est appelé rayon. La coordonnée angulaire θ est appelée angle ou azimut.

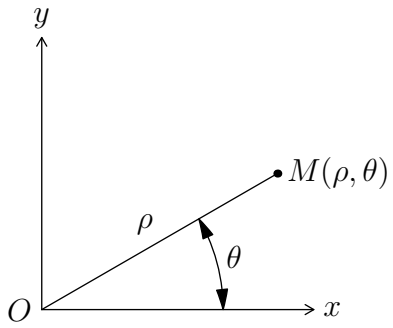


FIG. 1.2 – Système de coordonnées polaires dans le plan

Les lignes de coordonnée radiale constante, $\rho = c^{ste}$, sont des cercles centrés sur l'origine. Les lignes de coordonnée angulaire constante, $\theta = c^{ste}$, sont des demi-droites issues de l'origine. Le système de coordonnées polaires est orthogonal car les cercles coupent leurs rayons à angle droit.

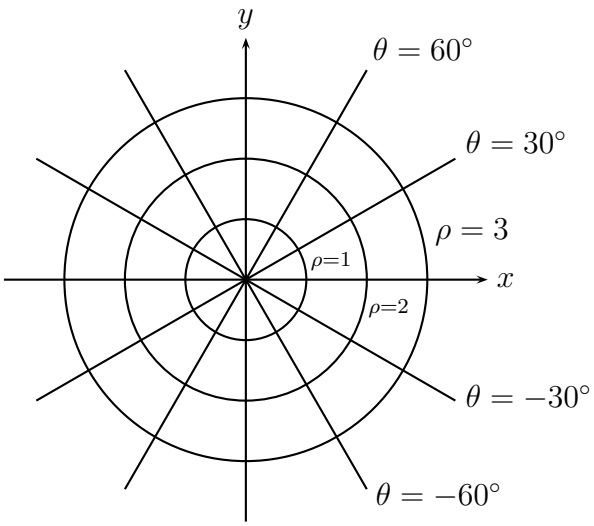


FIG. 1.3 – Lignes de coordonnées polaires

Définition 1.12: Système de coordonnées rectangulaire

Lorsque les droites sont toutes perpendiculaires deux à deux, le système est appelé système de coordonnées rectangulaire ou système de coordonnées cartésiennes normales. Sinon il est appelé système de coordonnées cartésiennes obliques.

Définition 1.13: Système de coordonnées direct en deux ou trois dimensions

Un système de coordonnées est direct lorsque les axes sont orientés de manière à respecter la règle de la main droite :

- le pouce pointe dans la direction de l'axe x
- l'index pointe dans la direction de l'axe y
- le majeur pointe dans la direction de l'axe z

Remarques 1.1

- Il existe des espaces non orientables, par exemple en deux dimensions le ruban de Möbius et en trois dimensions la bouteille de Klein
- En relativité, les orientations de l'espace et du temps sont distinctes, il n'y a pas d'orientation spatio-temporelle globale

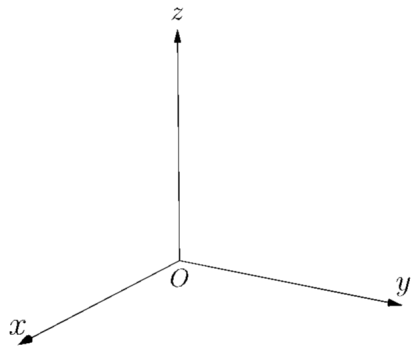


FIG. 1.4 – Système de coordonnées rectangulaires direct de l'espace en 3 dimensions

Remarque 1.5

Si un espace admet un système de coordonnées cartésiennes obliques alors il admet aussi un système de coordonnées rectangulaires, et réciproquement, si un espace admet un système de coordonnées rectangulaire alors il admet aussi un système de coordonnées cartésiennes obliques.

Les coordonnées cartésiennes d'un point sont obtenues par projection de ce point selon des droites parallèles aux droites de coordonnées. De ce fait, le système de coordonnées cartésiennes en deux dimensions ne peut exister que dans le plan. Réciproquement, tout plan admet une infinité de systèmes de coordonnées cartésiennes. Nous avons l'équivalence :

$$\text{plan} \Leftrightarrow \text{système de deux coordonnées cartésiennes}$$

En généralisant à un espace de plus de deux dimensions :

Définition 1.14: Espace euclidien

Un espace est euclidien ssi [a] on peut y définir un système de coordonnées cartésiennes.

a. ssi est l'abréviation de « si, et seulement si » (cf. annexe 1 p. 599).

Remarque 1.6

Un espace euclidien est un espace plat. Nous verrons que la réciproque est fausse avec l'espace-temps de la relativité restreinte qui est plat et pseudo-euclidien.

Le plan admet aussi une infinité de systèmes de coordonnées curvilignes. Un système de coordonnées a donc deux caractéristiques :

- rectiligne ou curviligne
- orthogonal ou non orthogonal

S'il est rectiligne on peut le choisir rectangulaire ou non, mais son existence implique toujours que l'espace soit euclidien.

Définition 1.15: Dimension d'un espace topologique

La dimension d'un espace topologique est le nombre minimal de coordonnées nécessaires pour spécifier un point de cet espace.

Le point et la droite sont des objets mathématiques primitifs, sans définition. On les imagine *plongés* dans le plan, alors que celui-ci n'est pas défini et qu'il n'est jamais nécessaire de plonger

un espace dans un autre pour le définir. Pour repérer un point sur une droite dont on a fixé l'origine, nous n'avons besoin que d'une seule coordonnée. On peut en utiliser deux si on la plonge dans un plan, mais une seule est nécessaire. Nous pouvons dire que c'est un espace topologique de dimension 1, constitué d'une succession infinie de points, sans extrémités et sans courbure. Néanmoins, la courbure n'étant pas définie, cette définition ne fait que repousser le problème à une autre définition.

Une courbe est un espace topologique de dimension 1, constitué d'une succession infinie de points, sans extrémités. Elle généralise la notion de droite, celle-ci étant une courbe particulière sans courbure. Pour repérer un point sur une courbe, seule est nécessaire la distance parcourue le long de la courbe à partir d'un point de la courbe pris pour origine, appelée *abscisse curviligne*.

Un plan est un espace topologique de dimension 2, d'extension infinie et sans courbure. C'est un objet mathématique primitif. Le plan est l'analogue en deux dimensions de la droite. Une surface est un espace topologique de dimension 2. Elle généralise le plan, celui-ci étant une surface particulière sans courbure.

2 Variétés

Définition 2.1: Variété

Une variété ou variété topologique, de dimension n, est un espace topologique *localement* (c.-à-d. au voisinage immédiat de chacun de ses points) équivalent à un espace euclidien de même dimension n. Nous dirons que la variété est homéomorphe ou topologiquement isomorphe à un espace euclidien de même dimension qu'elle.

Tout système de n coordonnées indépendantes $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ occupant un certain domaine constitue une variété à n dimensions. En général il n'est pas possible de couvrir une variété avec un seul système de coordonnées qui ne soit pas dégénéré (déf. 1.11 p. 4). Lorsque l'on ne peut pas lever la dégénérescence par changement de coordonnées on couvre la variété avec des *cartes*, en référence aux cartes de géographie, chaque carte étant un système de coordonnées couvrant une région de la variété. Ces cartes sont des applications d'une région de la variété dans $\mathbb{R}_n$. Les cartes ϕ et $\tilde{\phi}$ d'une variété sont compatibles si à l'endroit où elles se recouvrent, les lois de composition $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ et $\tilde{\phi} \circ \phi^{-1}$ qui sont des fonctions de $\mathbb{R}_n$ dans $\mathbb{R}_n$, sont différentiables. L'ensemble des cartes compatibles nécessaires pour couvrir toute la variété forme un *atlas*.

Définition 2.2: Variété différentielle

Une variété différentielle (ou différentiable) est une variété sur laquelle on peut faire du calcul différentiel.

La plupart des variétés en physique sont des variétés différentielles, ce qui signifie qu'elles sont continues et différentiable dans le sens suivant :

- une variété est continue s'il existe au voisinage de tout point d'autres points dont les coordonnées ne diffèrent qu'infinitésimalement. Nous dirons qu'elles sont continuement paramétrables, les paramètres étant les coordonnées de la variété

- une variété est différentiable s'il est possible de définir un champ scalaire [1] en tout point de la variété qui puisse être partout différentié

L'association des points et des valeurs des paramètres peut être vu comme une application allant des points de la variété vers les points d'un espace euclidien de même dimension. Localement, une variété ressemble donc à un espace euclidien.

Soient P et Q deux points d'une variété, infiniment proches, de coordonnées respectives x_i et $x_i + \mathrm{d}x_i$. La distance infinitésimale entre P et Q détermine la géométrie locale de la variété au point P. Dans le cas le plus général, le carré de la distance est une fonction des coordonnées et de leurs différentielles :

$$\mathrm{d}s^2 = f\left(x_i, \mathrm{d}x_i\right)$$

La distance s'exprime dans un système de coordonnées mais c'est un *invariant* (par changement de coordonnées), sa valeur est la même dans tous les systèmes de coordonnées.

Exemple 2.1: Géométrie de Finsler

La géométrie de Finsler est une variété différentielle de dimension 2, dont le carré de la distance exprimée en coordonnées ξ et ζ a pour expression :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}\xi^4, d\zeta^4\right)^{1/2}$$

Exemple 2.2: Mécanique classique

L'espace euclidien de la mécanique classique est une variété différentielle à trois dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées d'espace.

Exemple 2.3: Espace-temps de la relativité restreinte

L'espace-temps de la relativité restreinte est une variété différentielle à quatre dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées d'espace et celle de temps.

Exemple 2.4: Espace des configurations d'un système dynamique

L'espace des configurations d'un système dynamique à n degrés de liberté est une variété différentielle à n dimensions. À chaque point de cet espace correspond une configuration du système.

Exemple 2.5: Espace des phases

L'espace des phases d'un mobile en mécanique classique est un exemple abstrait de variété différentielle à six dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées de position et les trois quantités de mouvement.

Exemple 2.6: Rotations d'un système de coordonnées rectangulaires

Un autre exemple abstrait est l'ensemble des rotations d'un système de coordonnées rectangulaire dans un espace à trois dimensions. Les paramètres sont les trois angles d'Euler et l'ensemble des rotations est une variété à trois dimensions.

1. En mathématique, un scalaire est un nombre, habituellement un réel ou un complexe. Ils sont définis au § 1.4 p. 27.

3 Géodésiques d'un espace

Les *géodésiques* sont la généralisation des droites aux espaces courbes de dimension quelconque. Ce sont les courbes de courbure minimale, elles possèdent la même courbure locale que l'espace lui-même. Sur un plan leur courbure est nulle, ce sont des droites. On réserve le terme « droite » aux espaces plats, sans courbure intrinsèque. Un arc de géodésique est aussi une géodésique. Les courbes qui minimisent la distance entre deux points, appelées *orthodromies*, sont des géodésiques mais la réciproque est fausse, toutes les géodésiques ne sont pas des orthodromies [2].

Définition 3.1: Géodésique

Une courbe entre deux points a et b d'un espace quelconque est une géodésique ssi sa longueur est extrémale, c.-à-d. minimale ou maximale [a] :

$$\delta \int_a^b \mathrm{d}s = 0$$

où δ est une variation infinitésimale d'ordre un, s est l'abscisse curviligne le long de la courbe et ds est une élément de longueur de la courbe.

a. Plus précisément, la définition mathématique dit que la longueur doit être stationnaire. Elle ne précise pas que la dérivée seconde doit être non nulle, elle peut donc être un point d'inflexion sans être minimale ou maximale.

Une courbe de longueur extrémale ne peut dépendre du système de coordonnées utilisé pour la définir. Les géodésiques sont donc indépendantes du système de coordonnées, et invariantes par changement de coordonnées.

Exemple 3.1

Un cercle de la sphère dont le plan passe par le centre de la sphère est appelé grand cercle. Si le plan ne passe pas par le centre de la sphère il est appelé petit cercle. Sur une sphère les grands cercles et les arcs de grands cercles sont des géodésiques. Prenons deux points sur un grand cercle. S'ils ne sont pas antipodaux ils définissent un petit arc et un grand arc de grand cercle, qui sont tous les deux des géodésiques, mais dont un seul est une orthodromie.

On peut se représenter une géodésique comme un ruban pas trop large collé au mieux (avec un minimum de pliures) sur la surface. Si l'on sait tracer des géodésiques et mesurer des angles (rapport de deux longueurs), une surface est plane ssi la somme des angles de tout triangle tracé à l'aide de géodésiques sur cette surface vaut π. On peut également utiliser la somme des angles d'un carré qui vaut 2π, ou l'aire de toute figure géométrique fermée, celle d'un disque de rayon r vaut πr^2, celle d'un carré de côté r vaut r^2, etc.

2. Certains auteurs définissent les géodésiques comme les courbes qui minimisent la distance entre deux points et ne font pas de distinction entre géodésique et orthodromie.

4 Plongement d'un espace

Bien qu'ayant une existence propre, les droites, les courbes, les plans et les surfaces sont habituellement représentés dans un espace plat de dimension supérieure appelé *espace hôte*. Les courbes sont représentées dans le plan ou dans l'espace (à trois dimensions), les plans et les surfaces dans l'espace. S'il aide à se faire une représentation mentale, ce plongement n'a aucune nécessité. Les espaces topologiques ont une existence propre sans plongement dans un espace de dimension supérieure, sans quoi ce dernier devrait à son tour être plongé dans un espace de dimension plus grande, et ainsi de suite.

5 Courbure

Il est important de distinguer la courbure intrinséque de la courbure extrinsèque. Le cylindre et le cône sont des espaces topologiques euclidiens, donc plats, ils peuvent être déroulés pour en faire un plan et ont même topologie que le plan. Ils ont une courbure extrinsèque mais n'ont pas de courbure intrinsèque (qui leur est propre). En restant à la surface d'un cylindre ou d'un cône rien ne permet de mettre en évidence une quelconque courbure locale. La somme des angles d'un triangle tracé sur un cylindre ou un cône vaut π. En revanche, la courbure globale apparait lorsque en avançant perpendiculairement à la génératrice du cylindre l'on revient sur nos pas. Dans les cas du cylindre et du cône la courbure globale est liée à leur seule courbure extrinsèque. Seule la courbure intrinsèque est utile en géométrie, la courbure extrinsèque est de moindre importance, elle est liée au plongement de la surface dans un espace de dimension supérieure. En physique, les espaces de courbure nulle sont dits plats. En mathématique ils sont dits pré-euclidiens, c.-à-d. euclidiens (physique non relativiste) ou pseudo-euclidien (relativité restreinte).

5.1 Courbure positive

La sphère est un espace topologique courbe, sa courbure intrinsèque fait que l'on ne peut la déplier sans déformations pour en faire un plan. Sa courbure constante positive est mise en évidence en traçant un *triangle sphérique*, triangle dont les côtés sont des arcs de grands cercles. La somme des angles de ces triangles est comprise, selon le rapport de leur dimension par rapport à celui de la sphère, entre π et 4π. De même, l'aire du triangle sphérique est supérieure à celle d'un triangle plat. Dans le cas de la sphère, la courbure globale est la courbure intrinsèque.

Plus le triangle tracé sur une sphère est petit, plus la somme de ses angles tend vers π et son aire tend vers celle d'un triangle plat. Au voisinage infinitésimal d'un point, c.-à-d. « localement », la surface de la sphère est assimilable au plan qui lui est tangent en ce point, autrement dit à l'espace euclidien tangent de même dimension.

5.2 Courbure négative

Le paraboloïde hyperbolique, ou selle de cheval, est une surface dont certaines sections planes sont des paraboles, et d'autres sections planes sont des hyperboles. Cette surface a aussi une courbure intrinsèque, négative et non constante, elle tend vers zéro à mesure que l'on s'éloigne du siège. A noter qu'une surface de coubure négative constante ne peut être réalisée dans l'espace ordinaire à trois dimensions. La somme des angles d'un *triangle hyperbolique*, triangle dont les côtés sont des géodésiques du paraboloïde hyperbolique, est inférieure à π, et l'aire du triangle hyperbolique est inférieure à celle d'un triangle plat.

6 Géométrie dans l'espace

On généralise le plan à un espace à trois dimensions, plat, sans courbure. On passe ainsi de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace. Cet espace n'a pas d'existence propre, il est purement mathématique. Il permet de construire toute la physique newtonienne, c'est le modèle le plus simple d'espace physique. Pour mesurer sa courbure nulle il ne s'agit plus de tracer un triangle, même si l'on peut toujours se placer dans un plan de cet espace. Un espace de dimension trois est plat ssi en tout point le volume d'une sphère de rayon quelconque r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$, le volume d'un cube de côté r vaut r^3, etc. On généralise à des espaces de dimension supérieure à trois grâce aux hypersphères, aux hypercubes... Ces espaces plats sont dits *euclidiens* (nous verrons que les espaces pseudo-euclidiens sont aussi des espaces plats). Trois droites non coplanaires sécantes en un point forment un système de coordonnées cartésiennes d'un espace à trois dimensions nécessairement plat, c.-à-d. euclidien ou pseudo-euclidien. En généralisant à un espace de dimension n, nous avons la double implication déjà vue au § 1 p. 1 pour le plan :

$$\text{espace euclidien} \Leftrightarrow \text{système de coordonnées cartésiennes (déf. 1.9 p. 3)}$$
$$\text{espace pseudo-euclidien} \Leftrightarrow \text{système de coordonnées pseudo-cartésiennes}$$

Tous les espaces euclidiens de même dimension sont isomorphes (équivalents). Il n'existe donc qu'un seul espace euclidien pour une dimension donnée. En coordonnées cartésiennes, un espace euclidien de dimension n est isomorphe au n-espace réel $\mathbb{R}_n$.

Définition 6.1: Hyperplans

Les hyperplans sont des espaces topologiques sans courbure, de dimension $n-1$ plongés dans un espace topologique de dimension n.

Définition 6.2: Hypersurfaces

Les hypersurfaces sont des espaces topologiques de dimension $n-1$ plongés dans un espace topologique de dimension n.

Définition 6.3: Trajectoire

La trajectoire d'un mobile est la courbe décrite par le centre d'inertie de ce mobile. Dans le cas général, nous avons trois lois horaires $x(t), y(t), z(t)$ de paramètre le temps t (des

équations paramétriques de paramètre t). Si l'on élimine le temps il reste une équation qui lie les coordonnées x, y, z, par exemple $z = z(x, y)$, qui est l'équation de la trajectoire décrite par le mobile dans l'espace.

Définition 6.4: Courbe paramétrique

Dans un espace topologique à n dimensions de système de coordonnées (x_i), une courbe paramétrique de paramètre p est l'ensemble des points tels que chaque coordonnée est une fonction de p :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \qquad x_i = x_i(p)$$

Remarque 6.1

L'équation donnée sous la forme explicite $y = f(x)$ est équivalente aux équations paramétriques $y = f(p),\ x = p$. En physique, pour la description d'une *trajectoire* le paramètre p est arbitraire. En revanche, pour la description d'un *mouvement* le paramètre est toujours le temps (temps propre ou temps coordonnée). Par exemple le mouvement plan de lois horaires $x = x(t),\ y = y(t)$.

Exemple 6.1: Courbe paramétrique en coordonnées sphériques

Courbe $\mathscr{C}$ de paramètre p en coordonnées sphériques sur une sphère de rayon a

$$\mathscr{C}(p) \quad : \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = p \\ \phi = \phi(p) \end{cases}$$

Définition 6.5: Hypersurface de coordonnée

Une hypersurface de coordonnée est l'ensemble des points dont une des coordonnées reste constante :

$$x_j = c^{ste}$$

Dans un espace topologique de dimension 2, les hypersurfaces de coordonnée sont simplement les lignes de coordonnée. Par exemple l'hypersurface de coordonnée $x_1 = c_1$ se confond avec la ligne de coordonnée x_2. Dans un espace topologique de dimension 3, les hypersurfaces de coordonnée sont les surfaces de coordonnée, elles se coupent deux à deux suivant les lignes de coordonnée.

7 Distance

En physique, les notions de distance et de direction, donc d'angle, sont nécessaires pour situer deux points l'un par rapport à l'autre.

Définition 7.1: Distance

On appelle distance sur un ensemble $\mathscr{E}$ non vide d'éléments (habituellement des points), toute application d telle que :

$$d \ : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- séparation : $\forall (a,b) \in \mathscr{E}^2 \quad d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- symétrie : $\forall (a,b) \in \mathscr{E}^2 \quad d(a,b) = d(b,a)$
- inégalité triangulaire : $\forall (a,b,c) \in \mathscr{E}^3 \quad d(a,c) + d(c,b) \geqslant d(a,b)$

Une distance est toujours non négative. En effet, si $a = b$ alors l'inégalité triangulaire et la symétrie donnent :

$$\begin{aligned} \forall (a,c) \in \mathscr{E}^2 \quad d(a,c) + d(c,a) &\geqslant 0 \\ 2d(a,c) &\geqslant 0 \\ d(a,c) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Définition 7.2: Espace métrique

On appelle espace métrique tout couple $(\mathscr{E}, d)$, où $\mathscr{E}$ est un ensemble non vide, et où d est une distance sur $\mathscr{E}$.

Nous dirons que $\mathscr{E}$ est l'ensemble sous-jacent à $(\mathscr{E}, d)$. Dans la pratique on confond souvent $\mathscr{E}$ et $(\mathscr{E}, d)$, et l'on parle de l'espace métrique $\mathscr{E}$. Ainsi l'espace métrique $\mathbb{R}$ n'est autre que $(\mathbb{R}, d)$, où d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x - y|$.

Exemple 7.1: Distance de Manhattan

Dans l'espace euclidien E_n, la distance de Manhattan entre les points $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est définie par :

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

Pour $n = 2$ c'est la distance parcourue par un taxi dans le réseau orthogonal des rues de Manhattan.

Définition 7.3: Distance euclidienne

Dans un système de coordonnées rectangulaire d'un espace euclidien E_n, soient les points $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Leur distance euclidienne s'écrit :

$$d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

Exemple 7.2: Distance en mécanique classique

Dans l'espace euclidien E_3 de la mécanique classique, la distance euclidienne entre les points $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est définie par :

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Définition 7.4: Pseudo-distance

On appelle pseudo-distance sur un ensemble $\mathscr{E}$ non vide d'éléments (habituellement des points), toute application d telle que :

$$d \ : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall a \in \mathscr{E}^2 \quad d(a,a) = 0$
- symétrie : $\forall (a,b) \in \mathscr{E}^2 \quad d(a,b) = d(b,a)$
- inégalité triangulaire : $\forall (a,b,c) \in \mathscr{E}^3 \quad d(a,c) + d(c,b) \geqslant d(a,b)$

Contrairement à la définition de la distance, on peut avoir $d(a,b) = 0$ avec $a \neq b$. Une pseudo-distance est toujours non négative. En effet, si $a = b$ alors l'inégalité triangulaire et la symétrie donnent :

$$\begin{aligned} \forall (a,c) \in \mathscr{E}^2 \quad d(a,c) + d(c,a) &\geqslant 0 \\ 2d(a,c) &\geqslant 0 \\ d(a,c) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Définition 7.5: Espace pseudo-métrique

Si d est une pseudo-distance sur un ensemble $\mathscr{E}$ nous dirons que le couple $(\mathscr{E}, d)$ constitue un espace pseudo-métrique.

Définition 7.6: Distance relativiste

La distance relativiste entre deux points $E(x^0, x^1, x^2, x^3)$ et $E'(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ de l'espace à quatre dimensions de la relativité restreinte est donnée par :

$$\begin{aligned} d(E,E')^2 &= \pm[(x^{0'} - x^0)^2 - (x^{1'} - x^1)^2 + (x^{2'} - x^2)^2 + (x^{3'} - x^3)^2] \\ \epsilon d(E,E')^2 &= (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \qquad (\epsilon = \pm 1) \end{aligned}$$

Ce n'est pas une pseudo-distance car le carré de la distance relativiste peut être négatif (ou positif ou nul). Les points de l'espace-temps de la relativité restreinte sont appelés *évènements*, la distance relativiste est appelée *intervalle*.

Chapitre 2

NOTATIONS

Sommaire

1 Notation indicielle 15
2 Identités en notation indicielle 17
3 Symbole de Kronecker 18
4 Symbole d'antisymétrie 19

1 Notation indicielle

Notation 1.1

En notation indicielle les coordonnées x, y, z, sont notées x_1, x_2, x_3 ou x^1, x^2, x^3.

Notation 1.2: Convention sur les indices latins et grecs

Nous prenons la convention que les indices latins $i, j, k, \ldots$ varient de 1 à 3 ou 4, ou parfois n, et que les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ varient de 0 à 3.

La notation 1.1 permet d'adopter une autre notation, appelée convention de sommation.

Notation 1.3: Convention de sommation sur les indices répétés

Toutes les fois que dans un terme figure le même indice en haut et en bas, nous devons sommer tous les termes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs qu'il peut prendre.

Exemple 1.1: Différentielle totale d'une fonction

La différentielle totale de la fonction $f(x, y, z)$ exprimée dans le système de coordonnées (x, y, z) s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

Sous forme indicielle :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x^3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\end{aligned}$$

Avec la convention de sommation, en considérant qu'un indice haut au dénominateur compte comme un indice bas :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

Notation 1.4

La dérivée partielle première par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable d'une fonction $f(x^j)$ est aussi notée

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \partial_i f$$

où $\equiv$ est le symbole d'équivalence. On la note également :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv f_{,i}$$

Pour la dérivée partielle seconde :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &\equiv \partial_{ij} f \\ &\equiv f_{,ij}\end{aligned}$$

Notation 1.5

Pour un système de coordonnées primé nous mettons le prime sur l'indice,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} &\equiv \partial_{i'} f \\ &\equiv f_{,i'}\end{aligned}$$

bien qu'il ne s'agisse pas de l'indice i' mais de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée x'. Cette notation permet au symbole $\partial_{i'}$ d'indiquer une dérivation partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de la base primée.

Exemple 1.2: Notation dans un système de coordonnées primé

La différentielle totale de la fonction $f(t', x', y', z')$ exprimée dans le référentiel (t', x', y', z'), s'écrit sous forme indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial t'}\,\mathrm{d}t' + \frac{\partial f}{\partial x'}\,\mathrm{d}x' + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\mathrm{d}y' + \frac{\partial f}{\partial z'}\,\mathrm{d}z' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^{0'}}\,\mathrm{d}x^{0'} + \frac{\partial f}{\partial x^{1'}}\,\mathrm{d}x^{1'} + \frac{\partial f}{\partial x^{2'}}\,\mathrm{d}x^{2'} + \frac{\partial f}{\partial x'}\,\mathrm{d}x^{3'} \\ &= \partial_{\mu'} f\,\mathrm{d}x^{\mu'} \\ &= f_{,\mu'}\mathrm{d}x^{\mu'} \end{aligned}$$

où l'indice grec μ varie de 0 à 3.

2 Identités en notation indicielle

Notation 2.1

En notation indicielle la matrice colonne $[u]$ est notée u^i, la matrice carrée $[a]$ est notée a_{ij}.

Remarque 2.1

Par abus de langage, on donne le nom de matrice aux composantes elles-mêmes.

$$\forall j = 1, 2, 3 \qquad a_{ij}u^j \overset{\text{def}}{=} a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + a_{i3}u^3$$

où le symbole $\overset{\text{def}}{=}$ signifie « par définition », ici par définition de la notation employée.

- lorsque la matrice $[a_{ij}]$ est non symétrique, $\forall i \neq j,\ a_{ij} \neq a_{ji}$, nous avons

  $$a_{ij}u^iv^j \equiv a_{ij}v^ju^i \qquad \text{et} \qquad a_{ij}u^iv^j \equiv a_{ji}u^jv^i$$

  Nous avons également les inégalités (pour $u^i \neq v^i$) :

  $$a_{ij}u^iv^j \neq a_{ij}u^jv^i \qquad \text{et} \qquad a_{ij}u^iv^j \neq a_{ji}u^iv^j \tag{2.1}$$

  Par exemple

  $$\forall i, j = 1, 2 \qquad \begin{cases} a_{ij}u^iv^j \overset{\text{def}}{=} a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^1v^2 + a_{21}u^2v^1 + a_{22}u^2v^2 \\ a_{ij}u^jv^i \overset{\text{def}}{=} a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^2v^1 + a_{21}u^1v^2 + a_{22}u^2v^2 \end{cases}$$

  À partir des inégalités (2.1) on déduit :

  $$(a_{ij} + a_{ji})u^iv^j \neq 2a_{ij}u^iv^j$$

- en posant $z^j = u^j + v^j$:

  $$\begin{aligned} a_{ij}(u^j + v^j) &\equiv a_{ij}u^j + a_{ij}v^j \\ a_{ij}(z^j) &= a_{ij}u^j + a_{ij}v^j \end{aligned}$$

- grâce à $u^i u^j \equiv u^j u^i$:

$$\begin{cases} (a_{ij} + a_{ji}) u^i u^j \equiv 2 a_{ij} u^i u^j \\ (a_{ij} - a_{ji}) u^i u^j \equiv 0 \end{cases}$$

3 Symbole de Kronecker

Définition 3.1: Symbole de Kronecker δ_{ij}

$$\delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple 3.1

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= 0 \qquad \text{car } 1 \neq 2 \\ \delta_{33} &= 1 \qquad \text{car } 3 = 3 \end{aligned}$$

Il permet d'utiliser la convention de sommation sur les indices répétés 1.3 p. 15, en fonction du placement des indices : $\delta_{ij}, \delta^j_i, \delta^i_j, \delta^{ij}$.

Exemple 3.2: Symbole de Kronecker et convention de sommation

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s)^2 &= \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2 \\ &= \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \qquad i, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Ici les indices du symbole de Kronecker sont en bas pour respecter la convention de sommation. C'est aussi un opérateur de substitution d'indice.

Exemple 3.3: Substitution d'indice

Soit (x^i) un système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad x^i &= 0 \times x^1 + 0 \times x^2 + \cdots + 1 \times x^i + \cdots + 0 \times x^n \\ &= \delta^i_j x^j \end{aligned}$$

Exemple 3.4: Équivalence du symbole de Kronecker

- Soit (x^i) un système de coordonnées :

$$\begin{cases} \forall i = j & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1 \\ \forall i \neq j & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \quad \text{car } x^i \text{ et } x^j \text{ sont indépendants} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \forall i, j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

- Soient (x^i) et (y^j) deux systèmes de coordonnées. Les n fonctions
$$\forall i = 1, \dots, n \qquad x^i = x^i\left(y^1, y^2, \dots, y^n\right)$$
sont supposées au moins de classe C^2 : les dérivées partielles secondes existent et sont continues, donc a fortiori les dérivées partielles premières. Elles sont aussi supposées indépendantes de sorte que l'on puisse résoudre les n équations en fonction des x^i,
$$\forall j = 1, \dots, n \qquad y^j = y^j\left(x^1, x^2, \dots, x^n\right)$$
qui sont alors aussi de classe C^2. D'une part :
$$\begin{aligned} \forall i \qquad \mathrm{d}x^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\,\mathrm{d}y^k \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \end{aligned} \tag{2.2}$$
D'autre part, avec l'ex. 3.4 ou en différentiant le résultat de l'ex. 3.3 p. 18 :
$$\forall i \qquad \mathrm{d}x^i = \delta^i_j \mathrm{d}x^j$$
Avec les deux égalités précédentes :
$$\boxed{\forall i, j \qquad \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \delta^i_j} \tag{2.3}$$
Si l'on pose $i = j$ la somme sur k disparait dans (2.2), et (2.3) donne bien $\delta^i_i = 1$.

4 Symbole d'antisymétrie

Le symbole d'antisymétrie, aussi appelé symbole de permutation, est complètement antisymétrique et ne prend que les valeurs -1, 0 ou 1. Ce n'est pas un tenseur car les valeurs prisent par ses composantes sont indépendantes du système de coordonnées choisi. Il est noté $\varepsilon^{ijk\cdots}$ ou $\varepsilon_{ijk\dots}$, où le nombre d'indice $i, j, k, \dots$ est habituellement le nombre de dimensions de l'espace vectoriel dans lequel on se trouve.

Définition 4.1: Symbole d'antisymétrie bidimensionnel

Les deux indices i et j prennent les valeurs 1 et 2. Le symbole est défini par :
$$\begin{cases} \varepsilon^{12} = +1 \\ \varepsilon^{21} = -1 \\ \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \end{cases}$$

Le symbole est bien antisymétrique :
$$\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$$
On vérifie que pour deux indices on a :
$$\varepsilon^{ij} = \tfrac{1}{2}(j - i)ij$$

On peut le représenter par la matrice 2×2 antisymétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} \\ \varepsilon^{21} & \varepsilon^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.1: Déterminant d'une matrice

Grâce au symbole d'antisymétrie le déterminant d'une matrice s'écrit :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \\ &= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \\ &= \varepsilon^{ij} a_i^1 a_j^2 \end{aligned}$$

Définition 4.2: Symbole d'antisymétrie tridimensionnel

Les trois indices i, j et k prennent les valeurs 1, 2 et 3. Le symbole est défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijk} = +1 \text{ pour } (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ \varepsilon^{ijk} = -1 \text{ pour } (i,j,k) = (3,2,1),\ (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3) \\ \varepsilon^{ijk} = 0 \text{ pour } i = j,\ \text{ ou } j = k,\ \text{ ou } k = i \end{cases}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijk} = +1 \text{ si le nombre de permutations de } (1,2,3) \text{ est pair} \\ \varepsilon^{ijk} = -1 \text{ si le nombre de permutations de } (1,2,3) \text{ est impair} \\ \varepsilon^{ijk} = 0 \text{ si deux indices au moins ont même valeur} \end{cases}$$

On vérifie que pour trois indices on a :

$$\varepsilon^{ijk} = \tfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

Nous ne pouvons pas représenter le symbole d'antisymétrie tridimensionnel par une matrice, mais par une hyper matrice $3 \times 3 \times 3$, bien que cela ait peu d'intérêt. Nous verrons que ce sera également le cas pour les tenseurs d'ordre supérieur à deux (plus de deux indices).

Définition 4.3: Symbole d'antisymétrie quadridimensionnel

Les quatre indices i, j, k et l prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4. Le symbole d'antisymétrie noté ε^{ijkl} ou ε_{ijkl} est défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijkl} = +1 \text{ si le nombre de permutations de } (0,1,2,3) \text{ est pair} \\ \varepsilon^{ijkl} = -1 \text{ si le nombre de permutations de } (0,1,2,3) \text{ est impair} \\ \varepsilon^{ijkl} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut généraliser ce symbole à un nombre quelconque d'indice.

Chapitre 3

VECTEURS

Sommaire

1 Représentation géométrique 21
2 Représentation algébrique 28

Historiquement, les vecteurs modélisèrent d'abord des notions issues de la mécanique classique, principalement celles de force et de vitesse.

1 Représentation géométrique

Notation 1.1

Les vecteurs sont notés par des lettres droites en gras, ou par des lettres en italique surmontées d'une flèche.

Par exemple la force est notée $\mathbf{f}$ ou $\vec{f}$. Dans l'espace physique de la mécanique classique modélisé par l'espace à trois dimensions de la géométrie classique, les vecteurs forces sont représentés par une flèche ayant une longueur proportionnelle à l'intensité (ou magnitude) de la force, une direction et un sens qui sont celui de la force, et ayant pour origine le point d'application de la force.

1.1 Opérations sur les vecteurs

En accord avec la notion physique de force qu'ils modélisent, on définit sur les vecteurs les deux opérations suivantes, appelées *lois de composition* :

- l'addition de deux vecteurs ayant même origine donne un vecteur appelé *résultante* des deux vecteurs. C'est la règle du parallélogramme pour la composition des forces ayant même point d'application. De même que la somme de deux forces est une force, la somme de deux vecteurs est un vecteur. Pour additionner deux forces nous devons les rapporter à une même origine. De même, nous n'additionnerons que des vecteurs ayant

même origine et la théorie des espaces vectoriels sera construite sous cette hypothèse. Nous parlons de vecteur *lié* (à un point) lorsque le point d'application du vecteur est spécifié, et de vecteur *libre* lorsque ce point n'est pas spécifié.

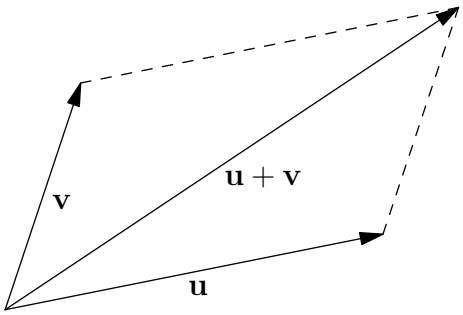


FIG. 3.1 – Addition des vecteurs **u** et **v**

- la multiplication d'un vecteur par un scalaire[1] donne un vecteur homothétique au vecteur de départ. Il a même direction, il est de même sens si α est positif, de sens contraire si α est négatif, et sa longueur est multipliée par $|\alpha|$.

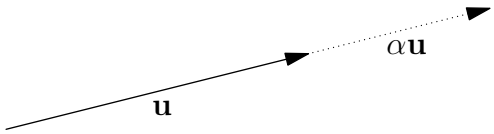


FIG. 3.2 – Multiplication du vecteur **u** par le scalaire α

Définition 1.1: Combinaison linéaire

Une combinaison linéaire est une expression construite à partir d'un ensemble de termes en multipliant chaque terme par une constante et en faisant leur somme. Soient α et β deux constantes, une combinaison linéaire de x et y est une expression de la forme

$$\alpha x + \beta y$$

Les constantes α et β sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Les deux lois de composition sur les vecteurs fusionnent en une seule loi :

Définition 1.2: Combinaison linéaire de vecteurs

Soient α et β deux scalaires. Le vecteur suivant est appelé combinaison linéaire des vecteurs **u** et **v** :

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

Remarque 1.1

Notons que la vitesse est un vecteur et que la combinaison linéaire de deux forces ne donne jamais une vitesse. Il faudra donc toujours préciser à quel ensemble de vecteurs, c.-à-d. à quel *espace vectoriel* appartient le vecteur dont on parle. Lorsque le scalaire est un réel sans dimension physique, la multiplication par ce réel donne un vecteur du même espace vectoriel. C'est par exemple le cas lorsque l'intensié d'une force varie. Lorsque le scalaire a une dimension physique, les vecteurs de départ et d'arrivée n'appartiennent pas au même espace vectoriel, comme

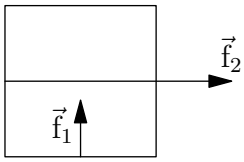
1. En mathématique, un scalaire est un nombre (habituellement réel ou complexe) qui permet de changer l'échelle (en anglais « scale ») d'un vecteur.

dans la définition du vecteur quantité de mouvement :

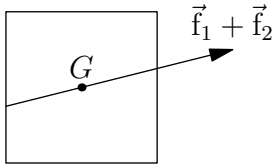
$$\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m\vec{v}$$

Exemple 1.1: Addition de deux vecteurs

Imaginons un cube homogène vu de dessus sur lequel on exerce deux forces perpendiculaires aux faces :



En négligeant les frottements, sous l'action de ces deux forces le cube se déplace en translation. Pour sommer ces deux forces en une unique force nous les translatons pour qu'elles aient même origine. Pour que le cube ait un mouvement de translation sans rotation, la force résultante doit passer par le centre de gravité G du cube. On en déduit le point d'application de cette force.



Les objets mathématiques qui modélisent la physique doivent être des *objets géométriques*, c.-à-d. indépendants du système de coordonnées dans lequel on les exprime.

Définition 1.3: Scalaire

En physique, un scalaire est une propriété physique définie par un nombre unique, indépendant du système de coordonnées.

Remarque 1.2

La définition mathématique d'un scalaire est donnée plus loin, déf. 1.12 p. 27.

Exemple 1.2

La masse, le temps, la distance et le volume tridimensionnel sont des scalaires en mécanique classique mais pas en relativité. La charge électrique est un scalaire en mécanique classique et relativiste.

Définition 1.4: Fonction scalaire

On appelle fonction scalaire ou fonction à valeur scalaire, une fonction qui donne en sortie un scalaire.

Si en chaque point de l'espace on associe un scalaire, on parle de *champ de scalaires*. Le scalaire est alors une fonction des coordonnées.

Définition 1.5: Champ de scalaires-Fonction scalaire des coordonnées

Si en tout point de coordonnées (x, y, z) d'une région R de l'espace on fait correspondre un scalaire $f(x, y, z)$, alors f est appelée fonction scalaire des coordonnées (ou fonction scalaire de la position), et définit un champ de scalaires dans R.

$$R \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

f prend en entrée les coordonnées d'un point et donne en sortie un scalaire.

On généralise facilement à un espace de plus de trois dimensions.

Exemple 1.3

Dans un solide, un liquide ou un gaz, la température, la pression et la masse volumique sont des exemples de champs de scalaires.

Définition 1.6: Vecteurs

Dans un espace de dimension n, un vecteur est une propriété physique indépendante du système de coordonnées, définie par ses n composantes dépendantes du système de coordonnées.

Remarque 1.3

C'est la définition physique d'un vecteur. La définition mathématique est donnée plus loin, déf. 1.11 p. 27.

Définition 1.7: Tenseurs

Dans un espace de dimension n, un tenseur d'ordre p est une propriété physique indépendante du système de coordonnées, définie par ses n^p composantes dépendantes du système de coordonnées.

Si en chaque point de l'espace on associe un vecteur ou un tenseur, on parle de *champ de vecteurs* ou de *champ de tenseurs*. Le vecteur ou le tenseur est alors une fonction des coordonnées.

Définition 1.8: Champ de vecteurs - Fonction vectorielle de la position

Si en tout point de coordonnées (x, y, z) d'une région R de l'espace on fait correspondre un vecteur $\mathbf{v}(x, y, z)$, alors $\mathbf{v}$ est appelée fonction à valeur vectorielle ou fonction vectorielle de la position et définit un champ de vecteurs dans R.

$$R \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto \mathbf{v}(x, y, z)$$

On généralise facilement à un espace de plus de trois dimensions.

Définition 1.9: Fonction vectorielle

On appelle fonction vectorielle ou fonction à valeur vectorielle, une fonction qui donne en sortie un vecteur.

Exemple 1.4

La vitesse du vent est un exemple de champ de vecteurs, la tension dans un solide est un exemple de champ de tenseurs.

1.2 Propriétés des lois de composition vectorielles

Notation 1.2

Nous notons $\oplus$ l'addition vectorielle pour la distinguer de l'addition des réels, et $\odot$ la multiplication d'un vecteur par un scalaire pour la distinguer de la multiplication entre réels.

Supposons que nous ayons un ensemble d'éléments sur lesquels on puisse appliquer deux lois de composition. Ces éléments sont-ils des vecteurs ? Pour répondre, il faut savoir si les deux lois sont identiques à celles que nous avons définies au § 1.1 p. 21. Elles le seront si elles vérifient les mêmes propriétés, c.-à-d. :

- pour l'addition vectorielle. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs :
  (a) commutativité : $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ (on peut commuter les vecteurs)
  (b) associativité : $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}$ (on peut si l'on veut associer les vecteurs grâce à des parenthèses)
  (c) existence d'un élément neutre, le vecteur nul $\mathbf{0}$, tel que : $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}$
  Le vecteur nul généralise le chiffre zéro de l'addition des réels.
  (d) pour tout vecteur $\mathbf{u}$ il existe le vecteur opposé $\bar{\mathbf{u}}$, tel que : $\mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$
  L'existence d'un opposé nécessite donc l'existence d'un élément neutre.

  De plus, nous définissons la soustraction vectorielle comme l'addition vectorielle avec l'opposé : $\mathbf{u} \ominus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{v}}$. On montre plus loin que $\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$.
- pour la multiplication d'un vecteur par un scalaire, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:
  (a) associativité : $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \times \beta) \odot \mathbf{u}$
  Il s'agit ici d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\odot$ du membre de gauche de l'égalité est le signe opératoire de la multiplication d'un vecteur par un réel, alors que le signe $\times$ du membre de droite est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
  (b) distributivité par rapport à l'addition des scalaires :
  $$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})$$
  Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $+$ du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition dans $\mathbb{R}$, alors que le signe $\oplus$ du membre de droite est celui de l'addition vectorielle.
  (c) distributivité par rapport à l'addition des vecteurs : $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})$
  (d) existence d'un élément neutre, le scalaire (réel) 1, tel que : $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

1.3 Quelques propriétés des vecteurs

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur et k un scalaire : $0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Démonstration.

$$(0+0) \odot \mathbf{u} = 0 \odot \mathbf{u}$$
$$0 \odot \mathbf{u} + 0 \odot \mathbf{u} = 0 \odot \mathbf{u} + \mathbf{0}$$
$$0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

□

Soient $\mathbf{0}$ le vecteur nul et k un scalaire : $k \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Démonstration.

$$k \odot (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) = k \odot \mathbf{0}$$
$$k \odot \mathbf{0} \oplus k \odot \mathbf{0} = k \odot \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$$
$$k \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

□

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur et $\bar{\mathbf{u}}$ son opposé : $\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$

Démonstration.

$$\mathbf{0} = 0 \odot \mathbf{u}$$
$$k \odot \mathbf{0} = (k-k) \odot \mathbf{u}$$
$$k \odot (\mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{u}}) = [k + (-k)] \odot \mathbf{u}$$
$$k \odot \mathbf{u} \oplus k \odot \bar{\mathbf{u}} = k \odot \mathbf{u} \oplus (-k) \odot \mathbf{u}$$
$$k \odot \bar{\mathbf{u}} = (-k) \odot \mathbf{u}$$
$$1 \odot \bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$$
$$\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$$

□

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur, $\mathbf{0}$ le vecteur nul et k un scalaire :

$$k \odot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad k = 0 \text{ ou } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Démonstration. Prenons les deux possibilités suivantes :

- Supposons $k = 0$:

$$0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- Supposons $k \neq 0$:

$$k \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$k^{-1} \odot (k \odot \mathbf{u}) = k^{-1} \odot \mathbf{0}$$
$$(k^{-1}k) \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

□

1.4 Définition des espaces vectoriels

Définition 1.10: Produit cartésien d'ensembles

Soient A et B deux ensembles, leur produit cartésien noté $A \times B$ décrit un nouvel ensemble appelé ensemble produit ou produit cartésien de A par B, constitué de tous les couples ordonnés (x, y), où $x \in A$ et $y \in B$:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Si $x \in A$ et $y \in B$ alors $(x, y) \in A \times B$ et $(y, x) \in B \times A$ mais en général $(y, x) \notin A \times B$. Dans le cas où $A = B$, $(x, y) = (y, x)$ ssi $x = y$, donc en général $(x, y) \neq (y, x)$.

Notation 1.3

$A \times B$ se lit A croix B. Le produit cartésien n fois d'un ensemble par lui-même est noté A^n, e. g. $A \times A$ est noté A^2.

Définition 1.11: Espaces vectoriels, scalaires, vecteurs

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (habituellement le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$), dont les éléments sont appelés scalaires. Considérons un ensemble non vide $\mathscr{E}$ d'éléments notés $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ Supposons qu'il existe entre les éléments de $\mathscr{E}$ une loi de composition interne (une application de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$), notée $\oplus$, et une loi de composition externe à gauche sur $\mathscr{E}$ de domaine $\mathbb{K}$ (une application de $\mathbb{K} \times \mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$), notée $\odot$, telles que :

- à deux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathscr{E}$, la loi $\oplus$ fasse correspondre un élément $\mathbf{w}$ de $\mathscr{E}$, noté $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$. En outre, la loi $\oplus$ possède les quatre propriétés du § 1.2 p. 25.
- à un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et à un élément $\mathbf{u}$ de $\mathscr{E}$, la loi $\odot$ fasse correspondre un élément de $\mathscr{E}$, noté $\alpha \odot \mathbf{u}$. En outre, pour $\beta \in \mathbb{K}$, la loi $\odot$ possède les quatre propriétés du § 1.2 p. 25.

Les éléments $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ sont appelés des vecteurs. La loi $\oplus$ est appelée addition vectorielle, et la loi $\odot$ multiplication par un scalaire. Le triplet $(\mathscr{E}, \oplus, \odot)$ noté E, est appelé espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathscr{E}$ est le support de l'espace vectoriel E et les lois de composition constituent une structure pour $\mathscr{E}$.

Cette définition dit simplement que la combinaison linéaire de deux vecteurs est encore un vecteur. La déf. 1.2 p. 22 définit à la fois ce qu'est une combinaison linéaire de deux vecteurs et ce que sont les vecteurs.

Remarque 1.4

Une conséquence de la définition des vecteurs est que tous les vecteurs ne sont pas représentables par une flèche.

Définition 1.12: Scalaire

En mathématique, un scalaire est un élément d'un corps $\mathbb{K}$ servant à définir un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathbb{K}$ est appelé corps de base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les scalaires permettent de définir la multiplication par un scalaire, opération qui prend en entrée un vecteur et donne en sortie un vecteur du même espace vectoriel.

Remarque 1.5

Les composantes d'un vecteur sont des scalaires en mathématique en tant qu'éléments du corps $\mathbb{R}$, mais pas en physique puisqu'elles ne sont pas invariantes par changement de coordonnées.

Définition 1.13: Groupe

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne binaire notée $\divideontimes$, qui a chaque paire d'éléments $(a, b) \in G^2$ associe un élément $a \divideontimes b \in G$. La structure algébrique $(G, \divideontimes)$ est un groupe ssi $\forall (a, b, c) \in G^3$ les axiomes suivants sont vérifiés :

- associativité : $a \divideontimes (b \divideontimes c) = (a \divideontimes b \divideontimes) c = a \divideontimes b \divideontimes c$
- existence d'un élément neutre ou élément identité e, tel que : $a \divideontimes e = e \divideontimes a = a$
- $\forall a \in G \ \exists \bar{a} \in G$, élément symétrique (opposé ou inverse) de a, tel que : $a \divideontimes \bar{a} = \bar{a} \divideontimes a = e$

Le groupe G est abélien ssi la loi est commutative : $a \divideontimes b = b \divideontimes a$

Par conséquent $(\mathscr{E}, \oplus)$ est un groupe abélien (ou commutatif) par rapport à l'addition vectorielle. Les quatre axiomes de la loi $\odot$ définissent « l'action » du corps $\mathbb{K}$ sur l'ensemble $\mathscr{E}$.

Notation 1.4

Pour simplifier l'écriture, l'addition vectorielle $\oplus$ est souvent notée $+$ par analogie avec l'addition des scalaires. De même, la multiplication par un scalaire $\odot$ est souvent notée $\times$, ou encore on pourra omettre le symbole, par analogie avec la multiplication des scalaires. Par convention, la loi $\odot$ est prioritaire sur la loi $\oplus$.

Si la seconde loi est définie pour tout nombre réel α, nous dirons que l'ensemble $\mathscr{E}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\odot$ est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres réels, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ou encore espace vectoriel réel. Si la seconde loi est définie pour tout nombre complexe α, nous dirons que l'ensemble $\mathscr{E}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\odot$ est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres complexes, ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ou encore espace vectoriel complexe. Dans ce qui suit nous nous limiterons aux espaces vectoriels réels.

2 Représentation algébrique

Pour effectuer des calculs sur les vecteurs on dote l'espace ponctuel d'un système de coordonnées.

Exemple 2.1

Dans le cadre de la physique newtonienne, on dote l'espace d'un système de coordonnées habituellement rectangulaires (O, x, y, z), déf. 1.12 p. 5.

À l'aide des points de cet espace ponctuel, on peut construire des vecteurs de la façon suivante. À chaque point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace ponctuel on associe le vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$, et à chaque vecteur $\mathbf{a}$ on associe le point A tel que $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$. Ainsi en généralisant à n dimensions, il existe une bijection φ entre l'espace ponctuel ${}_En$ et l'espace vectoriel E_n, ils sont équipotents (déf. 1.6

p. 3) :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \quad & E_n \to {}_E n \\ & \mathbf{a} \mapsto A = \varphi(\mathbf{a}) \\ & \mathbf{0} \mapsto O = \varphi(\vec{0}) \end{aligned}$$

Définition 2.1: Espace ponctuel

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'éléments appelés points et notés $A, B, C, \ldots$ Supposons qu'à tout couple (A, B) de points de $\mathcal{E}$ pris dans cet ordre, on fasse correspondre un vecteur, noté $\mathbf{AB}$, la correspondance suivant les trois axiomes :

- $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$ existence d'un vecteur opposé
- $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$ relation de Chasles
- $\forall O \in \mathcal{E},\ \forall \mathbf{u} \in E_n,\ \exists!\, M \in \mathcal{E},$ tel que $\mathbf{OM} = \mathbf{u}$

Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{E}$ constitue un espace ponctuel à n dimensions, noté ${}_E n$. L'espace vectoriel E_n est appelé espace associé à ${}_E n$.

L'ensemble des points correspondant aux valeurs des n coordonnées dans un certain domaine, constitue le support d'un espace ponctuel à n dimensions. Pour obtenir un espace ponctuel, il faut structurer cet ensemble en ajoutant la correspondance que nous venons d'énoncer.

Si les axes de coordonnées portent la même unité on parle *d'espace métrique* car on peut y définir une distance (plus généralement une métrique). Dans le cas contraire on parle d'espace affine.

Exemple 2.2

En thermodynamique, le diagramme de Clapeyron (P, V) est un espace affine car on ne peut y définir une distance.

Remarque 2.1

Par abus de langage nous dirons que A est l'origine du vecteur $\mathbf{AB}$, et B son extrémité.

Les coordonnées des points A et B définissent le vecteur $\mathbf{AB}$. Dans un espace à trois dimensions, ce vecteur est associé à un ensemble de six nombres réels ordonnés $(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B)$. Nous dirons que ce vecteur est *lié* à son point origine A. Cependant, il n'est pas utile de conserver le point origine dans la définition des vecteurs, nous supposons qu'ils ont tous même origine.

En utilisant la relation de Chasles et l'existence d'un vecteur opposé, déf. 2.1 p. 29 :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{AO} + \mathbf{OB} \\ &= \mathbf{OB} - \mathbf{OA} \end{aligned}$$

Dans un espace à trois dimensions, on associe au vecteur $\mathbf{AB}$ les trois nombres réels ordonnés $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, qui sont les coordonnées du point à son extrémité lorsque le vecteur $\mathbf{AB}$ est translaté au point origine O.

Exemple 2.3: Vecteur **f** dans le système de coordonnées rectangulaire (O, x, y, z)

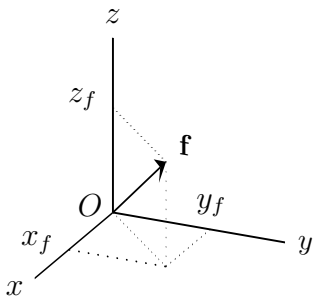


FIG. 3.3 – Coordonnées du vecteur **f**

Dans le système de coordonnées rectangulaire (O, x, y, z), le point à l'extrémité du vecteur **f** a pour coordonnées (x_f, y_f, z_f).

Remarque 2.2

Par abus de langage, on parle des coordonnées d'un vecteur pour parler des coordonnées du point à son extrémité.

Les vecteurs ont une existence propre indépendante du système de coordonnées. En effet, ils modélisent la réalité alors que le choix d'un système de coordonnées est toujours arbitraire. Les coordonnées du point à l'extrémité d'un vecteur dépendent du système de coordonnées choisi et ont par conséquent le même arbitraire.

Exemple 2.4

Une force physique exercée sur quelque chose ne peut dépendre du système de coordonnées utilisé pour définir le vecteur qui modélise cette force.

Notation 2.1

Nous utiliserons la notation indicielle pour les axes et pour les coordonnées :

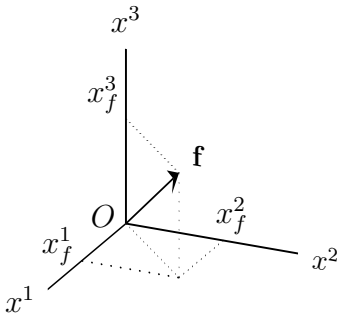


FIG. 3.4 – Notation indicielle

Dans le système de coordonnées rectangulaire (O, x^1, x^2, x^3), le point à l'extrémité du vecteur **f** a pour coordonnées (x_f^1, x_f^2, x_f^3).

2.1 Base vectorielle

Nous sommes passés par les coordonnées d'un point pour traiter de vecteurs mais nous pouvons nous abstraire momentanément de la notion de point. En effet, à chaque système de coordonnées, qu'il soit rectiligne ou curviligne, orthogonal ou non, nous pouvons associer au plus deux bases vectorielles :

- en plaçant un vecteur de base tangent à chaque ligne de coordonnées
- en plaçant un vecteur de base perpendiculaire à chaque hypersurface de coordonnées (espace pour lequel une seule coordonnée est constante)

Ces deux bases sont dites *réciproques* (§ 5 p. 333). Nous appellerons « base tangente » la première de ces bases, et « base réciproque » la seconde. Tous les vecteurs de l'espace associé à ce système de coordonnées peuvent s'écrire d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de l'une de ces deux bases.

Au système de coordonnées rectangulaire en trois dimensions, nous associons les vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tangents aux lignes de coordonnées, qui forment la base orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dite base *canonique*, signifiant ici « la plus simple ». Les autres bases seront définies par rapport à la base canonique qui préexiste donc souvent de façon implicite à toute autre base. Une fois posée, nous pouvons nous abstraire du système de coordonnées rectangulaires.

Exemple 2.5: Base vectorielle des vecteurs force

Soient $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ les vecteurs de base unitaires (d'intensité un newton) deux à deux orthogonaux de l'espace vectoriel des forces de la physique newtonienne. Le vecteur force $\vec{f}$ s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs force $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{f} = f^1\vec{\imath} + f^2\vec{\jmath} + f^3\vec{k}$$

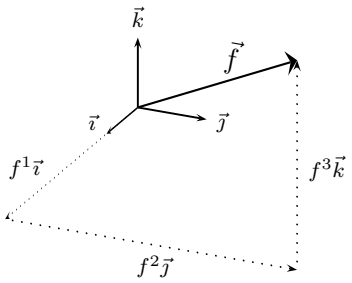


Fig. 3.5 – La force $\vec{f}$ comme combinaison linéaire des vecteurs force $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$

Nous dirons que le vecteur force $\vec{f}$ se décompose dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace des forces, et que les nombres f^1, f^2 et f^3 sont les composantes du vecteur force $\vec{f}$ dans cette base.

2.2 Repère

En tout point d'un système de coordonnées nous associons une base de vecteurs tangents aux lignes de coordonnées. La base associée au système de coordonnées rectangulaire est habituellement noté $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. L'ensemble d'un point et de sa base locale forme un repère.

Définition 2.2: Repère

Dans un espace vectoriel, un repère est la donnée d'un point pris pour origine et d'une base de trois vecteurs. Par exemple en trois dimension $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Définition 2.3: Composantes d'un vecteur

D'après le th. 2.1 p. 35, tout vecteur se décompose de façon unique dans une base, sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés les composantes du vecteur dans cette base.

Remarque 2.3

On trouve parfois le terme de « coordonnées » d'un vecteur dans une base à la place de « composantes ». Nous ferons la distinction et parlerons de coordonnées pour un point dans un système de coordonnées.

Exemple 2.6: Base vectorielle tangente associée au système de coordonnées polaires

Pour toute base associée à des coordonnées curvilignes, les vecteurs de base forment un champ de vecteurs fonction des coordonnées (chaque point est l'origine d'une base). Les vecteurs de base de la base polaire tangente sont pris tangentiels aux lignes de coordonnées polaires (fig. 1.3 p. 5), la base polaire est donc orthogonale et n'est pas définie au point origine $O(0, 0)$.

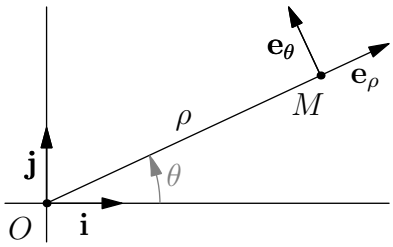


FIG. 3.6 – Vecteurs unitaires de la base polaire orthonormée au point M

Cherchons l'expression des vecteurs de base de la base polaire locale orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ en fonction des vecteurs de base de la base globale orthonormée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

a) première méthode

En se servant de la figure 3.6, exprimons les vecteurs unitaires de base $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ en fonction de ceux de la base rectangulaire normée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho(\theta) = \cos(\theta)\,\mathbf{i} + \sin(\theta)\,\mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\sin(\theta)\,\mathbf{i} + \cos(\theta)\,\mathbf{j} \end{cases}$$

Réciproquement, à partir de la figure 3.6, ou en multipliant par $\cos(\theta)$ l'une des égalités et par $\sin(\theta)$ l'autre égalité et en additionnant :

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{e}_\rho \cos(\theta) - \mathbf{e}_\theta \sin(\theta) \\ \mathbf{j} = \mathbf{e}_\rho \sin(\theta) + \mathbf{e}_\theta \cos(\theta) \end{cases}$$

b) seconde méthode

Soit M un point de coordonnées polaires (ρ, θ) et de coordonnées rectangulaires (x, y). La transformation des coordonnées polaires vers rectangulaires s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\pi > \theta \geqslant 0$$

Déterminons les vecteurs unitaires de base $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ en différentiant le vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base rectangulaire normée $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\, \mathbf{i} + \rho \sin(\theta)\, \mathbf{j} \\ \mathrm{d}\mathbf{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right)_\theta \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right)_\rho \mathrm{d}\theta \\ &= [\cos(\theta)\, \mathbf{i} + \sin(\theta)\, \mathbf{j}]\mathrm{d}\rho + \rho[-\sin(\theta)\, \mathbf{i} + \cos(\theta)\, \mathbf{j}]\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho(\theta) = \cos(\theta)\, \mathbf{i} + \sin(\theta)\, \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) = -\sin(\theta)\, \mathbf{i} + \cos(\theta)\, \mathbf{j} \end{cases}$$

et l'on a :

$$\mathrm{d}\mathbf{r}(\rho, \theta) = \mathrm{d}\rho \mathbf{e}_\rho + \rho \mathrm{d}\theta \mathbf{e}_\theta$$

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\, \mathbf{i} + \rho \sin(\theta)\, \mathbf{j} \\ &= \rho[\cos(\theta)\, \mathbf{i} + \sin(\theta)\, \mathbf{j}] \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base de la base polaire orthonormée pour exprimer la vitesse et l'accélération d'un point matériel en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho(\theta) = -\dot{\theta} \sin(\theta)\, \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos(\theta)\, \mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta(\theta) = -\dot{\theta} \cos(\theta)\, \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin(\theta)\, \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho \end{cases} \tag{3.1}$$

Remarque 2.4

Les vecteurs force, position, vitesse, accélération, champ électrique, etc. appartiennent à des espaces vectoriels différents. En physique nous ramenons tous ces vecteurs dans le même espace vectoriel, l'espace géométrique. Ceci est possible car les propriétés mathématiques de ces vecteurs sont identiques et les règles de calcul que nous verrons (p. ex. produit scalaire) y sont définies de la même manière. Seule leur nature physique distingue ces vecteurs (dimension physique), mais pas leur nature mathématique. Nous les considérons tous comme des éléments d'un même espace vectoriel. Ce faisant, nous procédons à l'assimilation d'espaces isomorphes à l'un d'entre eux.

Notation 2.2

En notation indicielle les vecteurs de base sont notés avec un indice en bas :

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= f^1\mathbf{e}_1 + f^2\mathbf{e}_2 + f^3\mathbf{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} f^i\mathbf{e}_i \\ &= f^i\mathbf{e}_i\end{aligned}$$

Remarque 2.5

Par abus de langage, on donne le nom de vecteur aux composantes elles-mêmes.

Il faut s'assurer que les vecteurs que l'on utilise pour former une base sont linéairement indépendants, c.-à-d. tels que l'on ne puisse pas exprimer un vecteur en fonction des autres car il serait redondant.

Définition 2.4: Famille de vecteurs linéairement indépendants d'ordre p

Soient $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ une famille de p vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E. Ces vecteurs forment un système linéairement indépendant d'ordre p, ou encore une famille libre d'ordre p, s'il est impossible de trouver p nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite *liée*.

Remarque 2.6

Interprétation géométrique :
Utilisons la représentation intuitive des vecteurs par des flèches. Un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant s'il n'est pas possible de construire une figure fermée avec deux ou plusieurs de ces vecteurs, même en ajustant leurs longueurs. Aucun vecteur de cet ensemble ne peut alors être exprimé comme combinaison linéaire des autres car chacun définit une nouvelle dimension.

Exemple 2.7: Vecteurs linéairement indépendants

Montrons que les vecteurs $\mathbf{u}_1(a,0,0), \mathbf{u}_2(b,c,0), \mathbf{u}_3(0,0,d)$ sont linéairement indépendants :

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 &= \mathbf{0} \\ \lambda_1(a,0,0) + \lambda_2(b,c,0) + \lambda_3(0,0,d) &= (0,0,0) \\ (\lambda_1 a + \lambda_2 b, \lambda_2 c, \lambda_3 d) &= (0,0,0)\end{aligned}$$

La seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ par conséquent les vecteurs sont linéairement indépendants.

Il faut également s'assurer que la famille de vecteur que l'on a choisi pour former une base de l'espace vectoriel permet bien de générer tous les vecteurs de cet espace. Nous dirons que cette famille est *génératrice*, et que chaque vecteur de l'espace vectoriel se décompose sur les vecteurs de cette famille, ou encore que tout vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Définition 2.5: Famille génératrice

Soient $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ une famille de p vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E. Ces vecteurs forment une famille génératrice ssi

$$\forall \mathbf{v} \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_p \mathbf{u}_p$$

Nous pouvons maintenant donner une définition précise de la notion de base :

Définition 2.6: Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel E, une famille libre et génératrice de E.

Une définition alternative est possible. Dans un espace vectoriel le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants (c.-à-d. l'ordre maximal d'après la déf. 2.4 p. 34) est appelé dimension de cet espace. Par exemple pour une droite $n = 1$, pour un plan $n = 2$, pour un volume $n = 3$.

Définition 2.7: Dimension d'un espace vectoriel

L'ordre maximal d'un espace vectoriel est appelé dimension de cet espace vectoriel.

Notation 2.3

Un espace vectoriel de dimension n, donc d'ordre maximal n, est noté E_n. Ainsi, E_1 est une droite vectorielle, E_2 est un plan vectoriel.

Définition 2.8: Base d'un espace vectoriel

On appelle base d'un espace vectoriel, tout système libre de vecteurs d'ordre maximal.

Notation 2.4

Soit un espace vectoriel E_n, sa base canonique est notée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ou $(\mathbf{e}_i)$.

Théorème 2.1

La décomposition d'un vecteur dans une base est unique.

Démonstration. Soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E_n et soit $\mathbf{u}$ un vecteur de E_n. La base étant par définition génératrice de E_n, le vecteur $\mathbf{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + u^n \mathbf{e}_n$$

Supposons l'existence d'une autre décomposition :

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}^1 \mathbf{e}_1 + \mathrm{u}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathrm{u}^n \mathbf{e}_n$$

Par soustraction :

$$\left(u^1 - \mathrm{u}^1\right) \mathbf{e}_1 + \left(u^2 - \mathrm{u}^2\right) \mathbf{e}_2 + \cdots + \left(u^n - \mathrm{u}^n\right) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

La base étant libre par définition (les vecteurs de base sont indépendants) :

$$u^1 = \mathrm{u}^1, \ u^2 = \mathrm{u}^2, \ldots, \ u^n = \mathrm{u}^n$$

La décomposition est donc unique. □

Définition 2.9: Vecteur-coordonnée

Le n-tuple $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ est appelé vecteur-coordonnée du vecteur $\mathbf{u}$ sur la base $(\mathbf{e}_i)$. On le note $[v]_{\mathbf{e}}$.

2.3 Dérivée ordinaire d'un vecteur

Soit $\mathbf{v}(\lambda)$ un vecteur fonction de la variable λ, si l'on note $\Delta\lambda$ l'accroissement de λ alors l'accroissement de $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)$$

Par conséquent

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\lambda} = \frac{\mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

Si la limite existe, la dérivée ordinaire du vecteur $\mathbf{v}(\lambda)$ par rapport à λ est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\lambda} &= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\lambda} \\ &= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)}{\Delta\lambda}\end{aligned}$$

Notation 2.5

Les notations suivantes n'ont pas le même sens :

$$\frac{\Delta\mathbf{v}(\lambda)}{\Delta\lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\lambda}(\lambda)$$

La première indique que le vecteur que l'on dérive est une fonction de λ, la seconde que le vecteur dérivée est fonction de λ.

Lorsque la dérivée est à nouveau une fonction de λ nous pouvons considérer sa dérivée. Si elle existe elle est notée $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{v}}{\mathrm{d}\lambda^2}$. Les dérivées d'ordre n sont notées $\frac{\mathrm{d}^n\mathbf{v}}{\mathrm{d}\lambda^n}$.

2.4 Continuité et différentiabilité

a) Une fonction scalaire $f(x)$ (déf. 1.4 p. 23) est continue en x si

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

De façon équivalente, une fonction scalaire $f(x)$ est continue en x si pour tout nombre positif donné *a priori*, en particulier lorsque ce nombre est très petit, nous pouvons toujours trouver une variation très petite de la variable telle que la différence de valeurs de la fonction soit inférieure à ce nombre donné :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |\Delta x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) Une fonction vectorielle $\mathbf{v}(\lambda) = v^1(\lambda)\mathbf{e}_1 + v^2(\lambda)\mathbf{e}_2 + v^3(\lambda)\mathbf{e}_3$ (déf. 1.9 p. 24) est continue en λ si les trois fonctions $v^1(\lambda), v^2(\lambda), v^3(\lambda)$ sont continues en λ, ou si

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \mathbf{v}(\lambda + \Delta\lambda) = \mathbf{v}(\lambda)$$

De façon équivalente, une fonction vectorielle $\mathbf{v}(\lambda)$ est continue en λ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |\Delta\lambda| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\lambda + \Delta\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon$$

Une fonction de la variable λ, scalaire ou vectorielle, est *différentiable* d'ordre n si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ existe. Une fonction différentiable est nécessairement continue mais la réciproque est fausse.

2.5 Dérivée partielle d'un vecteur

Soit $\mathbf{v}(x, y)$ un vecteur fonction de deux variables scalaires. Lorsqu'elles existent, les dérivées partielles de $\mathbf{v}(x, y)$ par rapport à chacune des variables s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{v}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{v}(x, y, z)}{\Delta x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{v}(x, y + \Delta y, z) - \mathbf{v}(x, y, z)}{\Delta y}$$

La continuité et la différentiabilité sont étendues aux fonctions de plusieurs variables.

a) Une fonction scalaire $f(x, y)$ est continue en (x, y) si

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$$

De façon équivalente, une fonction scalaire $f(x, y)$ est continue en (x, y) si pour tout nombre positif donné *a priori*, en particulier lorsque ce nombre est très petit, nous pouvons toujours trouver une variation très petite des variables telle que la différence de valeurs de la fonction soit inférieure à ce nombre donné :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $|\Delta x| < \delta$ et $|\Delta y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$

b) Une fonction vectorielle $\mathbf{v}(\lambda, \mu) = v^1(\lambda, \mu)\mathbf{e}_1 + v^2(\lambda, \mu)\mathbf{e}_2 + v^3(\lambda, \mu)\mathbf{e}_3$ est continue en (λ, μ) si les trois fonctions $v^1(\lambda, \mu), v^2(\lambda, \mu), v^3(\lambda, \mu)$ sont continues en (λ, μ), ou si

$$\lim_{\Delta \lambda, \Delta \mu \to 0} \mathbf{v}(\lambda + \Delta \lambda, \mu + \Delta \mu) = \mathbf{v}(\lambda, \mu)$$

De façon équivalente, une fonction vectorielle $\mathbf{v}(\lambda, \mu)$ est continue en (λ, μ) si :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $|\Delta \lambda| < \delta$ et $|\Delta \mu| < \delta \ \Rightarrow\ |f(\lambda + \Delta \lambda, \mu + \Delta \mu) - f(\lambda, \mu)| < \varepsilon$

Une fonction des variables λ, μ, scalaire ou vectorielle, est *différentiable* d'ordre n si ses dérivées $n^{\text{ème}}$ partielles existent et sont continues.

Les dérivées partielles d'ordre supérieur s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda}\right), \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu}\right), \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mu}\right), \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda}\right)$$

Lorsque les dérivées partielles continues existent, l'ordre de dérivation n'importe pas :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mu \partial \lambda}$$

2.6 Formules de dérivation des vecteurs

Soient $\mathbf{a}(\lambda), \mathbf{b}(\lambda), \mathbf{c}(\lambda)$ trois vecteurs fonction de la variable scalaire λ, et soit $\phi(\lambda)$ une fonction scalaire de λ également :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}\lambda}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\mathbf{b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda}\times\mathbf{b}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\phi\mathbf{a}) = \phi\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathbf{a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\lambda} + \mathbf{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}\lambda}\times\mathbf{c} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = \mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\lambda}\right) + \mathbf{a}\times\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}\lambda}\times\mathbf{c}\right) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

2.7 Base et repère naturels

Il n'existe pas de base globale lorsque le système de coordonnées est curviligne. Il est alors naturel d'utiliser les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées pour définir une base locale en chaque point.

Définition 2.10: Base naturelle

Soit $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un système de coordonnées quelconques, curvilignes ou rectilignes, orthogonales ou non. En un point M, les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées définissent une base locale appelée base naturelle au point M :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \boldsymbol{e}_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i}$$

Remarque 2.7

Les bases naturelles sont aussi appelées bases coordonnées ou bases holonomiques.

À l'exception des coordonnées cartésiennes, les bases naturelles ne sont pas normées. Les vecteurs de la base unitaire $(\mathbf{e}_i)$ sont donnés par :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\boldsymbol{e}_i}{\|\boldsymbol{e}_i\|} = \mathbf{e}_i$$
$$\boldsymbol{e}_i = h_i \mathbf{e}_i$$

Définition 2.11: Facteurs de proportionnalité

Les $h_i \overset{\text{def}}{=} \|\boldsymbol{e}_i\|$ sont appelés facteurs de proportionnalité.

Remarque 2.8

En coordonnées curvilignes, $(\boldsymbol{e}_i)$ désigne à la fois la base naturelle du système de coordonnées (x_i) en un point, et le champ de bases naturelles en chaque point de l'espace considéré.

Définition 2.12: Repère naturel

$(M, \boldsymbol{e}_i)$ est le repère naturel au point M.

Notation 2.6

Soient O et O' deux points fixes et M un point susceptible de se déplacer. Utilisons la relation de Chasles (2) p. 29 :

$$\begin{aligned}\mathbf{OM} &= \mathbf{OO'} + \mathbf{O'M}\\ \mathrm{d}\mathbf{OM} &= \mathrm{d}\mathbf{OO'} + \mathrm{d}\mathbf{O'M}\\ &= \mathrm{d}\mathbf{O'M}\end{aligned}$$

Puisque le point O n'a pas d'importance, nous utiliserons la notation :

$$\mathrm{d}\mathbf{OM} \equiv \mathrm{d}\mathbf{M}$$

Exemple 2.8: Base naturelle associée aux coordonnées cartésiennes

La base naturelle des coordonnées rectangulaires (x, y, z) est la base orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. La base naturelle des coordonnées cartésiennes (x, y, z) est la base normée $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$.

Exemple 2.9: Base naturelle associée aux coordonnées polaires (ρ, θ)

En général les vecteurs de base de la base naturelle ne sont pas de norme unité et n'ont pas tous la même dimension physique. C'est ce qui distingue la base tangente normée de la base naturelle.

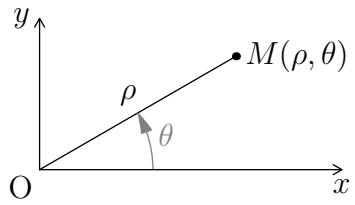


FIG. 3.7 – Coordonnées polaires (ρ, θ)

Pour trouver l'expression des vecteurs de la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ en fonction des vecteurs de la base (naturelle) rectangulaire $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, il nous faut la transformation des coordonnées polaires en rectangulaires.

Notation 2.7

Cette transformation est notée

$$(\rho, \theta) \to (x, y)$$

Elle s'écrit :

$$T \quad : \quad \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho\sin(\theta) \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\pi > \theta \geqslant 0 \tag{3.2}$$

Avec la déf. 2.10 p. 38 d'une base naturelle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \left(\dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho}\right)_\theta \\ \boldsymbol{e}_\theta = \left(\dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta}\right)_\rho \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \boldsymbol{e}_\theta = \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \cos(\theta)\,\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\rho\sin(\theta)\,\boldsymbol{i} + \rho\cos(\theta)\,\boldsymbol{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\theta = \rho\mathbf{e}_\theta \end{cases} \tag{3.3}$$

La déf. 2.11 p. 38 donne les facteurs de proportionnalité suivants :

$$\begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\theta = \rho \end{cases}$$

Le rayon ρ ayant la dimension d'une longueur, les vecteurs $\boldsymbol{e}_\rho$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ n'ont pas la même dimension.
Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial y/\partial\rho \\ \partial x/\partial\theta & \partial y/\partial\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice des dérivées partielles s'appelle matrice jacobienne de la transformation de coordonnées $(x, y) \to (\rho, \theta)$. La base naturelle polaire n'est pas normée :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{e}_\rho\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ \|\boldsymbol{e}_\theta\| = \sqrt{\rho^2\sin^2(\theta) + \rho^2\cos^2(\theta)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\boldsymbol{e}_\rho\| = 1 \\ \|\boldsymbol{e}_\theta\| = \rho \end{cases} \tag{3.4}$$

En revanche, elle est orthogonale :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\theta &= [\cos(\theta)\,\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\,\boldsymbol{j}] \cdot [-\rho\sin(\theta)\,\boldsymbol{i} + \rho\cos(\theta)\,\boldsymbol{j}] \\ &= -\cos(\theta)\rho\sin(\theta) + \sin(\theta)\rho\cos(\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

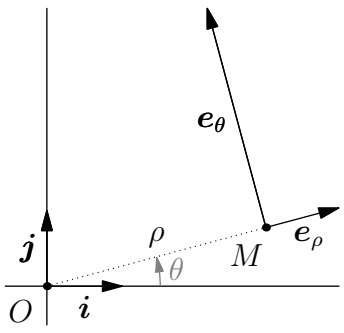


FIG. 3.8 – Base naturelle en M en coordonnées polaires (ρ, θ)

Au point de coordonnées polaires $(3, 30°)$, la base polaire a pour expression :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30°) & \sin(30°) \\ -3\sin(30°) & 3\cos(30°) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix}$$

Notez bien que pour $\rho = 3$, $\|\boldsymbol{e}_\rho\| = 1$ et $\|\boldsymbol{e}_\theta\| = 3$.
Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires (ρ, θ) dans la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \theta) &= \rho \mathbf{e}_\rho \\ &= \rho \boldsymbol{e}_\rho \end{aligned}$$

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base de la base naturelle pour exprimer la vitesse et l'accélération d'un point matériel en coordonnées polaires. À partir des relations (3.1) p. 33 et (3.3) p. 40 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\theta = \rho \mathbf{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\mathbf{e}}_\rho \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \dot{\rho}\mathbf{e}_\theta + \rho\dot{\mathbf{e}}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \dot{\rho}\mathbf{e}_\theta - \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta/\rho \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\theta/\rho - \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\rho \end{cases} \tag{3.5}$$

Exemple 2.10: Base naturelle associée aux coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

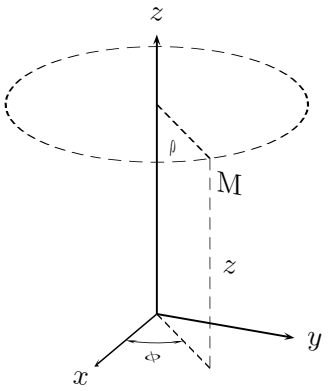


FIG. 3.9 – Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

La coordonnée ρ est appelée distance radiale, rayon ou module, ϕ est appelée angle ou azimut, z est appelée hauteur ou cote. Par analogie aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \cos(\phi)\,\boldsymbol{i} + \sin(\phi)\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\phi = -\rho\sin(\phi)\,\boldsymbol{i} + \rho\cos(\phi)\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\rho\sin(\phi) & \rho\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

La norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{e}_\rho\| &= 1 \\ \|\boldsymbol{e}_\phi\| &= \rho \\ \|\boldsymbol{e}_z\| &= 1 \end{cases}$$

Exemple 2.11: Base naturelle associée aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

La coordonnée ρ est appelée distance radiale, rayon ou module, θ est appelée colatitude, ϕ est appelée longitude. À partir de l'expression du vecteur position,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ &= r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\boldsymbol{i} + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\boldsymbol{j} + r\cos(\theta)\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

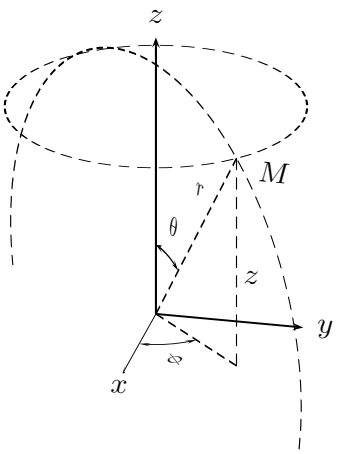


FIG. 3.10 – Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \partial_r \mathbf{M} \\ \boldsymbol{e}_\theta = \partial_\theta \mathbf{M} \\ \boldsymbol{e}_\phi = \partial_\phi \mathbf{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \sin(\theta)\cos(\phi)\,\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\boldsymbol{j} + \cos(\theta)\,\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\theta = r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\boldsymbol{i} + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\boldsymbol{j} - r\sin(\theta)\,\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\phi = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\boldsymbol{i} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\boldsymbol{j} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

La norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{e}_r\| = \sqrt{\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)} \\ \|\boldsymbol{e}_\theta\| = \sqrt{r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)} \\ \|\boldsymbol{e}_\phi\| = \sqrt{r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{e}_r\| = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} \\ \|\boldsymbol{e}_\theta\| = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} \\ \|\boldsymbol{e}_\phi\| = \sqrt{r^2\sin^2(\theta)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{e}_r\| = 1 \\ \|\boldsymbol{e}_\theta\| = r \\ \|\boldsymbol{e}_\phi\| = r|\sin(\theta)| \end{cases} \tag{3.7}$$

Sauf précision contraire, on se placera toujours dans la base naturelle du système de coordonnées.

Remarque 2.9

En annexe 3 p. 602, on montre l'existence de bases *non holonomiques* qui ne peuvent être la base naturelle d'aucun système de coordonnées.

2.8 Opérations sur les composantes

On définit l'addition vectorielle des composantes et la multiplication des composantes d'un vecteur par un scalaire de sorte que l'on retrouve les propriétés de la représentation géométrique, § 1 p. 21.

- l'addition vectorielle consiste à additionner les composantes respectives des vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1, v^2, v^3\right) \\ &= \left(u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3\right) \\ &= \left(w^1, w^2, w^3\right) \\ &= \mathbf{w} \end{aligned}$$

- la multiplication d'un vecteur par un scalaire α consiste à multiplier chaque composante du vecteur par ce scalaire :

$$\begin{aligned} \alpha \odot \mathbf{u} &= \alpha \odot \left(u^1, u^2, u^3\right) \\ &= \left(\alpha u^1, \alpha u^2, \alpha u^3\right) \\ &= \left(v^1, v^2, v^3\right) \\ &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

2.9 Propriétés des lois de composition vectorielles

Nous retrouvons effectivement les propriétés des lois de composition du § 1.2 p. 25 :

- pour l'addition vectorielle. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs

1) commutativité :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1, v^2, v^3\right) \\ &= \left(u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3\right) \\ &= \left(v^1 + u^1, v^2 + u^2, v^3 + u^3\right) \\ &= \left(v^1, v^2, v^3\right) \oplus \left(u^1, u^2, u^3\right) \\ &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}\end{aligned}$$

2) associativité :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left[\left(v^1, v^2, v^3\right) \oplus \left(w^1, w^2, w^3\right)\right] \\ &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1 + w^1, v^2 + w^2, v^3 + w^3\right) \\ &= \left(u^1 + v^1 + w^1, u^2 + v^2 + w^2, u^3 + v^3 + w^3\right) \\ &= \left(u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3\right) \oplus \left(w^1, w^2, w^3\right) \\ &= \left[\left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1, v^2, v^3\right)\right] \oplus \left(w^1, w^2, w^3\right) \\ &= (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} \\ &= \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}\end{aligned}$$

3) existence d'un élément neutre appelé vecteur nul et noté $\mathbf{0}$, tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus (0, 0, 0) \\ &= \left(u^1 + 0, u^2 + 0, u^3 + 0\right) \\ &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

4) pour tout vecteur $\mathbf{u}$ il existe le vecteur opposé noté $-\mathbf{u}$, tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(-u^1, -u^2, -u^3\right) \\ &= \left(u^1 - u^1, u^2 - u^2, u^3 - u^3\right) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

De plus, nous définissons la soustraction vectorielle comme étant l'addition vectorielle avec l'opposé :

$$\mathbf{u} \ominus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v})$$

- pour la multiplication par un scalaire. $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1) associativité :

$$\begin{aligned}\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) &= \alpha \odot \left[\beta \odot \left(u^1, u^2, u^3\right)\right] \\ &= \alpha \odot \left(\beta u^1, \beta u^2, \beta u^3\right) \\ &= \left(\alpha\beta u^1, \alpha\beta u^2, \alpha\beta u^3\right) \\ &= (\alpha \times \beta) \odot \left(u^1, u^2, u^3\right) \\ &= (\alpha \times \beta) \odot \mathbf{u}\end{aligned}$$

2) distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\odot\mathbf{u} &= (\alpha+\beta)\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\\ &= \left((\alpha+\beta)u^1,(\alpha+\beta)u^2,(\alpha+\beta)u^3\right)\\ &= \left(\alpha u^1+\beta u^1,\alpha u^2+\beta u^2,\alpha u^3+\beta u^3\right)\\ &= \left(\alpha u^1,\alpha u^2,\alpha u^3\right)\oplus\left(\beta u^1,\beta u^2,\beta u^3\right)\\ &= \left[\alpha\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\right]\oplus\left[\beta\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\right]\\ &= (\alpha\odot\mathbf{u})\oplus(\beta\odot\mathbf{u})\end{aligned}$$

3) distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\begin{aligned}\alpha\odot(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) &= \alpha\odot\left[\left(u^1,u^2,u^3\right)\oplus\left(v^1,v^2,v^3\right)\right]\\ &= \alpha\odot\left(u^1+v^1,u^2+v^2,u^3+v^3\right)\\ &= \left[\alpha\left(u^1+v^1\right),\alpha\left(u^2+v^2\right),\alpha\left(u^3+v^3\right)\right]\\ &= \left(\alpha u^1+\alpha v^1,\alpha u^2+\alpha v^2,\alpha u^3+\alpha v^3\right)\\ &= \left(\alpha u^1,\alpha u^2,\alpha u^3\right)\oplus\left(\alpha v^1,\alpha v^2,\alpha v^3\right)\\ &= \left[\alpha\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\right]\oplus\left[\alpha\odot\left(v^1,v^2,v^3\right)\right]\\ &= (\alpha\odot\mathbf{u})\oplus(\alpha\odot\mathbf{v})\end{aligned}$$

4) existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :

$$\begin{aligned}1\odot\mathbf{u} &= 1\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\\ &= \left(1u^1,1u^2,1u^3\right)\\ &= \left(u^1,u^2,u^3\right)\\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

2.10 Composantes d'un vecteur

Pour introduire les vecteurs nous nous sommes servi d'objets *géométriques* représentés par une flèche, mais tous les vecteurs ne sont pas représentables par une flèche. Par exemple les matrices carrées d'ordre deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des vecteurs, elles suivent bien la déf. 1.11 p. 27. En revanche, tout vecteur peut s'exprimer comme une liste ordonnée de nombres qui sont ses composantes dans une base.

D'après le § 2.1 p. 31, à partir d'un système de coordonnées cartésiennes obliques, nous pouvons construire deux bases réciproques. Choisissons l'une de ces deux bases, un vecteur peut y être projeté de deux façons : parallèlement ou perpendiculairement aux vecteurs de base. En projetant

- parallèlement on obtient les composantes *contravariantes* du vecteur dans cette base
- perpendiculairement on obtient les composantes *covariantes* du vecteur dans cette base

Remarques 2.1

- les composantes contravariantes dans une base sont égales aux composantes covariantes dans la base réciproque. Ceci est dû au fait que prendre la parallèle à la perpendiculaire à une droite, est équivalent à prendre la perpendiculaire à la parallèle à cette droite
- les composantes contravariantes et covariantes sont confondues ssi la base est orthonormée

Notation 2.8

En écriture indicielle, les composantes

- contravariantes sont notées avec l'indice en haut
- composantes covariantes sont notées avec l'indice en bas

Théorème 2.2

Soit E_n un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$. Alors E_n et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes. On écrit $E_n \cong \mathbb{K}^n$.

Démonstration. Le th. 2.1 p. 35 montre qu'à chaque vecteur $\mathbf{u} \in E_n$, il correspond relativement à une base donnée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, un n-tuple $[v]_{\mathbf{e}}$ de $\mathbb{K}^n$. Réciproquement, si $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique vecteur $\mathbf{u}$ de la forme $u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n$. La base $(\mathbf{e}_i)$ détermine une correspondance biunivoque entre les vecteurs de E_n et les n-tuples de $\mathbb{K}^n$. De plus cette correspondance conserve la structure d'espace vectoriel :

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n \quad \text{correspond} \quad \left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) \text{ c.-à-d. } [u]_{\mathbf{e}}$$
$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + \cdots + v^n\mathbf{e}_n \quad \text{correspond} \quad \left(v^1, v^2, \ldots, v^n\right) \text{ c.-à-d. } [v]_{\mathbf{e}}$$

alors à

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \left(u^1 + v^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(u^2 + v^2\right)\mathbf{e}_2 + \cdots + \left(u^n + v^n\right)\mathbf{e}_n \quad \text{correspond} \quad [u]_{\mathbf{e}} + [v]_{\mathbf{e}}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha\mathbf{u} = \left(\alpha u^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha u^2\right)\mathbf{e}_2 + \cdots + \left(\alpha u^n\right)\mathbf{e}_n \quad \text{correspond} \quad \alpha[u]_{\mathbf{e}}$$

Autrement dit

$$[u]_{\mathbf{e}} + [v]_{\mathbf{e}} = [u + v]_{\mathbf{e}}$$
$$k[u]_{\mathbf{e}} = [ku]_{\mathbf{e}}$$

□

Se donner une base et se donner des composantes contravariantes ou covariantes est équivalent à se donner un vecteur. Réciproquement, se donner un vecteur c'est se donner une base et des composantes contravariantes ou covariantes.

La covariance ou la contravariance des nombres d'une suite ordonnée est une condition nécessaire et suffisante pour former un vecteur. Nous pouvons donner une nouvelle définition des vecteurs : un vecteur est une suite ordonnée de nombres covariants ou contravariants par changement de coordonnées. Nous énoncerons cela plus précisément au th. 9.1 p. 129.

Dans une base donnée, nous avons l'équivalence :

$$(u^1, u^2, u^3) \equiv (u_1, u_2, u_3)$$

Remarques 2.2

Lorsque l'on décrit un vecteur en composantes covariantes on parle de covecteur ou de vecteur covariant. C'est un abus de langage, il n'existe qu'une seule sorte de vecteur, que l'on peut exprimer de deux façons différentes dans une base donnée

Notation 2.9

Les notations $\mathbf{v}$ ou $\vec{v}$ ne donnent pas d'information sur la variance (le fait d'être contravariantes ou covariantes) des composantes. Nous noterons donc souvent les vecteurs par leurs composantes, contravariantes ou covariantes :

$$v^i \qquad \text{ou} \qquad v_i$$

Exemple 2.12: Système de coordonnées et composantes contravariantes

Au système de coordonnées cartésiennes obliques de la fig. 1.1 p. 4 nous associons le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ tel que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée et les vecteurs de base pris le long des droites de coordonnées.

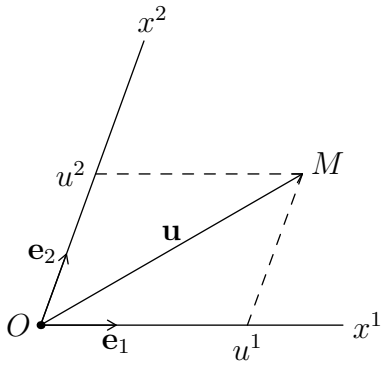


FIG. 3.11 – Composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u}$

Dans cette base, le vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{OM}$ a pour composantes contravariantes u^1 et u^2 :

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes obliques, les coordonnées d'un point et les composantes contravariantes du vecteur associé sont confondues ssi la base est normée :

$$\begin{cases} u^1 = x^1_M \\ u^2 = x^2_M \end{cases}$$

Définition 2.13: Composantes contravariantes d'un vecteur

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base quelconque d'un espace vectoriel E_n. On appelle composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u}$ dans cette base, les quantités $u^1, u^2, \ldots, u^n$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} u^i\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

D'après la notation 2.8 p. 46, les composantes contravariantes sont représentées au moyen d'un indice supérieur.

Les vecteurs ont une existence propre, ils sont indépendants de la base dans laquelle on les exprime : leur norme, direction et sens ne varient pas par changement de base. Ils sont *invariants* par changement de base, seules leurs composantes changent. Pour assurer cette invariance, lorsqu'on les écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base, leurs composantes

contravariantes (les coefficients u^i) doivent se transformer de façon « contraire » aux vecteurs de base $\mathbf{e}_i$.

En appliquant la convention de sommation 1.3 p. 15, le vecteur $\mathbf{u}$ s'écrit en composantes contravariantes, l'indice i variant de 1 à n :

$$\boxed{\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i}$$

Remarque 2.10

Les indices de sommation sont dits *muets*, nous pouvons les remplacer par d'autres lettres :

$$u^i \mathbf{e}_i = u^j \mathbf{e}_j$$

Les autres indices sont dits *libres* ou *réels*.

La décomposition d'un vecteur en composantes contravariantes est unique dans chaque base et réciproquement, les composantes contravariantes $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ représentent un unique vecteur dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Exemple 2.13: Composantes contravariantes par changement de base

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes (x, y, z) dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Déterminons ses composantes contravariantes (u^1, u^2, u^3) dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ avec $\mathbf{e}_1(a, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2(b, c, 0)$, $\mathbf{e}_3(0, 0, d)$.

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 \\ &= u^1 a\boldsymbol{i} + u^2\left(b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}\right) + u^3 d\boldsymbol{k} \\ &= \left(u^1 a + u^2 b\right)\boldsymbol{i} + u^2 c\boldsymbol{j} + u^3 d\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{cases} u^1 a + u^2 b = x \\ u^2 c = y \\ u^3 d = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^2 = y/c \\ u^3 = z/d \\ u^1 = \left(x - by/c\right)/a \end{cases}$$

Exemple 2.14: Base orthogonale non normée

Soit un point M de coordonnées $(6, 2)$. Considèrons la base orthogonale non normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ telle que $\|\mathbf{e}_1\| = 2$ et $\|\mathbf{e}_2\| = 1$.

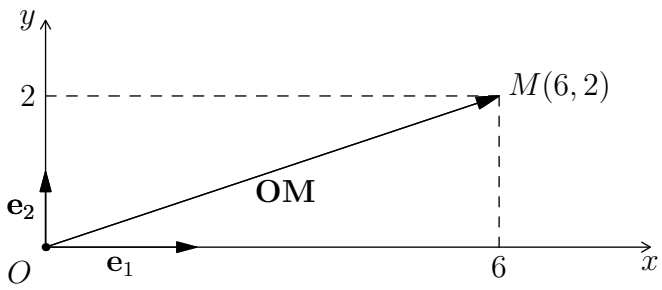


FIG. 3.12 – Coordonnées et composantes contravariantes

Dans cette base :

$$\mathbf{OM} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

Les coordonnées $(6, 2)$ du point M et les composantes contravariantes $(3, 2)$ du vecteur $\mathbf{OM}$ dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont différentes. En coordonnées rectangulaires les vecteurs de base doivent être normés pour que les coordonnées et les composantes contravariantes soient confondues.

Dans ce qui suit, toute base vectorielle est liée à un système de coordonnées. Un changement de système de coordonnées implique un changement de base. En revanche, un changement de base est dû soit à un changement de système de coordonnées en un point donné, soit à un changement d'origine de cette base dans ce même système de coordonnées.

Remarque 2.11

En physique, le choix d'un système de coordonnées est nécessaire et les équations de la physique doivent être indépendantes de ce choix.

La différentielle du vecteur position $\mathbf{OM}$ est un vecteur, qui s'écrit dans la base locale :

$$\mathrm{d}\mathbf{OM} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

Avec la déf. 2.10 p. 38 de la base naturelle et avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{OM} = \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i} \tag{3.8}$$

Remarque 2.12

Dans la base naturelle d'un système de coordonnées, et uniquement dans cette base, les éléments différentiels $\mathrm{d}x^i$ sont à la fois :

- les différentielles des coordonnées du point M dans le système de coordonnées (O, x^i)
- les composantes contravariantes du vecteur différentiel $\mathrm{d}\mathbf{OM}$ dans le repère naturel $(O, \boldsymbol{e}_i)$ associé au système de coordonnées (x^i) de centre O.

Exemple 2.15: Vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire

En coordonnées polaires, le point M a pour coordonnées (ρ, θ). Nous avons :

- dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{OM} &= \mathrm{d}(\rho \mathbf{e}_\rho) \\
&= \mathrm{d}\rho \mathbf{e}_\rho + \rho \mathrm{d}\mathbf{e}_\rho \\
\frac{\mathrm{d}\mathbf{OM}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\mathbf{e}}_\rho \\
\mathbf{v} &= \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

- dans la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$, en utilisant (3.8),

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{OM} &= \mathrm{d}\rho \boldsymbol{e}_\rho + \mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_\theta \\
\mathbf{v} &= \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

  Dans la base naturelle polaire les composantes du vecteur vitesse ont pour dimensions m s^{-1} et s^{-1}.

Remarque 2.13

En comparant les deux expressions de la vitesse on retrouve (3.3) p. 40. Notez que l'on a aussi :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{OM} &= \mathrm{d}(\rho \boldsymbol{e}_\rho) \\ &= \mathrm{d}\rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\boldsymbol{e}}_\rho \end{aligned}$$

et l'on retrouve également :

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \frac{\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta}{\rho}$$

À partir de l'expression du vecteur vitesse dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$, le vecteur accélération s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\right) \\ &= \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\,\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \rho\,\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\mathbf{e}_\rho \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dans la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$, il s'écrit :

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta}/\rho + \ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

Chapitre 4

MATRICES

Sommaire

1	Système d'équations linéaires	51
2	Addition matricielle	52
3	Multiplication matricielle	54
4	Matrice colonne et matrice ligne	57
5	Matrice transposée	57
6	Notation indicielle des matrices	58
7	Matrice identité	60
8	Inverse d'une matrice carrée	60
9	Déterminant d'une matrice carrée	61

1 Système d'équations linéaires

Définition 1.1: Équation linéaire

Une équation linéaire à coefficients réels ou complexes est une expression de la forme

$$A_1u^1 + A_2u^2 + \cdots + A_nu^n = a$$

où les coefficients A_i et la constante a sont des scalaires de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou d'un corps $\mathbb{K}$), et où les u^i sont n inconnues, ou indéterminées ou variables.

Une équation est linéaire ssi elle s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire (déf. 1.1 p. 22) des inconnues. Soit le système de m équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 + \cdots + A_{1n}u^n = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 + \cdots + A_{2n}u^n = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}u^1 + A_{m2}u^2 + \cdots + A_{mn}u^n = a_m \end{cases} \tag{4.1}$$

où par convention, dans le terme A_{ij} le premier indice i est celui de la ligne, le second indice j est celui de la colonne. Il est inutile de réécrire les inconnues pour chaque ligne. Simplifions l'écriture de ce système en définissant le nouvel opérateur $\boxtimes$:

Définition 1.2: Opérateur de multiplication matricielle

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Remarque 1.1

Si toutes les constantes a_i sont nulles, le système est dit *homogène*.

Définition 1.3: Matrice

Le tableau d'éléments $[A_{ij}]$ est appelé *matrice* A.

L'écriture des inconnues u^i en colonne plutôt qu'en ligne est justifiée au § 3 p. 54. Les propriétés des matrices découlent naturellement de cette notation et des propriétés des systèmes d'équations linéaires. Un système d'équations est représentable sous forme matricielle ssi les équations sont linéaires.

Notation 1.1: Notation ligne-colonne ou « li co »

Par convention, le premier indice d'un élément de matrice A_{ij} est son numéro de ligne, le second est son numéro de colonne. Cette notation est dite li co. Lorsque l'élément de matrice est noté A^i_j l'indice haut i est celui de la ligne, et l'indice bas j est celui de la colonne, notation $\underset{\text{co}}{\text{li}}$

Définition 1.4: Dimension d'une matrice

La dimension ou taille d'une matrice est son nombre de lignes et de colonnes.

La matrice $[A_{ij}]_{mn}$ est de dimension $m \times n$ ou (m, n), où son nombre de lignes m est sa hauteur, et son nombre de colonnes n est sa largeur.

2 Addition matricielle

Nous ne considérons que les systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues, $m = n$, qui donnent alors des matrices carrées et qui admettent une solution unique ou aucune solution.

Définition 2.1: Ordre d'une matrice

Une matrice carrée est d'ordre n si elle est de dimension $n \times n$.

Le raisonnement sur des matrices d'ordre deux est facilement généralisable aux matrices d'ordre supérieur à deux. Soient les deux systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{11}u^1 + B_{12}u^2 = b_1 \\ B_{21}u^1 + B_{22}u^2 = b_2 \end{cases}$$

Ces systèmes s'écrivent en notation matricielle

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Additionnons ligne à ligne les deux systèmes de départ :

$$\begin{cases} (A_{11} + B_{11})u^1 + (A_{12} + B_{12})u^2 = a_1 + b_1 \\ (A_{21} + B_{21})u^1 + (A_{22} + B_{22})u^2 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Définissons un nouvel opérateur :

Définition 2.2: Opérateur d'addition matricielle $\boxplus$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

ainsi que :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

On définit de même la soustraction matricielle par :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxminus \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11} & A_{12} - B_{12} \\ A_{21} - B_{21} & A_{22} - B_{22} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.1

L'addition et la soustraction de deux matrices de dimensions différentes ne sont pas définies.

2.1 Propriétés de l'addition matricielle

Soient A, B, C trois matrices :

1) associativité :
$$A \boxplus (B \boxplus C) = (A \boxplus B) \boxplus C$$

2) existence d'un élément neutre appelé matrice nulle, notée 0, dont tous les éléments sont nuls et telle que :
$$A \boxplus 0 = A$$

3) pour toute matrice A il existe une matrice opposée notée $\bar{A}$ telle que :
$$A \boxplus \bar{A} = 0$$
L'existence d'une matrice opposée nécessite donc l'existence d'une matrice nulle. De plus la soustraction matricielle est l'addition matricielle avec la matrice opposée :
$$A \boxplus \bar{B} = A \boxminus B$$

4) commutativité :
$$A \boxplus B = B \boxplus A$$

Notation 2.1

L'addition matricielle est habituellement notée $+$ et la soustraction $-$ par analogie avec les scalaires.

3 Multiplication matricielle

3.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Reprenons le système d'équations linéaires (4.1) p. 51. Nous pouvons multiplier chaque équation par le scalaire α. Le produit matriciel de la matrice A par le scalaire α sera noté :

$$\alpha \boxtimes [A_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}$$

Le scalaire α est une matrice a un seul élément.

3.1.1 Propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$,

1) associativité :
$$\alpha\boxtimes(\beta\boxtimes A)=(\alpha\times\beta)\boxtimes A$$
C'est un abus de langage, il n'y a pas associativité car le signe $\boxtimes$ du membre de gauche de l'égalité est le signe opératoire de la multiplication d'une matrice par un scalaire, alors que le signe $\times$ du membre de droite est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
2) distributivité par rapport à l'addition des réels :
$$(\alpha+\beta)\boxtimes A=(\alpha\boxtimes A)\boxplus(\beta\boxtimes A)$$
C'est ici aussi un abus de langage, il n'y a pas distributivité car le signe $+$ du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition dans $\mathbb{R}$, alors que le signe $\boxplus$ du membre de droite est celui de l'addition matricielle.
3) distributivité à gauche et à droite par rapport à l'addition des matrices :
$$\alpha\boxtimes(A\boxplus B)=(A\boxplus B)\boxtimes\alpha=(\alpha\boxtimes A)\boxplus(\alpha\boxtimes B)$$
4) existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :
$$1\boxtimes A=A$$
5) commutativité :
$$\alpha\boxtimes A=A\boxtimes\alpha$$

3.2 Multiplication de deux matrices

Soient les deux systèmes d'équations suivants :
$$\begin{cases}A_{11}u^1+A_{12}u^2=a_1\\A_{21}u^1+A_{22}u^2=a_2\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}B_{11}v^1+B_{12}v^2=u^1\\B_{21}v^1+B_{22}v^2=u^2\end{cases}$$
Injectons le second dans le premier :
$$\begin{cases}A_{11}(B_{11}v^1+B_{12}v^2)+A_{12}(B_{21}v^1+B_{22}v^2)=a_1\\A_{21}(B_{11}v^1+B_{12}v^2)+A_{22}(B_{21}v^1+B_{22}v^2)=a_2\end{cases}$$
$$\begin{cases}(A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21})v^1+(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22})v^2=a_1\\(A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21})v^1+(A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22})v^2=a_2\end{cases}$$
Ce système s'écrit sous forme matricielle :
$$\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}\boxtimes\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$
Or nous avons aussi :
$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\boxtimes\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}\boxtimes\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}$$

En injectant la seconde relation dans la première :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \left\{ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

On constate l'associativité du produit matriciel et l'on a donc :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Chaque élément de la matrice produit est la multiplication d'une ligne de A par une colonne de B. Par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour multiplier deux matrices dans l'ordre AB est que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Les matrices sont alors dites *compatibles*. On justifie ainsi l'écriture en colonne des inconnues (4.2) p. 52.

Notation 3.1

La multiplication matricielle est souvent posée comme suit :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

3.2.1 Propriétés de la multiplication matricielle

1) associativité :

$$A \boxtimes (B \boxtimes C) = (A \boxtimes B) \boxtimes C = A \boxtimes B \boxtimes C$$

2) distributivité à gauche et à droite par rapport à l'addition matricielle :

$$A \boxtimes (B \boxplus C) = A \boxtimes B \boxplus A \boxtimes C$$
$$(B \boxplus C) \boxtimes A = B \boxtimes A \boxplus C \boxtimes A$$

3) en général non commutativité :

$$A \boxtimes B \neq B \boxtimes A$$

Notation 3.2

Par analogie avec la multiplication des scalaires, la multiplication matricielle est souvent notée $\times$, ou encore on pourra omettre le symbole.

4 Matrice colonne et matrice ligne

Notation 4.1

Nous noterons les matrices colonnes et les matrices lignes avec des parenthèses plutôt qu'avec des crochets.

Les éléments de ces matrices sont les composantes covariantes ou contravariantes d'un vecteur. Les inconnues $u1, u2$ forment un vecteur. Nous avons les deux possibilités suivantes :

— on pré-multiplie A par une matrice ligne

$$\begin{pmatrix} u1 & u2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u1 + A_{21}u2 & A_{12}u1 + A_{22}u2 \end{pmatrix}$$

Le couple $u1, u2$ forme une matrice ligne et le résultat est aussi une matrice ligne.

— on post-multiplie A par une matrice colonne

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u1 + A_{12}u2 \\ A_{21}u1 + A_{22}u2 \end{pmatrix}$$

Le couple $u1, u2$ forme une matrice colonne et le résultat est aussi une matrice colonne.

Toute matrice carrée peut prendre en entrée un vecteur colonne (respectivement ligne) et donner en sortie un autre vecteur colonne (respectivement ligne), autrement dit peut transformer un vecteur en un autre vecteur du même type. Notez que nous n'obtenons pas le même système d'équations linéaires selon que l'on pré-multiplie ou que l'on post-multiplie.

Remarque 4.1

La notation 3.1 p. 56 adoptée pour la multiplication matricielle implique que les deux écritures suivantes

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u1 & u2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

n'ont pas de sens car les matrices ne sont pas compatibles.

5 Matrice transposée

Définition 5.1: Matrice transposée

Soit A_{ij} un élément de la matrice A. La matrice B est la transposée de A ssi :

$$\forall i, j \qquad B_{ij} = A_{ji}$$

Notation 5.1

La transposée de A est notée A^T.

Si A est une matrice $m \times n$ alors A^T est une matrice $n \times m$. Par conséquent la transposée d'une matrice colonne donne une matrice ligne et réciproquement.

5.1 Propriétés de la transposition matricielle

Soit k un scalaire :

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(kA)^T = kA^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

Si $A^T = A$ alors A est symétrique, si $A^T = -A$ alors A est antisymétrique.

Exemple 5.1: Transposée d'une matrice 2×2

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 & A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \right\}^T = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T$$

Nous retrouvons la propriété $(AB)^T = B^T A^T$.

6 Notation indicielle des matrices

L'addition matricielle est notée :

$$\forall i, j \qquad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Pour la multiplication matricielle (de A par B) nous utilisons la convention de notation ligne-colonne pour les éléments des matrices. Elle est alors notée :

$$\forall i, j \qquad C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$
$$= \sum_k B_{kj} A_{ik}$$

Remarque 6.1

Pour la multiplication matricielle, soit le dernier indice de la première matrice est égal au premier indice de la seconde matrice, soit le premier indice de la première matrice est égal au dernier indice de la seconde matrice.

Nous avons les équivalences suivantes :

$$A_{ij}u^j = a_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{u} = \vec{a}$$

De même

$$A_{ji}u^j = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_{11}u^1 + A_{21}u^2 = b_1 \\ A_{12}u^1 + A_{22}u^2 = b_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{21}u^2 \\ A_{12}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T\vec{u} = \vec{b}$$

Les matrices A_{ij} et A_{ji} sont transposées l'une de l'autre. Grâce à la notation indicielle, démontrons une propriété de la transposition matricielle.

Théorème 6.1

Soient $A = [A]_{mn}$ et $B = [B]_{np}$ alors :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Démonstration. D'une part :

$$\begin{aligned} (AB)^T &= (\sum_k A_{ik}B_{kj})^T \\ &= [C_{ij}]_{mp}^T \\ &= [C_{ji}]_{pm} \end{aligned}$$

D'autre part, en posant

$$\begin{cases} B^T = D = [D_{ij}]_{pn} \\ A^T = E = [E_{ij}]_{nm} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_{ij} = B_{ji} \\ E_{ij} = A_{ji} \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} B^T A^T &= DE \\ &= \sum_k (D_{ik}E_{kj}) \\ &= \sum_k (B_{ki}A_{jk}) \\ &= \sum_k (A_{jk}B_{ki}) \\ &= [C_{ji}]_{pm} \end{aligned}$$

□

7 Matrice identité

Définition 7.1: Matrice identité

La matrice identité ou matrice unité, notée I, est une matrice carrée d'ordre n, telle que pour toute matrice carrée A du même ordre :

$$AI = IA = A$$

Notation 7.1

En notation indicielle, la matrice identité d'ordre n s'écrit :

$$I = [\delta_{ij}]_{nn}$$

8 Inverse d'une matrice carrée

Définition 8.1: Matrice inverse

Une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice carrée B de même ordre, appelée inverse de A, telle que :

$$AB = BA = I$$

Notation 8.1

En notation indicielle :

$$\sum_k A_{ik}B_{kj} = \sum_k B_{ik}A_{kj} = \delta_{ij}$$

Notation 8.2

La matrice inverse de A est notée A^{-1}.

L'inversion matricielle a les propriétés suivantes. Soit k un scalaire non nul :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Théorème 8.1

La matrice inverse est unique.

Démonstration. Supposons $B \neq C$ telles que :

$$\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases}$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$ □

Théorème 8.2

Soient $A = [A]_{mn}$ et $B = [B]_{np}$ alors :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration. Par associativité du produit matriciel :

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

De même :

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \qquad \square$$

Théorème 8.3

Si A est inversible alors A^T est inversible et les opérations de transposition et d'inversion commutent :

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&AA^{-1} = I \\
&\left(AA^{-1}\right)^T = I^T \\
&\left(A^{-1}\right)^T A^T = I \\
&\left[\left(A^{-1}\right)^T A^T\right]\left(A^T\right)^{-1} = I\left(A^T\right)^{-1} \\
&\left(A^{-1}\right)^T\left[A^T\left(A^T\right)^{-1}\right] = \left(A^T\right)^{-1} \\
&\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Si A^{-1} existe alors on peut prendre sa transposée et $(A^{-1})^T$ existe, donc $\left(A^T\right)^{-1}$ existe. $\square$

9 Déterminant d'une matrice carrée

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = a_1 & L_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = a_2 & L_2 \end{cases}$$

On résout par substitution :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = a_1 & L_1 \\ A_{11}x_1 + \dfrac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}x_2 = \dfrac{A_{11}}{A_{21}}a_2 & L_2 \times \dfrac{A_{11}}{A_{21}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(A_{12} - \dfrac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}\right) x_2 = a_1 - \dfrac{A_{11}}{A_{21}}\, a_2 & L_1 - L_2 \\ x_1 = \dfrac{a_2}{A_{21}} - \dfrac{A_{22}}{A_{21}}\, x_2 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22})\, x_2 = A_{21}a_1 - A_{11}a_2 & L_1 \times A_{21} \\ x_1 = \dfrac{a_2}{A_{21}} - \dfrac{A_{22}}{A_{21}} \dfrac{A_{21}a_1 - A_{11}a_2}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{A_{21}a_1 - A_{11}a_2}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \\ x_1 = \dfrac{A_{12}a_2 - A_{22}a_1}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{22}a_1 - A_{12}a_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \\ x_2 = \dfrac{A_{11}a_2 - A_{21}a_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \end{cases}$$

L'expression au dénominateur $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$, appelée *déterminant* de la matrice A, doit être non nulle pour que le système soit soluble.

Notation 9.1

Le déterminant de la matrice A est noté :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \end{aligned}$$

On remarque que l'on a alors :

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_1 & A_{12} \\ a_2 & A_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad x_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & a_1 \\ A_{21} & a_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Pour trouver l'expression du déterminant d'une matrice carrée 3×3 nous définissons d'abord un mineur d'une matrice.

Définition 9.1: Mineur d'une matrice carrée

Le $\text{mineur}_{ij}(A)$ est le déterminant obtenu à partir de la matrice carrée A en supprimant sa i^{e} ligne et sa j^{e} colonne.

Exemple 9.1: Mineur d'une matrice 3×3

Soit la matrice carrée

$$A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Le $\text{mineur}_{23}(A)$ est le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = A_{11}A_{32} - A_{31}A_{12}$$

Nous définissons à présent un cofacteur d'une matrice carrée.

Définition 9.2: Cofacteur d'une matrice carrée

$$\mathrm{C}_{ij}(A) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j}\mathrm{mineur}_{ij}(A)$$

Exemple 9.2: Cofacteur d'une matrice 3×3

En reprenant la matrice de l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{23}(A) &= (-1)^{5}\mathrm{mineur}_{23}(A)\\ &= A_{31}A_{12} - A_{11}A_{32}\end{aligned}$$

Notation 9.2

En notation indicielle, le déterminant de la matrice carrée A d'ordre n s'écrit :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A)\\ &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Le déterminant de la matrice carrée 3×3 peut s'écrire de 6 façons, correspondant au choix d'une ligne parmi trois ou d'une colonne parmi trois :

$$\begin{aligned}\det(A) &= A_{11}\,\mathrm{C}_{11} + A_{12}\,\mathrm{C}_{12} + A_{13}\,\mathrm{C}_{13}\\ &= A_{21}\,\mathrm{C}_{21} + A_{22}\,\mathrm{C}_{22} + A_{23}\,\mathrm{C}_{23}\\ &= A_{31}\,\mathrm{C}_{31} + A_{32}\,\mathrm{C}_{32} + A_{23}\,\mathrm{C}_{33}\\ &= A_{11}\,\mathrm{C}_{11} + A_{21}\,\mathrm{C}_{21} + A_{31}\,\mathrm{C}_{31}\\ &= A_{12}\,\mathrm{C}_{12} + A_{22}\,\mathrm{C}_{22} + A_{32}\,\mathrm{C}_{32}\\ &= A_{13}\,\mathrm{C}_{13} + A_{23}\,\mathrm{C}_{23} + A_{33}\,\mathrm{C}_{33}\end{aligned}$$

Exemple 9.3: Déterminant d'une matrice 3×3

En reprenant la matrice de l'exemple précédent

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix} = A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23}\\ A_{31} & A_{33}\end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{32}\end{vmatrix}$$

La différentielle du déterminant n'est pas le déterminant de la différentielle de la matrice. La différentielle du déterminant (4.3) p. 63 donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\mathrm{d}A_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A) + A_{ij}\,\mathrm{dC}_{ij}(A)\right]\\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}A_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A) + \sum_{j=1}^{n}A_{ij}\,\mathrm{dC}_{ij}(A)\end{aligned}$$

Pour une matrice 3×3 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\det(A) &= \mathrm{d}A_{11}C_{11} + \mathrm{d}A_{12}C_{12} + \mathrm{d}A_{13}C_{13} + A_{11}\mathrm{d}C_{11} + A_{12}\mathrm{d}C_{12} + A_{13}\mathrm{d}C_{13} \\
&= \mathrm{d}A_{11}C_{11} + \mathrm{d}A_{12}C_{12} + \mathrm{d}A_{13}C_{13} \\
&\quad + A_{11}\mathrm{d}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{12}\mathrm{d}(A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33}) + A_{13}\mathrm{d}(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}) \\
&= \mathrm{d}A_{11}C_{11} + \mathrm{d}A_{12}C_{12} + \mathrm{d}A_{13}C_{13} \\
&\quad + \mathrm{d}A_{21}(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) + \mathrm{d}A_{22}(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) + \mathrm{d}A_{23}(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) \\
&\quad + \mathrm{d}A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}) + \mathrm{d}A_{32}(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) + \mathrm{d}A_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\
&= \mathrm{d}A_{11}C_{11} + \mathrm{d}A_{12}C_{12} + \mathrm{d}A_{13}C_{13} \\
&\quad + \mathrm{d}A_{21}C_{21} + \mathrm{d}A_{22}C_{22} + \mathrm{d}A_{23}C_{23} \\
&\quad + \mathrm{d}A_{31}C_{31} + \mathrm{d}A_{32}C_{32} + \mathrm{d}A_{33}C_{33}
\end{aligned}$$

Notation 9.3

En notation indicielle et en généralisant à une matrice d'ordre n :

$$\mathrm{d}\det(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_{ij}(A)\mathrm{d}A_{ij} \tag{4.4}$$

Chapitre 5

TRANSFORMATION DE COORDONNÉES

Sommaire

1 Matrice jacobienne et jacobien 65
2 Matrice changement de base 69
3 Matrice de passage 72
4 Changement de base naturelle 73
5 Changement de repère 75
6 Transformation des composantes d'un vecteur 76

1 Matrice jacobienne et jacobien

Pour des raisons de lisibilité, dans ce chapitre on se place dans un espace à trois dimensions. La généralisation à n dimensions est immédiate. Soit T la transformation de l'ancien système de coordonnées (x^i) vers le nouveau système de coordonnées $(x^{j'})$:

$$T \quad : \qquad \forall j = 1,2,3 \qquad x^{j'} = x^{j'}\left(x^1, x^2, x^3\right) \tag{5.1}$$

Notation 1.1

La transformation T est aussi notée $(x^i) \to (x^{j'})$.

Si cette transformation est bijective, c.-à-d. si à tout vecteur de son domaine de définition elle fait correspondre un unique vecteur de son ensemble d'arrivée, alors $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ est aussi un système de coordonnées. Les différentielles des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x^{1'} = \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 \\ \mathrm{d}x^{2'} = \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 \\ \mathrm{d}x^{3'} = \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^3 + \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^{1'} \\ \mathrm{d}x^{2'} \\ \mathrm{d}x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^1 \\ \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}x^3 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Définition 1.1: Matrice jacobienne d'une transformation

La matrice carrée 3×3 des dérivées partielles premières des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes, est appelée matrice jacobienne de la transformation $(x^i) \to (x^{j'})$.

$$J \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Notation 1.2

La matrice jacobienne est aussi notée $J \left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\right]_{33}$.

En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas 1.3 p. 15 :

$$\begin{aligned} \forall j = 1,2,3 \qquad \mathrm{d}x^{j'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \\ &= J_i^{j'}\,\mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

En prenant le déterminant de chaque terme de (5.2) p. 65 :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^{1'}\,\mathrm{d}x^{2'}\,\mathrm{d}x^{3'} &= \det(J)\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 \\ \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}x^{i'} &= \det(J) \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

Notation 1.3

On utilisera la notation suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\Omega$$

Le produit des différentielles des coordonnées est aussi parfois noté $\mathrm{d}^n x$. En coordonnées rectangulaires uniquement, $\mathrm{d}\Omega$ se confond avec l'hypervolume élémentaire de l'espace $\mathrm{d}V$.

Avec cette notation :

$$\mathrm{d}\Omega' = \det(J)\mathrm{d}\Omega \tag{5.3}$$

Exemple 1.1

En coordonnées rectangulaires et cylindriques :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \mathrm{d}\rho\,\rho\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}V &= \rho\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

ρ est le jacobien de la transformation des coordonnées cylindriques en coordonnées rectangulaires.

Définition 1.2: Jacobien d'une transformation

Le déterminant de la matrice Jacobienne est appelé jacobien de la transformation T.

$$\det(J) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

En utilisant le symbole d'antisymétrie déf. 4.1 p. 19 :

$$\det(J) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{i'j'k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^3}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^k}$$

Définition 1.3: Transformation des coordonnées

Soit (x^1, x^2, x^3) un système de coordonnées de l'espace ponctuel ${}_E3$. Les 3 équations (5.1) p. 65 sont la transformation de coordonnées T vers le nouveau système de coordonnées $\left(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\right)$ de l'espace ponctuel ${}_E3$, ssi la transformation est de classe C^2 et le jacobien de la transformation est non nul (la transformation T est alors bijective)

$$\det(J) \neq 0$$

Le jacobien étant non nul, nous pouvons inverser la transformation

$$T^{-1} \quad : \qquad \forall i = 1, 2, 3 \qquad x^i = x^i\left(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\right)$$

T^{-1} a pour matrice jacobienne :

$$K \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

En notation indicielle :

$$\forall i, j = 1, 2, 3 \qquad K^i_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

Notation 1.4

La matrice jacobienne est aussi notée $K\left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right]_{33}$.

À partir des relations (2.3) p. 19,

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \delta^j_i \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} = \delta^j_i$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$JK = KJ = I$$

où I est la matrice identité. La matrice K est aussi notée J^{-1}. La matrice jacobienne de la transformation inverse est égale à l'inverse de la matrice jacobienne de la transformation.

Les matrices jacobiennes étant inverses l'une de l'autre, il s'en suit que les jacobiens sont également inverses l'un de l'autre :

$$\det(K) = [\det(J)]^{-1}$$

Si la transformation est entre repères rectilignes alors les $\frac{\partial x}{\partial y}$ sont tous constants et le jacobien est constant. En repères curvilignes le jacobien est fonction des coordonnées du point.

Exemple 1.2: Matrice jacobienne d'une transformation

La matrice jacobienne de la transformation $(\rho, \theta) \to (x, y)$ s'écrit :

$$J \begin{bmatrix} \partial_\rho x & \partial_\theta x \\ \partial_\rho y & \partial_\theta y \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Elle a pour déterminant :

$$\begin{aligned} \det(J) &= \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) \\ &= \rho \end{aligned}$$

Cette transformation est bijective pour $\det(J) \neq 0$, donc pour $\rho \neq 0$, c.-à-d. pour le plan privé du point origine.
La matrice jacobienne de la transformation inverse $(x, y) \to (\rho, \theta)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} K \begin{bmatrix} \partial_x \rho & \partial_y \rho \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta \end{bmatrix} &= K \begin{bmatrix} x\,(x^2+y^2)^{-1/2} & y\,(x^2+y^2)^{-1/2} \\ -y\,(x^2+y^2)^{-1} & x\,(x^2+y^2)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= K \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Elle a pour déterminant :

$$\begin{aligned} \det(K) &= \frac{\cos^2(\theta)}{\rho} + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

Exemple 1.3: Vecteurs orthonormés

Reprenons l'ex. 3.1 p. 206 en passant en coordonnées rectangulaires.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cos(\theta) - \frac{4}{5}\sin(\theta) \\ \frac{3}{5}\sin(\theta) + \frac{4}{5}\cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 = \delta_{ij}u^i u^j &= \left[\tfrac{3}{5}\cos(\theta) - \tfrac{4}{5}\sin(\theta)\right]^2 + \left[\tfrac{3}{5}\sin(\theta) + \tfrac{4}{5}\cos(\theta)\right]^2 \\ &= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5\rho} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-4}{5}\cos(\theta) - \frac{3}{5}\sin(\theta) \\ \frac{-4}{5}\sin(\theta) + \frac{3}{5}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \delta_{ij}v^iv^j = \left[\tfrac{-4}{5}\cos(\theta) - \tfrac{3}{5}\sin(\theta)\right]^2 + \left[\tfrac{-4}{5}\sin(\theta) + \tfrac{3}{5}\cos(\theta)\right]^2$$
$$= \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = g_{ij}u^iv^j = \delta_{ij}u^iv^j$$
$$= \left[\tfrac{3}{5}\cos(\theta) - \tfrac{4}{5}\sin(\theta)\right]\left[\tfrac{-4}{5}\cos(\theta) - \tfrac{3}{5}\sin(\theta)\right]$$
$$+ \left[\tfrac{3}{5}\sin(\theta) + \tfrac{4}{5}\cos(\theta)\right]\left[\tfrac{-4}{5}\sin(\theta) + \tfrac{3}{5}\cos(\theta)\right]$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -\tfrac{12}{25} + \tfrac{12}{25} = 0$$

Exemple 1.4: Espace de Poincaré-Minkowski

Passer dans l'espace de Poincaré-Minkowski revient à effectuer la transformation :

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \\ x^4 = it \end{cases}$$

Cette transformation a pour jacobien :

$$\det(J) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = i$$

2 Matrice changement de base

Tout changement de coordonnées induit un changement de la base associée au système de coordonnées, donc une transformation des vecteurs de base. Lors d'une transformation de coordonnées, les vecteurs de base sont les seuls à se transformer, les autres vecteurs restent identiques à eux-mêmes.

Exemple 2.1: Vecteur vitesse par changement de base

Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ d'un mobile ne dépend pas de la base naturelle du système de coordonnées dans laquelle on l'exprime (mais il dépend du référentiel). Dans le cas où ce vecteur est unitaire vertical dirigé vers le haut, il ne doit pas être confondu avec le vecteur de base $\mathbf{e}_2$ qui lui subira un vrai changement pour devenir $\mathbf{e}_{2'}$. Lors du changement de base les composantes du vecteur vitesse se transforment de manière à ce que le vecteur reste identique à lui-même.

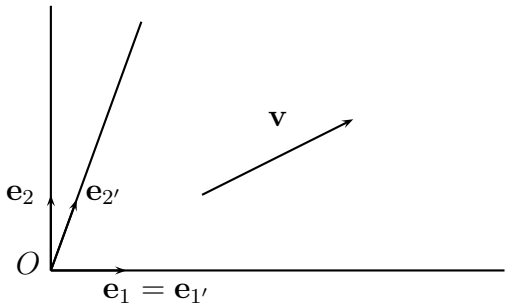


FIG. 5.1 – Changement de base

Définition 2.1: Matrice changement de base

Soient $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{e}_{j'})$ deux bases d'un espace vectoriel E_3 où par convention les indices de la nouvelle base sont primés. A est appelée matrice changement de base $(\mathbf{e}_i) \to (\mathbf{e}_{j'})$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = A^1_{1'}\,\mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\,\mathbf{e}_1 + A^3_{1'}\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{2'} = A^1_{2'}\,\mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\,\mathbf{e}_1 + A^3_{2'}\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{3'} = A^1_{3'}\,\mathbf{e}_1 + A^2_{3'}\,\mathbf{e}_1 + A^3_{3'}\,\mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{1'} & A^2_{1'} & A^3_{1'} \\ A^1_{2'} & A^2_{2'} & A^3_{2'} \\ A^1_{3'} & A^2_{3'} & A^3_{3'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} A^1_{1'} & A^2_{1'} & A^3_{1'} \\ A^1_{2'} & A^2_{2'} & A^3_{2'} \\ A^1_{3'} & A^2_{3'} & A^3_{3'} \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} A \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_{1'})_{\mathbf{e}_i} \\ (\mathbf{e}_{2'})_{\mathbf{e}_i} \\ (\mathbf{e}_{3'})_{\mathbf{e}_i} \end{bmatrix}$$

où $(\mathbf{e}_{j'})_{\mathbf{e}_i}$ est le vecteur $\mathbf{e}_{j'}$ exprimé dans la base $(\mathbf{e}_i)$. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

où les éléments des vecteurs sont eux-mêmes des vecteurs. Avec la convention de sommation 1.3 p. 15 :

$$\boxed{\forall j = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_{j'} = A^i_{j'}\mathbf{e}_i} \tag{5.7}$$

Remarque 2.1

La matrice jacobienne et la matrice changement de base ne sont pas des tenseurs, elles ne se transforment pas lors d'un changement de base. Leurs indices ne sont pas des indices de variance, nous pouvons les placer en haut ou en bas pour utiliser la convention de sommation.

Le changement de base inverse s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = B_1^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + B_1^{2'}\,\mathbf{e}_{2'} + B_1^{3'}\,\mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_2 = B_2^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + B_2^{2'}\,\mathbf{e}_{2'} + B_2^{3'}\,\mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_3 = B_3^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + B_3^{2'}\,\mathbf{e}_{2'} + B_3^{3'}\,\mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix}$$

En notation indicielle,

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_i = B_i^{j'}\,\mathbf{e}_{j'} \tag{5.8}$$

Les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$= AB \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_{3'} \end{pmatrix}$$

Donc

$$AB = I \tag{5.9}$$

Faisons de même en notation indicielle. En changeant les indices muets,

$$\begin{cases} \forall j = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_{j'} = A_{j'}^{i}\mathbf{e}_i \\ \forall i = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_i = B_i^{k'}\mathbf{e}_{k'} \end{cases}$$

d'une part,

$$\begin{aligned} \forall j = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_{j'} &= A_{j'}^{i}\mathbf{e}_i \\ &= A_{j'}^{i}B_i^{k'}\mathbf{e}_{k'} \\ &= B_i^{k'}A_{j'}^{i}\mathbf{e}_{k'} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\forall j = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_{j'} = \delta_{j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall k,j = 1,2,3 \qquad B_i^{k'}A_{j'}^{i} = \delta_{j'}^{k'}} \tag{5.10}$$

3 Matrice de passage

La matrice de passage donne la transformation des composantes des vecteurs autres que les vecteurs de bases, de la nouvelle base vers l'ancienne base.

Exemple 3.1

Pour le vecteur vitesse par changement de base (mais pas par changement de référentiel) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}' \\
\mathrm{v}^1\mathbf{e}_1 + \mathrm{v}^2\mathbf{e}_2 + \mathrm{v}^3\mathbf{e}_3 &= \mathrm{v}^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \mathrm{v}^{2'}\mathbf{e}_{2'} + \mathrm{v}^{3'}\mathbf{e}_{3'} \\
&= \mathrm{v}^{1'}(A^1_{1'}\mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\mathbf{e}_2 + A^3_{1'}\mathbf{e}_3) \\
&\quad + \mathrm{v}^{2'}(A^1_{2'}\mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\mathbf{e}_2 + A^3_{2'}\mathbf{e}_3) \\
&\quad + \mathrm{v}^{3'}(A^1_{3'}\mathbf{e}_1 + A^2_{3'}\mathbf{e}_2 + A^3_{3'}\mathbf{e}_3) \\
&= \left(\mathrm{v}^{1'}A^1_{1'} + \mathrm{v}^{2'}A^1_{2'} + \mathrm{v}^{3'}A^1_{3'}\right)\mathbf{e}_1 \\
&\quad + \left(\mathrm{v}^{1'}A^2_{1'} + \mathrm{v}^{2'}A^2_{2'} + \mathrm{v}^{3'}A^2_{3'}\right)\mathbf{e}_2 \\
&\quad + \left(\mathrm{v}^{1'}A^3_{1'} + \mathrm{v}^{2'}A^3_{2'} + \mathrm{v}^{3'}A^3_{3'}\right)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^{1'}A^1_{1'} + \mathrm{v}^{2'}A^1_{2'} + \mathrm{v}^{3'}A^1_{3'} \\ \mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^{1'}A^2_{1'} + \mathrm{v}^{2'}A^2_{2'} + \mathrm{v}^{3'}A^2_{3'} \\ \mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^{1'}A^3_{1'} + \mathrm{v}^{2'}A^3_{2'} + \mathrm{v}^{3'}A^3_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{v}^1 \\ \mathrm{v}^2 \\ \mathrm{v}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} & A^1_{3'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} & A^2_{3'} \\ A^3_{1'} & A^3_{2'} & A^3_{3'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{v}^1 \\ \mathrm{v}^2 \\ \mathrm{v}^3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \mathrm{v}^{1'} \\ \mathrm{v}^{2'} \\ \mathrm{v}^{3'} \end{pmatrix}$$

Notation 3.1

$(\mathbf{e}_{j'})_{\mathbf{e}_i}$ est le vecteur $\mathbf{e}_{j'}$ exprimé dans la base $(\mathbf{e}_i)$.

Définition 3.1: Matrice de passage

La transposée de A est appelée matrice de passage du changement de base $(\mathbf{e}_i) \to (\mathbf{e}_{j'})$:

$$P \overset{\text{def}}{=} A^T$$

On a :

$$P\left[(\mathbf{e}_{1'})_{\mathbf{e}_i} \quad (\mathbf{e}_{2'})_{\mathbf{e}_i} \quad (\mathbf{e}_{3'})_{\mathbf{e}_i}\right]$$

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{v}^i = P^i_{j'}\mathrm{v}^{j'}$$

4 Changement de base naturelle

La transformation des vecteurs de base est due à un changement de coordonnées ou à un déplacement de l'origine de la base dans un système de coordonnées curviligne. Nous nous placerons souvent dans la base naturelle du système de coordonnées.

$$\begin{aligned}\forall j = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{e}_{j'} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^{j'}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{e}_{j'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}} \boldsymbol{e}_{i}} \tag{5.11}$$

Ces relations ne sont valables que pour un changement de base naturelle à base naturelle.

Remarque 4.1

Ces relations et (5.7) p. 70 donnent l'expression des éléments de la matrice changement de base entre deux bases naturelles :

$$\forall i,j = 1,2,3 \qquad A^{i}_{j'} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{1'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1'} \\ \boldsymbol{e}_{2'} \\ \boldsymbol{e}_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

C'est la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne (5.4) p. 67 :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1'} \\ \boldsymbol{e}_{2'} \\ \boldsymbol{e}_{3'} \end{pmatrix} = K^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.2

Pour des bases naturelles $A = \left(J^{-1}\right)^T$.

Les transformations inverses s'écrivent :

$$\begin{aligned}\forall i = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{e}_{i} &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^{i}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{e}_{i} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i}} \boldsymbol{e}_{j'}} \tag{5.12}$$

Remarque 4.3

Ces relations et (5.8) p. 71 donnent l'expression des éléments de la matrice B entre deux bases naturelles :

$$\forall i,j=1,2,3 \qquad B_i^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Nous avons aussi

$$B = J^T$$

Exemple 4.1: Rotation d'une base

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthonormée du plan. Une rotation d'angle α du système de coordonnées transforme cette base en une nouvelle base orthonormée du plan, $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$:

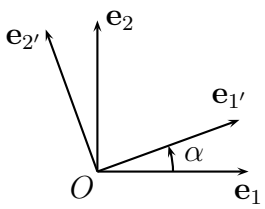


FIG. 5.2 – Rotation d'une base

Déterminons la transformation $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit les coefficients $A^i_{j'} = \partial x^i / \partial x^{j'}$:

$$A^1_{1'} = \cos(\alpha), \qquad A^2_{1'} = \sin(\alpha), \qquad A^1_{2'} = -\sin(\alpha), \qquad A^2_{2'} = \cos(\alpha)$$

Le determinant de la matrice A vaut l'unité :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Déterminons la transformation inverse $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) \to (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. On trouve directement :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} - \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_2 = \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} \end{cases}$$

On peut aussi multiplier par cosinus et sinus :

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} = \cos^2(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \\ \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} = -\sin^2(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{1'} = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 - \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \sin^2(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \\ \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} = \cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos^2(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{2'} = \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_2$$

ou calculer l'inverse de la matrice A. Puisque le déterminant vaut l'unité, l'inverse est égale à sa transposée :

$$B \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

On en déduit les coefficients $B_i^{j'} = \partial x^{j'}/\partial x^i$:

$$B_1^{1'} = \cos(\alpha), \qquad B_1^{2'} = -\sin(\alpha), \qquad B_2^{1'} = \sin(\alpha), \qquad B_2^{2'} = \cos(\alpha)$$

5 Changement de repère

Soient $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}_{j'})$ deux repères d'un espace ponctuel. Quelles sont les relations entre les coordonnées d'un point M exprimées dans chacun de ces repères ? Nous avons,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \alpha^i \mathbf{e}_i \\ \overrightarrow{\mathrm{O'O}} = \alpha^{j'} \mathbf{e}_{j'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x^i \mathbf{e}_i \\ \overrightarrow{\mathrm{O'M}} = x^{j'} \mathbf{e}_{j'} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}}$$

$$\begin{aligned} x^i \mathbf{e}_i &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x^{j'} \mathbf{e}_{j'} \\ &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x^{j'} A_{j'}^i \mathbf{e}_i \\ &= (\alpha^i + x^{j'} A_{j'}^i) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

$$\forall i = 1,2,3 \qquad x^i = \alpha^i + x^{j'} A_{j'}^i$$

Par symétrie :

$$\forall j = 1,2,3 \qquad x^{j'} = \alpha^{j'} + x^i B_i^{j'}$$

Pour un changement de repère naturel, les bases sont reliées par (5.11) et (5.12) p. 73 :

$$\begin{cases} \forall i = 1,2,3 & x^i = \alpha^i + x^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \\ \forall j = 1,2,3 & x^{j'} = \alpha^{j'} + x^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \end{cases}$$

6 Transformation des composantes d'un vecteur

6.1 Transformation des composantes contravariantes

Les vecteurs ont une signification absolue indépendante de la base dans laquelle on les exprime, mais les nombres (les composantes) qui les décrivent dépendent de la base utilisée :

$$u^{j'}\mathbf{e}_{j'} = u^{i}\mathbf{e}_{i}$$

Remarque 6.1

Nous suivons la notation 1.5 p. 16 du prime sur l'indice, Il ne s'agit pas de l'indice j' mais de la j^{e} composante du vecteur dans la base primée.

À partir du changement de base (5.8) p. 71 :

$$u^{j'}\mathbf{e}_{j'} = u^{i}B_{i}^{j'}\mathbf{e}_{j'}$$

Les composantes contravariantes se transforment par changement de base selon les relations :

$$\boxed{\forall j = 1,2,3 \qquad u^{j'} = B_{i}^{j'}u^{i}} \tag{5.13}$$

Par rapport à la relation précédente, la sommation à lieu sur l'indice bas et non plus sur l'indice haut, on a donc pris la transposée de B. En composantes contravariantes par changement de base :

$$\mathbf{u}'_{\text{con}} = B^{T}\mathbf{u}_{\text{con}}$$

Lors d'un changement de base, les composantes contravariantes se transforment par la transposée de la matrice inverse de A, de façon « contraire » aux vecteurs de base (5.6) p. 70. On a également

$$\mathbf{u}_{\text{con}} = A^{T}\mathbf{u}'_{\text{con}}$$

Exemple 6.1

Soit la matrice changement de base suivante :

$$A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminons les nouvelles composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ Avec

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \left(A^{-1}\right)^T\mathbf{v}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

S'il s'agit d'un changement de base naturelle, avec (5.12) p. 73 :

$$u^{j'}\boldsymbol{e}_{j'} = u^i\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\boldsymbol{e}_{j'}$$

Par changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment selon :

$$\boxed{\forall j = 1,2,3 \qquad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}u^i} \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} u^{1'} = \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}u^1 + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}u^2 + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}u^3\\ u^{2'} = \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}u^1 + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}u^2 + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}u^3\\ u^{3'} = \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^1}u^1 + \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^2}u^2 + \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}u^3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\\u^{3'}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3}\\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\\u^{3'}\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{pmatrix}$$

En composantes contravariantes par changement de base naturelle :

$$\mathbf{u}'_{\text{con}} = J\mathbf{u}_{\text{con}} \tag{5.15}$$

Lors d'un changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment comme les différentielles des coordonnées, par la matrice jacobienne J. Donc, dans le cas d'un changement de base naturelle :

$$\left(A^{-1}\right)^T = J$$

À partir du changement de base naturelle (5.11) p. 73 :

$$\begin{aligned}u^i\boldsymbol{e}_i &= u^{j'}\boldsymbol{e}_{j'}\\ &= u^{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

$$\forall i = 1,2,3 \qquad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}u^{j'} \tag{5.16}$$

En notation matricielle, en composantes contravariantes :

$$\mathbf{u}_{\text{con}} = K\mathbf{u}'_{\text{con}}$$

Remarques 6.1

- $\mathbf{u}'$ n'est autre que $\mathbf{u}$ (exprimé dans la base primée). Le prime désigne ici le même objet géométrique. Par contre $\mathbf{e}'_i$ (noté $\mathbf{e}_{i'}$) n'est pas $\mathbf{e}_i$. Le prime désigne ici deux objets géométriques différents
- Dans (5.11) p. 73 et (5.16) p. 77, les matrices de dérivées partielles $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,\mathbf{e}_i$ et $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,u^{j'}$ sont transposées l'une de l'autre. La sommation se faisant sur l'indice répété, elle dépend du terme qui suit

Exemple 6.2: Changement de base normée

Soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ deux bases normées quelconques (Fig. 5.3).

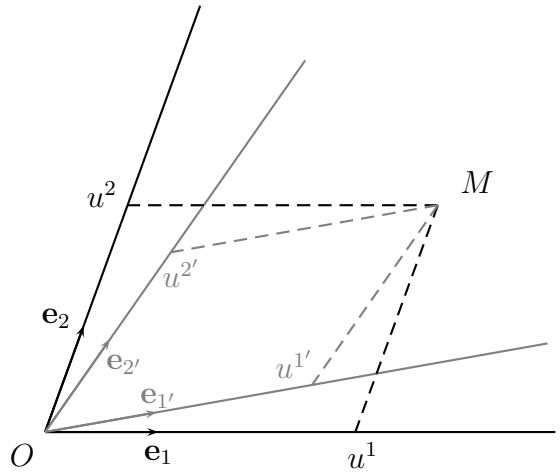


FIG. 5.3 – Transformation des composantes contravariantes

Écrivons l'expression du vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ en composantes contravariantes dans chaque base :

$$\begin{aligned} u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 \\ &= u^1\left(B_1^{1'}\mathbf{e}_{1'} + B_1^{2'}\mathbf{e}_{2'}\right) + u^2\left(B_2^{1'}\mathbf{e}_{1'} + B_2^{2'}\mathbf{e}_{2'}\right) \\ &= \left(u^1B_1^{1'} + u^2B_2^{1'}\right)\mathbf{e}_{1'} + \left(u^1B_1^{2'} + u^2B_2^{2'}\right)\mathbf{e}_{2'} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} u^{1'} = B_1^{1'}u^1 + B_2^{1'}u^2 \\ u^{2'} = B_1^{2'}u^1 + B_2^{2'}u^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{aligned} u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 &= u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} \\ &= u^{1'}\left(A_{1'}^1\mathbf{e}_1 + A_{1'}^2\mathbf{e}_2\right) + u^{2'}\left(A_{2'}^1\mathbf{e}_1 + A_{2'}^2\mathbf{e}_2\right) \\ &= \left(u^{1'}A_{1'}^1 + u^{2'}A_{2'}^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(u^{1'}A_{1'}^2 + u^{2'}A_{2'}^2\right)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} u^1 = A^1_{1'} u^{1'} + A^1_{2'} u^{2'} \\ u^2 = A^2_{1'} u^{1'} + A^2_{2'} u^{2'} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix}$$

Exemple 6.3: Changement de base par rotation

Soit le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2$, déterminons ses composantes contravariantes dans la nouvelle base $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ définie dans l'exercice de rotation d'une base 4.1 p. 74. En utilisant les coefficients $\partial x^{i'} / \partial x^j$ déjà calculés :

$$\begin{cases} u^{1'} = B^{1'}_1 u^1 + B^{1'}_2 u^2 \\ u^{2'} = B^{2'}_1 u^1 + B^{2'}_2 u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{1'} = \cos(\alpha)\, u^1 + \sin(\alpha)\, u^2 \\ u^{2'} = -\sin(\alpha)\, u^1 + \cos(\alpha)\, u^2 \end{cases}$$

Nous pouvons aussi les déterminer en remplaçant les vecteurs de l'ancienne base :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \\ &= u^1 \left[\cos(\alpha)\, \mathbf{e}_{1'} - \sin(\alpha)\, \mathbf{e}_{2'}\right] + u^2 \left[\sin(\alpha)\, \mathbf{e}_{1'} + \cos(\alpha)\, \mathbf{e}_{2'}\right] \\ &= \left[\cos(\alpha)\, u^1 + \sin(\alpha)\, u^2\right] \mathbf{e}_{1'} + \left[-\sin(\alpha)\, u^1 + \cos(\alpha)\, u^2\right] \mathbf{e}_{2'} \\ &= u^{1'} \mathbf{e}_{1'} + u^{2'} \mathbf{e}_{2'} \end{aligned}$$

Exemple 6.4: Changement de système de coordonnées

Dans la base naturelle associée au système de coordonnées (x^1, x^2), soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de composantes contravariantes $u^1 = x^2$ et $u^2 = x^1$. Quelles sont ses composantes contravariantes $(u^{1'}, u^{2'})$ lors du changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} x^{1'} = (x^2)^2 \\ x^{2'} = x^1 x^2 \end{cases}$$

- en notation indicielle

$$\begin{aligned} u^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} u^2 \\ &= 2x^2 u^2 \\ &= 2x^2 x^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} u^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} u^2 \\ &= x^2 u^1 + x^1 u^2 \\ &= (x^2)^2 + (x^1)^2 \end{aligned}$$

- en notation matricielle

La déf. 1.1 p. 66 de la matrice jacobienne, $J\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right]_{22}$, et (5.15) p. 77, $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$, donnent :

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\det(J) \neq 0$ implique $x^2 \neq 0$ donc $x^{1'} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1x^2 \\ (x^2)^2 + (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

Par exemple, si $\mathbf{u}$ est un vecteur de composantes contravariantes $(1, 1)$, alors :

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 6.5: Changement de coordonnées, de rectangulaires à polaires

Dans la base naturelle orthonormée associée au système de coordonnées rectangulaire (x, y), soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes contravariantes (u^x, u^y). Quelles sont ses composantes contravariantes $\left(u^\rho, u^\theta\right)$ lors d'une transformation en coordonnées polaires (ρ, θ) ?

- en notation indicielle, (5.14) p. 77 donnent :

$$\begin{cases} u^\rho = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\, u^x + \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\, u^y \\ u^\theta = \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\, u^x + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\, u^y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^\rho = u^x \cos(\theta) + u^y \sin(\theta) \\ u^\theta = \dfrac{-u^x \sin(\theta) + u^y \cos(\theta)}{\rho} \end{cases}$$

- en notation matricielle, (5.15) p. 77 donne :

$$\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^x \cos(\theta) + u^y \sin(\theta) \\ \left(-u^x \sin(\theta) + u^y \cos(\theta)\right)/\rho \end{pmatrix}$$

Si $u^x = 1$ et $u^y = 1$ alors au point de coordonnées polaires $(3, 30°)$:

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

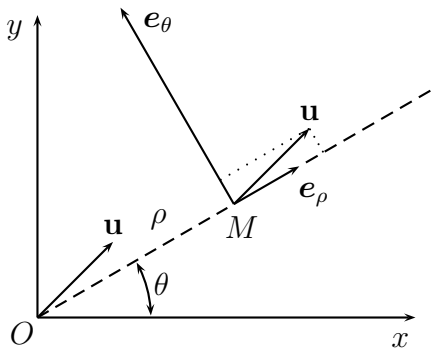


FIG. 5.4 – Changement de coordonnées, de rectangulaires à polaires

Si **u** est le vecteur position alors $u^x = \rho\cos(\theta)$ et $u^y = \rho\sin(\theta)$:

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\theta) + \rho\sin(\theta)\sin(\theta) \\ \left(-\rho\cos(\theta)\sin(\theta) + \rho\sin(\theta)\cos(\theta)\right)/\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Transformation des composantes covariantes

À partir du changement de base (5.13) p. 76 :

$$\begin{aligned} \forall j = 1,2,3 \qquad u_{j'} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \boldsymbol{e}_{j'} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot A^i_{j'}\, \boldsymbol{e}_i \\ &= A^i_{j'}(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \boldsymbol{e}_i) \end{aligned}$$

Par changement de base, les composantes covariantes se transforment selon :

$$\boxed{\forall j = 1,2,3 \qquad u_{j'} = A^i_{j'}\, u_i} \tag{5.17}$$

Par changement de base naturelle, les composantes covariantes se transforment selon :

$$\boxed{\forall j = 1,2,3 \qquad u_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\, u_i}$$

$$\begin{cases} u_{1'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\, u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\, u_2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}\, u_3 \\ u_{2'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\, u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\, u_2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}\, u_3 \\ u_{3'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}\, u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}\, u_2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}\, u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \\ u_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \\ u_{3'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

En composantes covariantes :

$$\mathbf{u}'_{\text{cov}} = A\mathbf{u}_{\text{cov}} \tag{5.18}$$

Les composantes covariantes se transforment comme les vecteurs de base, (5.6) p. 70. De même :

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,3 \qquad u_i &= \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \boldsymbol{e}_{j'} \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} (\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \boldsymbol{e}_{j'}) \end{aligned}$$

$$\forall i = 1,2,3 \qquad u_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u_{j'} \tag{5.19}$$

En notation matricielle, en composantes covariantes :

$$\mathbf{u}_{\text{cov}} = B\mathbf{u}'_{\text{cov}}$$

Exemple 6.6: Changement de base normée

Soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ deux bases normées quelconques (Fig. 5.5). En utilisant la déf. 9.1 p. 129 des composantes covariantes :

$$\begin{cases} u_{1'} = \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_{2'} \end{cases}$$

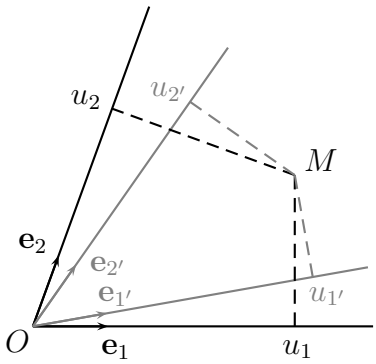


FIG. 5.5 – Transformation des composantes covariantes

$$\begin{cases} u_{1'} = \overrightarrow{\text{OM}} \cdot (A^1_{\ 1'}\mathbf{e}_1 + A^2_{\ 1'}\mathbf{e}_2) \\ u_{2'} = \overrightarrow{\text{OM}} \cdot (A^1_{\ 2'}\mathbf{e}_1 + A^2_{\ 2'}\mathbf{e}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = A^1_{\ 1'}\, \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_1 + A^2_{\ 1'}\, \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_2 \\ u_{2'} = A^1_{\ 2'}\, \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_1 + A^2_{\ 2'}\, \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = A^1_{\ 1'}\, u_1 + A^2_{\ 1'}\, u_2 \\ u_{2'} = A^1_{\ 2'}\, u_1 + A^2_{\ 2'}\, u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{\ 1'} & A^2_{\ 1'} \\ A^1_{\ 2'} & A^2_{\ 2'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix}$$
$$= A^{-1} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix}$$

Dans une base non normée ou non orthogonale, les composantes covariantes et contravariantes (selon comment on projette le vecteur sur la base) ne se transforment pas de la même manière par changement de base.

Exemple 6.7: Transformation des composantes par changement de base

Dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de l'espace vectoriel euclidien E_3, on considère les deux vecteurs $\mathbf{u}\,(u^1, u^2, u^3)$ et $\mathbf{v}\,(v^1, v^2, v^3)$. La base étant orthonormée les composantes contravariantes et covariantes sont confondues. Effectuons le changement de base qui passe à la nouvelle base non orthogonale et non normée $\{\mathbf{e}_{1'}\,(1,1,1)\,, \mathbf{e}_{2'}\,(0,1,1)\,, \mathbf{e}_{3'}\,(0,0,1)\}$, et déterminons les nouvelles composantes contravariantes et covariantes de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
Pour les nouvelles composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} u^1\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j} + u^3\boldsymbol{k} &= u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'} \\ &= u^{1'}\left(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right) + u^{2'}\left(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right) + u^{3'}\boldsymbol{k} \\ &= u^{1'}\boldsymbol{i} + \left(u^{1'} + u^{2'}\right)\boldsymbol{j} + \left(u^{1'} + u^{2'} + u^{3'}\right)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u^1 = u^{1'} \\ u^2 = u^{1'} + u^{2'} \\ u^3 = u^{1'} + u^{2'} + u^{3'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^{1'} = u^1 \\ u^{2'} = u^2 - u^1 \\ u^{3'} = u^3 - u^2 \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} v^{1'} = v^1 \\ v^{2'} = v^2 - v^1 \\ v^{3'} = v^3 - v^2 \end{cases}$$

Pour les nouvelles composantes covariantes, en utilisant la déf. 9.1 p. 129 :

$$\begin{cases} u_{1'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{1'} = \left(u^1, u^2, u^3\right) \cdot (1,1,1) \\ u_{2'} = \left(u^1, u^2, u^3\right) \cdot (0,1,1) \\ u_{3'} = \left(u^1, u^2, u^3\right) \cdot (0,0,1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{1'} = u^1 + u^2 + u^3 \\ u_{2'} = u^2 + u^3 \\ u_{3'} = u^3 \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} v_{1'} = v^1 + v^2 + v^3 \\ v_{2'} = v^2 + v^3 \\ v_{3'} = v^3 \end{cases}$$

Si on a calculé le tenseur métrique de la nouvelle base, une seconde méthode consiste à passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes, relations (12.5)

p. 204 :

$$G\begin{bmatrix}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{1'} & \mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{2'} & \mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{3'}\\ \mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{1'} & \mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{2'} & \mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{3'}\\ \mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{1'} & \mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{2'} & \mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'}\end{bmatrix} = G\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{1'} = \left(u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\right)\cdot\mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \left(u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\right)\cdot\mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = \left(u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\right)\cdot\mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^{1'}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{1'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = u^{1'}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{2'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = u^{1'}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{3'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{3'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^{1'}g_{1'1'} + u^{2'}g_{2'1'} + u^{3'}g_{3'1'} \\ u_{2'} = u^{1'}g_{1'2'} + u^{2'}g_{2'2'} + u^{3'}g_{3'2'} \\ u_{3'} = u^{1'}g_{1'3'} + u^{2'}g_{2'3'} + u^{3'}g_{3'3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = 3u^{1'} + 2u^{2'} + u^{3'} \\ u_{2'} = 2u^{1'} + 2u^{2'} + u^{3'} \\ u_{3'} = u^{1'} + u^{2'} + u^{3'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = 3u^{1} + 2u^{2} - 2u^{1} + u^{3} - u^{2} \\ u_{2'} = 2u^{1} + 2u^{2} - 2u^{1} + u^{3} - u^{2} \\ u_{3'} = u^{1} + u^{2} - u^{1} + u^{3} - u^{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u_1 + u_2 + u_3 \\ u_{2'} = u_2 + u_3 \\ u_{3'} = u_3 \end{cases}$$

Déterminons le produit scalaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Dans la base d'origine (les composantes contravariantes et covariantes sont confondues) :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Dans la nouvelle base :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_{i'}v^{i'}\\ &= u_{1'}v^{1'} + u_{2'}v^{2'} + u_{3'}v^{3'}\\ &= (u_1+u_2+u_3)\,v_1 + (u_2+u_3)\,(v_2-v_1) + u_3\,(v_3-v_2)\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\end{aligned}$$

ou bien,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u^{i'}v_{i'}\\ &= u^{1'}v_{1'} + u^{2'}v_{2'} + u^{3'}v_{3'}\\ &= u^{1}\,(v_1+v_2+v_3) + (u_2-u_1)\,(v_2+v_3) + (u_3-u_2)\,v_3\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\end{aligned}$$

et le produit scalaire est bien invariant.

Exemple 6.8: Champ de vecteurs en composantes covariantes

Dans le système de coordonnées (x^1, x^2), soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de composantes covariantes $u_1 = x^2$ et $u_2 = x^1$. Quelles sont ses composantes covariantes $(u_{1'}, u_{2'})$ lors du changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x^{1'} = (x^2)^2 \\ x^{2'} = x^1x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \epsilon\sqrt{x^{1'}} \\ x^1 = \epsilon x^{2'}/\sqrt{x^{1'}} \end{cases}$$

où l'on a posé $\epsilon = \pm 1$.

- en notation indicielle

$$\begin{cases} u_{1'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\, u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\, u_2 \\ u_{2'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\, u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\, u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = \dfrac{-\epsilon x^{2'}}{2\left(\sqrt{x^{1'}}\right)^3}\left(\epsilon\sqrt{x^{1'}}\right) + \dfrac{\epsilon}{2\sqrt{x^{1'}}}\dfrac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} = 0 \\ u_{2'} = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{x^{1'}}}\left(\epsilon\sqrt{x^{1'}}\right) + 0 \times \dfrac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} = 1 \end{cases}$$

- en notation matricielle

1) première méthode

D'après (5.18) p. 82, $\mathbf{u}'_{\text{cov}} = (J^{-1})^T \mathbf{u}$, avec $J^{-1}\left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right]_{22}$:

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\epsilon x^{2'}}{2\left(\sqrt{x^{1'}}\right)^3} & \frac{\epsilon}{2\sqrt{x^{1'}}} \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{x^{1'}}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\sqrt{x^{1'}} \\ \frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) seconde méthode

On inverse J donné dans l'ex. 6.4 p. 79 puis on prend la transposée. Nous obtenons $(J^{-1})^T$ en fonction de x^1 et x^2 :

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x^1}{2(x^2)^2} & \frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 6.9: Transformation des coordonnées rectangulaires en polaires

Dans la base naturelle orthonormée associée au système de coordonnées rectangulaire (x, y), soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes covariantes (u_x, u_y). Quelles sont ses composantes covariantes (u_ρ, u_θ) lors d'une transformation en coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$T \quad : \quad \begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta) \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\pi > \theta \geqslant 0$$

D'après (5.5) p. 68 :

$$J = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix}$$

(5.18) p. 82 donne :

$$\mathbf{u}'_{\text{cov}} = \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x\cos(\theta) + u_y\sin(\theta) \\ -u_x\rho\sin(\theta) + u_y\rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Par exemple, si $u_x = 1$ et $u_y = 1$ alors au point de coordonnées polaires $(3, 30°)$:

$$\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\begin{cases} u_\rho = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{e}_\rho \\ u_\theta = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{e}_\rho\| \cos(\mathbf{u}, \boldsymbol{e}_\rho) \\ u_\theta = \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{e}_\theta\| \cos(\mathbf{u}, \boldsymbol{e}_\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \sqrt{2} \times 1 \times \cos(15°) \\ u_\theta = \sqrt{2} \times 3 \times \cos(75°) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ u_\theta = 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\rho = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ u_\theta = \dfrac{3\sqrt{3}-3}{2} \end{cases}$$

Chapitre 6

FORMES QUADRATIQUES

Sommaire

1 Définitions 87
2 Matrice symétrique associée à une forme quadratique 90
3 Réduction de Gauss 92
4 Loi d'inertie de Sylvester 93

1 Définitions

Les carrés des éléments de longueur sont des formes quadratiques (différentielles) dont nous allons donner la définition.

Exemple 1.1: Carré de l'élément de longueur dans le plan

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$$

Définition 1.1: Monôme

Un monôme est un produit de puissances de variables, d'exposants entiers non négatifs, multiplié par un coefficient non nul réel ou complexe.

Exemple 1.2

$5x^7y$ est un monôme à deux variables x, y, de coefficient 5.

Définition 1.2: Degré d'un monôme

Le degré d'un monôme est la somme des exposants de ses variables.

Exemple 1.3

Le monôme $5x^6y^2$ est de degré 8.

Définition 1.3: Polynôme

Un polynôme est une somme dont chaque terme est un monôme.

Exemple 1.4

$5x^6y^2z^3 - 2y^4 + 3$ est un polynôme.

Définition 1.4: Degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes.

Exemple 1.5

$\deg(5x^6y^2z^3 - 2y^4 + 3) = 11$.

Définition 1.5: Polynôme homogène ou forme algébrique

Un polynôme est homogène de degré r si chacun de ses termes et de degré r.

Exemple 1.6

Le polynôme $4x^5z^2 + 3x^3y^4 - xy^3z^3$ est homogène de degré 7.

Définition 1.6: Forme linéaire

On appelle forme linéaire ou fonctionnelle linéaire tout polynôme homogène de degré 1 par rapport à ses n variables $u^1, u^2, \ldots, u^n$:

$$f(u^1, u^2, \ldots, u^n) = a_1u^1 + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n$$

Exemple 1.7

L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$$

est une forme linéaire par rapport à ses trois variables x, y, z. Les scalaires a, b, c sont les coefficients de la forme linéaire.

Définition 1.7: Forme quadratique

On appelle forme quadratique tout polynôme homogène de degré deux par rapport à ses n variables $u^1, u^2, \ldots, u^n$:

$$Q(u^1, u^2, \ldots, u^n) = a_{11}u^1u^1 + a_{12}u^1u^2 + \ldots + a_{1n}u^1u^n + a_{21}u^2u^1 + a_{22}u^2u^2 + \cdots + a_{2n}u^2u^n + \cdots + a_{n1}u^nu^1 + a_{n2}u^nu^2 + \cdots + a_{nn}u^nu^n$$

Nous ne considèrerons que les formes quadratiques sur le corps des réels, c.-à-d. telles que leurs coefficients a_{ij} soient des réels. Les formes quadratiques ne doivent pas être confondues avec les équations du second degré, ces dernières n'ont qu'une seule variable et les termes sont de degré deux ou moins. Nomenclature des formes quadratiques :

Forme quadratique unaire	$Q(x) = ax^2$
Forme quadratique binaire	$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$
Forme quadratique ternaire	$Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + \mathrm{d}y^2 + eyz + fz^2$

Définition 1.8: Forme quadratique définie

Si le vecteur nul $\mathbf{0}$ est le seul vecteur tel que $Q(\mathbf{0}) = 0$ alors Q est définie ou anisotrope. Les signes de Q sont tous positifs ou tous négatifs.

Définition 1.9: Forme quadratique indéfinie

S'il existe un vecteur non nul $\mathbf{v}$ tel que $Q(\mathbf{v}) = 0$ alors Q est indéfinie, et Q et $\mathbf{v}$ sont isotropes. Q contient à la fois des signes positifs et des signes négatifs.

Définition 1.10: Forme quadratique positive

Si pour tout vecteur $\mathbf{u}$ le scalaire $Q(\mathbf{u})$ est positif ou nul, alors Q est positive :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad Q(\mathbf{u}) \geqslant 0$$

Définition 1.11: Forme quadratique négative

Si pour tout vecteur $\mathbf{u}$ le scalaire $Q(\mathbf{u})$ est négatif ou nul, alors Q est négative :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad Q(\mathbf{u}) \leqslant 0$$

Définition 1.12: Forme quadratique définie positive

Une forme quadratique est définie positive ssi elle est définie et positive :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \ : \ Q(\mathbf{0}) = 0$$
$$\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ : \ Q(\mathbf{u}) > 0$$

Exemple 1.8

Dans un système de coordonnées quelconque, le carré de la distance est une forme quadratique définie positive.

Définition 1.13: Forme quadratique définie négative

Une forme quadratique est définie négative ssi elle est définie et négative :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \ : \ Q(\mathbf{0}) = 0$$
$$\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ : \ Q(\mathbf{u}) < 0$$

Une forme quadratique est donc définie ssi elle est définie positive ou définie négative.

Définition 1.14: Forme quadratique semi définie

Une forme quadratique est semi définie ssi elle est positive ou négative :

$$\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ : \ Q(\mathbf{u}) > 0 \quad \text{ou} \quad Q(\mathbf{u}) < 0$$

Exemple 1.9: Forme quadratique définie positive

Montrons que la forme différentielle quadratique Q suivante est définie positive :

$$\begin{aligned} Q &= \mathrm{d}x^2 + 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \tfrac{9}{4}\mathrm{d}y^2 + \tfrac{7}{4}\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= \left(\mathrm{d}x + \tfrac{3}{2}\mathrm{d}y\right)^2 + \tfrac{7}{4}\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \end{aligned}$$

Tous les termes sont des carrés de coefficients positifs, donc Q est positive et n'est nulle que lorsque $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$, par conséquent elle est définie positive.

Exemple 1.10: Forme quadratique non définie positive

La forme quadratique

$$Q\left(x, y, z\right) = 3x^2 - 5xy + y^2 + z^2$$

n'est pas définie positive car $Q(1, 1, 0) = -1$

2 Matrice symétrique associée à une forme quadratique

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ax + by/2 \\ bx/2 + cy \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cxz + \mathrm{d}y^2 + eyz + fz^2 &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

Toute forme quadratique peut s'écrire sous forme matricielle

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{u}^T A \mathbf{u}$$

et sous forme indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}u^j \\ a_{2j}u^j \\ \vdots \\ a_{nj}u^j \end{pmatrix}$$
$$= u^i \left(a_{ij} u^j \right)$$
$$= a_{ij} u^i u^j$$

$$\boxed{\mathbf{u}^T A \mathbf{u} = a_{ij} u^i u^j} \tag{6.1}$$

Montrons que l'on peut toujours remplacer la matrice A par une matrice symétrique. L'égalité $u^i u^j = u^j u^i$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q = {} & a_{11}u^1u^1 + \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})u^1u^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}(a_{1n}+a_{n1})u^1u^n \\ & + \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})u^2u^1 + \cdots + \tfrac{1}{2}(a_{2n}+a_{n2})u^2u^n + \ldots \\ & + \tfrac{1}{2}(a_{1n}+a_{n1})u^nu^1 + \cdots + a_{nn}u^nu^n \end{aligned}$$

Posons la matrice symétrique $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$:

$$b_{11} = a_{11}, \quad b_{12} = b_{21} = \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), \quad \text{etc.}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} Q = {} & b_{11}u^1u^1 + b_{12}u^1u^2 + \cdots + b_{1n}u^1u^n \\ & + b_{12}u^2u^1 + \cdots + b_{2n}u^2u^n + \ldots \\ & + b_{1n}u^nu^1 + \cdots + b_{nn}u^nu^n \end{aligned}$$

et :

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

avec $\forall i, j,\ b_{ij} = b_{ji}$.

Plus généralement, tout polynôme P des $2n$ variables $u^1, u^2, \cdots, u^n$ et $v^1, v^2, \cdots, v^n$,

$$P = a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^1v^2 + \cdots + a_{1n}u^1v^n + a_{21}u^2v^1 + \cdots + a_{2n}u^2v^n + \cdots + a_{n1}u^nv^1 + \cdots + a_{nn}u^nv^n$$

peut s'écrire sous forme matricielle,

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

et sous forme indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}v^j \\ a_{2j}v^j \\ \vdots \\ a_{nj}v^j \end{pmatrix} \\ &= u^i \left(a_{ij} v^j \right) \\ &= a_{ij} u^i v^j \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{u}^T A \mathbf{v} = a_{ij} u^i v^j} \tag{6.2}$$

3 Réduction de Gauss

Par changement de variables, toute forme quadratique réelle (de coefficients réels) peut s'écrire comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires X_i :

$$Q = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \cdots + \lambda_n X_n^2$$

où les coefficients λ_i valent $+1$ ou -1, et la matrice symétrique associée est diagonale.

Exemple 3.1: Réduction de Gauss d'une forme quadratique binaire

Soit la forme quadratique binaire :

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,xy + \frac{b^2}{4a^2}\,y^2 - \frac{b^2}{4a^2}\,y^2\right) + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\,y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} X = \sqrt{|a|}\left[x + \dfrac{b}{2a}\,y\right] \\ Y = \sqrt{\left|c - \dfrac{b^2}{4a}\right|}\,y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(X,Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$

Exemple 3.2: Réduction de Gauss d'une forme quadratique ternaire

Soit la forme quadratique ternaire :

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= xy + yz + xz \\ &= x(y+z) + yz \\ &= (x+z)(y+z) - z^2 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} A = x + z \\ B = y + z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(A,B,z) = AB - z^2$$

Puis on pose

$$\begin{cases} A = X - Y \\ B = X + Y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(X,Y,z) = (X-Y)(X+Y) - z^2$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(A+B) \\ Y = \frac{1}{2}(B-A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}(x+y+2z) \\ Y = \frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}[(x+y+2z) - (y-x)] \times \tfrac{1}{2}[(x+y+2z) + (y-x)] - z^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \tfrac{1}{4}(y-x)^2 - z^2 \end{aligned}$$

4 Loi d'inertie de Sylvester

Définition 4.1: Indices d'inertie

Le nombre p de coefficients $+1$, et le nombre q de coefficients -1 d'une forme quadratique réelle sont appelés indices d'inertie de cette forme quadratique.

Théorème 4.1: Loi d'inertie de Sylvester

Les nombres p et q sont des invariants de la forme quadratique réelle : ils ne dépendent pas du choix des variables.

Définition 4.2: Signature d'une forme quadratique réelle

Le couple (p, q) est appelé signature de la forme quadratique.

Définition 4.3: Rang d'une forme quadratique réelle

La somme $p + q$ est appelée rang de la forme quadratique.

Une forme quadratique définie positive a pour signature $(p, 0)$, une forme quadratique définie négative a pour signature $(0, q)$.

Exemple 4.1: Forme quadratique non définie positive

La forme quadratique

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= 3x^2 - 5xy + y^2 + z^2 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy\right) + y^2 + z^2 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \frac{5^2}{6^2}y^2 - \frac{5^2}{6^2}y^2\right) + y^2 + z^2 \\ &= 3\left(x - \frac{5}{6}y\right)^2 + \left(1 - \frac{75}{36}\right)y^2 + z^2 \\ &= 3X^2 - \left(\frac{13}{12}\right)y^2 + z^2 \end{aligned}$$

a pour indices d'inertie $p = 2$ et $q = 1$, pour rang 4 et pour signature $(2, 1)$.

Chapitre 7

APPLICATIONS LINÉAIRES

Sommaire

1	Définition d'une application linéaire	95
2	Transformations actives et passives	98
3	Isométrie	100
4	Principales transformations linéaires	101
5	Transformation affine	104
6	Application bilinéaire	105
7	Application multilinéaire	106

1 Définition d'une application linéaire

On formalise ici la déf. 1.5 p. 2 d'une application :

Définition 1.1: Application

Soient A et B deux ensembles quelconques. f est une fonction ou une application de A dans B si chaque élément a de l'ensemble de départ A possède une image et une seule b par f dans l'ensemble d'arrivée B :

$$\begin{aligned} f \ &: A \to B \\ &a \mapsto f(a) = b \end{aligned}$$

Notation 1.1

Si a est un élément quelconque de A on écrira $a \in A$.

$$\begin{aligned} f \ &: E \to F \\ &x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Définition 1.2: Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire f de E dans F est une application (ou transformation linéaire ou opérateur linéaire) de E dans F

$$\begin{aligned} f \ : E &\to F \\ \mathbf{u} &\mapsto f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

qui est linéaire :

- additive : $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \quad f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$
- homogène de degré un : $\forall \mathbf{u} \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \odot \mathbf{u}) = \lambda \odot f(\mathbf{u})$

Remarque 1.1

Les deux conditions de linéarité peuvent être remplacées par la seule condition suivante :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \lambda \odot f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$$

Notation 1.2

L'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans E est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Une application linéaire est une application d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel, ou le même. Les espaces de départ et d'arrivée ne sont plus quelconques, ce sont des espaces vectoriels. Elle prend en entrée un vecteur et donne en sortie un vecteur, en conservant les deux opérations de base d'un espace vectoriel, l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire, déf. 1.11 p. 27.

Les applications linéaires préservent la structure d'espace vectoriel. Elles préservent les opérations de combinaison linéaire des vecteurs (déf. 1.2 p. 22) car peu importe qu'elles soient appliquées avant ou après l'addition vectorielle ou la multiplication par un scalaire.

Définition 1.3: Morphisme - Homomorphisme [1]

Un morphisme ou homomorphisme est une application entre deux ensembles structurés par des lois (deux structures algébriques), ces ensembles étant de même type, qui préserve la structure.

Soient deux ensembles munis de lois de composition internes, $(E, \star)$ et $(F, \diamond)$. Une application f est un homomorphisme ssi

$$\begin{aligned} f \ : E &\to F \\ \forall (x, y) \in E^2, \ f(x \star y) &\mapsto f(x) \diamond f(y) \end{aligned}$$

Une application linéaire est donc un homomorphisme d'espace vectoriel. Un homomorphisme bijectif est un isomorphisme.

Définition 1.4: Isomorphisme [2]

Un isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui préserve la structure, et dont la réciproque préserve aussi la structure.

Les ensembles entre lesquels existe un isomorphisme sont dits isomorphes ou équivalents, ils sont structurellement identiques et ne diffèrent que par leur nomenclature. Dans le cas des espaces

vectoriels, les isomorphismes sont les applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel dans l'autre. Une application linéaire bijective de E dans F est donc un isomorphisme de E sur F.

Définition 1.5: Endomorphisme

Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme [a] de E.

a. « Endo » signifiant « dans ».

Dans la condition d'homogénéité de degré un, posons $\lambda = 0$. En utilisant 1.3 p. 26 :

$$f(0 \odot \mathbf{u}) = 0 \odot f(\mathbf{u})$$
$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Si f est linéaire alors $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Autrement dit, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ est une condition nécessaire pour que f soit linéaire. Toute application linéaire donne du vecteur nul une image qui est le vecteur nul.

Nous n'avons besoin que de transformer les vecteurs de base. En effet, la transformation linéaire d'un vecteur $\mathbf{u}$ quelconque s'écrit :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f\left(u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n\right) \\ &= u^1 f(\mathbf{e}_1) + u^2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + u^n f(\mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

Exemple 1.1: Homothétie vectorielle

Soit α un scalaire. L'homothétie vectorielle de rapport α,

$$\begin{aligned} h : E &\to E \\ \mathbf{x} &\mapsto \alpha \odot \mathbf{x} \end{aligned}$$

est une application linéaire. En effet :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \alpha \odot \mathbf{x} \\ h(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) &= \alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \\ &= (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y}) \\ &= h(\mathbf{x}) \oplus h(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} h(\lambda \odot \mathbf{x}) &= \alpha \odot (\lambda \odot \mathbf{x}) \\ &= \alpha\lambda \odot \mathbf{x} \\ &= \lambda \odot (\alpha \odot \mathbf{x}) \\ &= \lambda \odot h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Exemple 1.2: Application dérivation

Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables, et soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application dérivation,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\to \mathcal{F} \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

qui à toute fonction f de $\mathcal{D}$ associe sa dérivée f' de $\mathcal{F}$, est linéaire. En effet, la dérivée de la somme de deux fonctions est la somme de leur dérivée,

$$(f+g)' = f' + g'$$

et la dérivée d'une fonction multipliée par un scalaire est égale à ce scalaire multiplié par la dérivée de cette fonction :

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Exemple 1.3: Application intégration

Soit $\mathcal{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ intégrables, et soit $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. L'application intégration indéfinie avec un point de départ d'intégration a fixé,

$$\mathcal{I} \to \mathbb{D}$$
$$f(x) \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

qui à toute fonction de $\mathcal{I}$ associe son intégrale indéfinie de a à x, est linéaire. En effet,

$$\int_a^x [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

et :

$$\int_a^x [\lambda f(t)]\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

2 Transformations actives et passives

Tout système d'équations linéaires (déf. 1.1 p. 51),

$$\begin{cases} a_{11}\,u^1 + a_{12}\,u^2 = v^1 \\ a_{21}\,u^1 + a_{22}\,u^2 = v^2 \end{cases}$$

est une application linéaire de chaque vecteur $\mathbf{u}(u^1,u^2)$ vers son vecteur image $\mathbf{v}(v^1,v^2)$. Sous forme matricielle, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$
$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Sous forme indicielle :

$$\forall j \qquad a_{ij}u^i = v^j$$

On vérifie que l'on a bien les propriétés d'additivité et d'homogénéité de degré un qui caractérisent les applications linéaires :

$$A(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2) = A(\mathbf{u}_1) + A(\mathbf{u}_2) \qquad \text{et} \qquad A(\lambda\mathbf{u}) = \lambda A(\mathbf{u})$$

L'application étant bijective :

$$\det A \neq 0$$

Les transformations linéaires peuvent être interprétées de deux façons. Pour donner une représentation graphique à l'action d'une matrice sur un vecteur, nous supposerons que les inconnues sont les composantes contravariantes d'un vecteur, c.-à-d. les coordonnées des points aux extrémités des vecteurs.

a) transformation ponctuelle linéaire

(v^1, v^2) sont les coordonnées du point Q image du point $P(u^1, u^2)$ dans le même système de coordonnées. On parle de l'aspect *alibi*[3] de la transformation, ou bien d'une *transformation active*. La plupart du temps on supposera que l'on effectue cette transformation.

Exemple 2.1: Transformation d'un vecteur - aspect alibi

Le système d'équations

$$\begin{cases} v^1 = \frac{1}{2}\,u^1 - 4u^2 \\ v^2 = \frac{1}{3}\,u^1 + u^2 \end{cases}$$

transforme le vecteur $P(2,1)$ en son image $Q(-3, {}^5\!/_3)$.

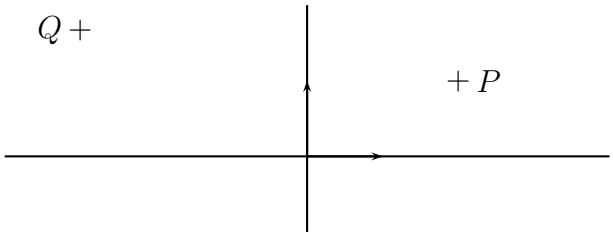


FIG. 7.1 – Transformation active : le point P passe ailleurs, en Q

b) changement de système de coordonnées

(v^1, v^2) sont les coordonnées du même point P dans un nouveau système de coordonnées. On parle alors de l'aspect *alias*[4] de la transformation, ou bien d'une transformation *passive*. Les deux systèmes de coordonnées sont reliés par la relation $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$.

Exemple 2.2: Transformation d'un vecteur - aspect alias

Pour trouver dans l'ancien système de coordonnées, les composantes du vecteur de base $(1,0)$ de ce nouveau système, on résoud le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\,u^1 - 4\,u^2 \\ 0 = \frac{1}{3}\,u^1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) u^1 \\ u^2 = -\frac{1}{3}\,u^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{6}{11} \\ u^2 = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

Pour trouver le vecteur de base de coordonnées $(0,1)$ on résoud le système :

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}\,u^1 - 4u^2 \\ 1 = \frac{1}{3}\,u^1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = 8u^2 \\ 1 = \left(\frac{8}{3} + 1\right) u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{24}{11} \\ u^2 = \frac{3}{11} \end{cases}$$

3. du latin « ailleurs ».
4. du latin « autrement ».

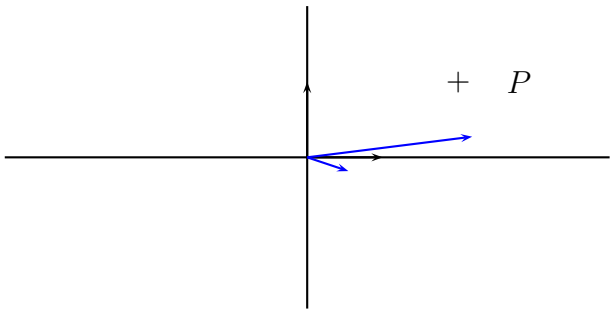


FIG. 7.2 – Transformation passive : P vu autrement

Remarque 2.1

Un changement de système de coordonnées est une transformation de coordonnées passive et n'est pas une transformation de coordonnées active. Changement (de système) de coordonnées et transformation de coordonnées ne sont donc pas synonymes.

En appliquant une transformation linéaire à un système de coordonnées rectangulaires, on obtient un système de coordonnées dont les lignes de coordonnées sont rectilignes et, le plus souvent (lorsque la transformation n'est pas une simple rotation), obliques (Fig. 7.2).

3 Isométrie

Une isométrie ou transformation orthogonale est une transformation linéaire qui conserve la norme des vecteurs :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 \\ \mathbf{u}^T\mathbf{u} &= \mathbf{v}^T\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{u} \\ &= A^T A\|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

La matrice A est donc telle que :

$$AA^T = A^T A = I$$

La transposée de A est donc égale à son inverse :

$$\begin{cases} AA^T = I \\ AA^{-1} = I \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A^T = A^{-1}$$

Définition 3.1: Matrice orthogonale

Une matrice est orthogonale ssi elle est inversible et son inverse est égale à sa transposée.

Montrons que le déterminant d'une matrice orthogonale est de carré unité :

$$AA^T = I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \end{cases}$$

La réciproque est fausse, il existe des matrices de déterminant ± 1 qui ne sont pas orthogonales.

- si $\det A = +1$ la matrice est dite *directe*. Par exemple les matrices identité et les matrices rotation d'un angle θ autour d'un axe Δ quelconque sont des matrices directes.
- si $\det A = -1$ la matrice est dite *indirecte*.

Le signe du déterminant d'une matrice orthogonale est appelée sa signature.

4 Principales transformations linéaires

Les principales transformations linéaires sont les rotations, les inversions, les changements d'échelle, les réflexions, les transvections, et toutes les combinaisons des ces transformations, que l'on obtient par multiplication matricielle (généralement non commutative).

4.1 Rotation

Une rotation est toujours dans un plan.

- transformation passive : rotation d'une base

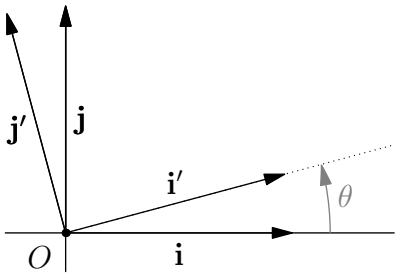


FIG. 7.3 – Rotation d'une base autour du point O d'un angle θ dans le sens trigonométrique

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos(\theta) + \mathbf{j}\sin(\theta) \\ \mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin(\theta) + \mathbf{j}\cos(\theta) \end{cases}$$

La matrice $R_O(\theta)$ rotation autour du point O s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

La matrice $R_z(\theta)$ rotation d'une base d'un angle θ dans le sens trigonométrique autour de l'axe des z s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les rotations sont des isométries de signature $\det(R) = 1$.

- transformation active : rotation d'un vecteur

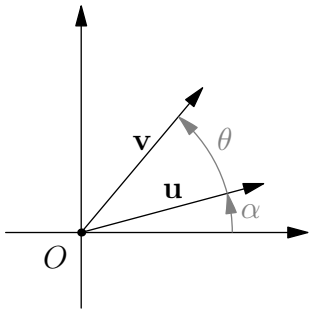


FIG. 7.4 – Rotation d'un vecteur autour d'un point O d'un angle θ dans le sens trigonométrique

$$\begin{cases} v^1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha + \theta) \\ v^2 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^1 = \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha)\cos(\theta) - \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha)\sin(\theta) \\ v^2 = \|\mathbf{u}\| \sin(\alpha)\cos(\theta) + \|\mathbf{u}\| \sin(\theta)\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v^1 = u^1 \cos(\theta) - u^2 \sin(\theta) \\ v^2 = u^2 \cos(\theta) + u^1 \sin(\theta) \end{cases}$$

En notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

On retrouve le fait qu'une rotation d'angle θ d'une base correspond à une rotation d'angle $-\theta$ des autres vecteurs.

4.2 Inversion

Une inversion ou symétrie centrale est une symétrie par rapport à un point fixe appelé centre de symétrie. Elle est définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{i} \\ -\mathbf{j} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les inversions sont des isométries de signature $\det(Inv) = -1$.

4.3 Changement d'échelle

Elle est définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{i} \\ \beta\mathbf{j} \\ \gamma\mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les changements d'échelle ne sont pas des isométries, elles ne conservent pas la norme des vecteurs.

4.4 Réflexion ou symétrie orthogonale

En deux dimensions, la réflexion ou symétrie axiale est une symétrie par rapport à une droite. En trois dimensions, la réflexion ou miroir est une symétrie par rapport à un plan.

Exemple 4.1

Symétrie par rapport à l'axe des x :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ -\mathbf{j} \end{pmatrix}$$

Symétrie par rapport à la droite $y = x$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Symétrie par rapport au plan (x, y) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}$$

Les réflexions sont des isométries de signature $\det(Ref) = -1$.

4.5 Transvection

Une transvection ou cisaillement est définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + my \\ y \end{pmatrix}$$

5 Transformation affine

En combinant une transformation linéaire et une translation on obtient une transformation affine :

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$$

où $\mathbf{b}$ est un vecteur constant. Pour $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ce n'est donc pas une transformation linéaire. Cependant nous pouvons quand même l'écrire sous forme matricielle.

Exemple 5.1

Dans le cas d'une simple translation, la transformation linéaire est la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b^1 \\ 0 & 1 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u^1 + b^1 \\ u^2 + b^2 \\ u^3 + b^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées $(u^1, u^2, u^3, 1)$ sont appelées coordonnées homogènes.

6 Application bilinéaire

Définition 6.1: Application bilinéaire

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est une application qui a deux vecteurs, $\mathbf{u}$ dans E et $\mathbf{v}$ dans F, associe un vecteur $\mathbf{w}$ dans G,

$$f : E \times F \to G$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

qui est linéaire pour chacun de ses arguments. $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, (\mathbf{w}, \mathbf{x}) \in F^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

1) B est linéaire pour son premier argument,
   a) additive : $B(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
   b) homogène de degré un : $B(\lambda \odot \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
2) B est linéaire pour son second argument :
   a) additive : $B(\mathbf{u}, \mathbf{w} \oplus \mathbf{x}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{x})$
   b) homogène de degré un : $B(\mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{w}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

Notation 6.1

L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F; G)$. Lorsque $E = F$ il est noté $\mathcal{L}^2_{\mathbb{K}}(E; G)$.

7 Application multilinéaire

Définition 7.1: Application multilinéaire

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et F, $n+1$ espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application multilinéaire, ici n-linéaire, φ de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ dans F est une application qui a n vecteurs $\mathbf{u}_1 \in E_1, \mathbf{u}_2 \in E_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in E_n$, associe un vecteur $\mathbf{v} \in F$,

$$\begin{aligned} f \ : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n &\to F \\ \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n &\mapsto \varphi(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

qui est linéaire pour chacun de ses n arguments.

Notation 7.1

L'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$. Lorsque $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$ il est noté $\mathcal{L}^n_{\mathbb{K}}(E; F)$

Chapitre 8

ESPACES EUCLIDIENS

Sommaire

1	Histoire de la géométrie euclidienne	107
2	Métrique de l'espace euclidien	109
3	Longueur d'une courbe	115
4	Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires	116
5	Norme	119
6	Produit scalaire	123
7	Produit scalaire et norme	127
8	Expression analytique du produit scalaire	127
9	Composantes covariantes	128
10	Covecteurs	129

1 Histoire de la géométrie euclidienne

Vers 300 av. J.-C., le mathématicien grec Euclide d'Alexandrie rédige un traité de mathématique constitué de 13 livres, intitulé *Éléments de géométrie*, dans lequel, entre autres, il axiomatise la géométrie du plan. Il fonde ainsi ce qui à partir du 17^e siècle sera appelée « géométrie pure » ou « géométrie synthétique », c.-à-d. la géométrie sans l'utilisation d'un système de coordonnées. Son système axiomatique est un ensemble de

- notions primitives, qui sont des objets mathématiques tels que les points, les lignes ou les plans, qui n'ont pas de propriétés intrinsèques et dont les définitions importent peu, si ce n'est pour se faire une représentation mentale. En revanche, leurs relations mutuelles sont d'importance pour la théorie
- 5 axiomes (et 5 notions communes qui sont aussi des axiomes) qui sont des propositions concernant les notions primitives, ces propositions étant supposées vraies et non démontrables dans le système en question. Ce sont des abstractions issues du monde physique. Le 5^e axiome est appelé axiome des parallèles et énonce que « Pour une droite donnée et un point n'appartenant pas à cette droite, il n'existe qu'une seule droite passant par ce point et qui ne coupe pas la droite donnée ».

— postulats (ou conjectures) qui sont des propositions démontrables ou non dans le système axiomatique, c.-à-d. qui sont soit des théorèmes du système, soit des indécidables du système.
— définitions
— propositions démontrées, ou théorèmes

En 1899, dans « Grundlagen der Geometrie[1] », le mathématicien allemand David Hilbert donne une formulation rigoureuse et moderne de la géométrie euclidienne. Il montre qu'il faut en fait 20 axiomes pour la géométrie d'Euclide, les axiomes manquants étant contenus implicitement dans les définitions et figures des *Éléments*.

On attend d'un système axiomatique qu'il soit *consistant*, on dit aussi *cohérent*. Il l'est s'il est impossible d'y démontrer une proposition et son contraire, autrement dit si le système ne se contredit pas. Dès lors qu'un système contient une contradiction (ou incohérence) logique, tout peut y être démontré, et ce système perd toute utilité. On souhaite également qu'un système axiomatique soit *complet*, ce qui signifie que pour toute proposition P énonçable et compréhensible dans le système, l'on puisse démontrer P ou non-P, c.-à-d., si ses axiomes nous permettent d'engendrer toutes les vérités logiques (tautologies) exprimables dans ce sytème.

Un *indécidable* d'un système axiomatique S est un énoncé formulable dans S mais dont S ne peut démontrer s'il est vrai ou faux (du type « Je mens. », ou « Cette phrase est fausse. »). S est donc complet s'il ne contient pas d'indécidable. Lorsque l'on découvre un indécidable I dans un système axiomatique S, on peut l'ajouter aux axiomes de ce système et créer ainsi un nouveau système axiomatique S' dans lequel I n'est plus un indécidable.

Vers 1824, les mathématiciens Carl Friedrich Gauss, János Bolyai et Nikolai Ivanovich Lobachevsky développent la *géométrie hyperbolique* dans laquelle le 5^e axiome d'Euclide est remplacé par « Pour une droite donnée et un point n'appartenant pas à cette droite, il existe plus d'une droite passant par ce point et qui ne coupe pas la droite donnée ». En 1868, Eugenio Beltrami montre que la consistance de la géométries euclidienne implique la consistance de la géométrie hyperbolique, et réciproquement. Si la géométrie euclidienne est consistante alors la géométrie hyperbolique l'est aussi. Par conséquent l'axiome des parallèles est indépendant des autres axiomes, il n'est donc pas nécessaire pour former un système axiomatique, en le supprimant on crée la *géométrie absolue*. Dans cette géométrie, l'axiome des parallèles peut être énoncé mais ne peut être démontré, c'est un indécidable. La géométrie absolue est donc incomplète.

En 1931, Kurt Gödel démontre les deux théorèmes qui portent son nom. Le premier théorème de Gödel énonce que tout système formel (dont les systèmes axiomatiques) effectif (dont le nombre d'axiomes est fini) assez puissant (dans lequel on puisse faire de l'arithmétique) est soit inconsistant donc inintéressant puisque tout y est vrai et faux à la fois, soit incomplet, donc contient au moins un indécidable. Les systèmes formels ne peuvent être à la fois consistants et complets. Le second théorème de Gödel énonce que la consistance d'un système formel fait partie de ses indécidables, autrement dit un système consistant ne peut savoir qu'il l'est (un homme saint d'esprit ne peut savoir qu'il l'est, mais il peut le poser comme axiome, ce que fera également un fou). Gödel a donc universalisé l'incomplétude déjà connue pour la géométrie absolue.

Si donc on ajoute un indécidable comme axiome à un système S pour en faire un système S', il existera au moins un autre indécidable I' dans S', qui est aussi un indécidable de S.

En 1637 René Descartes introduit le système de coordonnées rectilignes appelé système de coordonnées cartésien, et montre que les problèmes de géométrie peuvent se résoudre par l'algèbre,

1. Fondements de la géométrie

fondant ainsi la *géométrie analytique*. Si on identifie un point à une paire de nombres réels ordonnés (x_1, x_2), et la distance entre deux points (x_1, x_2) et (y_1, y_2) par $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, alors tous les axiomes d'Euclide peuvent être démontrés, ils deviennent des théorèmes de la théorie des nombes réels. En 1870 Félix Klein fait de même et construit une geométrie analytique pour la géométrie hyperbolique. Ce n'est qu'en 1957 qu'Emil Artin démontrera que les approches synthétique et analytique sont équivalentes.

L'étape suivante consiste à remplacer les points par des vecteurs (chapitre 3 p. 21) et à introduire un produit scalaire (chapitre 6 p. 123) pour avoir une distance et un angle. Nous formons alors les espaces vectoriels (chapitre 18 p. 355) qui permettent de définir les espaces pré-euclidiens (euclidiens et pseudo-euclidiens) qui sont des espaces plats, sans passer par les axiomes d'Euclide. Rappelons que la notion de vecteur position dans un espace n'est applicable que si cet espace est plat.

2 Métrique de l'espace euclidien

2.1 Coordonnées rectangulaires ou cartésiennes normales

Dans ce système de coordonnées les lignes de coordonnées sont des droites qui se coupent à angle droit. Ces systèmes de coordonnées ne sont possibles que dans les espaces plats, c.-à-d. pré-euclidien (euclidiens ou pseudo-euclidiens).

Dans le plan, en coordonnées rectangulaires (x, y) le carré de la longueur, appelée *métrique*, est donné par le théorème de Pythagore :

$$s^2 = x^2 + y^2$$

C'est la *forme quadratique associée au plan en coordonnées rectangulaires* :

$$Q(x, y) = x^2 + y^2$$

D'après le § 4 p. 93, cette forme quadratique a pour signature $(2, 0)$ et pour rang 2. D'après la déf. 1.12 p. 89, elle est définie positive. La loi d'inertie de Sylvester nous dit qu'elle sera définie positive quel que soit le système de coordonnées employé. La métrique s'écrit :

$$s^2 = g_{xx}x^2 + g_{yy}y^2$$

Les coefficients de la métrique, $g_{xx} = 1$ et $g_{yy} = 1$, sont les composantes du *tenseur métrique* du plan en coordonnées rectangulaires. En notation matricielle :

$$s^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notation 2.1

En notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$s^2 = \delta_{ij}x^i x^j$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (déf. 3.1 p. 18).

Un tenseur métrique dont toutes les composantes sont constantes n'est possible que dans les espaces plats (euclidiens et pseudo-euclidiens).

On généralise à l'espace à trois dimensions, en coordonnées rectangulaires (x, y, z) la métrique est donnée par la double application du théorème de Pythagore, d'abord dans un plan puis dans l'espace :

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= g_{xx}x^2 + g_{yy}y^2 + g_{zz}z^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \delta_{ij}x^i x^j \end{aligned}$$

g_{xx}, g_{yy}, g_{zz} sont les composantes du tenseur métrique de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires. La forme quadratique associée à l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

a pour signature $(3, 0)$ et pour rang 3. La signature est souvent donnée sous forme explicite $(+++)$. Elle est définie positive. La métrique de l'espace de la physique newtonienne est donc une forme quadratique définie positive. Pour pouvoir l'intégrer le long d'une courbe, la métrique est donnée sous forme différentielle :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

$\mathrm{d}s^2$ est le carré de l'élément de longueur (élémentaire dans le sens de infinitésimal).

Remarque 2.1

L'opérateur carré est prioritaire sur celui de différentiation ou de dérivation. Ainsi $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}(x^2)$ et non $(\mathrm{d}x)^2$, et l'on a par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} &= 2x \\ \mathrm{d}x^2 &= 2x\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\mathrm{d}x^2$ est donc un infiniment petit du premier ordre. En toute rigueur il faudrait donc écrire

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

pour le carré de la distance infinitésimale qui est un infiniment petit du deuxième ordre (alors que $\mathrm{d}s$ est un infiniment petit du premier ordre). Néanmoins nous supprimons les parenthèses pour alléger la notation, la confusion étant peu probable.

2.2 Coordonnées cartésiennes

Dans ce système de coordonnées cartésiennes (rectilignes), les lignes de coordonnées sont des droites. Dans l'espace ponctuel ${}_E n$, soit M un point de coordonnées $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Supposons que l'on puisse écrire les n équations suivantes,

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad x^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

où les n fonctions f (et par conséquent les n fonctions g qui suivent) sont des fonctions continument différentiables des n variables y. Supposons également que le déterminant fonctionnel de ce système d'équation soit non nul, autrement dit supposons que ces fonctions soient indépendantes les unes des autres de sorte que l'on puisse résoudre les n équations précédentes et écrire :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad y^i = g^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

Si les fonctions f sont toutes linaires alors les systèmes de coordonnées (x^i) et (y^i) sont rectilignes, sinon, au moins l'un des deux systèmes est curviligne.

Montrons ici que ces systèmes de coordonnées peuvent toujours se ramener par changement de variables à un système de coordonnées rectangulaires. Rappelons que les coordonnées cartésiennes ne sont possibles que dans les espaces plats c.-à-d. pré-euclidiens (euclidiens et pseudo-euclidiens).

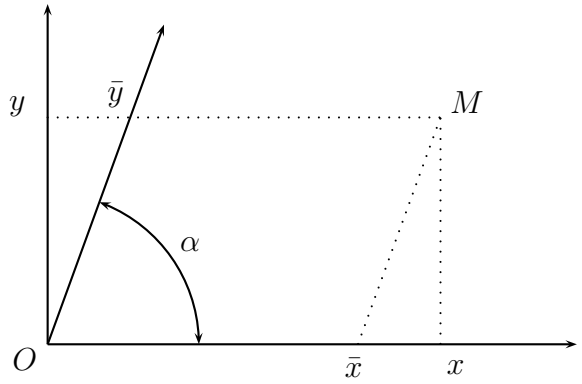


Fig. 8.1 – Coordonnées rectangulaires (x, y) et cartésiennes $(\bar{x}, \bar{y})$

Transformation des coordonnées cartésiennes en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}\cos(\alpha) \\ y = \bar{y}\sin(\alpha) \end{cases}$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en cartésiennes

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} \bar{x} = x - \bar{y}\cos(\alpha) \\ \bar{y} = \dfrac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{x} = x - \dfrac{y}{\tan\alpha} \\ \bar{y} = \dfrac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes la métrique du plan s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\, d\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\, d\bar{y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\, d\bar{x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{y}}\, d\bar{y}\right)^2 \\ &= [d\bar{x} + \cos(\alpha) d\bar{y}]^2 + [\sin(\alpha) d\bar{y}]^2 \\ &= \mathrm{d}\bar{x}^2 + 2\cos(\alpha) d\bar{x} d\bar{y} + \cos^2(\alpha) d\bar{y}^2 + \sin^2(\alpha) d\bar{y}^2 \\ &= \mathrm{d}\bar{x}^2 + 2\cos(\alpha) d\bar{x} d\bar{y} + d\bar{y}^2 \end{aligned} \tag{8.1}$$

En coordonnées cartésiennes (et cartésiennes normales), la métrique est une somme à coefficients constants, ici 1 puis $2\cos(\alpha)$ et à nouveau 1. Une conséquence de la réduction de Gauss est que la métrique en coordonnées cartésiennes peut toujours se ramener à une métrique en coordonnées rectangulaires.

Sous forme différentielle, la métrique s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\bar{x}\bar{x}} d\bar{x}^2 + 2 g_{\bar{x}\bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} + g_{\bar{y}\bar{y}} d\bar{y}^2$$

$g_{\bar{x}\bar{x}}, g_{\bar{x}\bar{y}}, g_{\bar{y}\bar{y}}$ sont les composantes (constantes, c.-à-d. non fonction des coordonnées) du tenseur métrique du plan en coordonnées cartésiennes.

2.3 Coordonnées curvilignes

Dans ce système de coordonnées qui peut être orthogonal ou oblique, les lignes de coordonnées ne sont pas des droites. Au moins un coefficient de la métrique (une composante du tenseur métrique) est fonction des coordonnées. La métrique ne peut être donnée que sous forme différentielle car elle varie d'un point à l'autre.

2.4 Coordonnées orthogonales

Dans ce système de coordonnées qui peut être rectiligne ou curviligne, les lignes de coordonnées se coupent à angle droit. La métrique ne contient que des carrés, elle n'a pas de terme croisé (ou rectangle), du type xy.

2.5 Coordonnées obliques

Dans ce système de coordonnées qui peut être rectiligne ou curviligne, les lignes de coordonnées ne se coupent pas à angle droit. La métrique contient au moins un terme croisé.

2.6 Coordonnées polaires

C'est l'archétype des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales du plan. En faisant varier la distance radiale à l'origine ρ et l'angle θ on parcourt l'ensemble des points du plan. Les coordonnées polaires (ρ, θ) forment donc un système de coordonnées pour le plan. Pour le mettre en place, il faut se donner les mêmes éléments que pour le système de coordonnées rectangulaires en deux dimensions, c.-à-d. deux points du plan (le centre du système et une direction) et une unité de longueur. Il n'est pas nécessaire de se donner une unité d'angle car le tour et ses fractions sont des unités naturelles, en revanche il faut se donner une orientation (un

sens de parcours positif pour les angles). Ce système de coordonnées est dégénéré (déf. 1.11 p. 4) à l'origine des coordonnées, en ce point l'angle θ est indéterminé, cependant la dégénéréscence est facilement levée en passant en coordonnées rectangulaires.

La transformation des coordonnées polaires en rectangulaires est donnée en (3.2) p. 39. La transformation des coordonnées rectangulaires en polaires s'écrit :

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} \rho\,(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta\,(x,y) = \operatorname{atan2}(y,x) \end{cases} \qquad \text{avec } \operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \text{ si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi \text{ si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ +\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \text{indéfinie si } x = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

En coordonnées polaires la métrique du plan s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta\right)^2 \\ &= \left[\cos(\theta)\mathrm{d}\rho - \rho\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\right]^2 + \left[\sin(\theta)\mathrm{d}\rho + \rho\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\right]^2 \\ &= \cos^2(\theta)\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta^2 - 2\rho\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta^2 + 2\rho\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 \\ &= g_{\rho\rho}\mathrm{d}\rho^2 + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

$g_{\rho\rho} = 1$ et $g_{\theta\theta} = \rho^2$ sont les composantes du tenseur métrique du plan en coordonnées polaires. La composante $g_{\theta\theta}$ est fonction de la coordonnée ρ. Le changement de coordonnées polaires en rectangulaires (3.2) p. 39 permet de retrouver un tenseur métrique avec des composantes constantes, caractéristiques d'un espace plat.

2.7 Coordonnées cylindriques

Elles sont identiques aux coordonnées polaires, avec la coordonnée supplémentaire z. C'est un système de coordonnées curvilignes orthogonales pour l'espace plat à trois dimensions. Lorsqu'on l'utilise en deux dimensions pour une surface cylindrique en fixant ρ, le centre du système de coordonnées n'appartient pas au cylindre. Pour que le centre du système de coordonnées soit sur la surface cylindrique, on peut la dérouler pour en faire un plan, et utiliser les coordonnées rectangulaires ou polaires à sa surface. Les lignes de coordonnées sont alors des droites du plan, mais aussi des courbes dans l'espace à trois dimensions dans lequel est plongé le cylindre.

Transformation des coordonnées cylindriques en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \\ z = z' \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi, \qquad -\infty < z' < +\infty$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en cylindriques

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \text{atan2}(y, x) \\ z' = z \end{cases}$$

La surface de coordonnée $\rho = c^{ste}$ est le cylindre d'axe z.
La surface de coordonnée $\phi = c^{ste}$ est le demi-plan limité par l'axe z.
La surface de coordonnée $z' = c^{ste}$ est le plan parallèle au plan (x, y).

En coordonnées cylindriques la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial x}{\partial z'}\,\mathrm{d}z'\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial y}{\partial z'}\,\mathrm{d}z'\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial z}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi + \frac{\partial z}{\partial z'}\,\mathrm{d}z'\right)^2 \\ &= [\cos(\phi)\mathrm{d}\rho - \rho\sin(\phi)\mathrm{d}\phi]^2 + [\sin(\phi)\mathrm{d}\rho + \rho\cos(\phi)\mathrm{d}\phi]^2 + \mathrm{d}z'^2 \\ &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2 \end{aligned} \tag{8.3}$$

2.8 Coordonnées sphériques

C'est aussi un système de coordonnées curvilignes orthogonales pour l'espace plat à trois dimensions. Lorsqu'on l'utilise en deux dimensions sur une sphère en fixant le rayon r, le centre du système de coordonnées n'appartient pas à la sphère. Contrairement au cylindre, nous ne pouvons pas dérouler la sphère pour en faire un plan.

Transformation des coordonnées sphériques en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < \pi, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en sphériques

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{atan2}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \\ \phi = \text{atan2}\left(y, x\right) \end{cases}$$

Pour trouver l'expression de la métrique en coordonnées sphériques, partons de son expression en coordonnées rectangulaires :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

En différentiant la transformation T :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \partial_r x\,\mathrm{d}r + \partial_\theta x\,\mathrm{d}\theta + \partial_\phi x\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}y = \partial_r y\,\mathrm{d}r + \partial_\theta y\,\mathrm{d}\theta + \partial_\phi y\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z = \partial_r z\,\mathrm{d}r + \partial_\theta z\,\mathrm{d}\theta + \partial_\phi z\,\mathrm{d}\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z = \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

La somme des carrés donne l'expression cherchée :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{8.4}$$

Transformation des coordonnées sphériques en cylindriques, et cylindriques en sphériques

$$\begin{cases} \rho = r\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \\ \phi = \phi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(\rho, z) \\ \phi = \phi \end{cases}$$

Dans un *système de coordonnées générales*, la métrique de l'espace euclidien en trois dimensions s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2 + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + 2g_{13}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 + g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2 + 2g_{23}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2 \\ &= g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \end{aligned}$$

g_{ij} est ici le *tenseur métrique euclidien.*

3 Longueur d'une courbe

Dans l'espace euclidien de dimension trois, la longueur Γ d'une courbe décrite par un point M entre les abscisses curvilignes s_0 et s_1 telles que $s_1 > s_0$ est donnée par l'intégrale de l'élément de métrique $\mathrm{d}s$ de l'espace euclidien. En coordonnées rectangulaires (x, y, z) :

$$\begin{aligned} \Gamma &\overset{\text{def}}{=} \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s \\ &= s_1 - s_0 \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} \end{aligned}$$

4 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires

À partir de la déf. 3.1 p. 9, montrons que les géodésiques du plan sont des droites.

Exemple 4.1

Dans le plan cherchons l'équation $y = y(x)$ d'une géodésique entre les points A et B :

$$\delta \int_A^B \mathrm{d}s = 0$$
$$\delta \int_A^B \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2(x)} = 0$$
$$\delta \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2(x)}{\mathrm{d}x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y^2(x)}{\mathrm{d}x^2} = c^{ste}$$
$$y(x) = ax + b$$

où a et b sont des constantes.
Cherchons l'équation de la géodésique sous forme paramétrique, de paramètre p :

$$\delta \int_A^B \mathrm{d}s(p) = 0$$
$$\delta \int_A^B \sqrt{\mathrm{d}x^2(p) + \mathrm{d}y^2(p)} = 0$$
$$\delta \int_{p_A}^{p_B} \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2(p)}{\mathrm{d}p^2} + \frac{\mathrm{d}y^2(p)}{\mathrm{d}p^2}}\,\mathrm{d}p = 0$$

Si l'intégrale d'une fonction est extrémale, il en va de même du carré de cette fonction ou de n'importe quelle puissance de cette fonction :

$$\delta \int_A^B F\,\mathrm{d}p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta \int_A^B F^2\,\mathrm{d}p = 0$$

Remarque 4.1

De façon générale, on peut remplacer la fonction dans l'intégrale par une fonction monotone (fonction croissante ou décroissante) de cette fonction sur l'intervalle $[A, B]$:

$$\delta \int_A^B F\,\mathrm{d}p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta \int_A^B f(F)\,\mathrm{d}p = 0$$

Notation 4.1

Dans ce qui suit nous désignons par un point la dérivée par rapport à un paramètre p quelconque.

Posons $x = x^1$ et $y = x^2$, et prenons le lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \dot{x}^2(p) + \dot{y}^2(p) \\ &= (\dot{x}^1)^2(p) + (\dot{x}^2)^2(p)\end{aligned}$$

en conservant la condition $\mathcal{L} \geqslant 0$. Nous obtenons le système des deux équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}\forall i = 1, 2 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(2\dot{x}^i\right) &= 0 \\ \ddot{x}^i &= 0\end{aligned}$$

L'accélération par rapport au paramètre p est nulle. Pas celle par rapport au temps t car le temps peut être une fonction quelconque de p. Soient a, b, c_1, c_2, c_3, c_4 des constantes :

$$\begin{aligned}x = c_1 p + c_2 \qquad \text{et} \qquad y = c_3 p + c_4 \\ p = \frac{x - c_2}{c_1} \\ y = c_3 \frac{x - c_2}{c_1} + c_4 \\ = ax + b\end{aligned}$$

Une trajectoire, une fois parcourue, n'est ni fonction du temps, ni fonction de l'abscisse curviligne. N'importe quel paramètre permet de la définir. L'intérêt du paramètre temps est d'utiliser les instants initial et final, l'intérêt de l'abscisse curviligne est d'utiliser les positions initiale et finale.

Exemple 4.2: Divers paramétrisations d'une fonction

La fonction $y = \sin(x^2 + 1)$ peut être paramétrée de plusieurs façons :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sin(t^2 + 1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin(x + 1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \sin(x) \end{cases}$$

Lorsque la courbe est régulière (cf. § 19 p. 250), nous passons librement d'un paramètre quelconque à une paramétrisation par l'abscisse curviligne. Prenons le point origine en p_0, soit $s(p_0) = 0$. Elle a alors pour expression en fonction du paramètre p

$$s(p) = \int_{p_0}^{p} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}}\, \mathrm{d}p$$

et la courbe entre p_0 et p_1 a pour longueur :

$$\Gamma = s(p_1)$$

Le passage du paramètre p à l'abscisse curviligne s s'effectue grâce à la relation :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} = \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}}$$

Exemple 4.3: Changement de paramètre d'une courbe

Soit la courbe paramétrique de paramètre t :

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3 \\ \dot{y} = 4 \end{cases}$$

où le point désigne la dérivation par rapport à t.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{3^2 + 4^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 5t \end{aligned}$$

Cette relation permet de paramêtrer la courbe avec l'abscisse curviligne :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3s}{5} - 1 \\ y = \dfrac{4s}{5} + 2 \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes, supposons que les coordonnées x et y soient fonction du paramètre t. (8.1) p. 112 donne la longueur d'une courbe $\mathscr{C} : x = x(t); y = y(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\mathrm{d}x^2(t) + 2\cos(\alpha)\mathrm{d}x(t)\mathrm{d}y(t) + \mathrm{d}y^2(t)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\cos(\alpha)\,\frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En coordonnées polaires, supposons que les coordonnées ρ et θ soient fonction du paramètre t. La longueur d'une courbe $\mathscr{C} : \rho = \rho(t); \theta = \theta(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\mathrm{d}\rho^2(t) + \rho^2\mathrm{d}\theta^2(t)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

4.0.1 Angle entre deux vecteurs

En partant de la définition géométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Pour un espace euclidien, donc de métrique définie positive, à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz 5.3 p. 122 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \\ \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} &\leqslant 1 \\ -1 \leqslant \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} &\leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) &\leqslant 1 \end{aligned}$$

L'angle $(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$ des deux vecteurs existe, est unique et compris entre 0 et π :

$$0 \leqslant (\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) \leqslant \pi$$

5 Norme

5.1 Norme euclidienne

Dans un système de coordonnées rectangulaire d'un espace vectoriel euclidien E_n, le théorème de Pythagore donne la longueur d'un vecteur quelconque $\mathbf{u}(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, appelée *norme euclidienne* de ce vecteur et notée $\|.\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + \cdots + (u^n)^2} \\ &= \sqrt{\delta_{ij}u^i u^j} \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dans l'espace vectoriel euclidien en coordonnées quelconques :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{g_{ij}u^i u^j}$$

Posons $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$. On retrouve la distance euclidienne déf. 7.3 p. 13 avec (8.6) en posant $d(A,B) = \|\mathbf{AB}\|$ (une égalité vraie dans un système de coordonnées et vraie dans tout système de coordonnées).

5.2 Définition d'une norme

On définit une norme par ses propriétés.

Définition 5.1: Norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application :

$$\begin{aligned} N \ : \ E &\to \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{u} &\mapsto N(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

est une norme si elle satisfait aux propriétés suivantes :

- séparation : $\forall \mathbf{u} \in E, \quad N(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- positive homogénéité de degré un : $\forall (\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times E, \quad N(\alpha \odot \mathbf{u}) = |\alpha| \times N(\mathbf{u})$

- inégalité triangulaire : $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in E^2, \quad N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v}) \geqslant N(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})$

Remarque 5.1

La définition de la norme ne nécessite pas l'existence d'un produit scalaire.

Théorème 5.1

La norme du vecteur zéro est nulle.

Démonstration. À partir de l'homogénéité, pour $\alpha = 0$:

$$N(0 \odot \mathbf{u}) = |0| \times N(\mathbf{u})$$
$$N(\vec{0}) = 0$$

□

Théorème 5.2

La norme est toujours positive ou nulle.

Démonstration. À partir de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité, nous tirons la propriété de *non-négativité* :

$$N(\mathbf{u}) + N(-\mathbf{u}) \geqslant N(\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}))$$
$$N(\mathbf{u}) + |-1|N(\mathbf{u}) \geqslant N(\mathbf{0})$$
$$N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{u}) \geqslant 0$$
$$N(\mathbf{u}) \geqslant 0$$

□

On vérifie que la norme euclidienne $\|\cdot\|$ est bien une norme :

- séparation

$$\|\mathbf{u}\| = 0$$
$$\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} = 0$$
$$u^1 = u^2 = u^3 = 0$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- homogénéité

$$\begin{aligned}\|\alpha \odot \mathbf{u}\| &= \sqrt{(\alpha \times u^1)^2 + (\alpha \times u^2)^2 + (\alpha \times u^3)^2} \\ &= |\alpha| \times \|\mathbf{u}\|\end{aligned}$$

- inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 \\ &= \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &\leqslant \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \\ &\leqslant (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

Définition 5.2: Vecteur normé

On appelle vecteur normé ou vecteur unitaire, un vecteur de norme unité. En divisant un vecteur $\mathbf{u}$ par sa norme, on obtient un vecteur normé :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$
$$\|\mathbf{e}\| = 1$$

5.3 Pseudo-norme

Dans un espace vectoriel pseudo-euclidien, le pseudo-produit scalaire est indéfini, le carré de la norme d'un vecteur peut être positif, négatif ou nul, nous parlerons alors de *pseudo-norme*. Dans ces espaces nous devons distinguer les vecteurs nuls du vecteur zéro, alors qu'ils sont confondus dans les espaces euclidiens.

Définition 5.3: Vecteur zéro

On appelle vecteur zéro, et on note $\vec{0}$, le vecteur dont toutes les composantes sont nulles

$$\vec{0}(0, 0, \dots)$$

La norme du vecteur zéro est nulle : $\|\mathbf{0}\| = 0$

Définition 5.4: Vecteur nul

On appelle vecteur nul, tout vecteur différent du vecteur zéro, dont la norme est nulle

$$\forall \mathbf{u} \neq \vec{0}, \qquad \|\mathbf{u}\| = 0$$

Exemple 5.1: Quadrinorme relativiste

Dans un système de coordonnées rectangulaire de l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte, la 4-norme d'un vecteur quelconque $\mathbf{x}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{|(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2|} \\ &= \sqrt{\varepsilon\left[(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\right]}\end{aligned}$$

où ε est la fonction indicatrice (déf. 16.1 p. 247). Cette définition nous assure que $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, mais il est possible d'avoir $\|\mathbf{x}\| = 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. La 4-norme est donc une pseudo-norme. Par exemple, soit a une constante. Si

$$x^0 = a, \qquad x^1 = a, \qquad x^2 = 0, \qquad x^3 = 0$$

alors la 4-norme est nulle et $\mathbf{x}$ est un vecteur nul :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{a^2 - a^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

5.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 5.3: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien* E_n *:*

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Démonstration. $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in E_n$, formons le carré de la norme du vecteur $\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})^2 &= (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\\ &= \lambda\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\\ &= (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot\lambda\mathbf{u} + (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\\ &= \lambda\mathbf{u}\cdot\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \lambda^2\mathbf{u}^2 + 2\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}^2 \qquad (8.7)\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})^2 &\geqslant 0\\ \mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2 &\geqslant 0\end{aligned}$$

C'est un trinôme de degré deux en λ, où λ est ici la variable et non un paramètre. Il a pour signe celui de $-\lambda^2$, donc négatif, entre les racines λ_1 et λ_2. Donc il est positif ou nul ssi son discriminant est négatif (pas de racine) ou nul (une racine double). Prenons le discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta' &\leqslant 0\\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 &\leqslant 0\\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 &\leqslant \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2\\ |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

□

Si de plus $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont proportionnels :

$$\begin{aligned}\exists!\lambda\in\mathbb{R},\quad \lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v} &= \mathbf{0}\\ (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})^2 &= 0\\ \mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2 &= 0\end{aligned}$$

λ étant unique, le discriminant réduit est nul :

$$\begin{aligned}\Delta' &= 0\\ |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

Réciproquement, en partant de l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 &= 0\\ \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2 &= 0 \text{ avec } \Delta' = 0\end{aligned}$$

Avec (8.7) p. 122 :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 = 0$$
$$\lambda \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Les vecteurs sont proportionnels.

Théorème 5.4: Inégalité triangulaire ou de Minkowski

$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E_n^2$:

$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Démonstration. Prenons (8.7) p. 122 pour $\lambda = 1$:

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2$$
$$\leqslant \mathbf{u}^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + \mathbf{v}^2$$

Majorons $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, th. 5.3 p. 122 :

$$(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 \leqslant \mathbf{u}^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \mathbf{v}^2$$
$$\leqslant (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$
$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

□

6 Produit scalaire

6.1 Représentation géométrique

Tout comme les vecteurs, le produit scalaire est une notion issue de la mécanique classique. Il permet d'exprimer le *travail* d'une force. En notant f l'intensité d'une force, d le déplacement du point d'application de cette force sous l'effet de cette force, et θ l'angle que font la force et le déplacement, le travail W (work) de la force lors de ce déplacement a pour expression :

$$W = \mathrm{fd}\cos(\theta)$$

Remarque 6.1

Le travail est une forme d'énergie. C'est une mesure de l'effet mécanique d'une force en l'absence de déformations. À l'origine il permettait d'évaluer l'énergie fournie par un cheval pour tirer une charge ou labourer un champ. La force exercée par le cheval pour tirer la charrue multipliée par la distance parcourue donne le travail effectué par le cheval. Si l'on divise par le temps mis pour parcourir la distance en question, on trouve la puissance du cheval, environ un cheval-vapeur. C'est la puissance permettant d'élever 75 kg d'un mètre chaque seconde :

$$1\,\mathrm{ch} = 75\ \mathrm{kg} \times 9{,}806\ 65\ \mathrm{m\ s^{-2}} \times 1\ \mathrm{m} \times 1\ \mathrm{s^{-1}}$$
$$= 735{,}498\ 75\ \mathrm{W}$$

La notion de travail suggère de définir une nouvelle opération sur les vecteurs.

Notons $\mathbf{d}$ le vecteur déplacement. Le produit scalaire de la force par le déplacement est la projection du vecteur force sur le vecteur déplacement :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{d} = \mathrm{fd}\cos(\mathbf{f}, \mathbf{d})$$

Remarque 6.2

En physique on effectue le produit scalaire de vecteurs qui n'appartiennent pas toujours au même espace vectoriel.

Considérons l'espace ordinaire de la géométrie classique appliquée à la physique. À tout couple de vecteurs non nuls $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, la multiplication scalaire fait correspondre un nombre noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, appelé leur produit scalaire, tel que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si l'un des deux vecteurs au moins est nul. Dans le cas particulier où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont même direction,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

et le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de sa norme euclidienne :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

Notation 6.1

Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est noté :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^2$$

Propriété 6.1: Produit scalaire euclidien

1) Symétrie :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta) \\ &= \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| \cos(-\theta) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

2) Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

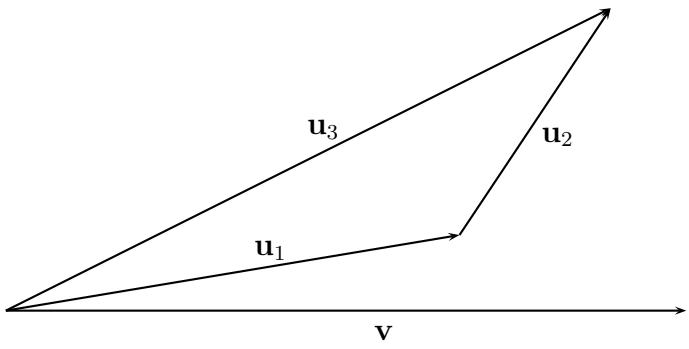


Fig. 8.2 – Distributivité du produit scalaire

Posons $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} =& \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v} \\ =& \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\| \cos\left(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_3}\right) \\ =& \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\| \cos[(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}) + (\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3})] \\ =& \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\| \left[\cos\left(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}\right) \cos\left(\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3}\right) - \sin\left(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1}\right) \sin\left(\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\| \left[\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\frac{\|\mathbf{u}_1\| + \|\mathbf{u}_2\|\cos\left(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\right)}{\|\mathbf{u}_3\|} - \sin\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\frac{\|\mathbf{u}_2\|\sin\left(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\right)}{\|\mathbf{u}_3\|}\right]$$

$$= \|\mathbf{v}\|\left[\|\mathbf{u}_1\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right) + \|\mathbf{u}_2\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\cos\left(\widehat{\mathbf{x}_1,\mathbf{u}_2}\right) - \|\mathbf{u}_2\|\sin\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\sin\left(\widehat{\mathbf{x}_1,\mathbf{u}_2}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}_1\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right) + \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}_2\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_2}\right)\\ &= \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

Il s'agit d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $\oplus$ du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition vectorielle, alors que le signe $+$ du membre de droite est celui de l'addition dans $\mathbb{R}$.

3) Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire
Posons $\alpha \odot \mathbf{u} = \mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}(\alpha\odot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}\\ &= \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)\\ &= \alpha\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)\\ &= \alpha\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\end{aligned}$$

Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\odot$ du membre de gauche est le signe opératoire de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, alors que le signe $\times$ du membre de droite est la multiplication dans $\mathbb{R}$.

4) Définie : $\forall\mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= 0\\ \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|\cos\left(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{u}}\right) &= 0\\ \|\mathbf{u}\|^2 &= 0\\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

5) Positive : $\forall\mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geqslant 0$

6.2 Représentation algébrique du produit scalaire

Par la suite, le produit scalaire a été défini de façon purement algébrique par ses propriétés.

Définition 6.1: Produit scalaire euclidien

Soient λ et μ deux scalaires, et soient $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E. Supposons qu'il existe une loi de composition externe, de E^2 dans $\mathbb{R}$, notée $\cdot$, telle qu'à tout couple $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vecteurs de E elle fasse correspondre un scalaire de $\mathbb{R}$, noté $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, ayant les propriétés suivantes :

1) symétrie : $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
On trouve parfois le terme « commutativité » bien que ce terme soit réservé aux lois de composition internes, l'application produit scalaire étant une opération externe.

2) bilinéarité, c.-à-d. :

a) distributivité à gauche par rapport à l'addition vectorielle :

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$

La symétrie implique la distributivité à droite.

b) multiplication à gauche par un scalaire :

$$(\lambda\odot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

La symétrie implique la multiplication à droite.

a) et b) sont équivalents à la linéarité à gauche :

$$\mathbf{u}\cdot(\lambda\odot\mathbf{v}\oplus\mu\odot\mathbf{w})=\lambda\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mu\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$$

La symétrie implique la linéarité à droite. La bilinéarité regroupe la linéarité à droite et à gauche.

3) définie : $\forall\mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0\Rightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$

4) positive : $\forall\mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geqslant 0$

Cette loi s'appelle multiplication scalaire euclidienne de $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et le scalaire $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ est appelé produit scalaire euclidien des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Remarque 6.3

Le produit scalaire n'est pas associatif car $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ n'a pas de sens mathématique, le terme entre parenthèses étant un scalaire.

On parle de *produit scalaire* (tout court) lorsque les propriétés 3) et 4) sont remplacées par la propriété :

3) non dégénéréscence : $\forall\mathbf{v},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\Rightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$

Montrons que cette propriété est moins contraignante en montrant que si la loi est définie alors elle est non-dégénérée. Remarquons d'abord que par contraposée nous avons :

$$\text{définie}\Rightarrow\text{non-dégénérée}\quad\Leftrightarrow\quad\text{dégénérée}\Rightarrow\text{indéfinie}$$

Supposons la loi dégénérée :

$$\exists\mathbf{u}\neq\mathbf{0}\ /\ \forall\mathbf{v},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$$

En particulier pour $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ la loi est indéfinie :

$$\exists\mathbf{u}\neq\mathbf{0}\ /\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$$

On parle de *pseudo-produit scalaire* lorsque les propriétés 3) et 4) sont remplacées par les propriétés :

3) non dégénéréscence : $\forall\mathbf{v},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\Rightarrow\mathbf{u}=\mathbf{0}$

4) indéfinie : $\exists\mathbf{u}\neq\mathbf{0}\ /\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$

Exemple 6.1

En relativité restreinte, le produit scalaire de Minkowski (cf. § 23.5 p. 273) est un pseudo-produit scalaire.

7 Produit scalaire et norme

Théorème 7.1: Norme euclidienne d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'application

$$E \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$$

est une norme sur E. C'est la norme euclidienne du § 5.1 p. 119.

Démonstration. Le produit scalaire euclidien d'un vecteur avec lui-même est toujours positif ou nul, donc l'application est de E dans $\mathbb{R}_+$.

- séparation : si $\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = 0$ alors $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ donc $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ puisque par définition le produit scalaire euclidien est défini, propriété 3) de la déf. 6.1 p. 125.
- homogénéité : $\forall(\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}\times E,\quad \sqrt{(\alpha\odot\mathbf{u})\cdot(\alpha\odot\mathbf{u})} = \sqrt{\alpha^2\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})} = |\alpha|\times\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$
- d'après l'inégalité triangulaire, th. 5.4 p. 123,
  $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in E^2,\ \sqrt{(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} + \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ □

Notation 7.1

On écrira :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$$

8 Expression analytique du produit scalaire

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs d'un espace vectoriel pré-euclidien E_2, exprimés en composantes contravariantes dans une base quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \left(u^1\mathbf{e}_1 \oplus u^2\mathbf{e}_2\right)\cdot\left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right)\\
&= \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right)\cdot u^1\mathbf{e}_1 + \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right)\cdot u^2\mathbf{e}_2\\
&= u^1\mathbf{e}_1\cdot\left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right) + u^2\mathbf{e}_2\cdot\left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right)\\
&= u^1\mathbf{e}_1\cdot v^1\mathbf{e}_1 + u^1\mathbf{e}_1\cdot v^2\mathbf{e}_2 + u^2\mathbf{e}_2\cdot v^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2\cdot v^2\mathbf{e}_2\\
&= u^1v^1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + u^1v^2\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + u^2v^1\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 + u^2v^2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Généralisons à un espace vectoriel pré-euclidien à n dimensions E_n :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u^i\mathbf{e}_i\cdot v^j\mathbf{e}_j\\ &= u^iv^j\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\end{aligned} \tag{8.8}$$

Cette relation est valable que la base soit orthogonale ou non, normée ou non, car nous n'avons pas fait d'hypothèse. Lorsque la base est orthonormée :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \delta_{ij} u^i v^j \tag{8.9}$$

Définition 8.1: Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Notez bien que deux vecteurs sont orthogonaux pour un produit scalaire donné.

9 Composantes covariantes

Le produit scalaire permet de définir les composantes covariantes. À partir d'un système de coordonnées cartésiennes obliques (x^1, x^2), construisons une base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En projetant le vecteur $\mathbf{u}$ perpendiculairement aux vecteurs de base, nous obtenons ses composantes covariantes.

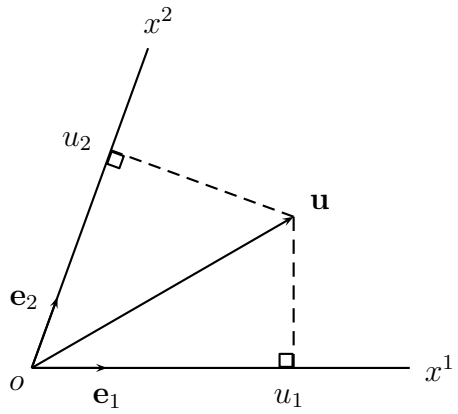


Fig. 8.3 – Composantes covariantes du vecteur $\mathbf{u}$

Nous avons :

$$\begin{cases} u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 \\ u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Bien que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée :

$$\mathbf{u} \neq u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$$

Remarque 9.1

À chaque axe de coordonnée on associe un vecteur de base tangent normé, sur lequel on définit deux composantes, l'une contravariante, l'autre covariante. La variance ne s'applique qu'aux composantes.

Remarque 9.2

Bien qu'ayant un indice supérieur, les coordonnées ne sont ni contravariantes ni covariantes. Les coordonnées du point à l'extrémité d'un vecteur se confondent avec ses composantes contravariantes, ce qui justifie la position haute de leur indice.

Remarque 9.3

La représentation du produit scalaire comme projection orthogonale donnée figure 8.3 ne s'applique plus lorsque le produit scalaire n'est pas euclidien. Nous verrons au § 3 p. 369 que dans la base pseudo-orthonormée de l'espace pseudo-euclidien de la relativité restreinte, les composantes contravariantes et covariantes ne sont pas confondues.

Définition 9.1: Composantes covariantes d'un vecteur

Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base d'un espace vectoriel euclidien E_n. On appelle composantes covariantes d'un vecteur $\mathbf{u}$, les n scalaires u_i tels que :

$$\forall i \qquad u_i \overset{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$$

Elles sont représentées au moyen d'indices inférieurs.

Remarque 9.4

Lorsqu'un vecteur de base est multiplié par un nombre réel, la composante covariante correspondante des vecteurs l'est aussi, d'où l'adjectif « covariante ».

Remarque 9.5

La position de l'indice de numérotation des vecteurs de base $(\mathbf{e}_i)$ indique un lien avec la covariance (§ 8.2 p. 213).

Théorème 9.1

Pour que n quantités ordonnées rapportées à une base d'un espace vectoriel soient les composantes d'un vecteur, il faut et il suffit que ces quantités soient toutes covariantes ou toutes contravariantes par changement de base.

Une égalité entre deux vecteurs est indépendante de la base dans laquelle on l'exprime puisque les termes de l'égalité (les vecteurs) sont invariants par changement de base. Une égalité entre deux vecteurs qui est vraie dans une base, est vraie dans toutes les bases.

10 Covecteurs

À tout vecteur $\mathbf{u}$ on peut associer son covecteur $\underline{u} = (u_1, u_2)$, qui n'est autre que le vecteur $\mathbf{u}$ exprimé en composantes covariantes.

Notation 10.1

Les covecteurs sont aussi notés $\tilde{u}$ ou u^*.

Représentons $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ et projetons perpendiculairement ces vecteurs sur les axes de coordonnées x^1 et x^2 :

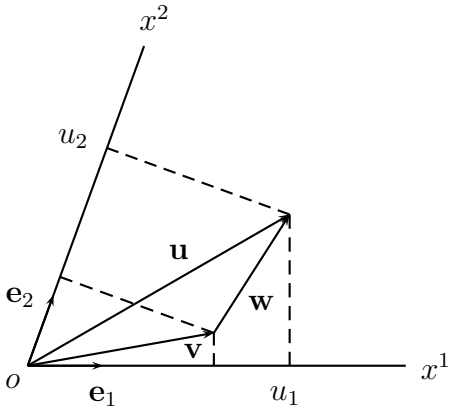


FIG. 8.4 – Composantes covariantes

Dans la base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ associée au système de coordonnées :

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\\ &= (u_1, u_2)\\ \underline{v} \oplus \underline{w} &= \underline{u}\end{aligned}$$

et :

$$\alpha \odot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

Les lois de compositions sont similaires à celles écrites en composantes contravariantes (§ 2.8 p. 43). En effet, d'après les définitions 1.11 p. 27, ces lois définissent les vecteurs, et les vecteurs sont indépendants du choix de la base, donc du choix des composantes puisque des composantes contravariantes dans une base sont covariantes dans la base réciproque.

Chapitre 9

MÉCANIQUE CLASSIQUE

Sommaire

1 Notions intuitives et définitions 131
2 Cinématique 133
3 Mouvement rectiligne 142
4 Mouvement de rotation 169
5 Un seul axiome pour la mécanique 176
6 Loi de conservation 177
7 Opérateur nabla 184

À partir d'expériences et d'observations, la physique consiste à établir des hypothèses[1] pour modéliser la nature, et à en tirer des conséquences[2] par une démonstration[3]. La mécanique générale peut être construite à partir d'axiomes[4] successifs de plus en plus puissants, le dernier incluant tous ceux qui le précèdent.

1 Notions intuitives et définitions

Les notions de temps, d'espace, de corps, de force, de vitesse et d'accélération sont supposées intuitives, c.-à-d. issues de notre expérience quotidienne. Nous les prendrons dans leurs sens commun avant de les définir plus précisemment.

1. Raisonnement par induction.
2. Raisonnement par déduction.
3. Succession d'inférences logiques.
4. Un axiome est une proposition non démontrable, à la base d'un système hypothético-déductif. Dans le langage courant, axiome est synonyme d'hypothèse, de principe, ou de postulat.

1.1 Temps

Le temps n'a pas d'existence propre, c'est un modèle de la réalité créé par notre cerveau. Par exemple, ce modèle est probablement très différent pour les insectes. En physique newtonienne le modèle de temps est celui très simple de la vie de tous les jours, indépendant de la vitesse de l'observateur et de la présence de matière ou d'énergie. Nous prenons la définition du temps donnée par Newton[5] :

Définition 1.1: Temps

Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, s'écoule uniformément et s'appelle durée.

Pour nous repérer dans le temps, nous utiliserons une horloge.

1.2 Espace

Comme pour le temps, l'espace n'a pas d'existence propre, c'est aussi un modèle de la réalité créé par notre cerveau. En physique newtonienne on prend le modèle le plus simple, celui de la vie de tous les jours, indépendant de la vitesse de l'observateur et de la présence de matière ou d'énergie. Le modèle mathématique le plus simple est l'espace plat de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

1.3 Corps

Définition 1.2: Corps

Un corps est un objet matériel caractérisé par ses propriétés physique.

1.4 Force

Définition 1.3: Force

On appelle force toute cause capable de déformer un corps et/ou de modifier le mouvement de ce corps.

En mécanique classique, les corps dont la trajectoire est courbe subissent une force centripète dirigée vers le centre de courbure instantané de la trajectoire. La force courbe leur trajectoire qui sans cela serait rectiligne.

5. Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, 1687.

1.5 Vitesse

Dans le langage courant la vitesse est un nombre, c'est la distance parcourue divisée par le temps de parcours. La vitesse n'est jamais ressentie, elle n'est qu'observée, donc relative. Cela signifie que parler de vitesse n'a de sens que si l'on précise par rapport à quoi. Par exemple, la vitesse d'un conducteur est nulle par rapport à son véhicule.

1.6 Accélération

Dans le langage courant l'accélération est aussi un nombre, c'est la variation de vitesse divisée par le temps mis pour cette variation.

1.7 Champ gravitationnel

Le champ gravitationnel d'un astre n'est pas uniforme car non seulement il converge vers le centre de gravité de l'astre, mais son intensité est maximale à la surface de l'astre et tend vers zéro à l'infini et au centre de l'astre.

Définition 1.4: Lignes de champ

Les lignes de champ sont les courbes en tout point tangentes au champ de vecteurs.

Les lignes du champ de gravitation d'un corps convergent vers le centre de gravité de ce corps.

Définition 1.5: Équipotentielle de champ

Une équipotentielle de champ est une région de l'espace dans laquelle les points sont au même potentiel.

Les équipotentielles terrestres sont appelées surfaces de niveau ou géoïdes. Les équipotentielles et les lignes de champ sont perpendiculaires.

2 Cinématique

2.1 Vecteurs vitesse et accélération

En physique la vitesse est modélisée par un vecteur ayant une norme, une direction et un sens. Lorsque l'on représente un vecteur par une flèche, sa longueur est proportionnelle à la norme du vecteur. L'accélération est aussi un vecteur, c'est le vecteur variation dans le temps du vecteur vitesse. Un changement de norme du vecteur vitesse est une accélération, un changement de direction du vecteur vitesse est aussi une accélération. Pour faire du calcul vectoriel nous aurons besoin d'une base et d'un repère. En physique, une base est un ensemble de trois vecteurs distincts, non proportionnels.

2.2 Référentiels

À partir des notions de temps et d'espace, on définit un référentiel.

Définition 2.1: Référentiel

Un référentiel est un système de coordonnées et une mesure du temps (une horloge).

Un référentiel est donc une référence spatiale et une référence temporelle. On peut associer un référentiel à tout observateur, et réciproquement, un observateur à tout référentiel. Les observateurs se distinguent les uns des autres par leur état de mouvement relatif, modélisé par un vecteur vitesse relatif fonction du temps. Nous dirons qu'un observateur change de référentiel pour dire qu'il change son état de mouvement.

La définition d'un référentiel en mécanique classique sous-entend l'existence préalable d'un espace absolu et d'un temps absolu, identiques pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement relatif. Un changement de référentiel n'est alors qu'un changement d'instruments de mesure de cet espace et de ce temps.

En physique newtonienne l'espace et le temps sont absolus. N'ayant pas les mêmes unités il n'y a pas à proprement parler d'espace-temps car on ne pourrait y définir une distance. On note alors l'espace et le temps par le produit cartésien $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Définition 2.2: Centrale inertielle

Une centrale inertielle est l'ensemble de six instruments de mesure, trois accéléromètres selon trois axes indépendants, et trois gyromètres également selon trois axes indépendants.

Définition 2.3: Référentiel propre

Un référentiel dans lequel un mobile (observateur, particule, horloge atomique, centrale inertielle, etc.) est immobile est appelé référentiel propre de ce mobile.

Expérience 2.1

Le physicien Galilée[a] note qu'aucune expérience effectuée dans la cale d'un navire ne permet de mettre en évidence la vitesse du navire, si celle-ci est constante en norme et en direction par rapport aux étoiles lointaines.

a. Galileo Galilei, *Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde*, 1632.

Remarque 2.1

Le mouvement, sous-entendu à vitesse constante en norme et en direction, est comme rien, disait Galilée en s'appuyant sur les écrits et travaux de son contemporain Giordano Bruno[a] qui avait compris la relativité du mouvement et l'inexistence du mouvement absolu : une pierre qui tombe du haut du mât d'un navire arrive au pied du mât, quelle que soit la vitesse (constante en norme et en direction) du navire.

a. Giordano Bruno, *Le Banquet des cendres*, 1584.

2.3 Référentiels galiléens

L'expérience de pensée de Galilée nous amène à définir une classe de référentiels particuliers (« classe » pris dans le sens d'un ensemble d'individus ou d'objets ayant des caractères communs, comme une classe d'élèves par exemple), appelés référentiels galiléens.

Définition 2.4: Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen ssi il se déplace d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport aux étoiles lointaines, dites « fixes » [a].

a. Cette définition qui fait appel à la notion moyenâgeuse de sphère des étoiles fixes n'est bien entendu pas acceptable.

Les référentiels galiléens se déplacent

- libres dans l'espace profond loin de toute masse, sans tourner sur eux-même par rapport aux étoiles lointaines
- non libres dans un champ de pesanteur lorsqu'une force de réaction s'oppose exactement à la force gravitationnelle. Leur trajectoire est une équipotentielle du champ gravitationnel (trajectoire du navire), qui est approximée localement dans l'espace par une trajectoire rectiligne, et dans le temps par une vitesse constante

Définition 2.5: Observateur galiléen

Un observateur fixe dans un référentiel galiléen est appelé observateur galiléen.

En tout point d'un référentiel galiléen le vecteur vitesse est constant, autrement dit le vecteur accélération est nul. Reprenons la déf. 6.3 p. 11 d'une trajectoire et la déf. 3.1 p. 9 d'une géodésique : un mobile suit une trajectoire géodésique ssi son centre d'inertie a une trajectoire géodésique.

Théorème 2.1

Dans l'espace euclidien de la mécanique classique, un référentiel est galiléen seulement s'il suit une trajectoire géodésique (une droite).

La réciproque est fausse, un référentiel dont la norme du vecteur vitesse varie peut se déplacer en ligne droite. Un référentiel qui suit une géodésique n'est donc pas toujours galiléen. Cela est dû au fait que dans l'espace euclidien de la mécanique classique, la notion de géodésique ne s'applique qu'aux coordonnées spatiales, la coordonnée temporelle reste indépendante. Par conséquent, la durée de parcours de la géodésique n'est pas fixée.

Remarque 2.2

En relativité, la notion de géodésique s'applique à l'espace-temps et non à l'espace seul, un référentiel est galiléen ssi il suit une trajectoire géodésique dans l'espace-temps de Minkowski.

2.4 Principe de relativité

L'expérience de pensée de Galilée permet d'énoncer le premier axiome de la mécanique :

Axiome 2.1: Principe de relativité

Parmi tous les référentiels possibles, il existe un ensemble infini continu de référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme fonctionnelle.

Même forme fonctionnelle signifie même fonction mathématique, les variables étant, elles, différentes. La physique ne permet donc aucune distinction entre ces référentiels.

Définition 2.6: Référentiels équivalents

Des référentiels sont dits équivalents ssi les lois de la physique s'y écrivent sous la même forme fonctionnelle.

Les relations d'équivalence généralisent la relation d'égalité.

Définition 2.7: Relation d'égalité

La relation d'égalité sur un ensemble E est une relation binaire, c.-à-d. de la forme $R\{x, y\}$ à deux variables x et y, que l'on écrit :

$$x = y$$

Elle se lit « x égale y », ou « x et y sont égaux » et satisfait les quatre propriétés suivantes (a et b sont des valeurs prises par x et y) :

- réflexivité : $\forall a \in E,\ a = a$
- symétrie : $\forall (a, b) \in E^2,\ si\ a = b,\ alors\ b = a$
- transitivité : $\forall (a, b, c) \in E^3,\ si\ a = b\ et\ b = c,\ alors\ a = c$
- compatibilité : Pour toute relation R$\{x\}$ de la théorie axiomatique, $\forall (a, b) \in E^2,\ si$ R$\{a\}$ $et\ a = b,\ alors$ R$\{b\}$. Autrement dit, deux éléments égaux ont les mêmes propriétés.

Ces quatre propriétés sont les axiomes de caractérisation égalitaire.

Définition 2.8: Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence R sur un ensemble E est une relation binaire que l'on écrit :

$$x \equiv y \pmod{R}$$

Nous dirons que x est équivalent à y (ou congru à y) modulo R, ou encore x et y sont équivalents modulo R. La relation d'équivalence satisfait les trois propriétés suivantes :

- réflexivité : $\forall a \in E,\ a \equiv a$
- symétrie : $\forall (a, b) \in E^2,\ si\ a \equiv b,\ alors\ b \equiv a$
- transitivité : $\forall (a, b, c) \in E^3,\ si\ a \equiv b\ et\ b \equiv c,\ alors\ a \equiv c$

Des relations d'équivalences R_i divisent l'ensemble E en classes d'équivalence, où chaque classe regroupe les éléments qui sont équivalents entre eux modulo R_i. Nous ne pouvons pas dire que

certains référentiels sont égaux entre eux pour l'écriture des lois de la physique, en revanche nous pouvons dire que certains référentiels sont équivalents modulo l'écriture des lois de la physique, et forment une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence « écriture des lois de la physique ».

Exemple 2.1

- L'égalité est une relation d'équivalence, compatible avec toutes les relations R de la théorie.
- L'équipotence, déf. 1.7 p. 3, est une relation d'équivalence car elle possède les trois propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité.
- Dans l'espace géométrique, on définit arbitrairement mais une fois pour toutes une origine O. Tous les vecteurs peuvent être ramenés à cette origine par simple translation. Chaque vecteur ayant son origine en O est le représentant d'une classe d'équivalence. La relation d'équivalence des vecteurs modulo une translation est appelée *équipollence*, ces vecteurs sont dits équipollents.

Remarque 2.3

Dans l'expérience de pensée de Galilée les référentiels équivalents sont les référentiels liés au navire et au port.

Définir les référentiels équivalents c'est poser le principe de relativité, et poser le principe de relativité c'est définir des référentiels équivalents.

Axiome 2.2: Principe de relativité galiléenne

Dans l'espace euclidien de la mécanique classique, les référentiels galiléens sont équivalents pour l'écriture des lois de la physique.

Comme nous allons le voir, la réciproque est fausse, tous les référentiels équivalents ne sont pas galiléens.

2.5 Principe d'équivalence

On énonce le principe d'équivalence dans le cadre de la mécanique classique.

Expérience 2.2

Un vaisseau spatial hors de l'atmosphère terrestre, moteur éteint, tombe en chute libre en direction du centre de gravité d'un astre. L'équipage observe son accélération par rapport à l'astre en le voyant se rapprocher de plus en plus vite, mais il ne ressent aucune force, indiquant que le vaisseau est en chute libre et ne tourne pas sur lui-même. Ce sentiment est confirmé par la centrale inertielle embarquée dont les accéléromètres et gyromètres n'indiquent aucune accélération.
Quelle que soit la trajectoire d'un vaisseau libre dans un champ gravitationnel, qu'elle soit circulaire, elliptique, parabolique, hyperbolique ou rectiligne, en l'absence de rotation du vaisseau sur lui-même la centrale inertielle à bord n'indique aucune accélération. L'équipage ne ressent pas de force gravitationnelle qui pourtant courbe leur trajectoire et accélère le vaisseau vers le centre de gravité de l'astre. Aucune expérience locale à bord du vaisseau ne peut mettre en évidence son accélération vers l'astre.

En mécanique classique, au centre d'inertie d'un corps, la force d'inertie axifuge qui s'exerce sur ce corps est exactement égale et opposée à la force de gravitation qui s'exerce sur ce même corps.

Remarque 2.4

On parlera de forces axifuges, qui fuient l'axe instantané de rotation, et non de forces centrifuges, qui fuient le centre instantané de rotation. En effet, les systèmes physiques ayant une extension spatiale en trois dimensions, chaque partie du système subit une force d'inertie en éloignement de l'axe de rotation. Le système « voit » une force axifuge.

Expérience 2.3

Un vaisseau spatial est posé sur le sol terrestre, la centrale inertielle embarquée mesure une accélération constante de $1g$. Sans données extérieures et en négligeant les forces fictives dues à la rotation de la Terre, l'équipage ne peut savoir s'il n'est pas dans l'espace profond, moteur allumé avec une accélération constante de $1g$. Aucune expérience locale à bord du vaisseau ne permet de distinguer ces deux cas.
De façon générale, l'équipage d'un vaisseau qui n'est pas libre dans un champ gravitationnel ressent en partie ou totalement le champ gravitationnel local. Si le vaisseau est fixe par rapport à l'astre, l'équipage ressent l'intégralité du champ gravitationnel créé par celui-ci en cet endroit.

Axiome 2.3: Principe d'équivalence

Dans ce qui suit l'équivalence est toujours locale dans l'espace et dans le temps :

- *un référentiel libre dans un champ gravitationnel (dit « en chute libre ») est équivalent à un référentiel libre dans l'espace profond, loin de toute masse-énergie.*
- *un référentiel non libre dans un champ gravitationnel est équivalent à un référentiel en rotation autour d'un axe lointain.*
- *un référentiel non libre dans un champ gravitationnel d'intensité g est équivalent à un référentiel uniformément accéléré avec l'accélération g.*

En mécanique classique, la modélisation de la gravitation par une force a des limites, elle n'est ressentie et mesurable que lorsque le corps n'est pas libre, par exemple un corps posé sur une balance. À bord d'un vaisseau en orbite, moteur éteint, la force de gravitation et la force axifuge s'annulent. En relativité générale ces deux forces n'existent pas, l'espace-temps est déformé par la présence de matière-énergie et le vaisseau suit une géodésique de l'espace-temps.

2.6 Référentiels inertiels

Les expériences de pensée précédentes montrent que les référentiels galiléens ne sont pas les seuls référentiels équivalents pour l'écriture des lois de la physique. Les référentiels dont la centrale inertielle n'indique aucune accélératioin sont aussi des référentiels équivalents pour l'écriture des lois de la physique. Nous donnons la définition opérationnelle suivante :

Définition 2.9: Référentiel inertiel

Un référentiel est inertiel ssi une centrale inertielle fixe dans ce référentiel n'indique aucune accélération.

Dans un référentiel inertiel il n'y a pas de force fictive (pseudo-force ayant pour origine le mouvement même de l'observateur). Les observateurs inertiels sont dits libres ou en chute libre dans le champ de gravitation local vide de toute autre matière. Ils ne subissent pas d'interaction autre que gravitationnelle et se déplacent dans le vide sans système de propulsion. Les centres des référentiels inertiels suivent les géodésiques de l'espace-temps courbe ou plat, cette condition étant nécessaire mais non suffisante, il faut encore préciser la rotation sur soi du référentiel.

Définition 2.10: Mobile inertiel

Un mobile est inertiel ssi son centre de gravité et chacune de ses parties suivent une géodésique.

Par conservation du moment cinétique, un mobile libre peut avoir et conserver un mouvement de rotation sur lui-même. Un mobile peut être libre et non inertiel.

Expérience 2.4

Un référentiel ayant pour centre celui de la Terre et tournant sur lui-même en même temps que celle-ci est non inertiel car le Terre ne montre pas la même face au Soleil.

L'axiome suivant généralise l'axiome 2.2 p. 137 du principe de relativité galiléenne, des référentiels galiléens aux référentiels inertiels :

Axiome 2.4: Principe de relativité généralisé

Un référentiel est équivalent pour l'écriture des lois de la physique ssi il est inertiel.

Les référentiels inertiels sont aussi appelés référentiels lorentziens. En l'absence de champ gravitationnel, les référentiels inertiels et galiléens sont confondus. En présence d'un champ gravitationnel, ils sont différents, leur mouvement n'est pas le même et dans les référentiels galiléens existe une force gravitationnelle.

Une conséquence du principe d'équivalence est la courbure de la lumière dans un champ gravitationnel.

Expérience 2.5

Dans une fusée d'accélération constante $1g$, un rayon LASER part horizontalement de la paroi de gauche. Le temps d'arriver sur la paroi de droite, la fusée a changé de vitesse, pour un passager de la fusée le rayon LASER décrit une parabole.

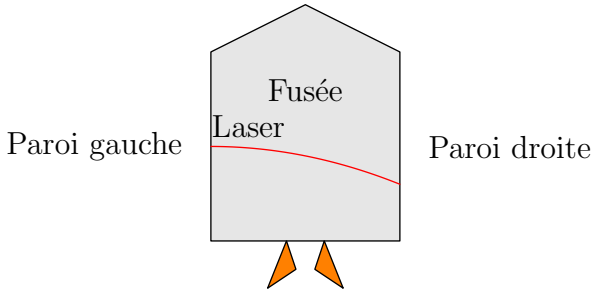


Fig. 9.1 – Trajectoire d'un rayon LASER à bord d'une fusée

En appliquant le principe d'équivalence locale entre référentiel accéléré et champ gravitationnel, on en conclue que la lumière est courbée par la gravitation.

2.7 Principe de Mach

La rotation sur eux-mêmes des observateurs et de leurs référentiels associés est modélisée par un pseudovecteur vitesse angulaire porté par l'axe de rotation. La rotation n'est pas ressentie sur l'axe de rotation ($r = 0$). Elle n'est pas symétrique, ce que j'observe en tournant sur moi-même n'est pas ce que vous observez en me regardant tourner sur moi-même.

Expérience 2.6

Par une nuit sans nuages, si une personne tourne sur elle-même en tenant des poids dans les mains, elle observera les étoiles tourner en sens inverse de sa rotation, et ressentira une force d'inertie axifuge qui éloigne ses bras de son corps. Plus la personne tourne vite, plus cette force est importante.

Axiome 2.5: Principe de Mach

Le physicien Mach[a] *énonce le principe qui porte désormais son nom : « l'accélération est ressentie par rapport au reste de l'univers ».*

a. Ernst Mach, *La mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, 1883.

Expérience 2.7

Imaginons deux satellites identiques gravitant dans le même plan autour d'un astre, en décrivant dans le même sens une trajectoire circulaire de même rayon. Ils se suivent donc sur la même trajectoire.

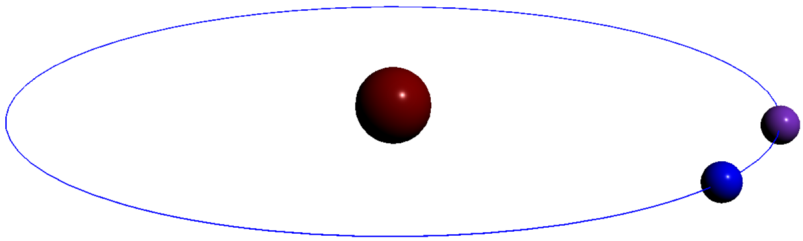


Fig. 9.2 – Deux satellites sur une même orbite

Relions-les par une barre rigide pour qu'ils ne constituent qu'un seul et même satellite. Ce satellite montre toujours la même face à l'astre, il tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines, ou au reste de l'univers observable. Pour autant ce satellite est inertiel, aucune expérience locale réalisée à bord ne permet de mettre en évidence sa rotation par rapport aux étoiles lointaines. Cette expérience de pensée montre qu'un mobile inertiel (et son référentiel inertiel associé) dans un champ gravitationnel tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines. Une centrale inertielle au centre d'inertie de ce satellite n'indiquerait aucune accélération, ni en déplacement, ni en rotation.

Un référentiel inertiel tourne sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines lorsqu'il est dans un champ gravitationnel en dehors d'une ligne de champ.

2.8 Forces de marée

Expérience 2.8

À bord d'un vaisseau spatial en orbite circulaire autour d'un astre, les passagers observent que deux masses initialement sur la même

- ligne de champ s'éloignent l'une de l'autre, elles se déplacent l'une par rapport à l'autre sur leur équipotentielle de champ respective. La force axifuge est croissante en r, alors que la force gravitationnelle est décroissante en $1/r^2$. Par conséquent la masse la plus proche de l'astre a une période de révolution circulaire plus courte que l'autre masse, de la même manière que les planètes du système solaire proches du Soleil tournent plus vite.
- équipotentielle n'ont pas de mouvement relatif

Expérience 2.9

À bord d'un vaisseau spatial en chute libre vers le centre de gravité d'un astre, les passagers observent que deux masses initialement sur la même

- ligne de champ s'éloignent l'une de l'autre en restant sur cette ligne de champ, car l'intensité du champ est plus importante pour la masse la plus proche de l'astre
- équipotentielle se rapprochent car les lignes du champ gravitationnel convergent vers le centre de gravité de l'astre

L'inhomogénéité des champs gravitationnels, c.-à-d. leur décroissance vers zéro à l'infini et leur convergence, est à l'origine des forces de marée qui s'exercent sur tous les mobiles dont l'extension spatiale est non nulle. Ces forces n'existent pas dans un référentiel accéléré ni dans un référentiel en rotation, car les forces exercées sont des pseudo-forces fictives (le mobile observé n'est pas accéléré et n'est pas en rotation, c'est l'observateur qui l'est). Pour que deux masses initialement au repos conservent approximativement leur position relative, le référentiel doit être suffisamment petit et la durée de l'observation suffisamment courte. Le référentiel est alors dit « local », dans le sens qu'il ne s'applique que dans une petite région de l'espace, pendant un court instant.

3 Mouvement rectiligne

Définition 3.1: Corps isolé

Un corps isolé n'a aucune interaction avec l'extérieur. Il n'échange ni matière, ni rayonnement, et ne subit aucune force (de contact, gravitationnelle, électromagnétique, etc.).

Définition 3.2: Corps pseudo-isolé

Un corps pseudo-isolé n'échange ni matière, ni rayonnement, et la somme des forces qui s'exercent dessus est nulle.

3.1 Inertie du mouvement rectiligne

Expérience 3.1

Pour un observateur galiléen, lorsqu'un corps est mis en mouvement sur une surface plane, la distance parcourue par rapport à l'observateur est d'autant plus grande que les frottements sont petits. Nous supposons que lorsque les frottements de contact et les frottements de l'air tendent vers zéro, la distance parcourue par le corps tend vers l'infini et sa vitesse reste constante par rapport à l'observateur.

Remarque 3.1

Dans son mouvement rectiligne uniforme le corps observé peut être en rotation sur lui-même, son mouvement n'est pas obligatoirement en translation.

Cette expérience permet d'observer l'inertie d'un corps pseudo-isolé (le poids du corps et la réaction de la surface plane s'annulent) en mouvement rectiligne, donc *a fortiori* d'un corps isolé.

Nous pouvons énoncer le principe d'inertie des corps isolés en mouvement rectiligne par rapport aux étoiles lointaines :

Axiome 3.1: Principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne

Tout corps isolé se déplace à vecteur vitesse constant ou nul pour un observateur ssi ce dernier est galiléen :

$$\vec{v}_{\text{corps isolé}} \overset{\text{def}}{=} \vec{C}^{ste} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

Cet axiome issu de l'observation n'a de valeur que la précision de cette observation. Il énonce un principe et en même temps définit les référentiels galiléens. Le symbole $\overset{\text{def}}{=}$ rappelle qu'il s'agit d'une définition. Il faut lire « le référentiel d'un observateur est par définition galiléen ssi le vecteur vitesse d'un corps isolé est constant ». Si on observe l'inertie du mouvement rectiligne d'un corps isolé alors notre référentiel est galiléen. Réciproquement, si notre référentiel est galiléen alors on observe l'inertie du mouvement rectiligne d'un corps isolé. Nous pouvons donner une définition alternative à la déf. 2.4 p. 135 d'un référentiel galiléen :

Définition 3.3: Référentiel galiléen

Un observateur est galiléen ssi il peut observer le principe d'inertie d'un corps isolé.

Notez que définir les référentiels galiléens c'est poser le principe d'inertie d'un système isolé (qui n'interagissent pas avec leur environnement) en mouvement rectiligne, et réciproquement poser le principe d'inertie d'un système isolé en mouvement rectiligne c'est définir les référentiels galiléens. Le principe d'inertie et la définition des référentiels galiléens disent la même chose, « le mouvement rectiligne uniforme est comme rien ».

Nous verrons que cet axiome peut être remplacé par des axiomes plus puissants, et, bien qu'il devienne alors un théorème[6], nous continuerons de l'appeler « principe » pour des raisons historiques. Les axiomes suivants seront à leur tour remplacés par des axiomes plus puissants au fur et à mesure que nous construirons la mécanique. Présentés comme des axiomes, ils deviendront des théorèmes, excepté le dernier. Au § 4 p. 169 le principe d'inertie du mouvement rectiligne est remplacé par un principe plus général d'inertie en rotation.

Expérience 3.2

Lorsque nous nous déplaçons dans un train, notre vitesse par rapport à la gare est la somme vectorielle de notre vitesse dans le train et de la vitesse du train par rapport à la gare.

En cinématique classique nous supposons l'additivité vectorielle des vitesses. Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et soit $\mathcal{R}'$ un autre référentiel galiléen en mouvement de translation rectiligne uniforme à vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$ constante dans $\mathcal{R}$. Pour tout corps, isolé ou non :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(t) \overset{\text{obs}}{=} \vec{v}'_{\mathcal{R}'}(t) + \vec{v}_{\mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} \tag{9.1}$$

Cette égalité suppose qu'il n'existe pas de vitesse limite. De plus elle est observationnelle, elle ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure expérimentale.

Remarque 3.2

Le symbole $\overset{\text{obs}}{=}$ rappelle que cette égalité est observationnelle, ce n'est pas une égalité mathématique absolument vraie, des observations plus précises pourraient la remettre en question. En physique il existe plusieurs sortes d'égalité, qui seront précisées par des symboles différents.

Il faut lire « l'observation montre que le vecteur vitesse d'un corps dans $\mathcal{R}$ est la somme de son vecteur vitesse dans $\mathcal{R}'$ et du vecteur vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ ».

D'après l'axiome 3.1 p. 142, pour un même corps isolé vu de deux référentiels galiléens :

$$\vec{v}_{\text{ corps isolé}} \overset{\text{def}}{=} \vec{C}^{ste}_{\mathcal{R}}$$
$$\vec{v}'_{\text{ corps isolé}} \overset{\text{def}}{=} \vec{C}^{ste}_{\mathcal{R}'}$$

L'additivité des vitesses est cohérente avec le principe d'inertie du mouvement rectiligne dans les référentiels galiléens, tous les termes de (9.1) p. 143 sont des constantes. Cela ne signifie pas que le principe d'inertie valide l'additivité des vitesses, d'autres lois de composition des vitesses pourraient aussi être cohérentes avec le principe d'inertie[7].

6. Un théorème est une proposition démontrable à partir d'axiomes.

7. L'additivité des vitesses n'est plus vérifiée en relativité mais les référentiels galiléens se déplacent quand même avec des vitesses relatives constantes en norme et en direction

3.2 Masse inerte et quantité de mouvement

La masse inerte est un coefficient que l'on associe à la quantité de matière d'un corps. On mesure la masse inerte d'un corps

- par comparaison directe en désignant un corps de référence de masse inerte unité, avec laquelle les masses inertes d'autres corps sont comparées par interaction, par exemple par choc
- par comparaison indirecte, en passant par une valeur intermédiaire. On attache un corps à un dynamomètre grâce à une corde et l'on fait tourner l'ensemble dans le plan horizontal. Le dynamomètre mesure la force axifuge qui dépend de la masse inerte. À vitesse angulaire et longueur de corde fixes, on compare les masses inertes des différents corps grâce au dynamomètre

Expérience 3.3

Plaçons nous dans un référentiel galiléen et faisons interagir deux corps qui précédemment étaient isolés. Imaginons un choc élastique comme un choc « dur » de boules de billard, ou inélastique comme un choc mou de boules de pâte à modeler, ou une interaction électrostatique entre corps chargés, ou magnétique entre deux aimants. Nous observons que les variations des vecteurs vitesses des corps sont proportionnelles et opposées, quelle que soit la matière constituant ces corps.

L'interaction est supposée sans échange de matière entre les deux corps pour qu'ils gardent leur intégrité et que l'on puisse les désigner par les indices 1 et 2 avant et surtout après l'interaction. Pour un observateur galiléen les vecteurs variation de vitesse $\Delta\vec{v}_1$ et $\Delta\vec{v}_2$ sont colinéaires lors d'une intéraction,

$$\Delta\vec{v}_1 \overset{\text{obs}}{=} -k\Delta\vec{v}_2 \text{ pour tout observateur galiléen} \tag{9.2}$$

Le coefficient k est un réel positif, *a priori* fonction de la vitesse relative avant le choc $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$ et des quantités de matière mises en jeu. En mécanique classique on observe que le coefficient k n'est fonction que des quantités de matière mises en jeu. Cela ne vaut que ce que vaut la qualité de l'observation, d'où le symbole $\overset{\text{obs}}{=}$[8].

Expérience 3.4

Prenons le corps 1 comme corps de référence et faisons le interagir avec d'autres corps. Notons b la première expérience, c la deuxième, etc. Les coefficients de proportionnalité sont alors notés k_b, k_c, etc. :

$$\Delta\vec{v}_1 \overset{\text{obs}}{=} -k_b\Delta\vec{v}_2 \text{ pour tout observateur galiléen} \tag{9.3}$$
$$\Delta\vec{v}_1 \overset{\text{obs}}{=} -k_c\Delta\vec{v}_3$$
$$\Delta\vec{v}_1 \overset{\text{obs}}{=} -k_{\text{d}}\Delta\vec{v}_4$$
$$\vdots$$

Dans ces relations les $\Delta\vec{v}_1$ ne sont pas égaux mais correspondent à des expériences différentes. Lorsque l'on fait interagir les corps 2 et 3 l'expérience montre le fait remarquable

8. En relativité, k est fonction de la norme de la vitesse relative $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|$ avant l'interaction.

suivant :

$$k_b \Delta\vec{v}_2 \overset{\text{obs}}{=} -k_c \Delta\vec{v}_3 \text{ pour tout observateur galiléen}$$

Nous pouvons alors associer les coefficients de proportionnalité aux différents corps. En mécanique classique, ces coefficients sont appelés *masses inertes* ou *masses inertielles* ou *masses dynamiques*[9]. On les note m, ou m_i. La masse inerte du corps 1 de référence est par définition égale à l'unité

$$m_1 \overset{\text{def}}{=} 1$$

La masse inerte du corps 2 est alors $m_2 = k_b$, celle du corps 3 est $m_3 = k_c$, etc.

Expérience 3.5

Quelle que soit la matière utilisée (fer, sable, eau, etc.), si l'on double la quantité de matière d'un corps, on constate lors d'une interaction que sa masse inerte est double. Elles sont proportionnelles :

$$\text{Quantité de matière} \propto m_i$$

Expérience 3.6

L'expérience montre que la quantité de matière totale, donc la masse inerte totale qui lui est proportionnelle, se conserve lors de toute interaction :

$$\sum m_i \overset{\text{obs}}{=} c^{ste} \text{ lors de toute interaction}$$

Cette égalité est observationnelle et ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure expérimentale[10].

Définition 3.4: Masse inerte

La masse inerte d'un corps est un coefficient propre à ce corps, qui mesure la résistance à la modification de son état de mouvement.

Avec $m_1 = 1$ et en notant $\vec{v}^{init}$ la vitesse avant le choc et $\vec{v}^{fin}$ la vitesse après le choc, (9.3) p. 144 devient :

$$\begin{aligned} m_1 \Delta\vec{v}_1 &\overset{\text{obs}}{=} -m_2 \Delta\vec{v}_2 \text{ pour tout observateur galiléen} \\ m_1(\vec{v}_1^{fin} - \vec{v}_1^{init}) &\overset{\text{obs}}{=} -m_2(\vec{v}_2^{fin} - \vec{v}_2^{init}) \\ m_1\vec{v}_1^{fin} + m_2\vec{v}_2^{fin} &\overset{\text{obs}}{=} m_1\vec{v}_1^{init} + m_2\vec{v}_2^{init} \end{aligned} \tag{9.4}$$

La définition de la masse inerte permet d'écrire que la somme initiale des produits $m_i\vec{v}^{init}$ se conserve lors de toute interaction, et réciproquement, la conservation des produits $m_i\vec{v}^{init}$ définit la masse inerte. La définition de la masse inerte et la conservation du produit $m_i\vec{v}^{init}$ lors de toute interaction sont une seule et même notion.

- les corps fusionnent pendant l'interaction :

$$\vec{v}_1^{fin} = \vec{v}_2^{fin} = \vec{v}^{fin}$$

9. En relativité ces coefficients sont appelés inertie.
10. Elle n'est plus vérifiée en relativité.

Nous avons alors :

$$m_1\vec{v}_1^{init} + m_2\vec{v}_2^{init} \overset{\text{obs}}{=} m_1\vec{v}^{fin} + m_2\vec{v}^{fin} \text{ pour tout observateur galiléen}$$
$$\overset{\text{obs}}{=} (m_1 + m_2)\vec{v}^{fin}$$

Posons

$$\begin{cases} \Delta m = m_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 = m - \Delta m$$

$$(m - \Delta m)\vec{v}_1^{init} + \Delta m\vec{v}_2^{init} \overset{\text{obs}}{=} m\vec{v}^{fin} \text{ pour tout observateur galiléen}$$
$$\Delta m(\vec{v}_2^{init} - \vec{v}_1^{init}) \overset{\text{obs}}{=} m(\vec{v}^{fin} - \vec{v}_1^{init})$$
$$\vec{v}_{choc}\Delta m \overset{\text{obs}}{=} m\Delta\vec{v} \tag{9.5}$$

- un corps se scinde en deux :

$$\vec{v}_1^{init} = \vec{v}_2^{init} = \vec{v}^{init}$$

Nous avons alors :

$$m_1\vec{v}_1^{fin} + m_2\vec{v}_2^{fin} \overset{\text{obs}}{=} m_1\vec{v}^{init} + m_2\vec{v}^{init} \text{ pour tout observateur galiléen}$$
$$\overset{\text{obs}}{=} (m_1 + m_2)\vec{v}^{init}$$

Posons

$$\begin{cases} \Delta m = m_2 \\ m = m_1 + m_2 \end{cases} \Rightarrow \quad m_1 = m - \Delta m$$

$$(m - \Delta m)\vec{v}_1^{fin} + \Delta m\vec{v}_2^{fin} \overset{\text{obs}}{=} m\vec{v}^{init} \text{ pour tout observateur galiléen}$$
$$m(\vec{v}_1^{fin} - \vec{v}^{init}) \overset{\text{obs}}{=} \Delta m(\vec{v}_1^{fin} - \vec{v}_2^{fin})$$
$$m\Delta\vec{v} \overset{\text{obs}}{=} -\vec{v}_{\text{éjection de } \Delta m}\Delta m \tag{9.6}$$

Définition 3.5: Quantité de mouvement

Le produit de la masse inerte m d'un corps par sa vitesse $\vec{v}(t)$ mesurée dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, est appelé sa quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{p}(t) \overset{\text{def}}{=} m\vec{v}(t)$$

Remarques 3.1

- Le symbole $\overset{\text{def}}{=}$ rappelle que cette égalité est une simple définition. Si l'on compare avec l'axiome 3.1 p. 142 du principe d'inertie d'un corps en mouvement rectiligne, ici nous n'introduisons pas de nouveau concept
- Pour être plus précis, nous devrions parler de « quantité de mouvement rectiligne », car nous verrons au § 4.2 p. 171 qu'il existe une « quantité de mouvement en rotation »
- Tout comme la vitesse, la quantité de mouvement est toujours relative, parler de quantité de mouvement n'a de sens que si l'on précise par rapport à quoi, c-à-d le référentiel

D'après la déf. 3.2 p. 142 d'un corps pseudo-isolé, et d'après l'expérience 3.5 p. 145, la masse inerte d'un corps isolé est constante. L'axiome 3.1 p. 142 du principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne se réécrit :

Axiome 3.2: Principe d'inertie d'un corps isolé en mouvement rectiligne

Tout corps isolé se déplace à vecteur quantité de mouvement constant ou nul pour un observateur galiléen :

$$\vec{p}_{\text{corps isolé}} \overset{\text{def}}{=} \vec{C}^{ste} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

En notant $\vec{p}^{\,init}$ la quantité de mouvement avant le choc et $\vec{p}^{\,fin}$ celle après le choc, (9.4) p. 145 devient :

$$\vec{p_1}^{\,fin} + \vec{p_2}^{\,fin} \overset{\text{obs}}{=} \vec{p_1}^{\,init} + \vec{p_2}^{\,init} \textit{ pour tout observateur galiléen} \tag{9.7}$$

La somme des quantités de mouvement du système isolé formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps lorsque mesurée dans un référentiel galiléen, elle est identique avant, pendant et après l'interaction entre les deux corps. Cette relation n'est valable que si l'on retrouve les corps 1 et 2 après l'interaction, autrement dit lorsqu'il n'y a pas d'échange de matière.

Définir la masse inerte c'est poser la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé pour un observateur galiléen, et réciproquement poser la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé c'est définir la masse inerte.

Définition 3.6: Système

En physique on désigne par système l'objet de notre étude. Habituellement, un système est un ensemble quelconque de corps, en interaction entre-eux ou non.
Un système est

- isolé s'il n'a aucune interaction avec l'extérieur. Il n'échange ni matière ni rayonnement et ne subit aucune force (de contact, gravitationnelle, électromagnétique, etc.)
- libre s'il ne subit que des forces gravitationnelles
- pseudo-isolé s'il n'échange ni matière ni rayonnement et si la somme des forces qui s'exercent dessus est nulle
- fermé s'il n'échange ni matière ni rayonnement mais sur lequel peuvent agir des forces
- ouvert s'il évolue dans le temps en recevant ou en perdant de la matière ou de l'énergie, des forces pouvant agir sur lui

Référentiel et système sont des notions distinctes bien que l'on puisse associer un référentiel à tout système. L'observateur est fixe dans le référentiel, ce qui est observé est le système.

La variation de quantité de mouvement d'un système est possible par variation de sa vitesse et/ou de sa masse :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \Delta(m\vec{v}) \\ &= m\Delta\vec{v} + \vec{v}\Delta m \end{aligned} \tag{9.8}$$

Remarque 3.3

Cette égalité est une égalité mathématique, toujours vraie, on utilise le symbole « = ».

Dans le premier terme du membre de droite, $\Delta\vec{v}$ est la variation de vitesse du système. Dans le second terme, $\vec{v}$ est la vitesse relative de Δm et m. C'est le vecteur vitesse du choc ou de l'éjection de Δm avec m ((9.5) et (9.6) p. 146). Lorsque la masse varie le système est ouvert,

il évolue dans le temps et n'est plus lié à un ou plusieurs corps physiques (ex. 3.1 p. 148, au départ le système est la fusée et son plein de propergol, à l'arrivée le système est la fusée seule).

Lorsque la masse inerte du système est constante :

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$

La relation (9.3) p. 144 dans laquelle $m_1 = 1$, devient :

$$\Delta\vec{p}_1 \overset{\text{obs}}{=} -\Delta\vec{p}_2 \text{ pour tout observateur galiléen}$$

L'interaction entre deux corps correspond donc à un transfert de quantité de mouvement car la variation de quantité de mouvement du corps 1 est égale et opposée à la variation de quantité de mouvement du corps 2.

Les quantités de mouvement étant des vecteurs, la somme de deux quantités de mouvement est encore une quantité de mouvement. Appelons *quantité de mouvement totale* d'un système, notée $\vec{p}_{\text{système}}$, la somme des quantités de mouvement des corps constituant ce système :

$$\vec{p}_{\text{système}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{2} \vec{p}_j$$

L'expérience a donc montré que la quantité de mouvement totale de ce système isolé constitué de deux corps se conserve pour un observateur galiléen,

$$\vec{p}^{\,fin}_{\text{système}} \overset{\text{obs}}{=} \vec{p}^{\,init}_{\text{système}} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions dans le système (sans quoi tout se conserve lorsqu'il ne se passe rien). En considérant l'interaction de ce système avec un troisième corps, puis un quatrième, etc., nous formons un nouveau système à n corps tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j^{\,fin} \overset{\text{obs}}{=} \sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j^{\,init} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{\,ste}$$

Nous pouvons énoncer l'axiome suivant :

Axiome 3.3: Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé

La quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps,

$$\vec{p}_{\text{système isolé}} \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{\,ste} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions entre les corps constituant le système isolé.

À partir d'une nouvelle expérience, nous avons obtenu ce nouvel axiome de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé. Il inclut le principe 3.2 p. 147 d'inertie d'un système constitué d'un unique corps.

Exemple 3.1

Dans l'espace, une fusée allume son réacteur avec un débit de gaz $\mu(t)$. La vitesse $\vec{v}_{gaz}$ d'éjection des gaz relativement à la fusée est supposée constante. Quelle est l'accélération de la fusée ? Quelle est la vitesse maximale atteinte ?
Pour pouvoir appliquer l'axiome 3.3, l'observateur doit être galiléen et le système considéré doit être isolé. Nous supposons que nous sommes un observateur dans un référentiel

galiléen particulier, on précisera par la suite lequel. La fusée n'est pas un système isolé car elle éjecte du gaz, en revanche la fusée, le propergol et le gaz constituent un système isolé (le seul). Dans notre référentiel galiléen, la quantité de mouvement de ce système isolé se conserve au cours du temps :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_{fusée}+\vec{p}_{propergol}+\vec{p}_{gaz}\right) &\overset{\text{obs}}{=} \vec{0} \\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{fusée}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{propergol}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{gaz}}{\mathrm{d}t} &\overset{\text{obs}}{=} \vec{0} \end{aligned} \tag{9.9}$$

Le système étant isolé, sa masse inerte se conserve. On note cependant que les différentes parties du système n'ont pas la même vitesse ni une masse constante. Le gaz n'a pas la même vitesse que la fusée et le propergol, et le propergol et le gaz ont des masses variables. Le premier terme s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{fusée}}{\mathrm{d}t} = m_{fusée}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}}{\mathrm{d}t} + v_{fusée}(t)\,\frac{\mathrm{d}m_{fusée}}{\mathrm{d}t}$$

La masse de la fusée sans propergol étant constante :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{fusée}}{\mathrm{d}t} = m_{fusée}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}}{\mathrm{d}t}$$

Le second terme s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{propergol}}{\mathrm{d}t} = m_{propergol}(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{propergol}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}_{propergol}(t)\,\frac{\mathrm{d}m_{propergol}}{\mathrm{d}t}$$

Choisissons pour notre référentiel galiléen celui qui a l'instant t_0 est confondu avec celui non galiléen de la fusée. Une fois fixé notre référentiel galiléen nous ne pouvons plus en changer. De même on se fixe à l'instant t_0, lorsque la vitesse du propergol est nulle dans notre référentiel :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} &= m_{propergol}(t_0)\ \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} + \vec{v}_{propergol}(t_0)\ \left.\frac{\mathrm{d}m_{propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \\ &= m_{propergol}(t_0)\ \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \end{aligned}$$

À l'instant t_0 le troisième terme s'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = m_{gaz}(t_0)\ \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} + \vec{v}_{gaz}(t_0)\ \left.\frac{\mathrm{d}m_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$

Remarque 3.4

Si la vitesse d'éjection des gaz est supposée constante par rapport à la fusée, alors dans notre référentiel elle varie dans le temps. En effet, soit $\vec{a}(t)$ l'accélération de la fusée à l'instant t, alors dans notre référentiel

$$\vec{v}_{gaz}(t) = \vec{v}_{gaz}(t_0) - \vec{a}(t)t$$

où t est le temps qui s'écoule après t_0 :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = -\vec{a}(t_0)$$

La masse de gaz à l'instant t_0 est nulle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0)\ \left.\frac{\mathrm{d}m_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$

Dans notre référentiel à l'instant t_0, la relation (9.9) p. 149 devient :

$$m_{fusée} \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} + m_{propergol}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} + \vec{v}_{gaz}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}m_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \vec{0}$$

Isoler le terme concernant la fusée c'est la prendre pour système :

$$m_{fusée} \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = -m_{propergol}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} - \vec{v}_{gaz}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}m_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$

Le terme de droite est non nul, la fusée n'est donc pas un système isolé. La vitesse du propergol est égale à celle de la fusée, nous pouvons regrouper deux termes. Le système devient la fusée et le propergol encore à son bord :

$$(m_{fusée} + m_{propergol}(t_0)) \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = -\vec{v}_{gaz}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}m_{gaz}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \tag{9.10}$$

On retrouve (9.6) p. 146. Nous voyons avec cet exemple que $\vec{v}\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ est bien une force. La masse du système (fusée plus propergol) est variable, le système est ouvert. Au départ le système c'est la fusée avec le plein de propergol, à chaque instant il est redéfini avec moins de propergol, à la fin le système c'est la fusée seule. Le système n'est pas lié à des corps physiques.
$\mu(t) = \mathrm{d}m_{gaz}/\mathrm{d}t$ est le débit de gaz éjecté par la fusée à l'instant t :

$$\vec{a}_{fusée}(t_0) = -\frac{\mu(t_0)\vec{v}_{gaz}(t_0)}{m_{fusée+propergol}(t_0)}$$

ce qui répond à la première question. Comme on pouvait s'y attendre, l'accélération est proportionnelle au débit et à la vitesse d'éjection des gaz, et inversement proportionnelle à la masse restante à l'instant t_0.
Pendant le temps $\mathrm{d}t$, la masse de propergol diminue, il se transforme en gaz

$$\mathrm{d}m_{propergol} = -\mathrm{d}m_{gaz}$$

où la variation infinitésimale de masse $\mathrm{d}m_{propergol}$ est négative puisque le propergol perd de la masse et $\mathrm{d}m_{gaz}$ est positive puisque du gaz est créé.

$$\mathrm{d}m_{fusée+propergol} = -\mathrm{d}m_{gaz}$$

car $\mathrm{d}m_{fusée}$ est nulle. En reprenant (9.10) p. 150 :

$$(m_{fusée} + m_{propergol}(t_0)) \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}m_{fusée+propergol}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$

$$\mathrm{d}\vec{v}_{fusée}|_{t_0} = \vec{v}_{gaz}(t_0) \left.\frac{\mathrm{d}m_{fusée+propergol}}{m_{fusée+propergol}}\right|_{t_0}$$

Cette relation est valable pour toutes les valeurs du paramètre t_0. Nous pouvons intégrer la relation pour t_0 variant entre 0 et T (le paramètre t_0 est noté comme une variable t) :

$$\int_0^T \mathrm{d}\vec{v} = \int_0^T \vec{v}_{gaz}(t) \frac{\mathrm{d}m_{fusée+propergol}}{m_{fusée+propergol}(t)}$$

Pour pouvoir intégrer il nous faut la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée. Elle est supposée constante :

$$[\vec{v}(t)]_0^T = \vec{v}_{gaz}\left[\ln\left(m_{fusée+propergol}\right)\right]_0^T$$
$$\vec{v}(T) - \vec{v}(0) = \vec{v}_{gaz}\ln\left(\frac{m_{fusée} + m_{propergol}(T)}{m_{fusée} + m_{propergol}(0)}\right)$$

Si à l'instant T tout le propergol est consommé, $m_{propergol}(T) = 0$ et la vitesse est maximale :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{max} &= \vec{v}(0) + \vec{v}_{gaz}\ln\left(\frac{m_{fusée}}{m_{fusée} + m_{propergol}(0)}\right)\\ &= \vec{v}(0) - \vec{v}_{gaz}\ln\left(1 + \frac{m_{fusée}}{m_{propergol}(0)}\right)\end{aligned}$$

La vitesse maximale est proportionnelle à la vitesse d'éjection des gaz et dépend de la quantité de propergol embarquée. En revanche elle est indépendante du débit de gaz. Le signe négatif est dû au fait que les gaz sont de sens opposé à celui de la fusée.

3.3 Moment de masse

Soient deux mobiles isolés, nous avons :

$$\begin{cases}\vec{r}_1(t) = \vec{v}_1 t + \vec{r}_{01}\\ \vec{r}_2(t) = \vec{v}_2 t + \vec{r}_{02}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m_1\vec{r}_1(t) - t\vec{p}_1 = \vec{r}_{01}\\ m_2\vec{r}_2(t) - t\vec{p}_2 = \vec{r}_{02}\end{cases}$$

Si les deux mobiles sont sans interaction, on a bien sûr :

$$m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) - t(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{r}_{01} + \vec{r}_{02} \tag{9.11}$$

Si les deux mobiles ont une interaction, par conservation de la quantité de mouvement avant et après l'interaction

$$\vec{p}_1^{\,init} + \vec{p}_2^{\,init} = \vec{p}_1^{\,fin} + \vec{p}_2^{\,fin}$$

si bien qu'avec interaction on a encore la relation (9.11). Pour N mobiles, en notant ci leur centre d'inertie :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i(t) - t\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \vec{\mathrm{C}}^{\,ste}$$
$$M\vec{r}_{ci}(t) - t\vec{p}_{ci} = \vec{\mathrm{C}}^{\,ste}$$

On pose la définition :

Définition 3.7: Moment de masse

$$\vec{\mathrm{N}} = t\vec{p}_{ci} - M\vec{r}_{ci}(t)$$

Le moment de masse d'un système isolé se conserve.

3.4 Modèle de force

Définition 3.8: Modèle de force

On appelle modèle de force la représentation théorique d'une force physique réelle.

Exemple 3.2

Une masse au repos est fixée à un ressort vertical. Pour rester dans les limites élastiques du ressort, la masse n'est ni trop lourde ni trop légère. Si l'on double la masse, donc le poids, on double la force exercée sur le ressort. On constate que pour la nouvelle position de repos, l'allongement du ressort a à peu près doublé. Or, lorsqu'un système est au repos la somme des forces exercées sur lui est nulle. On peut alors modéliser la force de rappel du ressort par un vecteur force proportionnel et de sens contraire à l'allongement du ressort par rapport à sa position de repos :

$$\vec{F} \overset{\text{mod}}{=} -k\vec{x} \tag{9.12}$$

Le symbole $\overset{\text{mod}}{=}$ rappelle que $-k\vec{x}$ n'est pas la force physique réelle exercée par le ressort, c'est un modèle. Il faut lire « la force de rappel est modélisée par $-k\vec{x}$ ». Ce modèle donne une oscillation sinusoïdale sans amortissement, très loin de la réalité. C'est le travail du physicien ou de l'ingénieur de trouver un bon modèle de force pour le problème posé, tout en restant conscient des limites du modèle choisi. Le modèle de force peut dépendre explicitement ou implicitement des coordonnées, des composantes du vecteur vitesse, des composantes du vecteur accélération, du temps, ou de tout autre paramètre, température, pression, angles, surface, volume, etc.

$$\vec{F} = \vec{F}(x, \vec{v}, \vec{a}, t, etc.)$$

Lorsque la masse attachée au ressort oscille sans frottements sur une surface horizontale, le modèle de force du ressort reste celui donné par (9.12).

Notation 3.1

La force réelle (impossible à connaître) est notée $\vec{f}$, son modèle est noté $\vec{F}$.

Remarque 3.5

Dans l'ex. 3.1 p. 148 de la fusée, nous n'avons pas eu besoin de modéliser de force. En revanche nous avons utiliser une théorie physique avec ses limites, par exemple la masse inerte supposée indépendante de la vitesse relative.

3.5 Relation fondamentale de la dynamique

3.5.1 Définition d'une force

D'après l'axiome 3.3 p. 148, la quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps lorsqu'elle est mesurée par un observateur galiléen. Lorsque nous agissons sur un système isolé, qui *de facto* n'est plus isolé, par exemple en le poussant ou en le tirant, nous faisons varier sa quantité de mouvement dans le temps et nous le déformons.

Nous dirons que nous exerçons une *force* sur ce système, cette force étant extérieure au système. Réciproquement, lorsque la quantité de mouvement d'un système précédemment isolé varie ce ne peut être que parce qu'une force s'exerce sur lui.

La variation de quantité de mouvement d'un système isolé et la déformation qu'il subit sont indépendantes. Nous ne nous intéresserons pas ici à la déformation du système.

Lorsque la somme des forces exercées sur un système est nulle, le système n'est pas isolé mais pseudo-isolé, sa quantité de mouvement se conserve et le système est le plus souvent assimilable à un système isolé.

Considérons un système isolé, donc de masse constante. Avec (9.8) p. 147 :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{p} &= m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}\mathrm{d}m \\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \dot{\vec{p}} &= m\vec{a} \end{aligned}$$

Remarque 3.6

Dès l'instant où une force s'exerce sur un système, celui-ci n'est plus isolé. Dans la suite nous écrirons « isolé » en lieu et place de « précédemment isolé ».

Nous posons la définition suivante :

Définition 3.9: Force s'exerçant sur un système isolé

On appelle force s'exerçant sur un système isolé, toute action faisant varier dans le temps sa quantité de mouvement pour un observateur galiléen :

$$\vec{f} \overset{\rightarrow}{=} m\vec{a}_{\text{système isolé}}$$

Nous n'écrivons pas cette définition avec le signe $\overset{\text{def}}{=}$ comme nous l'avons fait pour définir la quantité de mouvement, déf. 3.5 p. 146. Le symbole $\vec{f}$ n'est pas une façon simple et rapide de désigner $\dot{\vec{p}}$, comme c'est le cas pour $\vec{p}$ qui désigne $m\vec{v}$. Ce n'est pas une égalité mais une relation de causalité, la force est la cause et la variation de la quantité de mouvement est la conséquence de cette cause. L'ordre temporel intervient car la cause a lieu avant sa conséquence. Il faut lire « toute force exercée sur un système isolé provoque la variation de sa quantité de mouvement dans le temps et, seule une force extérieure peut provoquer la variation de quantité de mouvement dans le temps d'un système isolé ».

Remarque 3.7

Une relation de causalité n'est pas une implication au sens mathématique.
La définition précédente de force peut quand même s'écrire sous la forme d'une double implication si-alors en conservant l'ordre temporel : « Si une force s'exerce sur un système isolé alors elle provoque la variation de sa quantité de mouvement, si la quantité de mouvement d'un système isolé varie alors une force s'est exercée dessus. »
La phrase suivante est une implication au sens mathématique du terme : « si c'est un diamant alors c'est dur ».
Ce n'est pas une relation de causalité car l'ordre temporel n'intervient pas.

Les variations de quantités de mouvement étant des vecteurs, nous n'avons d'autre choix que de modéliser les forces par des vecteurs. Ce faisant nous supposons que les forces s'additionnent.

Axiome 3.4: Indépendance des forces

Quand plusieurs forces sont appliquées à un même système, chacune d'elles produit le même effet que si elle était seule.

Soient q forces s'exerçant sur un système isolé, de quantité de mouvement $\vec{p}$:

$$\vec{f_1} + \vec{f_2} + \cdots + \vec{f_q} \overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}_1\vec{p}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}_2\vec{p}}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\mathrm{d}_q\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

où $\mathrm{d}_1\vec{p}$, $\mathrm{d}_2\vec{p}\ldots$ sont q différentielles de $\vec{p}$ distinctes. La somme des forces extérieures exercées sur un système isolé fait varier dans le temps sa quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q} \vec{f_i} &\overset{\to}{=} \sum_{i=1}^{q} \frac{\mathrm{d}_i\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ &\overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\text{système isolé}}\end{aligned}$$

La somme des forces extérieures fait varier dans le temps la quantité de mouvement totale du système isolé.

Définition 3.10: Forces s'exerçant sur un système isolé

On appelle forces s'exerçant sur un système isolé, toute action faisant varier dans le temps sa quantité de mouvement pour un observateur galiléen :

$$\sum \vec{f} \overset{\to}{=} m\vec{a}_{\text{système isolé}}$$

3.5.2 Action-réaction

L'axiome 3.3 p. 148 de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé donne pour un système constitué de deux corps :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p_2}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{obs}}{=} \vec{0}$$

Si la somme des effets est nulle alors la somme des causes est nulle :

$$\vec{f_1} + \vec{f_2} \overset{\text{obs}}{=} \vec{0}$$

où $\vec{f_1}$ est la force exercée par le corps 1 sur le corps 2, et $\vec{f_2}$ est la force exercée par le corps 2 sur le corps 1. Pour le système isolé constitué des corps 1 et 2, la somme des forces *intérieures* au système est nulle. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1: Loi de l'action-réaction

Lors de toute interaction, la force exercée par le corps 1 *sur le corps* 2 *est égale et opposée à celle exercée par le corps* 2 *sur le corps* 1 *:*

$$\vec{f_1} \overset{\text{obs}}{=} -\vec{f_2}$$

Pour un système de plusieurs corps, en les considérant deux à deux on en déduit le théorème :

Théorème 3.2

La somme des forces intérieures à tout système, isolé ou non, est nulle.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{\,int} \overset{\text{obs}}{=} \vec{0}$$

Il peut y avoir des forces à l'intérieur d'un système, mais elles s'annulent toutes.

3.5.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

La déf. 3.10 p. 154 devient une équation dont on peut chercher une solution lorsque l'on remplace la somme des forces réelles $\sum \vec{f}$ par la somme des modèles de force $\sum \vec{\mathrm{F}}$. De plus on généralise aux systèmes non isolés. Une force fait toujours varier dans le temps la quantité de mouvement d'un système, qu'il soit isolé ou non :

Axiome 3.5: Relation fondamentale de la dynamique

$$\sum \vec{\mathrm{F}}^{\,ext} \overset{\rightarrow}{=} m\vec{a}_{\text{système à masse constante}} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

C'est une relation de causalité d'où le symbole $\overset{\rightarrow}{=}$. Le membre de gauche, la « cause », est un modèle de force. Le membre de droite, la « conséquence », est issue de l'observation du principe d'inertie et de l'expérience sur les interactions permettant de définir la masse inerte et la quantité de mouvement. Une fois les forces modélisées, la RFD est posée comme une égalité stricte. C'est une équation différentielle que l'on résoud mathématiquement pour obtenir l'équation du mouvement. Celle-ci permet de valider ou d'invalider les modèles de force choisis (ex. 3.2 p. 152 du ressort).

Remarque 3.8

On mesure parfois la variation de quantité de mouvement pour en déduire le modèle de force. Cela ne signifie pas que la relation de causalité soit inversée, c'est toujours la force qui crée la variation de quantité de mouvement lorsque le système est isolé.

Dans le cas particulier d'un système à masse variable (ex. 3.1 p. 148, 3.4 p. 159 et 3.5 p. 160), l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD s'écrit :

Axiome 3.6: Relation fondamentale de la dynamique

$$\sum \vec{\mathrm{F}}^{\,ext} \overset{\rightarrow}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\text{système à masse variable}} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

Elle inclut l'axiome 3.3 p. 148 de conservation de la quantité de mouvement. En effet, lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur un système sa quantité de mouvement se conserve dans tout référentiel galiléen :

$$\sum \vec{\mathrm{F}}^{\,ext} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \sum \vec{p} \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{\,ste} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

La RFD est valable dans tout référentiel galiléen, elle est donc covariante c.-à-d. invariante de forme par changement de référentiel galiléen, en accord avec le principe de relativité galiléenne 2.4 p. 139.

3.6 Masse grave et force de gravitation

Comme pour la masse inerte, la *masse grave* ou *masse pesante* ou encore *charge gravitationnelle*, est un coefficient que l'on associe à la quantité de matière contenue dans un corps. Ce coefficient se mesure par exemple par comparaison directe grâce à une balance de Roberval, ou par comparaison indirecte grâce à une balance piezoélectrique, ou un dynamomètre. Ces deux instruments de mesure donnent le poids du corps qui dépend de l'endroit sur Terre où l'on se trouve. En revanche, le rapport des poids de deux corps, directement donné par la balance de Roberval, est indépendant du lieu et des autres conditions extérieures. Pour que la masse grave soit un coefficient intrinsèque au corps, autrement dit pour qu'il ne dépende pas des conditions extérieures mais seulement du corps considéré, nous définissons le rapport des masses de deux corps comme égal au rapport de leurs poids lorsqu'ils sont pesés au même endroit. On désigne alors un corps de référence qui aura une masse grave unité, avec lequel les masses graves des autres corps sont comparées.

Définition 3.11: Masse grave

Dans son rôle actif, la masse grave m_g d'un corps mesure l'intensité du champ gravitationnel créé par ce corps. Dans son rôle passif, la masse grave m_g d'un corps mesure la réponse de ce corps aux champs gravitationnels créés par d'autres corps.

Appelons *vecteur position* d'un système (ou d'un corps unique) dans un référentiel galiléen de centre O, le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OG}$ où G est le centre de gravité du système. Appelons *rayon vecteur* le vecteur reliant deux centres de gravité.

Soient deux corps de masses gravitationnelles m_1 et m_2, et $\vec{r}_{12}$ le rayon vecteur de la masse 1 vers la masse 2. L'expérience montre que la *force de gravitation* s'exerçant entre deux corps a pour direction la droite passant par les deux corps et est proportionnelle aux masses. En suivant l'intuition de Robert Hooke, la force d'attraction gravitationnelle est supposée inversement proportionnelle à la distance au carré. Il reste à déterminer le sens de la force, autrement dit son signe. m_1, m_2, et la constante de proportionnalité sont positifs, et l'expérience montre que la force de gravitation est attractive :

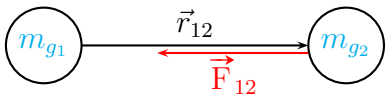


Fig. 9.3 – Détermination du signe de la force de gravitation

La force est de sens opposé à $\vec{r}_{12}$, donc le signe est négatif. Le modèle de force exercée par un corps 1 (rôle actif) sur un corps 2 (rôle passif) est alors

$$\vec{F}_{12} \overset{\text{mod}}{=} -\mathcal{G}\frac{m_{g_1}m_{g_2}}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r} \tag{9.13}$$

où la constante de proportionnalité $\mathcal{G}$ est appelée *constante gravitationnelle*. $\vec{r}_{12}/r$ est un vecteur unitaire de direction 1 vers 2.

La loi de l'action-réaction donne :

$$\vec{F}_{21} \overset{\text{obs}}{=} -\vec{F}_{12}$$

Par exemple la force exercée par la Terre sur un corps est égale et opposée à la force exercée par ce corps sur la Terre. Les rôles actif et passif sont échangés, le rôle passif correspond au système étudié, celui sur lequel s'exerce la force.

Définition 3.12: Champ gravitationnel créé par une masse

On définit le champ gravitationnel créé par la masse grave m_{g_1} indépendamment de la masse grave m_{g_2}, par

$$\vec{g}_1 \overset{\text{def}}{=} -\frac{\mathcal{G} m_{g_1}}{r^3}\,\vec{r}_{12} \tag{9.14}$$

Par exemple, le champ gravitationnel créé par la Terre s'écrit :

$$\vec{g}_{♁} \overset{\text{def}}{=} -\mathcal{G}\,\frac{M_{g♁}}{r^3}\,\vec{r}$$

D'où la relation entre le modèle de force de gravitation et le modèle de champ gravitationnel

$$\vec{\mathrm{F}}_{12} \overset{\text{mod}}{=} m_{g_2}\,\vec{g}_1 \tag{9.15}$$

En utilisant l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD pour un corps tombant à la surface de la Terre

$$-\mathcal{G}\,\frac{m_g\,M_{g♁}}{r^3}\,\vec{r} \overset{\rightarrow}{=} \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

où $M_{g♁}$ est la masse gravitationnelle de la Terre. La masse inerte du corps est supposée constante :

$$-\mathcal{G}\,\frac{m_g\,M_{g♁}}{r^3}\,\vec{r} \overset{\rightarrow}{=} m\,\vec{a} \tag{9.16}$$

Expérience 3.7

L'expérience montre que si l'on se place dans le vide pour s'affranchir des frottements de l'air, tous les corps de masse négligeable devant celle de la Terre, tombent vers la Terre avec la même accélération $\vec{a}$ indépendamment de leur masse (grave ou inerte). Plus généralement, les corps lâchés au même endroit avec la même vitesse initiale, suivent les mêmes trajectoires dans l'espace et dans le temps.

Remarque 3.9

On néglige le fait que les corps et la Terre tombent vers leur centre de gravité commun, car la masse des corps étudiés est supposée négligeable devant celle de la Terre. Si l'on considère l'interaction Terre-Lune, cette approximation n'est plus valable.

Nous pouvons alors simplifier l'égalité (9.16) par m et m_g, c.-à-d. supposer l'égalité

$$\boxed{m_{\,inerte} \overset{\text{obs}}{=} m_{\,grave}} \tag{9.17}$$

pour obtenir une accélération indépendante de la masse du corps considéré. Cette égalité est observationnelle, elle ne vaut que ce que vaut la précision de la mesure expérimentale. Elle est justifiée au § 2.5 p. 137 par le *principe d'équivalence*. Les expériences récentes montrent que masse inerte et masse grave sont égales avec une incertitude relative de 10^{-13}. On choisit le même corps de référence pour la masse inerte et la masse grave ce qui permet de ne pas introduire de constante de passage arbitraire entre les deux, et qui fixe par conséquent la constante gravitationnelle :

$$-\mathcal{G}\,\frac{M_{g♁}}{r^3}\,\vec{r} \overset{\rightarrow}{=} \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{g}_{\overset{+}{\circlearrowleft}} \overset{\rightarrow}{=} \vec{a}}$$

Le champ gravitationnel terrestre local $\vec{g}_{\overset{+}{\circlearrowleft}}$ provoque l'accélération $\vec{a}$ d'un objet quelconque de masse négligeable par rapport à celle de la Terre. On mesure alors la constante gravitationnelle grâce à un pendule de torsion [11] :

$$\mathcal{G} \approx 6{,}674\ 30 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$$

Le fait que la trajectoire des corps au voisinage de la Terre ne dépende pas des corps eux-même montre que cette trajectoire dans l'espace et dans le temps est déterminée uniquement par la Terre.

Exemple 3.3

Reprenons l'ex. 3.2 p 152 avec une masse attachée à un ressort dans le plan vertical, en présence d'un champ gravitationnel $\vec{g}$. Prenons comme système la masse. La position d'équilibre x_0 de la masse par rapport à la position de repos du ressort, est déterminée par sa masse grave m_g (la position d'équilibre est fonction de l'intensité du champ de gravitation). L'expérience montre que si l'on double la masse grave, la position d'équilibre est proche de $2x_0$, ce qui justifie le modèle statique de force de rappel du ressort linéaire en x. Déterminons la position d'équilibre x_0 de la masse :

$$\sum \vec{\mathrm{F}}^{ext} \overset{\rightarrow}{=} \vec{0}$$
$$\vec{\mathrm{T}}_0 + \vec{\mathrm{P}} \overset{\rightarrow}{=} \vec{0}$$

$\vec{\mathrm{T}}_0$ est le modèle de force de rappel statique du ressort pour la masse en question, $\vec{\mathrm{P}}$ est le modèle de force de pesanteur de cette masse. Remplaçons par leur modèle respectif :

$$-k\vec{x}_0 + m_g\vec{g} \overset{\rightarrow}{=} \vec{0}$$
$$-kx_0\vec{\jmath} - m_g g\vec{\jmath} \overset{\rightarrow}{=} \vec{0}$$
$$kx_0 + m_g g \overset{\rightarrow}{=} 0$$

On suppose l'égalité stricte pour pouvoir résoudre :

$$x_0 = -\frac{m_g g}{k}$$

L'oscillation $x(t)$ de la masse autour de sa position d'équilibre est déterminée par sa masse inerte car en l'absence de champ de gravitation la masse oscille quand même autour de la position de repos du ressort. Lorsque la masse oscille, le modèle dynamique de rappel du ressort est le même qu'en statique car nous avons supposer l'égalité entre masse inerte et masse grave. Déterminons le mouvement de la masse grâce à la RFD :

$$\sum \vec{\mathrm{F}}^{ext} \overset{\rightarrow}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$
$$\vec{\mathrm{T}}(t) + \vec{\mathrm{P}} \overset{\rightarrow}{=} m\vec{a}(t)$$
$$-k[\vec{x}(t) + \vec{x}_0] + m_g\vec{g} \overset{\rightarrow}{=} m\ddot{\vec{x}}(t)$$
$$[-kx(t) - kx_0 + m_g g]\,\vec{\jmath} \overset{\rightarrow}{=} m\ddot{x}(t)\vec{\jmath}$$
$$-kx(t) \overset{\rightarrow}{=} m\ddot{x}(t)$$

11. Henry Cavendish, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1798.

Le problème n'est maintenant plus « que » mathématique. Pour chercher une solution, supposons l'égalité stricte :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\,x(t) = 0$$

Les fonctions circulaires sinus et cosinus (et les exponentielles complexes) changent de signe lorsque dérivées deux fois. La solution a donc pour forme générale :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

où A est l'amplitude maximale, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase, ω est la pusation et φ_0 est la phase à l'origine des temps.

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

si bien que :

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m}\,A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Si l'amplitude $x(t)$ est maximale à $t = 0$ alors $\varphi_0 = 0$ et :

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Exemple 3.4

Une balance est tarée avec un récipient posé dessus. On y verse de l'eau d'une hauteur h, avec un débit massique μ constant. Qu'indique la balance ?

a) Première méthode

À $t = 0$ le récipient est vide et la balance indique 0. Si à chaque instant le système de masse variable $m(t)$ est l'eau présente dans le récipient, alors dans le référentiel galiléen du récipient et de la balance, la quantité de mouvement du système ne varie pas :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\\ &= m\times\vec{0} + \vec{0}\times\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Notons $\vec{\mathrm{R}}(t)$ la réaction de la balance sur l'eau via le récipient, $\vec{\mathrm{P}}(t)$ le poids de l'eau présente dans le récipient, et $\vec{f}$ la force exercée par l'eau qui percute le système avec la vitesse $\vec{v}$. D'après l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD, la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système est nulle :

$$\sum \vec{\mathrm{F}}^{\,ext} \overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{p}_{\text{système}}$$
$$\vec{\mathrm{R}}(t) + \vec{\mathrm{P}}(t) + \vec{f} = \vec{0}$$

La conservation de l'énergie mécanique pendant la chute donne la norme de la vitesse d'impact :

$$mgh = \tfrac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2gh}$$

En un temps $\mathrm{d}t$ le système reçoit de la part de l'eau qui tombe la quantité de mouvement $\vec{v}\mathrm{d}m$, donc l'eau exerce sur le système la force :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} \\ &= \mu\vec{v}\end{aligned} \tag{9.18}$$

À l'instant t la balance affiche la norme de sa réaction :

$$\vec{\mathrm{R}}(t) = -\vec{\mathrm{P}}(t) - \vec{f}$$
$$\|\vec{\mathrm{R}}(t)\|\vec{\jmath} = -[-gm(t)\vec{\jmath}] - (-\mu\|\vec{v}\|\vec{\jmath})$$
$$\|\vec{\mathrm{R}}(t)\| = \mu\left(gt + \sqrt{2gh}\right)$$

b) Seconde méthode

Prenons comme système une masse m d'eau versée en un temps Δt. Elle subit une variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ en cet intervalle de temps Δt. La force moyenne exercée sur le système a pour expression :

$$\vec{f} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La variation de vitesse est indépendante de la durée de l'impact, elle vaut

$$\begin{aligned}\Delta\vec{v} &= \vec{v} - \vec{0} \\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

Prenons comme système une masse $\mathrm{d}m$ d'eau versée en un temps $\mathrm{d}t$:

$$\vec{f} = \mathrm{d}m\,\frac{\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

C'est un choc, c.-à-d. une variation de vitesse importante pendant un temps très court. Il nous manque la durée $\mathrm{d}t$ pendant laquelle la masse $\mathrm{d}m$ impacte le récipient. C'est le débit qui indirectement nous donne cette durée. Pour une masse d'eau m et un débit μ, la durée totale de l'impact vaut m/μ. Pour une masse d'eau $\mathrm{d}m$, la durée est donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}m/\mu$ si bien que

$$\vec{f} = \mu\vec{v}$$

et l'on retrouve (9.18). C'est une sorte de choc continu.

Exemple 3.5

Du sable tombe en continu sur un tapis roulant avec un débit massique μ constant. En bout de tapis le sable tombe si bien que la masse de sable sur le tapis est constante. Quelle force doit exercer le moteur du tapis roulant pour entrainer le sable et maintenir constante la vitesse $\vec{v}$ du tapis roulant ?

a) Première méthode

Si l'on prend comme système le tapis roulant et le sable qu'il charrie, alors dans le référentiel galiléen qui lui est lié sa quantité de mouvement ne varie pas. D'après l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD, la somme des forces extérieures s'exerçant sur lui est nulle :

$$\sum \vec{f} \overset{\rightrightarrows}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{p}_{\text{système}}$$
$$\vec{f}_{moteur} + \vec{f}_{sable} = \vec{0}$$

En un temps $\mathrm{d}t$ le système reçoit de la part du sable la quantité de mouvement $-\vec{v}\mathrm{d}m$, donc le sable exerce sur le système la force :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{sable} &= -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} \\ &= -\mu\vec{v}\end{aligned}$$

$$\vec{f}_{moteur} = \mu\vec{v}$$

b) Seconde méthode

Si l'on prend comme système une masse m de sable tombée en un temps Δt, la force moyenne sur ce temps Δt exercée par le moteur sur le système a pour expression :

$$\vec{f}_{moteur} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

La variation de vitesse du sable est indépendante de la durée de l'impact, elle vaut

$$\begin{aligned}\Delta\vec{v} &= \vec{v} - \vec{0} \\ &= \vec{v}\end{aligned}$$

Prenons comme système une masse $\mathrm{d}m$ de sable déposée sur le tapis roulant en un temps $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\vec{f}_{moteur} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} \\ &= \mu\vec{v}\end{aligned}$$

3.7 Énergie

Pour mesurer l'effet total d'une force nous calculons la circulation de cette force le long de la trajectoire du point sur lequel elle s'exerce. Intégrons l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD par rapport à l'espace parcouru par le système sous l'action des forces exercées sur ce système :

$$\begin{aligned}&\int_A^B \sum \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \overset{\rightrightarrows}{=} \int_A^B \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \text{pour tout observateur galiléen} \\ &\sum \int_A^B \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \overset{\rightrightarrows}{=} \int_A^B \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\end{aligned} \tag{9.19}$$

Le produit scalaire permet de ne prendre en compte que les forces ou les composantes de force qui créent le déplacement ou qui s'y opposent.

Définition 3.13: Travail

On appelle travail d'une force l'intégrale curviligne sur le trajet de cette force.

On note W (« work ») l'intégrale curviligne du modèle de force sur le trajet de cette force :

$$W \overset{\text{def}}{=} \int_A^B \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Remarques 3.2

- Le travail est positif si le déplacement est dans le sens de la force, le produit scalaire est alors positif. C'est toujours le cas lorsque la force crée le déplacement. Le travail est négatif si le déplacement et la force sont de sens contraire, comme pour toutes les forces de frottements. Il est nul si le déplacement et la force sont perpendiculaires, comme pour les forces de réaction
- Le travail des forces intérieures d'un système isolé peut être positif. Prenons par exemple un système isolé constitué de deux corps en interaction, d'après la loi de l'action-réaction 3.1 p. 154, les deux forces intérieures sont égales et opposées :

  $$\vec{f}_1 \overset{\text{obs}}{=} -\vec{f}_2$$

  Si les deux corps se déplacent, le déplacement est de même direction mais en sens opposé, car les forces étant opposées, elles sont toutes les deux attractives ou répulsives. Le travail intérieur de ces deux forces s'écrit :

  $$\int_A^B \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_A^B \vec{f}_2 \cdot (-\mathrm{d}\vec{r}) = 2\int_A^B \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$$

Dans (9.19) p. 161, pour simplifier le raisonnement sans perdre en généralité, posons

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{\imath} + \mathrm{d}y\,\vec{\jmath}$$

Le terme de gauche s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_A^B \left(\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}y \right) \\
&= \int_A^B \frac{\mathrm{d}(mv_x)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x + \int_A^B \frac{\mathrm{d}(mv_y)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_A^B \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,v_x + m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}x + \int_A^B \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,v_y + m\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

La masse du système est supposée constante :

$$\begin{aligned}
\int_A^B \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_A^B m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x + \int_A^B m\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}y \\
&= m\int_A^B \mathrm{d}v_x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\int_A^B \mathrm{d}v_y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= m\int_A^B v_x \mathrm{d}v_x + m\int_A^B v_y \mathrm{d}v_y \\
&= \tfrac{1}{2}m\left[v_x^2\right]_A^B + \tfrac{1}{2}m\left[v_y^2\right]_A^B \\
&= \tfrac{1}{2}m\left[v_x^2 + v_y^2\right]_A^B \\
&= \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_A^B \ \textit{dans tout référentiel}
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Définition 3.14: Énergie cinétique

Le terme $\frac{1}{2}mv^2$, noté E_c, est appelé énergie cinétique.

$$E_c \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$$

Avec cette définition (9.20) devient :

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{c_B} - E_{c_A} \text{ dans tout référentiel}$$

L'énergie cinétique n'est pas une modélisation, elle est toujours une fonction explicite de la vitesse. Elle peut aussi être une fonction explicite des coordonnées, par exemple en coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\theta}^2\right)$$

Elle peut être une fonction implicite des coordonnées, de l'accélération, du temps ou d'autres paramètres par l'intermédiaire de la vitesse.

Revenons à (9.19) p. 161. Pour intégrer la somme des travaux des modèles des forces exercées sur le système, nous devons faire des hypothèse sur ces modèles de force.

Définition 3.15: Gradient

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire de trois variables, habituellement les coordonnées spatiales, qui en tout point de son espace de définition renvoie un scalaire. f définit donc un champ de scalaires. On appelle gradient l'opérateur différentiel $\overrightarrow{\text{grad}}$, tel qu'appliqué à f on ait en coordonnées rectangulaires x, y, z dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

L'opérateur gradient est une dérivée spatiale (ici tridimensionnelle) qui en chaque point de l'espace de définition d'une fonction scalaire donne son taux de variation selon chaque coordonnée. C'est la généralisation à plusieurs dimensions de la notion de dérivée. L'opérateur vectoriel gradient a pour coordonnées rectangulaires $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Lorsqu'il s'applique à f on le nomme *gradient* de f. Il prend en entrée la fonction f et renvoie le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$. Un champ de vecteurs est une fonction qui en tout point de son espace de définition renvoie un vecteur. Cette notion fût inventée par Michael Faraday par analogie avec les champs de blé, chaque pied représentant un vecteur.

Définition 3.16: Potentiel d'un champ vectoriel

La fonction scalaire f est dite potentielle du champ vectoriel $\vec{\mathrm{A}}$ ssi :

$$\vec{\mathrm{A}} \overset{\text{def}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

Réciproquement, le champ vectoriel $\vec{\mathrm{A}}$ dérive du champ de scalaires f.

Exemple 3.6

En coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques, dans leur base associée :

$$A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}\right)$$

$$A_\rho\vec{e}_\rho+A_\theta\vec{e}_\phi+A_z\vec{e}_z=-\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi+\frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z\right)$$

$$A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta+A_\phi\vec{e}_\phi=-\left(\frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi\right)$$

Lorsque le champ vectoriel est un modèle de force, la fonction scalaire est une énergie potentielle.

Définition 3.17: Énergie potentielle ou potentiel de force

Un modèle de force dérive d'une énergie potentielle E_p lorsque l'on peut écrire :

$$\vec{\mathrm{F}}\overset{\text{def}}{=}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p) \tag{9.21}$$

$\vec{\mathrm{F}}$ étant un modèle de force, E_p est un modèle d'énergie potentielle adapté au problème. La convention de signe négatif rend compte du fait que la force est dirigée selon les potentiels décroissants. Tout comme le modèle de force dont elle dérive, l'énergie potentielle peut dépendre explicitement ou implicitement des coordonnées, de la norme du vecteur vitesse, de la norme du vecteur accélération, du temps, ou de tout autre paramètre.

Les surfaces de l'espace où le potentiel a une valeur fixée sont appelées *surfaces équipotentielles*. La force est en chaque point normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point, elle est dirigée dans le sens des potentiels décroissants (la force de pesanteur est dirigée dans le sens des énergies potentielles décroissantes) et son intensité est égale à la dérivée directionnelle du potentiel suivant la normale.

Exemple 3.7: Énergie potentielle d'une force de gravitation

Soit E_{pp} l'énergie potentielle de pesanteur du modèle de la force gravitationnelle $\vec{\mathrm{F}}$. D'après la définition 3.16 p. 163, en coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathrm{F}}\overset{\text{def}}{=}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_{pp})$$

$$F\vec{e}_\rho=-\frac{\partial E_{pp}}{\partial \rho}\,\vec{e}_\rho$$

$$F=-\frac{\partial E_{pp}}{\partial \rho}$$

$$\int_A^B F\mathrm{d}\rho=-\left(E_{pp_B}-E_{pp_A}\right)$$

La relation (9.13) p. 156 donne le modèle de force gravitationnelle :

$$-\left(E_{pp_B}-E_{pp_A}\right)=-\int_A^B\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$E_{pp_A}-E_{pp_B}=\left[\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\rho}\right]_A^B$$

$$\boxed{E_{pp} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\rho}} \tag{9.22}$$

Exemple 3.8: Potentiel d'un champ gravitationnel

Soit $\mathcal{V}$ le potentiel scalaire du champ gravitationnel $\vec{g}$. D'après la déf. 3.16 p. 163, en coordonnées sphériques :

$$\vec{g} \overset{\text{def}}{=} -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{V})$$
$$g\vec{e}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho}\,\vec{e}_\rho$$
$$g = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \rho}$$
$$\int_A^B g\,\mathrm{d}\rho = -\left(\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_A\right)$$

La relation (9.14) p. 157 donne l'expression du champ gravitationnel :

$$-\left(\mathcal{V}_B - \mathcal{V}_A\right) = -\int_A^B \frac{\mathcal{G}m}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$$
$$\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B = \left[\frac{\mathcal{G}m}{\rho}\right]_A^B$$
$$\boxed{\mathcal{V} = -\frac{\mathcal{G}m}{\rho}} \tag{9.23}$$

$\mathcal{V}$ est le potentiel du champ de gravitation. En partant de (9.15) p. 157, nous trouvons la relation entre énergie potentielle et potentiel d'un champ :

$$\vec{\mathrm{F}}_{12} = m_2\,\vec{g}_1$$
$$-\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p_{12}}) = -m_2\,\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{V}_1)$$
$$E_{p_{12}} = m_2\mathcal{V}_1$$

que l'on retrouve directement en utilisant (9.22) et (9.23).

Lorsque plusieurs forces s'exercent sur le système, les modèles étant des vecteurs, nous pouvons les additionner. Par linéarité de l'opérateur gradient, nous pouvons de même additionner les énergies potentielles correspondant à ces forces :

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2 &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p1}) - \overrightarrow{\text{grad}}(E_{p2}) \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p1} + E_{p2})\end{aligned}$$

Donc les énergies potentielles s'additionnent :

$$E_p = \sum_i E_{pi}$$

Dans le cas général la force et son modèle associé dépendent du temps (eg : particule chargée dans un champ électrique variable) et de la position (eg : champ de gravitation). Par conséquent le modèle d'énergie potentielle aussi,

$$\vec{\mathrm{F}}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)(\vec{r}, t)$$

et la différentielle totale exacte (dte) de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathrm{d}E_p(\vec{r},t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \frac{\partial E_p}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Si la force est indépendante du temps, elle dérive (spatialement) d'une énergie potentielle elle aussi indépendante du temps, et dans ce cas la dte s'écrit :

$$\mathrm{d}E_p(\vec{r}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

Supposons que chaque modèle de force dérive d'une énergie potentielle et soit indépendant du temps. La relation (9.19) p. 161 devient :

$$\begin{aligned}
\sum\int_A^B \vec{\mathrm{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{r} &\overset{\rightarrow}{=} \sum_i \int_A^B -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_{pi})\cdot\mathrm{d}\vec{r} \text{ pour tout observateur galiléen}\\
&\overset{\rightarrow}{=} -\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\
&\overset{\rightarrow}{=} -\int_A^B \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial E_p}{\partial x}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\\
&\overset{\rightarrow}{=} -\int_A^B \mathrm{d}E_p\\
&\overset{\rightarrow}{=} -\left[E_p\right]_A^B\\
&\overset{\rightarrow}{=} E_p(A) - E_p(B) \text{ pour tout observateur galiléen}
\end{aligned}$$

Si les modèles de force dérivent tous d'une énergie potentielle et sont indépendants du temps, alors le travail des modèles de force ne dépend pas du trajet suivi mais uniquement des points de départ et d'arrivée.

Démontrons la réciproque : si le travail du modèle de force est indépendant du trajet suivi, alors le modèle de force dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps.

Imaginons deux trajets pour aller de A à B, et supposons que le travail effectué soit le même pour chaque trajet. Si l'on utilise le premier trajet pour l'aller, et le second pour le retour, le travail à l'aller est égal et opposé à celui du retour, autrement dit il est nul le long du chemin fermé :

$$\oint_C \vec{\mathrm{F}}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

Définition 3.18: Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs

Dans le repère naturel orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x,y,z, soit un champ de vecteurs $\vec{u}(u_x,u_y,u_z)$. On appelle rotationnel l'opérateur différentiel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$, tel qu'appliqué à $\vec{u}$ on obtienne le champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{u}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\vec{k}$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_C \vec{\mathrm{F}}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{F}})(\vec{r},t)\right]\cdot\vec{n}ds$$

où $\vec{n}$ est la normale (sortante ou entrante selon le sens de parcours de C) à la surface S s'appuyant sur le chemin C. Par conséquent le vecteur rotationnel de $\vec{\mathrm{F}}(\vec{r},t)$ est nul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{F}})(\vec{r},t)=\vec{0}$$

Nous avons ici besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant :

Théorème 3.3: Rotationnel du gradient

Pour toute fonction scalaire ϕ de dérivées partielles secondes continues (pour pouvoir intervertir les dérivées partielles), le rotationnel du gradient de la fonction ϕ est nul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)\right]=\vec{0}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)\right]&=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\\&=\begin{vmatrix}\partial_x & \partial_x\phi\\ \partial_y & \partial_y\phi\\ \partial_z & \partial_z\phi\end{vmatrix}=(\partial_y\partial_z\phi-\partial_z\partial_y\phi)\vec{\imath}+(\partial_z\partial_x\phi-\partial_x\partial_z\phi)\vec{\jmath}+(\partial_x\partial_y\phi-\partial_y\partial_x\phi)\vec{k}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

□

Pour que son rotationnel soit nul, le modèle de force doit dériver d'une énergie potentielle :

$$\vec{\mathrm{F}}(\vec{r},t)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)(\vec{r},t)$$

Seconde partie de la démonstration : si le modèle de force dépend du temps $\vec{\mathrm{F}}(\vec{r},t)$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)\cdot\mathrm{d}\vec{r}&=\mathrm{d}E_p-\frac{\partial E_p}{\partial t}\mathrm{d}t\\\int_A^B-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)\cdot\mathrm{d}\vec{r}&=-\int_A^B\mathrm{d}E_p+\int_{t_A}^{t_B}\frac{\partial E_p}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=-\left[E_p\right]_A^B+\int_{t_A}^{t_B}\frac{\partial E_p}{\partial t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

alors le travail du modèle de force dépend du chemin suivi à cause du second terme, car pour $\vec{\mathrm{F}}$ donnée, les durées des trajets entre A et B varient selon le trajet emprunté.

Par contraposée, si le travail du modèle de force est indépendant du trajet suivi (ce qui est notre hypothèse de départ), alors le modèle de force est indépendant du temps.

La relation (9.19) p. 161 devient

$$E_{p_A}-E_{p_B}\overset{\rightrightarrows}{=}E_{c_B}-E_{c_A}\text{ pour tout observateur galiléen}$$

La variation d'énergie potentielle provoque la variation de vitesse du système. En effet, d'après le principe d'inertie celle-ci doit sinon rester constante en l'absence d'action extérieure au système. Réorganisons les termes :

$$E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}\text{ pour tout observateur galiléen}\tag{9.24}$$

Le symbol $=$ indique que la relation de causalité est perdue.

Définition 3.19: Énergie mécanique

Le terme $E_c + E_p$, noté E_m, est appelé énergie mécanique.

$$E_m \overset{\text{def}}{=} E_c + E_p$$

Le choix du signe négatif de la définition de l'énergie potentielle (9.21) p. 164 se retrouve ici. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Si nous avions choisi un signe positif, l'énergie potentielle serait l'opposée de la convention choisie en physique, et l'énergie mécanique serait la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Il ne s'agit là que d'une convention de définition, écrire $a + b$ ou écrire $a - (-b)$.

Avec cette nouvelle définition (9.24) p. 167 devient :

$$E_{m_A} = E_{m_B} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

Théorème 3.4: Conservation de l'énergie mécanique

Lorsque le modèle de force dérive spatialement d'une énergie potentielle scalaire qui ne dépend pas explicitement du temps, et lorsque la masse se conserve, l'énergie mécanique se conserve le long de tout trajet pour un observateur galiléen :

$$E_m \overset{\text{obs}}{=} c^{ste} \text{ pour tout observateur galiléen} \tag{9.25}$$

Lorsque les conditions sont réunies, l'énergie mécanique est la même en tout point du trajet, donc aussi à tout instant. Elle ne dépend donc pas du temps et le système est dit *conservatif*. Les forces extérieures dérivant d'un potentiel scalaire qui ne dépend pas explicitement du temps sont dites *conservatives* dans le sens où cela implique la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique est alors une constante du mouvement, appelée aussi intégrale première du mouvement.

Exemple 3.9

Un corps de poids $\vec{\mathrm{P}}$ tombe dans un champ gravitationnel $\vec{g}$. En négligeant les forces de frottement de l'air, (9.19) p. 161 donne :

$$\int_A^B \vec{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \overset{\rightrightarrows}{=} Ec_B - E_{c_A}$$

Le poids du corps $\vec{\mathrm{P}} \overset{\text{mod}}{=} m\vec{g}$ est un modèle de la force d'interaction gravitationnelle entre le corps et la Terre, lorsque $\vec{g}$ peut être supposé constant. Il dérive de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} telle que :

$$\vec{\mathrm{P}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_{pp})$$

$$-mg\vec{k} = -\frac{\mathrm{d}E_{pp}}{\mathrm{d}z}\,\vec{k}$$

$$E_{pp} = mgz + C^{ste/z}$$

Fixer la valeur de la constante revient à fixer le zéro de l'énergie potentielle de pesanteur. Nous pouvons choisir librement ce zéro car seule une différence d'énergie potentielle n'a

de sens physique. Nous avons alors :

$$-\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \overset{\rightrightarrows}{=} E_{c_B} - E_{c_A}$$
$$E_{pp}(A) - E_{pp}(B) \overset{\rightrightarrows}{=} E_{c_B} - E_{c_A}$$
$$E_{m_B} = E_{m_A}$$

L'énergie mécanique se conserve. On remarque que l'énergie potentielle de pesanteur dépend implicitement du temps par l'intermédiaire de la coordonnée z, $E_{pp} = mgz(t)$. Elle est fonction de la position verticale, elle-même fonction du temps :

$$\mathrm{d}E_{pp}(z) = \frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$
$$\frac{\mathrm{d}E_{pp}(z)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$
$$= mg\dot{z}$$

Pour autant l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = 0$$

Prenons maintenant en compte les frottements de l'air lors de la chute du corps :

$$E_{c_B} - E_{c_A} \overset{\rightrightarrows}{=} \int_A^B \vec{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
$$E_{c_B} - E_{c_A} \overset{\rightrightarrows}{=} E_{pp}(A) - E_{pp}(B) + \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
$$E_{m_B} - E_{m_A} = \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

L'énergie mécanique perdue entre les points A et B est égale à l'intégrale de la force de frottement le long du trajet du corps. Cette énergie d'abord sous forme d'agitation thermique du milieu et du corps, se dissipe ensuite par rayonnement, principalement infrarouge.

L'axiome 3.5 p. 155 de la RFD, est une équation vectorielle qui est l'écriture condensée de trois équations scalaires, une pour chaque coordonnée d'espace. Lorsque toutes les forces sont conservatives, elle est remplacée par la seule équation scalaire du théorème de conservation de l'énergie mécanique (9.25) p. 168. Cela n'est pas toujours possible car toutes les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle. Par exemple il est clair que les forces de frottement dépendent du trajet suivi entre A et B.

4 Mouvement de rotation

Le principe d'inertie 3.1 p. 142 est un principe d'inertie du mouvement rectiligne, nous allons voir qu'il existe aussi un principe d'inertie en rotation.

4.1 Inertie en rotation

Observation 4.1

Par inertie en rotation, la Terre tourne sur elle-même depuis plus de 4 milliards d'années soit plus de 1000 milliards de tours.

Un système a deux façons de tourner, en changeant réelement de direction et en tournant sur lui-même sans changer de direction. C'est pour cela que dans la déf. 2.4 p. 135 d'un référentiel galiléen nous avons précisé que le mouvement est « en translation » et « rectiligne ». Par rotation sur lui-même on entend une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité du mobile. Par changement de direction on entend une rotation autour d'un axe ne passant pas par le centre de gravité du mobile.

Il s'agit en fait de la même chose, un mobile en rotation sur lui-même peut être vu comme deux mobiles en rotation autour d'un centre de gravité commun.

Le système pouvant à la fois changer de direction et tourner sur lui-même le principe sera appliqué deux fois. Un mouvement rectiligne n'est jamais qu'un mouvement de rotation autour d'un point à l'infini. S'il existe un principe d'inertie en rotation il doit redonner le principe d'inertie du mouvement rectiligne lorsque la distance au centre de gravité commun tend vers l'infini. Par conséquent le principe d'inertie en rotation généralisera celui rectiligne.

Observation 4.2

Le système quasi-isolé Terre-Soleil est en rotation autour de son centre de gravité, situé dans le Soleil, depuis plus de 4 milliards d'années. Le système Terre-Soleil tourne sur lui-même. Si l'on prend comme système la Terre seule, elle tourne autour du centre de gravité commun avec le Soleil. La révolution terrestre définit le plan de l'écliptique dont l'orientation est stable par rapport au reste de l'univers si l'on néglige l'influence des autres planètes, en particulier celle de Jupiter. De même, le plan de révolution de la Lune autour de la Terre, ou des autres planètes autour du Soleil, et des satellites en général, sont stables.

Nous définissons le plan de révolution d'un satellite orbitant autour d'un astre grâce à un pseudovecteur qui lui est perpendiculaire, confondu avec l'axe de rotation du système satellite-astre. On construit ce pseudovecteur en prenant le produit vectoriel de deux vecteurs situés dans le plan de révolution, le rayon vecteur du satellite (vecteur reliant le centre de gravité du système satellite-astre au satellite), et la vitesse du satellite sur son orbite :

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

Ce produit vectoriel est constant en direction et en sens (lié au sens de révolution des satellites). Il permet de définir le pseudovecteur vitesse angulaire qui doit être indépendant de la distance à l'axe :

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$$

Axiome 4.1: Principe d'inertie en rotation

Tout système isolé tourne autour d'un axe passant par son centre de gravité à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante ou nulle pour un observateur galiléen :

$$\vec{\omega}_{\text{système isolé}} = \overrightarrow{C}^{ste} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

Par analogie avec le mouvement rectiligne, cherchons si une quantité se conserve en rotation dans un système isolé, une sorte de « quantité de mouvement en rotation ». Dans un système isolé constitué de deux corps en interaction, de la quantité de mouvement en rotation serait transférée d'un corps à l'autre. Pour que ce principe redonne le principe d'inertie rectiligne, nous devons prendre en compte la masse inerte des deux systèmes.

4.2 Moment cinétique

Expérience 4.1

Dans un référentiel galiléen, soit $\vec{r}_j^{\,init}$ le vecteur position d'un corps j avant interaction, et soit $\vec{r}_j^{\,fin}$ son vecteur position après interaction. L'expérience montre que lorsque deux corps formant un système isolé sont en interaction :

$$\vec{r}_1^{\,fin} \times \vec{p}_1^{\,fin} + \vec{r}_2^{\,fin} \times \vec{p}_2^{\,fin} \overset{\text{obs}}{=} \vec{r}_1^{\,init} \times \vec{p}_1^{\,init} + \vec{r}_2^{\,init} \times \vec{p}_2^{\,init} \tag{9.26}$$

Définition 4.1: Moment cinétique

On appelle moment cinétique (ou moment angulaire ou moment de la quantité de mouvement) par rapport à un point O fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, d'un corps de centre de gravité G, le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ par la quantité de mouvement de ce corps dans $\mathcal{R}$, $\overrightarrow{OG} \times \vec{p}$. Le vecteur position est noté $\vec{r}$ et le moment cinétique est noté $\overrightarrow{L}_{/O}$:

$$\overrightarrow{L}_{/O} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

La relation (9.26) p. 171 devient :

$$\overrightarrow{L}_{1/O}^{\,fin} + \overrightarrow{L}_{2/O}^{\,fin} \overset{\text{obs}}{=} \overrightarrow{L}_{1/O}^{\,init} + \overrightarrow{L}_{2/O}^{\,init} \textit{ pour tout observateur galiléen}$$

La somme des moments cinétiques du système isolé formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps lorsque mesurée dans un référentiel galiléen, elle est identique avant, pendant et après l'interaction des deux corps. La conservation du moment cinétique total lors d'une interaction est mise en évidence dans un référentiel galiléen quelconque, elle ne dépend donc pas du point de référence O fixe dans ce référentiel. Nous pouvons le démontrer :

Démonstration. Soit $\vec{r}$ un vecteur constant dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, en partant de la conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$, (9.7) p. 147 :

$$\vec{p}_1^{\,fin} + \vec{p}_2^{\,fin} \overset{\text{obs}}{=} \vec{p}_1^{\,init} + \vec{p}_2^{\,init}$$

$$\vec{r} \times (\vec{p}_1^{\,fin} + \vec{p}_2^{\,fin}) \overset{\text{obs}}{=} \vec{r} \times (\vec{p}_1^{\,init} + \vec{p}_2^{\,init})$$

$$\vec{r} \times \vec{p}_1^{\,fin} + \vec{r} \times \vec{p}_2^{\,fin} \overset{\text{obs}}{=} \vec{r} \times \vec{p}_1^{\,init} + \vec{r} \times \vec{p}_2^{\,init}$$

En additionnant avec (9.26)

$$(\vec{r}+\vec{r}_1{}^{fin})\times\vec{p}_1{}^{fin}+(\vec{r}+\vec{r}_2{}^{fin})\times\vec{p}_2{}^{fin}\overset{\text{obs}}{=}(\vec{r}+\vec{r}_1{}^{init})\times\vec{p}_1{}^{init}+(\vec{r}+\vec{r}_2{}^{init})\times\vec{p}_2{}^{init}$$

qui est la conservation du moment cinétique par rapport à un nouveau point de référence O' fixe dans $\mathcal{R}$, tel que $\overrightarrow{O'O}=\vec{r}$. □

En généralisant à un système isolé constitué d'un nombre quelconque de corps, on énonce l'axiome suivant :

Axiome 4.2: Conservation du moment cinétique total

Le moment cinétique total par rapport à un point O quelconque mais fixe dans un référentiel galiléen, d'un système isolé se conserve au cours du temps :

$$\forall O,\quad \vec{\mathrm{L}}_{/O}^{\text{système isolé}}\overset{\text{obs}}{=}\vec{\mathrm{C}}^{ste}\text{ pour tout observateur galiléen}$$

y compris lorsqu'il y a des interactions entre les corps constituant le système isolé.

D'après la définition 4.1 p. 171 du moment cinétique :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_{/O}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})\\&=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\\&=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\\&=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Donc l'axiome 4.2 s'écrit aussi :

$$\forall O,\quad\sum_i\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}\overset{\text{obs}}{=}\vec{0}\text{ pour tout observateur galiléen}$$

Lorsque le point de référence des vecteurs position est envoyé à l'infini les vecteurs position deviennent tous égaux et (9.26) p. 171 devient :

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\vec{p}_1{}^{fin}+\vec{r}\times\vec{p}_2{}^{fin}&\overset{\text{obs}}{=}\vec{r}\times\vec{p}_1{}^{init}+\vec{r}\times\vec{p}_2{}^{init}\\\vec{r}\times(\vec{p}_1{}^{fin}+\vec{p}_2{}^{fin})&\overset{\text{obs}}{=}\vec{r}\times(\vec{p}_1{}^{init}+\vec{p}_2{}^{init})\\\vec{p}_1{}^{fin}+\vec{p}_2{}^{fin}&\overset{\text{obs}}{=}\vec{p}_1{}^{init}+\vec{p}_2{}^{init}\end{aligned}\tag{9.27}$$

L'axiome 4.2 de conservation du moment cinétique total inclut l'axiome 3.3 p. 148 de conservation de la quantité de mouvement totale.

Montrons qu'il est impossible de démontrer l'axiome 4.2 de conservation du moment cinétique total d'un système isolé à partir de l'axiome 3.3 p. 148 de conservation de la quantité de mouvement total d'un système isolé. Autrement dit, lors d'une interaction entre deux corps, nous ne pouvons passer de façon purement théorique de (9.27) à (9.26) p. 171. Il faut nécessairement s'appuyer sur une nouvelle expérience.

Considèrons un système isolé constitué de deux sous-systèmes. Pour le système global, la conservation de la quantité de mouvement,

$$\vec{p}_{\text{système}} \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$

signifie que la quantité de mouvement du système se conserve, y compris lorsqu'il y a des interactions entre les deux sous-systèmes constituant le système. On en déduit que

$$\vec{r} \times \vec{p}_{\text{système}} \overset{\text{obs}}{=} \vec{r} \times \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$
$$\vec{r} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$
$$\vec{r} \times \vec{p}_1 + \vec{r} \times \vec{p}_2 \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$

et le moment cinétique du système global se conserve lors d'une interaction pour un point pris à l'infini (il faut que $\vec{r}$ soit le même). Mais cette relation ne dit pas que l'on a

$$\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$

lors d'une interaction, pour un point qui n'est pas à l'infini.

Remarque 4.1

Pour démontrer la conservation du moment cinétique lors d'une interaction entre deux sous-systèmes, on trouve souvent la démonstration fausse suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{0}$$
$$= \vec{0}$$
$$\vec{r} \times \vec{p} = \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$

Cela démontre seulement que le moment cinétique d'un système dans lequel il ne se passe rien (un corps unique par exemple) se conserve. Par le même raisonnement, nous obtenons plein de relations, par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\vec{p})}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m^2\vec{v}\right) = \vec{v} \times m^2\vec{v} + \vec{r} \times \vec{0}$$
$$= \vec{0}$$
$$\vec{r} \times m\vec{p} = \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$

Effectivement, tout se conserve dans un système dans lequel il ne se passe rien, mais cette relation est fausse lorsqu'on l'applique à l'interaction entre deux systèmes.
Prenons un contre-exemple pour démontrer que l'on ne peut pas appliquer ce raisonnement au cas d'une interaction entre deux systèmes. Le principe d'inertie nous dit que la vitesse d'un système isolé se conserve, donc aussi son énergie cinétique :

$$\vec{v} = \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = c^{ste}$$
$$\tfrac{1}{2}mv^2 = c^{ste}$$
$$E_c = c^{ste}$$

Supposons que le système isolé soit constitué de deux corps bien distincts, chaque corps est un système isolé et par conséquent l'énergie cinétique de chaque corps se conserve et l'on a :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

Mais lorsqu'il y a interaction entre les deux corps, par exemple un choc mou, cette relation devient fausse car une partie de l'énergie cinétique se transforme en énergie d'agitation thermique et en rayonnement. Or ce qui nous intéresse, c'est précisément ce qui se conserve lors d'une interaction, car tout se conserve lorsqu'il ne se passe rien.

4.3 Moment de force

Définition 4.2: Moment d'une force exercé sur un corps

On appelle moment par rapport au point O d'une force $\vec{f}$ s'exerçant en un point A d'un corps, le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ avec cette force, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \vec{f}$. Le moment de force est noté $\vec{\mathscr{M}}_{/O}(\vec{f})$:

$$\vec{\mathscr{M}}_{/O}(\vec{f}) \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \vec{f}$$

D'après la déf. 3.9 p. 153 d'une force sur un corps isolé :

$$\vec{f} \overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \vec{f} \overset{\to}{=} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$
$$\vec{\mathscr{M}}_{/O}(\vec{f}) \overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_{/O}}{\mathrm{d}t}$$

Nous avons vu que le moment cinétique total d'un système isolé se conserve. Lorsque le système n'est plus isolé et que nous le faisons tourner sur lui-même ou ralentissons sa rotation par une action extérieure, nous faisons varier son moment cinétique. Cette variation est due à un moment de force exercé sur le système. Nous pouvons poser la définition alternative suivante :

Définition 4.3: Moment d'une force exercé sur un corps

On appelle moment par rapport au point O d'une force s'exerçant sur un corps, toute action faisant varier dans le temps le moment cinétique par rapport au même point O, de ce corps.

Les moments sont des pseudovecteurs, ils s'additionnent. Lorsque le moment de force par rapport à O s'exerce sur un système constitué de plusieurs corps, il peut s'exercer sur n'importe lequel de ces corps, faisant varier le moment cinétique total du système :

$$\sum_j \vec{\mathscr{M}}_{j/O}(\vec{f}) \overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{\mathrm{L}}_{i/O} \quad \text{pour tout observateur galiléen}$$

À partir de l'axiome 4.2 p. 172 de la conservation du moment cinétique d'un système isolé, nous pouvons énoncer un théorème sur les moments des forces intérieures, analogue à la loi de l'action-réaction :

Théorème 4.1

La somme des moments des forces intérieures à tout système est nulle.

Définition 4.4: Modèle de moment de force

On appelle modèle du moment par rapport au point O d'une force, la représentation théorique du moment par rapport au point O de la force physique réelle.

En se servant de la déf. 3.8 p. 152 du modèle de force, le moment par rapport au point O du modèle d'une force s'exerçant sur un corps situé en A, est le produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ par le modèle de force $\vec{F}$:

$$\vec{\mathscr{M}}_{/O}(\vec{F}) \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$$

La déf. 4.3 p. 174 devient une équation du mouvement dont on peut chercher une solution lorsque l'on écrit que le moment du modèle de force de la force réelle exercée sur le système, provoque une variation dans le temps du moment cinétique du système :

Théorème 4.2: Théorème du moment cinétique

La somme des moments par rapport au point O des modèles des forces extérieures à un système provoque la variation dans le temps du moment cinétique total du système par rapport au même point O :

$$\sum \vec{\mathscr{M}}_{/O}(\vec{F}) \overset{\Rightarrow}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{L}_{/O}^{\text{système isolé}} \text{ pour tout observateur galiléen}$$

Le théorème du moment cinétique est écrit comme une relation de causalité entre des modèles de moments de forces et une variation du moment cinétique. Il faut garder à l'esprit que ces termes ne sont qu'approximativement égaux. Ce nouvel axiome inclut l'axiome 4.2 p. 172 de la conservation du moment cinétique total d'un système isolé : lorsqu'aucun moment de force n'est exercé sur un système $\sum \vec{\mathscr{M}}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0}$, son moment cinétique total se conserve dans tout référentiel galiléen $\vec{L}_{/O}^{\,système\ isolé} \overset{\text{obs}}{=} \vec{C}^{\,ste}$.

Montrons que l'axiome 4.2 p. 175 appelé « théorème du moment cinétique » inclut aussi l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD. En explicitant ce théorème, pour m moments de force et pour un système de n corps :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \vec{r}_j \times \vec{F}_j &\overset{\Rightarrow}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m\vec{v}^{\,init} \\ &\overset{\Rightarrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v}^{\,init} + \vec{r}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}^{\,init}) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \vec{r}_j \times \vec{F}_j &\overset{\Rightarrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}^{\,init} \times m\vec{v}^{\,init} + \vec{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \right) \\ &\overset{\Rightarrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Lorsque le point de référence des vecteurs position est envoyé à l'infini, les vecteurs position deviennent tous égaux, et l'équation précédente s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{m} \vec{r} \times \vec{\mathrm{F}}_j \overset{\to}{=} \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$
$$\vec{r} \times \sum_{j=1}^{m} \vec{\mathrm{F}}_j \overset{\to}{=} \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$
$$\sum_{j=1}^{m} \vec{\mathrm{F}}_j \overset{\to}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

qui est la RFD. Pour trouver les équations du mouvement d'un corps, nous pouvons appliquer deux fois le théorème du moment cinétique 4.2 p. 175. Une première fois par rapport à un point à distance finie pour son mouvement de rotation, une seconde fois par rapport à un point à distance infinie pour son mouvement rectiligne.

5 Un seul axiome pour la mécanique

Montrons qu'en appliquant deux fois l'axiome 4.2 p. 172 de la conservation du moment cinétique total, par rapport à deux points distincts à distances finies, on retrouve l'axiome 3.3 p. 148 de conservation de la quantité de mouvement totale.

Démonstration. Nous avons les deux hypothèses :

$$\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{OA}_i} \times m_i \vec{v}^{init}) \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}_1^{ste} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{O'A}_i} \times m_i \vec{v}^{init}) \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}_2^{ste}$$

En soustrayant :

$$\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{OA}_i} \times m_i \vec{v}^{init}) - \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{O'A}_i} \times m_i \vec{v}^{init}) \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}_3^{ste}$$
$$\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{OA}_i} \times m_i \vec{v}^{init} - \overrightarrow{\mathrm{O'A}_i} \times m_i \vec{v}^{init}) \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}_3^{ste}$$
$$\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\mathrm{OO'}} \times m_i \vec{v}^{init}) \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}_3^{ste}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}^{init} \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}_3^{ste}$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}^{init} \overset{\text{obs}}{=} \vec{\mathrm{C}}^{ste}$$

□

Montrons maintenant qu'en appliquant deux fois le théorème du moment cinétique 4.2 p. 175 par rapport à deux points distincts à distance finie, on retrouve l'axiome 3.5 p. 155 de la RFD.

Démonstration. Nous avons les deux hypothèses :

$$\sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{\mathrm{OA}_j} \times \vec{\mathrm{F}}_j \overset{\to}{=} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OA}_i} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{\mathrm{O'A}_j} \times \vec{\mathrm{F}}_j \overset{\to}{=} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{O'A}_i} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

En soustrayant :

$$\sum_{j=1}^{m}(\overrightarrow{\mathrm{OA}_j}-\overrightarrow{\mathrm{O'A}_j})\times\vec{\mathrm{F}}_j \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}-\overrightarrow{\mathrm{O'A}_i})\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}\times\vec{\mathrm{F}}_j \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}\times\sum_{j=1}^{m}\vec{\mathrm{F}}_j \overset{?}{=} \overrightarrow{\mathrm{OO'}}\times\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\vec{\mathrm{F}}_j \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

□

Par conséquent, toute la mécanique générale peut être établie par la double application du théorème du moment cinétique 4.2 p. 175. Cet axiome, fâcheusement appelé « théorème du moment cinétique », peut alors servir d'unique axiome de départ pour la mécanique.

6 Loi de conservation

6.1 Opérateur divergence

Définition 6.1: Opérateur divergence d'un champ de vecteurs

Dans le repère naturel orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x,y,z, soit un champ de vecteurs $\vec{u}(u_x,u_y,u_z)$. On appelle divergence l'opérateur différentiel div, tel qu'appliqué à $\vec{u}$ on obtienne le scalaire :

$$\mathrm{div}(\vec{u}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Notation 6.1

En notation indicielle, la divergence du vecteur $\vec{u}$ s'écrit :

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i}$$

Théorème 6.1: Théorème de la divergence

Soit $\vec{u}$ un champ de vecteurs quelconques. Pour tout volume V de surface S et de normale sortante $\vec{n}$:

$$\oiint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{d}v$$

Démonstration. Soit un espace ponctuel euclidien ${}_E3$ de système de coordonnées rectangulaire (x^i). Soit $(\vec{e}_i)$ la base naturelle orthonormée de l'espace vectoriel euclidien associé. Soit S

une surface fermée telle que toute droite parallèle aux axes de coordonnées coupe cette surface en au plus deux points (par exemple un balon de baudruche suffisamment gonflé). Alors :

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s &= \oiint_S (u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + u^3\vec{e}_3)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s \\ &= \oiint_S u^1\vec{e}_1\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s + \oiint_S u^2\vec{e}_2\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s + \oiint_S u^3\vec{e}_3\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

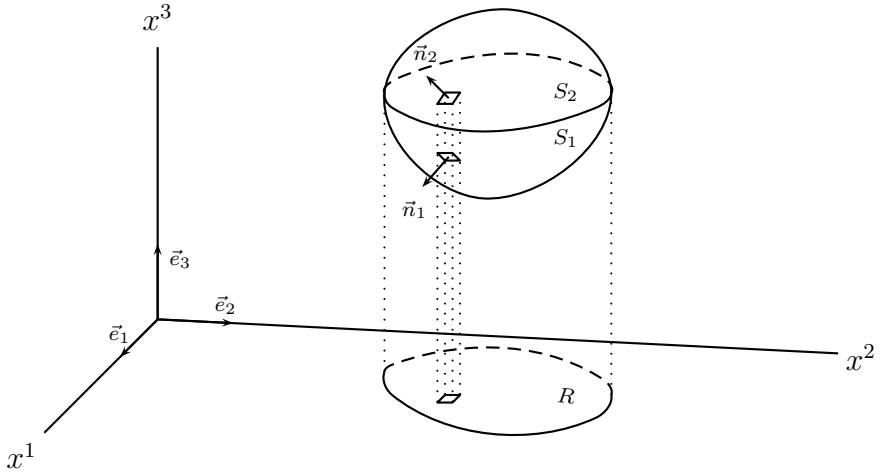


FIG. 9.4 – Volume de surface S

Calculons le dernier terme du membre de droite. Imaginons un plan (x^1, x^2) horizontal coupant la surface fermée S en deux, de sorte que la ligne d'intersection soit la plus longue possible. Nous intégrons maintenant sur les deux surfaces S_1 en bas et S_2 en haut, non fermées, de normales sortantes respectives $\vec{n}_1$ vers le bas et $\vec{n}_2$ vers le haut

$$\oiint_S u^3\vec{e}_3\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_{S_1} u^3\vec{e}_3\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}s_1 + \iint_{S_2} u^3\vec{e}_3\cdot\vec{n}_2\,\mathrm{d}s_2$$

avec :

$$\begin{cases}\vec{e}_3\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}s_1 = -\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 \\ \vec{e}_3\cdot\vec{n}_2\,\mathrm{d}s_2 = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\end{cases}$$

Les surfaces S_1 et S_2 ont pour équation respective :

$$\begin{cases}S_1 \ : \ x^3 = x_1^3(x^1, x^2) \\ S_2 \ : \ x^3 = x_2^3(x^1, x^3)\end{cases}$$

Soit R le domaine d'intégration en x^1, x^2 :

$$\begin{aligned}\oiint_S u^3\vec{e}_3\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s &= \iint_R u^3(x^1, x^2, x_2^3)\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 - \iint_R u^3(x^1, x^2, x_1^3)\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 \\ &= \iint_R \left[u^3(x^1, x^2, x_2^3) - u^3(x^1, x^2, x_1^3)\right]\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 \\ &= \iint_R \left(\int_{x_1^3}^{x_2^3} \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3\right)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 \\ &= \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Nous obtenons un résultat similaire pour les coordonnées x^1 et x^2, si bien que :

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s &= \iiint_V \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\,\mathrm{d}v + \iiint_V \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\,\mathrm{d}v + \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,\mathrm{d}v \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Les coordonnées étant rectangulaires, on utilise la déf. 6.1 p. 177 de l'opérateur différentiel divergence en coordonnées rectilignes :

$$\oiint_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iiint_V \operatorname{div}\vec{u}\,\mathrm{d}v$$

Le théorème peut s'étendre aux surfaces qui ne satisfont pas la condition que des droites parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires les coupent en au plus deux points. Pour établir cette généralisation, subdiviser le domaine S en sous-domaines dont les surfaces satisfont la condition. □

$\vec{u}\cdot\vec{n}$ et $\operatorname{div}\vec{u}$ sont des scalaires et l'intégrale de surface et celle de volume ne dépendent pas du système de coordonnées, par conséquent ce théorème est une égalité entre deux scalaires, donc une relation tensorielle vraie dans tout système de coordonnées :

$$\oiint_S u^i n_i\,\mathrm{d}s = \iiint_V \partial_i u^i\,\mathrm{d}v$$

Avec (22.6) p. 435 et la notation 1.3 p. 66, remplaçons $\mathrm{d}v$ par $\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega$ et $\mathrm{d}s$ par $\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\sigma$:

$$\oiint_S \sqrt{|g|}\,u^i n_i\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \sqrt{|g|}\,\partial_i u^i\,\mathrm{d}\Omega \tag{9.28}$$

6.2 Théorème de Gauss

Théorème 6.2: Théorème de Gauss

Soit S une surface fermée quelconque, de normale sortante $\vec{n}$. Soit $\vec{r} = r\vec{e}_r$ un champ de vecteurs d'origine O :

$$\text{Si } O \text{ est extérieur à } S, \quad \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\text{Si } O \text{ est intérieur à } S, \quad \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = 4\pi$$

Démonstration. À partir du théorème de la divergence 6.1 p. 177 avec $\vec{u} = \vec{e}_r/r^2$:

$$\oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iiint_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)\mathrm{d}v$$

- supposons O extérieur à S. Dans ce cas r ne peut pas être nul dans le volume d'intégration de la divergence ($r \neq 0$ dans V) :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) &= \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\\ &= \operatorname{div}\left(\frac{x^1}{r^3}\,\vec{e}_1 + \frac{x^2}{r^3}\,\vec{e}_2 + \frac{x^3}{r^3}\,\vec{e}_3\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{x^2}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)\end{aligned}$$

Pour le premier membre :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{r^3}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\frac{x^1}{\left[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\right]^{3/2}}\right\}\\ &= \left[r^3 - x^1 \times 2x^1 \times \tfrac{3}{2}\,r\right]/r^6\\ &= \left(r^3 - 3r(x^1)^2\right)/r^6\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) &= \left[3r^3 - 3r\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]/r^6\\ &= 0\end{aligned}$$

- supposons maintenant O intérieur à S. Entourons O d'une petite sphère s de rayon a et de volume v. Soit $\mathscr{V}$ le volume intérieur à S et extérieur à s, et soient $\vec{n}_S$ et $\vec{n}_s$ les normales sortantes respectives des surfaces S et s :

$$\begin{aligned}\oiint_S \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}_S}{r^2}\,\mathrm{d}s - \oiint_s \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}_s}{r^2}\,\mathrm{d}s &= \iiint_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)\mathrm{d}v - \iiint_v \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)\mathrm{d}v\\ &= \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)\mathrm{d}v\\ &= 0\end{aligned}$$

car O est extérieur à $\mathscr{V}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\oiint_S \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}_S}{r^2}\,\mathrm{d}s &= \oiint_s \frac{\vec{e}_r\cdot\vec{n}_s}{r^2}\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{a^2}\oiint_s \mathrm{d}s\\ &= 4\pi\end{aligned}$$

□

6.3 Hypothèse d'un milieu continu

6.3.1 Densité numérique - Nombre volumique

On considère un grand nombre n d'éléments distincts identiques répartis dans l'espace, ayant chacun leur propre vitesse. Ces éléments peuvent être par exemple des électrons, des atomes, des molécules ou autre. À l'instant t dans un référentiel quelconque R, prenons centré en un point de vecteur position $\vec{r}(x,y,z)$, un volume parallélépipédique rectangle $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ contenant $n(t,\vec{r})$ éléments. On pose la définition :

Définition 6.2: Nombre volumique ou densité numérique d'éléments

$$\rho_n(t,\vec{r}) = \frac{n(t,\vec{r})}{V(\vec{r})} \tag{9.29}$$

$\rho_n(t,\vec{r})$ est la densité numérique d'éléments dans le volume V, à l'instant t en $\vec{r}$.

Lorsque le coefficient associé à l'élément est très petit, par exemple sa masse m ou sa charge électrique q, on fait l'approximation d'un *milieu continu*, ce qui permet d'utiliser le calcul différentiel et intégral.

Exemple 6.1

La densité et la densité de charges électriques sont définies localement en un point à un instant donné, dans un volume infinitésimal :

$$\rho_m(t,\vec{r}) = \frac{mn(t,\vec{r})}{V} \quad \longrightarrow \quad \rho_m(t,\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}M(t,\vec{r})}{\mathrm{d}v}$$

$$\rho_q(t,\vec{r}) = \frac{qn(t,\vec{r})}{V} \quad \longrightarrow \quad \rho_q(t,\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}Q(t,\vec{r})}{\mathrm{d}v}$$

où M est la masse totale du volume V, et Q est sa charge totale :

$$M(t,\vec{r}) = \iiint_V \rho_m(t,\vec{r})\mathrm{d}v \qquad \text{et} \qquad Q(t,\vec{r}) = \iiint_V \rho_q(t,\vec{r})\mathrm{d}v$$

6.3.2 Courant - débit

Un courant moyen ou un débit moyen est un nombre n d'éléments divisé par un intervalle de temps Δt :

$$I_n = \frac{n}{\Delta t}$$

On ne peut faire tendre Δt vers zéro pour obtenir un courant instantané car n deviendrait nul. Nous faisons donc l'hypothèse d'un milieu continu :

$$I_n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$$

Exemple 6.2

En faisant l'hypothèse d'un milieu continu, nous avons :

- le débit instantané de matière : $I_M = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

- le courant électrique instantané : $I_q = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

Remarque 6.1

Ce peut être un débit de matière, un courant électrique mais aussi un courant d'énergie, un débit de quantité de mouvement, etc.

Un débit massique est la quantité de matière (i.e. la masse) qui passe par unité de temps dans un conduit de section donnée. De même, un courant électrique est la quantité de charges électriques qui passe chaque par unité de temps dans un câble électrique de section donnée. Intéressons-nous à la quantité de matière ou de charges électriques qui passe dans ce conduit ou ce câble par unité de temps et par unité de surface.

Dans un référentiel quelconque R, soit $\vec{v}(t, \vec{r})$ le champ des vecteurs vitesse du milieu continu. À l'instant t_0 en $\vec{r}_0$ un volume infinitésimal d^3v a pour vitesse instantané $\vec{v} = \vec{v}(t_0, \vec{r}_0)$ qui dépend de sa position, de l'instant considéré et de la vitesse instantanée du référentiel R de l'observateur. Soit $\vec{n}(\vec{r})$ la normale en chaque point de la surface telle que le milieu passe à travers la surface : $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3 n &= \rho_n \mathrm{d}^3 v \\ \mathrm{d}^2 I \mathrm{d}t &= \rho_n \vec{v} \mathrm{d}t \cdot \vec{n} \mathrm{d}^2 s \\ \mathrm{d}^2 I &= \rho_n \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}^2 s \\ &= \vec{j} \cdot \vec{n} \mathrm{d}^2 s \\ I &= \iint_s \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}s \end{aligned}$$

où $\vec{j}$ est le champ de vecteurs densité de courant dans $\mathcal{R}$ (densité surfacique de courant, c.-à-d. densité linéïque de charges par unité de temps).

Remarque 6.2

La valeur du courant est fonction de $\vec{v}$ qui dépend du choix du référentiel.

6.3.3 Équation de conservation

Nos hypothèses sont les suivantes :

- existence d'un milieu continu
- existence d'une quantité conservative de densité ρ, liée à ce milieu continu

Cette quantité (la masse, la charge, l'énergie ...) se conserve dans le temps, elle ne peut être ni créée ni détruite. Nous nous plaçons dans un référentiel quelconque R dans lequel on mesure le champ des vecteurs vitesse $\vec{v}(t, \vec{r})$ du milieu continu. La variation dans le temps de cette quantité conservative dans le volume V ne peut être due qu'à un flux de matière entrant ou sortant à travers la surface fermée S délimitant V.

Par convention, l'orientation de la surface fermée est choisie positive vers l'extérieur. En notant $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire sortante de la surface, autrement dit pointant hors du volume considéré :

$$\vec{S} = \vec{n} S$$

Les deux hypothèses de départ donnent la relation immédiate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{s} = 0$$

appelée *équation de conservation* sous sa forme intégrale, valable dans tout référentiel.

Remarques 6.1

- $\vec{v}$ est la vitesse du milieu continu au point où se trouve l'élément de surface $\mathrm{d}^2 s$
- L'équation de conservation est également appelée équation de transport car une quantité qui se conserve ne peut qu'être transportée d'un endroit à un autre

- si $\partial_t \rho > 0$ le flux est entrant et $\vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{s} < 0$
- si $\partial_t \rho < 0$ le flux est sortant et $\vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{s} > 0$

Remarque 6.3

Si par convention l'orientation de la surface est choisie positive vers l'intérieur, l'équation de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence 6.1 p. 177, on écrit l'équation de conservation sous sa forme différentielle, appelée forme locale :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0} \tag{9.30}$$

Exemple 6.3

Équation de conservation de la masse (mécanique classique) :

- ρ est la masse volumique du fluide
- $\vec{j} = \rho_M \vec{v}$ est la densité de quantité de mouvement du fluide par unité de surface, $\vec{v}$ est son champ de vecteurs vitesse

Équation de conservation de la charge (mécanique classique et relativiste) :

- ρ est la densité de charge
- $\vec{j} = \rho_q \vec{v}$ est la densité de courant électrique

Équation de conservation de l'énergie (mécanique classique) :

- ρ est la densité d'énergie
- $\vec{j} = \rho_e \vec{v}$ est le flux d'énergie par unité de surface et par unité de temps

Pour les quantités non conservatives, l'équation s'appelle *équation de continuité* :

- s'il existe une *source* d'éléments dans V :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{s} > 0$$

- s'il existe un *puit* d'éléments dans V :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}^2\vec{s} < 0$$

7 Opérateur nabla

Définition 7.1: Opérateur symbolique nabla

Soit le repère naturel orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z. On appelle nabla [a] l'opérateur différentiel symbolique ∇, tel que :

$$\nabla_3 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

a. Nabla est le nom hébraïque d'un instrument de musique égyptien, une sorte de harpe qui avait la forme d'un delta inversé.

Ce 3-opérateur symbolique permet de définir les trois opérateurs gradient, divergence et rotationnel.

- La multiplication de ∇ par le champ de scalaires $f(x, y, z)$ donne le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$:

$$\begin{aligned}\nabla_3 f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(f)\end{aligned}$$

- Le produit scalaire euclidien de ∇ par le champ de vecteurs $\vec{u}$ donne le champ de scalaires $\text{div}(\vec{u})$:

$$\begin{aligned}\nabla_3 \cdot \vec{u}(u_x, u_y, u_z) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= \text{div}(\vec{u})\end{aligned}$$

- Le produit vectoriel de ∇ par le champ de vecteurs $\vec{u}$ donne le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})$:

$$\begin{aligned}\nabla_3 \times \vec{u}(u_x, u_y, u_z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})\end{aligned}$$

Remarque 7.1

L'opérateur nabla est symbolique, toutes les règles du calcul vectoriel ne s'appliquent pas à cet opérateur. En particulier, on a la relation *fausse* suivante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} \times \vec{v}) &= \nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (\nabla \cdot \vec{v})\vec{u} - (\nabla \cdot \vec{u})\vec{v} \\ &= \text{div}(\vec{v})\vec{u} - \text{div}(\vec{u})\vec{v}\end{aligned}$$

Définition 7.2: Opérateur laplacien

Soit le repère naturel orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z. On appelle laplacien d'un champ de scalaires $f(x, y, z)$, l'opérateur différentiel Δ, tel que :

$$\begin{aligned}\Delta(f) &\overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Le laplacien prend en entrée un champ de scalaires et donne en sortie un autre champ de scalaires. En utilisant l'opérateur symbolique nabla :

$$\begin{aligned}\nabla^2(f) &= \nabla \cdot (\nabla f) \\ &= \Delta(f)\end{aligned}$$

Définition 7.3: Opérateur laplacien vectoriel

Soit le repère naturel orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ associé au système de coordonnées rectangulaires x, y, z. On appelle laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs $\vec{u}$, l'opérateur différentiel $\vec{\Delta}$, tel que :

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}(\vec{u}) &\overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}(\vec{u}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}[\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{u})] \\ &= \Delta u_x \vec{\imath} + \Delta u_y \vec{\jmath} + \Delta u_z \vec{k}\end{aligned}$$

Le laplacien vectoriel prend en entrée un champ de vecteurs et donne en sortie un autre champ de vecteurs. En utilisant l'opérateur symbolique nabla :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2(\vec{u}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \\ &= \vec{\Delta}(\vec{u})\end{aligned}$$

Chapitre 10

GRAVITATION NEWTONIENNE

Sommaire

1 Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire 187
2 Champ gravitationnel créé par une sphére homogène 190
3 Champ gravitationnel créé par une boule homogène 192
4 Équations de Poisson et de Laplace 192

1 Vecteur force, champ de vecteurs, potentiel scalaire

Dans la théorie newtonienne de la gravitation, le modèle de Hooke de la force de gravitation est en inverse du carré de la distance entre les corps. L'interaction gravitationnelle entre un corps de masse M sur un corps de masse m est modélisée par le vecteur suivant

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{\|\vec{r}_m - \vec{r}_M\|^3}\,(\vec{r}_m - \vec{r}_M)$$

où la constante de proportionnalité $\mathcal{G}$ est appelée *constante d'attraction gravitationnelle*. Dans la RFD 3.5 p. 155, le membre de droite $\vec{\mathrm{F}}^{ext}$ est à remplacer par le modèle suivant :

$$-\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\,\vec{e}_r \tag{10.1}$$

où r est la distance entre les deux masses, $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire dirigé de M vers m, $r\vec{e}_r$ est le rayon vecteur de M à m. Le signe négatif indique que la force de gravitation est attractive, puisque celle exercée par M sur m est dirigée de m vers M.

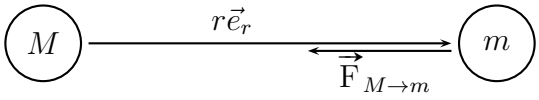


FIG. 10.1 – Signe de la force de gravitation

Définition 1.1: Force gravitationnelle

Le vecteur force qui modélise l'interaction gravitationnelle entre les masses M et m s'appelle *force gravitationnelle* et a pour expression

$$\vec{\mathrm{F}}_{M\to m} \overset{\text{def}}{=} -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\,\vec{e}_r$$

Nous pouvons également modéliser l'interaction gravitationnelle par un champ de vecteurs en tout point de l'espace plutôt que par une force en un seul point. L'influence gravitationnelle due à la masse M est alors modélisée par le champ de vecteurs suivant (indépendant de m) :

$$-\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\,\vec{e}_r$$

Définition 1.2: Champ gravitationnel

Le champ de vecteurs qui modélise l'influence gravitationnelle due à la masse M à une distance r s'appelle *champ gravitationnel* et a pour expression :

$$\vec{g}_M \overset{\text{def}}{=} -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\,\vec{e}_r$$

On a :

$$\vec{\mathrm{F}}_{M\to m} = m\,\vec{g}_M \tag{10.2}$$

Définition 1.3: Potentiel scalaire d'un champ vectoriel

La fonction scalaire f est dite potentielle du champ vectoriel $\vec{\mathrm{A}}$ ssi :

$$\vec{\mathrm{A}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$$

Réciproquement, nous dirons que le champ vectoriel $\vec{\mathrm{A}}$ dérive du champ de scalaires f. Un champ de vecteurs est *conservatif* s'il dérive d'un potentiel scalaire.

Définition 1.4: Potentiel du champ gravitationnel

ϕ est le potentiel scalaire du vecteur champ gravitationnel $\vec{g}$ ssi

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)$$

Réciproquement, nous dirons que le champ gravitationnel $\vec{g}$ est conservatif ssi il dérive du potentiel de champ ϕ appelé *potentiel newtonien*. Cherchons l'expression du potentiel scalaire

ϕ. La symétrie sphérique du problème permet de se placer en coordonnées sphériques :

$$g\vec{e}_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\,\vec{e}_r$$
$$g = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$$
$$\int_A^B g\,\mathrm{d}r = -\left(\phi_B - \phi_A\right)$$

Avec la déf. 1.2 p. 188 du champ gravitationnel créé par une masse M :

$$-\left(\phi_B - \phi_A\right) = -\int_A^B \frac{\mathcal{G}M}{r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$\phi_A - \phi_B = \left[\frac{\mathcal{G}M}{r}\right]_A^B$$

$$\boxed{\phi = -\frac{\mathcal{G}M}{r}} \tag{10.3}$$

Définition 1.5: Potentiel de la force gravitationnelle

E_p est le potentiel scalaire du vecteur force gravitationnelle $\vec{\mathrm{F}}$ ssi

$$\vec{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)$$

E_p est un modèle de la réalité. Réciproquement, nous dirons que la force de gravitation $\vec{\mathrm{F}}$ dérive du potentiel de force E_p, appelé *énergie potentielle de gravitation*. Toutes les forces réelles ne peuvent pas être modélisées par une énergie potentielle, mais dans le cas de l'interaction gravitationnelle newtonienne, le modèle de force (10.1) p. 187 le permet.

En partant de la définition précédente, en coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_p)$$
$$F\vec{e}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\,\vec{e}_r$$
$$F = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

Avec la déf. 1.1 p. 188 de la force gravitationnelle :

$$E_p = -\int F\,\mathrm{d}r$$
$$= -\int -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

On obtient l'expression du modèle d'énergie potentielle :

$$\boxed{E_p = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r}}$$

Le potentiel de force et le potentiel de champ sont bien sûr liés par la même relation (10.2) p. 188 qui lie force et champ :

$$E_p = m\phi$$

2 Champ gravitationnel créé par une sphère homogène

Soit une masse uniformément répartie sur la surface d'une sphère creuse de rayon a. Calculons l'intensité du champ gravitationnel en un point P extérieur à la sphère. Découpons la sphère en bandes circulaires de rayon $a\sin(\theta)$ et de largeur $a\mathrm{d}\theta$ où θ est la latitude.

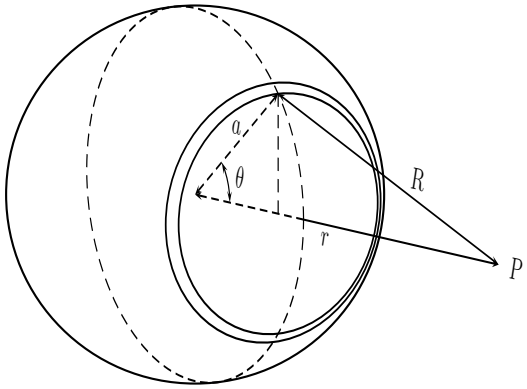


FIG. 10.2 – Champ de gravitation en P

L'aire infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= 2\pi a\sin(\theta)\times a\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi a^2\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Soit m la masse de la sphère et ρ sa densité. La masse infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{d}m &= \rho\mathrm{d}s\\ &= \frac{m}{4\pi a^2}\times 2\pi a^2\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= \tfrac{1}{2}\,m\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Soit R la distance du point P à la bande. La déf. 1.2 p. 188 donne le champ gravitationnel infinitésimal produit par cette bande en un point P :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{g}_m &= -\frac{\mathcal{G}\mathrm{d}m}{R^2}\,\vec{e}_r\\ &= -\frac{\mathcal{G}m\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{2R^2}\,\vec{e}_r\end{aligned}$$

Plutôt que d'effectuer la difficile intégration du champ vectoriel de gravitation ci-dessus, nous allons intégrer le champ scalaire du potentiel de gravitation grâce à (10.3) p. 189 :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi &= -\frac{\mathcal{G}\mathrm{d}m}{R}\\ &= -\frac{\mathcal{G}m\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{2R}\end{aligned}$$

Soit r la distance du point P au centre de la sphère. Dérivons la loi des cosinus :

$$\begin{aligned} R^2(\theta) &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta) \\ \frac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}\theta} &= 2ar\sin(\theta) \\ 2R\mathrm{d}R &= 2ar\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\ \frac{\mathrm{d}R}{2ar} &= \frac{\sin(\theta)\mathrm{d}\theta}{2R} \end{aligned}$$

si bien que

$$\mathrm{d}\phi = -\frac{\mathcal{G}m\mathrm{d}R}{2ar}$$

Intégrons sur la surface totale de la sphère :

- quand P est en dehors de la sphère $r > a$ et R varie de $r-a$ à $r+a$:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar}\int_{r-a}^{r+a}\mathrm{d}R \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar}\,2a \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{r} \end{aligned}$$

  À l'extérieur de la sphère, le champ gravitationnel s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi) \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad r > a \end{aligned}$$

  Le champ gravitationnel en un point extérieur à la sphère est identique au champ gravitationnel que l'on aurait si la masse de la sphère était toute entière au centre de la sphère.

- quand P est dans la sphère $r < a$ et R varie de $a-r$ à $a+r$:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar}\int_{a-r}^{a+r}\mathrm{d}R \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{2ar}\,2r \\ &= -\frac{\mathcal{G}m}{a} \\ &= c^{ste} \end{aligned}$$

  En tout point intérieur à une sphère le champ gravitationnel est nul :

$$\vec{g} = \vec{0} \qquad r < a$$

3 Champ gravitationnel créé par une boule homogène

La boule est un ensemble de sphères concentriques homogènes. On applique le résultat précédent pour chaque sphère. Le champ gravitationnel en un point extérieur d'une boule de masse M et de rayon a est identique au champ gravitationnel que l'on aurait si la masse de la boule était toute entière au centre de la boule :

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad r > a$$

En un point P intérieur à la boule, toutes les sphères de rayon supérieur à r ne contribuent pas au champ en P. Soit M' la masse de la boule de rayon $r < a$. Les masses sont dans le rapport des volumes :

$$\begin{aligned} M' &= M \times \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} \\ &= \frac{Mr^3}{a^3} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -\frac{\mathcal{G}M'}{r^2}\,\vec{e}_r \\ &= -\frac{\mathcal{G}Mr}{a^3}\,\vec{e}_r \end{aligned}$$

Au centre d'une boule le champ gravitationnel est nul (par symétrie sphérique), puis il augmente linéairement jusqu'à la surface de la boule, puis décroit jusqu'à l'infini en fonction du carré de la distance au centre de la boule.

4 Équations de Poisson et de Laplace

Un champ de vecteurs occupant un volume V de l'espace est de divergence nulle s'il ne diverge pas, ni ne converge, autrement dit s'il n'y a ni source ni puit dans ce volume V. Si donc dans un volume V un champ de vecteurs est de divergence nulle, alors ce champ est à flux conservatif à travers la surface S fermée définissant V. Cela signifie que tout ce qui entre par la surface S entourant V en ressort, et tout ce qui sort par la surface S y est entré. Il y a conservation du champ dans le volume V. Réciproquement, si un champ de vecteurs est à flux conservatif à travers une patatoïde S fermée, alors sa divergence est nulle dans le volume défini par cette patatoïde.

4.1 Loi de Gauss pour la gravitation

Théorème 4.1: Loi de Gauss sous forme intégrale

Le flux d'un champ gravitationnel à travers une surface fermée est proportionnel à la somme des masses intérieures à cette surface :

$$\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

Le signe négatif indique que le flux est entrant.

Démonstration. Deux cas :

- pour le « cas intérieur », remplaçons le champ gravitationnel par son modèle donné par la déf. 1.2 p. 188, et intégrons sur une surface fermée autour de la masse :

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s &= \oiint_S -\frac{\mathcal{G}M_{int}}{r^2}\,\vec{e}_r \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s \\ &= -\mathcal{G}M_{int} \oiint_S \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

  Appliquons le théorème de Gauss 6.2 p. 179 :

$$\oiint_S \vec{g}_{M_{int}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

  La masse intérieure à la surface est la source du champ gravitationnel, ce champ est dirigé vers la masse (signe négatif car $\vec{g}_{M_{int}}$ est entrant alors que la normale $\vec{n}$ est sortante). □

- pour le « cas extérieur » nous pouvons poser $M_{int} = 0$, ou bien appliquer le théorème de Gauss sur une surface fermée ne contenant pas de masse :

$$\oiint_S \vec{g}_M \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s = 0$$

  Le flux du champ de vecteurs $\vec{g}_M$ issu de M est nul à travers une surface ne contenant pas M. Il n'y a ni source ni puit dans le volume défini par cette surface, et le flux entrant et égal au flux sortant.

Théorème 4.2: Loi de Gauss sous forme différentielle

$$\operatorname{div}\vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\rho_{int}$$

Démonstration. À partir du théorème de la divergence 6.1 p. 177 et de la forme intégrale du théorème de Gauss appliqué au champ gravitationnel :

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div}\vec{g}\,\mathrm{d}v &= \oiint_S \vec{g}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s \\ &= -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\ &= -4\pi\mathcal{G}\iiint_V \rho_{int}\,\mathrm{d}v \\ \operatorname{div}\vec{g} &= -4\pi\mathcal{G}\rho_{int}\end{aligned}$$

□

Théorème 4.3: Équation de Poisson (cas « intérieur »)

Soit ϕ le potentiel d'un champ gravitationnel. À l'intérieur d'une surface fermée contenant une distribution de masse de densité volumique ρ :

$$\triangle\phi = 4\pi\rho\mathcal{G} \tag{10.4}$$

Démonstration. À partir de la loi de Gauss sous forme différentielle 4.2 p. 193 :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{g} &= -4\pi\rho\mathcal{G} \\ -\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi) &= -4\pi\rho\mathcal{G} \\ \triangle\phi &= 4\pi\rho\mathcal{G} \end{aligned}$$

□

Théorème 4.4: Équation de Laplace (cas « extérieur »)

En posant $\rho = 0$ dans l'équation de Poisson, nous retrouvons le cas « extérieur » :

$$\triangle\phi = 0 \tag{10.5}$$

Chapitre 11

ESPACES NON EUCLIDIENS

Sommaire

1 La sphère 195
2 Métrique d'une surface 197
3 Longueur d'une courbe 199
4 Vecteur tangent à une courbe 199

1 La sphère

La sphère est l'archétype de l'espace non euclidien de dimension 2. Elle est paramétrable par les deux angles θ et ϕ, ce dernier angle étant dégénéré aux pôles (fig. 3.10 p. 42). Bien entendu la sphère n'a pas de pôles, le problème est uniquement dû au système de coordonnées utilisé. Au mieux il existe un système de coordonnées n'ayant qu'un seul pôle. Par conséquent il n'existe pas de système de coordonnées qui couvre la sphère sans dégénéréscence, l'atlas d'une sphère comprend au minimum deux cartes.

Sur une sphère de rayon r, utilisons les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec r constant. La métrique donnée par (8.4) p. 115 avec $\mathrm{d}r = 0$, s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{11.1}$$

Le carré de la métrique est positif quelles que soient les valeurs prisent par les coordonnées θ et ϕ, la métrique est réelle. À partir de la métrique nous retrouvons toutes les propriétés de la sphère, les géodésiques sont des grands cercles et sa surface vaut $4\pi r^2$. Ici $g_{\theta\theta} = r^2$ avec r constant, $g_{\theta\phi} = 0$ et $g_{\phi\phi} = r^2\sin^2(\theta)$ est fonction de la coordonnée θ. Il n'existe pas de système de coordonnées global à la surface de la sphère pour lequel $g_{ij} = \delta_{ij}$, la courbure de la sphère est intrinsèque, contrairement à celle du cylindre. Localement en chaque point on peut définir un espace tangent de même dimension que la sphère, un plan, pour lequel $g_{ij} = \delta_{ij}$. La sphère est un espace non euclidien, dit *sphérique*.

Remarque 1.1

Sur un cylindre de rayon ρ, utilisons les coordonnées cylindrique (ρ, ϕ, z) avec ρ constant. La métrique s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2 \mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2$$

Les coefficients de la métrique sont bien des constantes, sa signature est $(++)$. La courbure du cylindre est extrinsèque.

Passons en coordonnées polaires sphériques (ρ, ϕ) à la surface de la sphère. On pose $\rho = \theta r$ le déplacement à la surface de la sphère ($\rho = \pi r$ d'un pôle à l'autre) :

$$\begin{aligned} \rho &= \theta r \\ \mathrm{d}\rho &= r \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\rho^2 &= r^2 \mathrm{d}\theta^2 \end{aligned}$$

La métrique de la sphère s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\rho^2 + r^2 \sin^2(\rho/r)\, \mathrm{d}\phi^2 \\ &= g_{\rho\rho} \mathrm{d}\rho^2 + g_{\phi\phi} \mathrm{d}\phi^2 \end{aligned} \tag{11.2}$$

où $g_{\rho\rho} = 1$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\rho/r)$ sont les composantes du tenseur métrique de la sphère en coordonnées polaires sphériques. Elles sont différentes des composantes du tenseur métrique du plan en coordonnées polaires ((8.2) p. 113). La métrique (et le tenseur métrique associé) détermine la courbure intrinsèque d'un espace, mais dépend du système de coordonnées employé. Nous chercherons une fonction du tenseur métrique et de ses dérivées qui donne la courbure de l'espace mais qui ne dépende pas du système de coordonnées. Nous verrons également les conditions pour qu'une matrice soit effectivement un tenseur métrique.

Remplaçons la coordonnée θ par la coordonnée rectangulaire z en effectuant la transformation de coordonnées :

$$\begin{aligned} z &= r\cos(\theta) \\ z^2 &= r^2 \cos^2(\theta) \\ &= r^2(1 - \sin^2(\theta)) \\ r^2 - z^2 &= r^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

La transformation inverse s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos(z/r) \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} &= \frac{-1/r}{\sqrt{1 - z^2/r^2}} \\ \mathrm{d}\theta &= \frac{-\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2 - z^2}} \\ \mathrm{d}\theta^2 &= \frac{\mathrm{d}z^2}{r^2 - z^2} \end{aligned}$$

Dans ces nouvelles coordonnées (z, ϕ), la métrique s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r^2 \mathrm{d}z^2}{r^2 - z^2} + \left(r^2 - z^2\right) \mathrm{d}\phi^2$$

La coordonnée z n'est pas sur la surface de la sphère et permet d'en sortir. Pour $|z| < r$ nous sommes sur la sphère de rayon r et $\mathrm{d}s^2 > 0$, en revanche pour $|z| > r$ nous sommes en dehors

de la sphère de rayon r et $\mathrm{d}s^2 < 0$, la métrique est imaginaire. Un $\mathrm{d}s^2$ négatif indique que l'on est dans l'espace dans lequel est plongé l'objet géométrique mais en dehors de l'objet.

2 Métrique d'une surface

Soit une surface non plane plongée dans un espace euclidien de dimension trois. Cette surface est un exemple général d'espace non euclidien de dimension deux. Une surface est l'ensemble des point P de coordonnées rectangulaires (x^1, x^2, x^3) (nous utilisons le théorème de Pythagore plus loin) satisfaisant la relation

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0$$

Sous certaines conditions que l'on suppose réalisées, on peut réécrire cette relation sous la forme

$$x^3 = h(x^1, x^2) \tag{11.3}$$

qui montre le caractère bidimensionnel de la surface (habituellement la coordonnée x^3 est la hauteur z au-dessus du plan (x^1, x^2). Les coordonnées x^1 et x^2 varient librement dans le plan $x^3 = 0$ et la fonction h donne la valeur de x^3. La situation est donc asymétrique et de plus la fonction h ne permet pas de représenter toutes les surfaces, par exemple les surfaces fermées. Par analogie avec (11.3) on introduit deux paramètres u^1 et u^2 qui varient dans un domaine Δ. Les trois fonctions

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad x^i = x^i(u^1, u^2) \tag{11.4}$$

forment un sous-ensemble bidimensionnel de points dans l'espace euclidien de dimension trois en coordonnées cartésiennes (x^i). Les fonctions $x^i(u^1, u^2)$ sont supposées suffisamment différentiables dans le domaine de définition Δ. La situation est à nouveau symétrique et les surfaces fermées ont une équation. C'est la représentation d'une surface en paramètres de Gauss. On peut concevoir u^1 et u^2 comme des coordonnées curvilignes de la surface. Le choix des paramètres de Gauss est sans limites, nous pouvons changer de paramètres en posant les deux relations inversibles suivantes :

$$\forall j = 1, 2 \qquad v^j = v^j(u^1, u^2)$$

v^1 et v^2 sont aussi des coordonnées pour la surface. Supposons donc que l'on ait les trois relations (11.4), cela nous place de fait sur la surface. La métrique de la surface peut toujours s'écrire localement (au voisinage infinitésimal d'un point) grâce au théorème de Pythagore en trois dimensions. En coordonnées rectangulaires :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2(u^1, u^2) &= \left[\mathrm{d}x^1(u^1, u^2)\right]^2 + \left[\mathrm{d}x^2(u^1, u^2)\right]^2 + \left[\mathrm{d}x^3(u^1, u^2)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left[\mathrm{d}x^i(u^1, u^2)\right]^2\end{aligned}$$

Remarque 2.1

Les coefficients de la métrique $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$ sont constants, pour autant la surface n'est pas plane, car il nous faut écrire la métrique avec seulement deux coordonnées.

Elle contient toute l'information concerant la courbure intrinsèque de la surface, autrement dit toute l'information dont on a besoin concernant la surface. De façon générale, dans le domaine dans lequel elle est définie la métrique contient toute l'information géométrique et topologique de l'espace qu'elle décrit. Nous n'avons pas besoin de plonger la surface dans un espace de

dimension supérieure pour étudier sa courbure intrinsèque. Choisissons la position du système de coordonnées (x^1, x^2, x^3) de sorte qu'au point considéré de la surface l'on ait $x^3 = 0$, et l'orientation de sorte que le plan (x^1, x^2) soit tangent à la surface. Nous ne pouvons effectuer ce choix qu'une fois et en un seul point. La métrique locale de la surface peut alors s'écrire en coordonnées rectangulaires grâce au théorème de Pythagore en deux dimensions (et non plus en trois) :

$$\mathrm{d}s^2(u^1, u^2) = \sum_{i=1}^{2} \left[\mathrm{d}x^i(u^1, u^2)\right]^2$$

Passons des éléments différentiels $\mathrm{d}x^1$ et $\mathrm{d}x^2$ aux éléments différentiels $\mathrm{d}u^1$ et $\mathrm{d}u^2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2(u^1, u^2) &= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \mathrm{d}u^2 \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \right)^2 (\mathrm{d}u^1)^2 + 2 \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^2} \right)^2 (\mathrm{d}u^2)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x^i}{\partial u_j} \frac{\partial x^i}{\partial u_k} \mathrm{d}u^j \mathrm{d}u^k \\
&= g_{11} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^1 + 2 g_{12} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 + g_{22} \mathrm{d}u^2 \mathrm{d}u^2
\end{aligned}$$

$\mathrm{d}s^2$ est appelée première forme quadratique fondamentale de la surface considérée.

$$\mathrm{d}s^2(u^1, u^2) = g_{jk} \mathrm{d}u^j \mathrm{d}u^k \tag{11.5}$$

où l'objet géométrique à deux indices et quatre composantes

$$g_{jk} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \tag{11.6}$$

est appelé tenseur métrique. Il est symétrique

$$g_{jk} = g_{kj}$$

Le nombre d'indices est appelé l'ordre du tenseur, le tenseur métrique est donc d'ordre deux. Dans un espace de dimension n, le tenseur métrique a n^2 composantes, non indépendantes étant donnée sa symétrie. L'égalité possible en un seul point du système de coordonnées (x^1, x^2)

$$(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 = g_{11}(\mathrm{d}u^1)^2 + 2 g_{12} \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2 + g_{22}(\mathrm{d}u^2)^2$$

montre que les termes carrés g_{11} et g_{22} du tenseur métrique indiquent le carré de l'échelle qui a été appliquée en chaque point au système de coordonnées rectangulaires. Le terme rectangle g_{12} apparait lorsque le système de coordonnées u^i est oblique. Le tenseur métrique donne en quelque sorte l'écart au système de coordonnées orthonormées.

Exemple 2.1: Échelle d'un système de coordonnées

Si le système de coordonnées (u^1, u^2) est tel que

$$\begin{cases} x^1(u^1) = 2u^1 \\ x^2(u^2) = u^2 \end{cases}$$

alors un point de coordonnée $u^1 = 1$ a aussi pour coordonnée $x^1 = 2$. L'échelle u^1 est deux fois plus grande que l'échelle x^1. D'après (11.6) p. 198

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\right)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 = 4(\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}u^2)^2$$

3 Longueur d'une courbe

D'après (11.5) p. 198, si les coordonnées de Gauss sont fonction du paramètre p, la longueur d'une courbe entre les points d'abscisse curviligne $s_0 = s(p = 0)$ et $s_1 = s(p = 1)$ avec $s_1 > s_0$ a pour expression :

$$\begin{aligned} L &= \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{jk}\mathrm{d}u^j \mathrm{d}u^k} \\ &= \int_0^1 \sqrt{g_{jk}\frac{\partial u^j}{\partial p}\frac{\partial u^k}{\partial p}}\,\mathrm{d}p \end{aligned}$$

Notez que lorsque la variation de L est nulle, $\delta L = 0$, le trajet entre les points d'abscisses curvilignes s_0 et s_1 est extrémal.

4 Vecteur tangent à une courbe

Dans l'espace non euclidien E_n, soit la courbe paramétrée $\mathscr{C} : \forall i = 1, \ldots, n\ x^i = x^i(p)$. Soit $\mathbf{r}(x^i)$ le vecteur position de chaque point de $\mathscr{C}$. Le vecteur $\mathbf{u}$ tangent à $\mathscr{C}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}p} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \\ &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\,\boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

Le vecteur tangent appartient à l'espace hôte de E_n, et en chaque point de la courbe il appartient également à l'espace tangent à la courbe en ce point. Si l'on change pour le paramètre λ avec

$\lambda = \lambda(p)$ on obtient le nouveau vecteur tangent :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}\boldsymbol{e}_i \\ &= \mathbf{u}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}p}\end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, la reparamétrisation change la norme du vecteur mais pas sa direction, celui-ci reste tangent à $\mathscr{C}$. Si l'on prend pour paramètre l'abscisse curviligne s de $\mathscr{C}$, alors le vecteur tangent est unitaire :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \\ \|\mathbf{u}\| &= \frac{\|\mathrm{d}\mathbf{r}\|}{\mathrm{d}s} \\ &= 1\end{aligned}$$

Chapitre 12

TENSEUR MÉTRIQUE

Sommaire

1	Définition	201
2	Tenseur métrique et composantes	204
3	Les différentes notations du produit scalaire	205
4	Notation matricielle des covecteurs	207
5	Tenseur métrique dual	208
6	Différentielle du déterminant du tenseur métrique	210
7	Tenseur métrique et norme	211
8	Tenseur métrique et bases	211

1 Définition

L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, relation (8.8) p. 127, fait apparaitre le produit scalaire de tous les vecteurs de base pris deux à deux, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Nous pouvons former une matrice carrée symétrique à partir de ces produits scalaires.

Définition 1.1: Tenseur métrique

La matrice $[g_{ij}]$ définie par ses composantes g_{ij} telles que

$$\forall i, j \qquad g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

est appelée tenseur métrique ou tenseur fondamental, noté G.

On retrouve les propriétés du produit scalaire. On ajoute le fait que les composantes du tenseur métrique sont fonction des coordonnées lorsqu'elles ne sont pas rectilignes puisque les vecteurs de base varient d'un point à l'autre (donc dans les espaces pré-euclidiens en coordonnées curvilignes, et dans tous les espaces ayant une courbure intrinsèque).

Pour un espace donné, les composantes du tenseur métrique dépendent

a) du choix du système de coordonnées

b) puis du choix de la base dans ce système de coordonnées, principalement la :

- base tangente normée
- base réciproque non normée de la base tangente normée
- base naturelle
- base réciproque de la base naturelle

Exemple 1.1: Métrique et tenseur métrique du plan euclidien

La métrique de l'espace euclidien de dimension deux, c.-à-d. le plan euclidien aussi noté $\mathbb{R}^2$, s'écrit :

- en coordonnées rectangulaires (x, y) : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$
- en coordonnées polaires (ρ, θ) : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2$

En représentation matricielle et en notation li co, le tenseur métrique de l'espace vectoriel euclidien E_2 a pour expression :

- dans la base rectangulaire orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$:

$$G \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dans la base polaire orthonormée $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$:

$$G \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho\cdot\mathbf{e}_\rho & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- dans la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ en coordonnées polaires (ρ, θ), relations (3.4) p. 40 :

$$G \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

- dans la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ en coordonnées rectangulaires (x, y) :

$$G \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

Dans la base naturelle d'un système de coordonnées, tenseur métrique et métrique dans le même système de coordonnées sont intimement liés.

Exemple 1.2: Tenseur métrique de l'espace euclidien en coordonnées sphériques

Dans la base naturelle du système de coordonnées sphériques, le tenseur métrique de l'espace vectoriel euclidien E_3 a pour composantes en coordonnées sphériques (relations (3.7) p. 43) :

$$G \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_\phi \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

La métrique de l'espace vectoriel euclidien E_3 en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2$$

Exemple 1.3: Tenseur métrique et métrique d'une sphère

À la surface d'une sphère de rayon r, plaçons-nous dans la base naturelle $(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi)$ associée aux coordonnées sphériques (θ, ϕ), où θ est la colatitude et ϕ la longitude (fig. 3.10 p. 42). À partir de la métrique (11.1) p. 195, le tenseur métrique a pour composantes en coordonnées sphériques :

$$G\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{e}_\phi \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

où r est constant. La métrique de l'espace courbe E_2 en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2$$

Exemple 1.4: Métrique de l'espace-temps

La métrique de l'espace-temps en convention de genre temps est donnée par la déf. 9.1 p. 229. Lorsque le s^2 est positif, b) p. 260, nous sommes dans l'espace-temps de l'observateur, dans son futur absolu ou dans son passé absolu. Lorsque le s^2 est négatif, c) p. 260, nous sommes en dehors de l'espace-temps de l'observateur. Les évènements dont le s^2 avec l'évènement origine est négatif, *n'existent pas* pour l'observateur à l'origine (à ce moment précis et à cet endroit précis, ils existeront pour l'observateur plus tard, le temps que l'information arrive).

Au § 8 p. 412 nous montrons que les composantes de la matrice G se transforment de façon à rendre invariante la distance entre deux points par changement de coordonnées, donc par changement de base. Un tenseur est un objet mathématique qui a une existence propre indépendante du système de coordonnées dans lequel on le représente. Toutes les matrices ne sont pas des tenseurs, tous les tenseurs à deux indices peuvent être représentés sous forme de matrices. Nous verrons au § 5 p. 347 que la représentation matricielle des tenseurs à des limites que n'a pas la notation indicielle.

Exemple 1.5: Tenseur métrique associé aux coordonnées cartésiennes

Soit $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ la base d'un système de coordonnées cartésiennes de l'espace vectoriel euclidien E_2. Le tenseur métrique a pour composantes :

$$G\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x^2 & \|\boldsymbol{e}_x\|\|\boldsymbol{e}_y\|\cos(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) \\ \|\boldsymbol{e}_x\|\|\boldsymbol{e}_y\|\cos(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) & \boldsymbol{e}_y^2 \end{bmatrix}$$

La symétrie du produit scalaire implique la symétrie des g_{ij} quelle que soit la base :

$$\begin{aligned} \forall i, j \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \\ g_{ij} &= g_{ji} \end{aligned} \tag{12.2}$$

Grâce au tenseur métrique le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij}u^i v^j \tag{12.3}$$

En utilisant la non dégénérescence (6.2) p. 126 du produit scalaire :

$$\begin{aligned} & \text{Si } \forall \mathbf{v},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0,\ \text{alors } \mathbf{u}=\mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Si } \forall v^j,\quad g_{ij}u^iv^j=0,\ \text{alors } u^i=0 \\ \Rightarrow\ & \text{Si } \forall j,\quad g_{ij}u^i=0,\ \text{alors } u^i=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Si} \quad \begin{cases} g_{11}u^1+g_{21}u^2+\cdots+g_{n1}u^n=0 \\ g_{12}u^1+g_{22}u^2+\cdots+g_{n2}u^n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{1n}u^1+g_{n2}u^2+\cdots+g_{nn}u^n=0 \end{cases} \quad \text{alors } u^1=u^2=\cdots=u^n=0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Si} \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1n} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $g_{ij}u^iv^j$ soit non dégénérée est que le déterminant de la matrice carrée G soit non nul :

$$g \neq 0 \tag{12.4}$$

2 Tenseur métrique et composantes

En utilisant les définitions 9.1 p. 129 et 2.13 p. 47 :

$$\begin{aligned} \forall j \qquad u_j &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_j \\ &= \sum_i (u^i\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_j \\ &= \sum_i u^i(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j) \\ &= \sum_i g_{ij}u^i \end{aligned}$$

Les g_{ij} permettent de passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes, autrement dit d'abaisser les indices :

$$\boxed{\forall j \qquad u_j = g_{ij}u^i} \tag{12.5}$$

Ces relations sont des relations entre composantes. Si i et j varient de 1 à 3, l'écriture indicielle condense trois relations, comme le ferait une écriture vectorielle. Nous retiendrons que le tenseur métrique prend en entrée un vecteur écrit en composantes contravariantes, et donne en sortie le même vecteur écrit en composantes covariantes. Il permet de changer la variance d'un vecteur.

Exemple 2.1: Tenseur métrique et composantes

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur d'un espace vectoriel euclidien E_2. Pour la première composante covariante,

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1 \\ &= (u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_1 \\ &= u^1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1) + u^2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1) \\ &= g_{11}\,u^1 + g_{21}\,u^2 \end{aligned}$$

et pour la seconde composante covariante :

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_2 \\ &= (u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2 \\ &= u^1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) + u^2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) \\ &= g_{12}\,u^1 + g_{22}\,u^2 \end{aligned}$$

En écriture matricielle nous avons le système :

$$\begin{cases} g_{11}\,u^1 + g_{21}\,u^2 = u_1 \\ g_{12}\,u^1 + g_{22}\,u^2 = u_2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

3 Les différentes notations du produit scalaire

Avec le tenseur métrique le produit scalaire (8.8) p. 127 s'écrit, relation (12.3) p. 203 :

$$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = g_{ij}u^i v^j}$$

Notation 3.1

On trouve aussi la notation

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \overset{\text{def}}{=} g(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

qui montre explicitement que le tenseur métrique prend en entrée deux vecteurs et donne en sortie un scalaire.

En utilisant (12.5) p. 204 et par symétrie du produit scalaire :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_j v^j \\ &= u^j v_j \end{aligned}} \tag{12.7}$$

Le tenseur métrique n'apparait plus dans l'expression du produit scalaire et tous les termes sont précédés d'un signe positif,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v^1 + u_2v^2 + \ldots u_nv^n$$

mais chaque terme est algébrique, c.-à-d. positif, négatif ou nul.

Exemple 3.1: Vecteurs orthonormés

Dans le champ de bases naturelles polaires $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ de l'espace vectoriel euclidien E_2, montrons que les champs de vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ donnés en composantes contravariantes

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \frac{3}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{4}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta \\ \mathbf{v} = \frac{-4}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{3}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{u} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix} \\ \mathbf{v} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \end{cases}$$

sont normés et orthogonaux.

- la base naturelle polaire est orthogonale non normée :

$$\begin{cases} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{4}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{4}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left(\frac{-4}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{3}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{3}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{9}{25}\,\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho + \frac{16}{25\rho^2}\,\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{16}{25}\,\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\rho + \frac{9}{25\rho^2}\,\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25\rho^2}\,\rho^2 \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25\rho^2}\,\rho^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \|\mathbf{v}\| = 1 \end{cases}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \left(\tfrac{3}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \tfrac{4}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta\right)\cdot\left(\tfrac{-4}{5}\,\boldsymbol{e}_\rho + \tfrac{3}{5\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{12}{25\rho^2}\,\rho^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- en passant dans la base rectangulaire ((3.3) p. 40) :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \frac{3}{5}\,[\cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}] + \frac{4}{5\rho}\,[-\rho\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}] \\ \mathbf{v} = \frac{-4}{5}\,[\cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}] + \frac{3}{5\rho}\,[-\rho\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\theta) = \frac{1}{5}\,[3\cos(\theta) - 4\sin(\theta)]\boldsymbol{i} + \frac{1}{5}\,[3\sin(\theta) + 4\cos(\theta)]\boldsymbol{j} \\ \mathbf{v}(\theta) = \frac{1}{5}\,[-4\cos(\theta) - 3\sin(\theta)]\boldsymbol{i} + \frac{1}{5}\,[-4\sin(\theta) + 3\cos(\theta)]\boldsymbol{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{25}\left(9\cos^2\theta + 16\sin^2\theta - 24\cos\theta\sin\theta + 9\sin^2\theta + 16\cos^2\theta + 24\cos\theta\sin\theta\right) \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{25}\left(16\cos^2\theta + 9\sin^2\theta + 24\cos\theta\sin\theta + 16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta - 24\cos\theta\sin\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{25}\,(9+16) \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{25}\,(19+9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \|\mathbf{v}\| = 1 \end{cases}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \tfrac{1}{25}\left(-12\cos^2\theta + 12\sin^2\theta + 7\cos\theta\sin\theta - 12\sin^2\theta + 12\cos^2\theta - 7\cos\theta\sin\theta\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- en notation matricielle avec (6.1) p. 91 :

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = g_{ij}u^iu^j \\ \|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij}v^iv^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix} \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4\rho/5 \end{pmatrix} \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3\rho/5 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\|^2 = \dfrac{9}{25} + \dfrac{16\rho}{25\rho} \\ \|\mathbf{v}\|^2 = \dfrac{16}{25} + \dfrac{9\rho}{25\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{u}\| = 1 \\ \|\mathbf{v}\| = 1 \end{cases}$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= g_{ij}u^iv^j \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3\rho/5 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{12\rho}{25\rho} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 Notation matricielle des covecteurs

Nous pouvons écrire le produit scalaire sous forme de multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_1v^1 + u_2v^2 + \cdots + u_nv^n$$

et donc représenter les covecteurs par des matrices lignes. La symétrie du produit scalaire devient :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

En revanche, l'écriture matricielle de l'égalité 12.6 p. 205 n'est plus possible car on aurait

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \tag{12.8}$$

qui ne respecte pas la notation (4.2) p. 52 que l'on a choisi pour la multiplication matricielle. Au § 16 p. 343 nous changeons de notation matricielle pour le tenseur métrique.

Remarque 4.1

Un covecteur n'est pas la transposée d'un vecteur car leurs composantes ne se transforment pas de la même façon par changement de base :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \end{pmatrix}$$

5 Tenseur métrique dual

Cherchons l'expression des composantes contravariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes covariantes. Nous devons résoudre (inverser) le système des n équations linéaires à n inconnues u^j (12.5) p. 204 :

$$\forall i \qquad g_{ij} u^j = u_i$$

D'après (12.4) p. 204 le déterminant g de la matrice G est non nul, par suite le système admet une solution unique. La méthode de résolution de Cramer donne alors :

$$\forall j \qquad u^j = \sum_i \frac{\mathrm{C}_{ij}(G)}{g} u_i$$

En posant,

$$\forall i, j \qquad g^{ji} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{C}_{ij}(G)}{g} \tag{12.9}$$

nous obtenons les relations cherchées :

$$\boxed{\forall j \qquad u^j = g^{ji} u_i} \tag{12.10}$$

où les g^{ij} sont les éléments de la matrice inverse de la matrice G, appelé tenseur *dual* ou tenseur *conjugué* du tenseur métrique. Il permet de passer des composantes covariantes aux composantes contravariantes, autrement dit d'élever les indices. La notation avec deux indices supérieurs sera justifiée au § 8 p. 412.

G étant symétrique, il en est de même de $[g^{ij}]$. De plus les déterminants de matrices inverses sont inverses l'un de l'autre :

$$GG^{-1} = I \tag{12.11}$$

$$\det\left(GG^{-1}\right) = \det I$$

$$\det G \times \det G^{-1} = 1$$

$$\det[g^{ji}] = \frac{1}{g} \tag{12.12}$$

Les relations (12.5) p. 204 et (12.10) p. 208 nous donnent :

$$\begin{aligned} \forall k \qquad & u_k = g_{kj}u^j \\ \forall i \qquad & g^{ik}u_k = g^{ik}g_{kj}u^j \\ & u^i = g^{ik}g_{kj}u^j \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\forall i,j \qquad g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j} \tag{12.13}$$

qui exprime en notation indicielle que les matrices sont inverses l'une de l'autre.

Remarque 5.1

Concernant la notation des indices :

$$\begin{cases} g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j \\ g_{kj}g^{ik} = \delta_j{}^i \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \delta^i{}_j = \delta_j{}^i = \delta^i_j$$

Pour un espace à n dimensions :

$$\sum_{i=1}^{n} g^{ik}g_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \delta^i_i$$

Avec la convention de sommation sur les indices répétés 1.3 p. 15 :

$$\begin{aligned} g^{ik}g_{ki} &= \delta^i_i \\ &= \delta^1_1 + \delta^2_2 + \cdots + \delta^n_n \\ &= n \end{aligned} \tag{12.14}$$

Notez que $\delta_{ii} = 1$ d'après la déf. 3.1 p. 18.

Exemple 5.1: Tenseur métrique dual dans la base naturelle polaire

Dans la base naturelle polaire de l'espace vectoriel euclidien E_2, le tenseur métrique a pour composantes :

$$G\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

Les éléments du tenseur métrique sont fonction des coordonnées, par exemple ici $g_{\theta\theta} = \rho^2$. On les appelle des *fonctions métriques*. Le déterminant du tenseur métrique polaire vaut :

$$\begin{aligned} g &= 1 \times \rho^2 - 0 \times 0 \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

Le dual du tenseur métrique dans la base naturelle polaire a pour composantes :

$$\left[g^{ij}\right] = \frac{1}{\rho^2}\begin{bmatrix}\rho^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\rho^2\end{bmatrix} \tag{12.15}$$

Exemple 5.2: Tenseur métrique dual à la surface d'une sphère

À la surface d'une sphère de rayon r le tenseur métrique a pour composantes en coordonnées sphériques :

$$G\begin{bmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2(\theta)\end{bmatrix}$$

Le déterminant du tenseur métrique vaut :

$$g = r^4\sin^2(\theta)$$

Le dual du tenseur métrique s'écrit :

$$\left[g^{ij}\right] = \frac{1}{r^4\sin^2(\theta)}\begin{bmatrix}r^2\sin^2(\theta) & 0\\ 0 & r^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/r^2 & 0\\ 0 & 1/\left[r^2\sin^2(\theta)\right]\end{bmatrix} \tag{12.16}$$

6 Différentielle du déterminant du tenseur métrique

(4.4) p. 64 donne la différentielle du déterminant du tenseur métrique :

$$\mathrm{d}g = \sum_i\sum_j \mathrm{d}g_{ij}\ \mathrm{C}_{ij}(G)$$

(12.9) p. 208 donne l'expression du cofacteur :

$$\mathrm{d}g = gg^{ij}\mathrm{d}g_{ij} \tag{12.17}$$

$$\partial_k g\mathrm{d}x^k = gg^{ij}\partial_k g_{ij}\mathrm{d}x^k$$

$$\partial_k g = gg^{ij}\partial_k g_{ij} \tag{12.18}$$

7 Tenseur métrique et norme

La déf. 7.1 p. 127 du carré de la norme d'un vecteur, peut s'écrire grâce au tenseur métrique.

Définition 7.1: Norme d'un vecteur

Le carré de la norme d'un vecteur a pour expression

$$\|\mathbf{u}\|^2 = g_{ij}u^i u^j$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 &= g^{ij}u_i u_j \\ &= u_i u^i\end{aligned}$$

8 Tenseur métrique et bases

8.1 Base orthonormée

Définition 8.1: Base orthogonale

Une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ d'un espace vectoriel euclidien E_n est orthogonale ssi ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux :

$$\begin{aligned}\forall i \neq j,\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \\ \forall i \neq j,\ g_{ij} = 0\end{aligned} \tag{12.19}$$

G est donc diagonale. L'inverse d'une matrice diagonale étant diagonale :

$$\forall i \neq k,\ g^{ik} = 0$$

Les relations (12.13) p. 209 pour $i = j$ deviennent :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad g_{ik}g^{ki} = 1 \quad \text{sans sommer sur } i$$

Les termes non diagonaux étant nuls, $i = k$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad g_{ii}g^{ii} = 1 \quad \text{sans sommer sur } i$$

soit, dans toute base orthogonale :

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}\ ,\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}}\ ,\ \ldots\ ,\ g_{nn} = \frac{1}{g^{nn}} \tag{12.20}$$

Définition 8.2: Base orthonormée

$(\mathbf{e}_i)$ est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien ssi ses vecteurs sont normés et orthogonaux deux à deux :

$$\forall i,j \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$
$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

Dans toute base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien, les composantes covariantes et contravariantes sont confondues. En effet, en partant des relations (12.5) p. 204 et avec la déf. 8.2 ci-dessus :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad u_i &= g_{ij}u^j \\ &= \delta_{ij}u^j \\ &= u^i \end{aligned}$$

Il est souvent avantageux de se placer dans une base orthonormée.

Théorème 8.1: Théorème de Gram-Schmidt

Tout espace vectoriel pré-euclidien admet des bases orthonormées.

La démonstration est donnée en annexe 2 p. 600.

Exemple 8.1: Tenseur métrique dans une base orthonormée

Dans l'espace vectoriel euclidien E_3 de la physique newtonienne, plaçons-nous dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$. Le tenseur métrique a pour composantes :

$$G\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 8.2: Tenseur métrique dans une base pseudo-orthonormée

Plaçons-nous dans l'une des deux bases *canoniques*, c.-à-d. les plus simples, $(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ de l'espace-temps de la relativité restreinte :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0(1,0,0,0) \\ \mathbf{e}_1(0,i,0,0) \\ \mathbf{e}_2(0,0,i,0) \\ \mathbf{e}_3(0,0,0,i) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \mathbf{e}_0(i,0,0,0) \\ \mathbf{e}_1(0,1,0,0) \\ \mathbf{e}_2(0,0,1,0) \\ \mathbf{e}_3(0,0,0,1) \end{cases}$$

où i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Dans la première base canonique, de convention de genre temps (13.5) p. 227, le tenseur métrique a pour composantes :

$$\eta\begin{bmatrix} \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \eta\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'espace-temps de la relativité restreinte est pseudo-euclidien (en coordonnées rectangulaires son tenseur métrique est diagonal et ses composantes valent ± 1). Sa base canonique est pseudo-orthonormale. Calculons le tenseur dual du tenseur métrique en inversant sa matrice représentative :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{12.21}$$

Le tenseur métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est égal à son dual.

8.2 Base orthogonale non normée

Dans une base orthogonale non normée, les composantes covariantes et contravariantes ne sont pas confondues. Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthogonale non normée d'un espace vectoriel euclidien E_2, telle que $\|\mathbf{e}_1\| = 3$ et $\|\mathbf{e}_2\| = 1$ (Fig. 12.1).

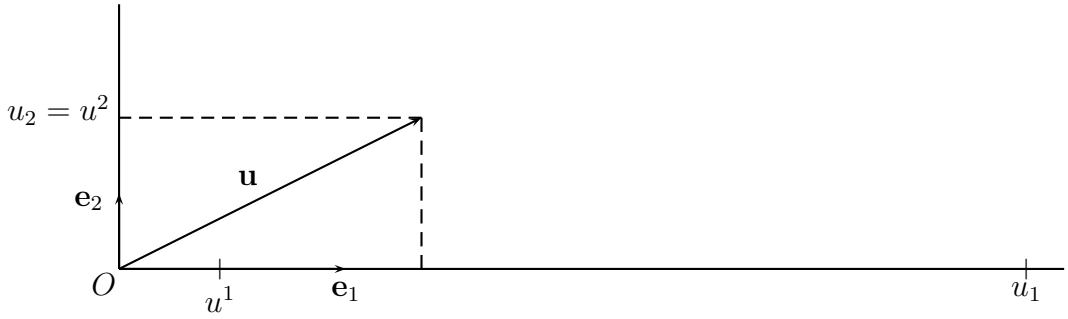


Fig. 12.1 – Base orthogonale non normée

Pour avoir,

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$$

la composante contravariante u^1 est divisée par 3 pour compenser la multiplication par 3 de la norme du vecteur de base $\mathbf{e}_1$. Elle varie contrairement (contra-variante) à la norme de son vecteur de base $\mathbf{e}_1$.

La composante covariante u_1, telle que

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1$$

est multipliée par 3 en même temps que le vecteur de base $\mathbf{e}_1$. Elle varie comme (co-variante) la norme de son vecteur de base $\mathbf{e}_1$.

Bien que la base soit orthogonale $\mathbf{u} \neq u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, car lors d'un changement de base la composante covariante u_1 et le vecteur de base $\mathbf{e}_1$ sont multipliés dans le même rapport, ne laissant

pas invariant $u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$. En utilisant (12.5) p. 204 nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= g_{11}u^1 \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\, u^1 \\ &= \|\mathbf{e}_1\|^2 u^1 \\ &= 9u^1 \end{aligned}$$

La composante $g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1$, et de façon générale toutes les composantes g_{ij}, est covariante au carré puisqu'elle varie comme $\|\mathbf{e}_1\|^2$. Nous la dirons deux fois covariante.

Remarque 8.1

Par abus de langage, nous dirons par exemple qu'un « tenseur est deux fois covariant » alors que ce sont ses composantes qui le sont.

La double covariance du tenseur métrique permet l'invariance du produit scalaire par changement de base, relation (8.8) p. 127.

Pour la seconde composante :

$$\begin{aligned} u_2 &= g_{22}u^2 \\ &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)\, u^2 \\ &= \|\mathbf{e}_2\|^2 u^2 \\ &= u^2 \end{aligned}$$

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3 Base oblique normée

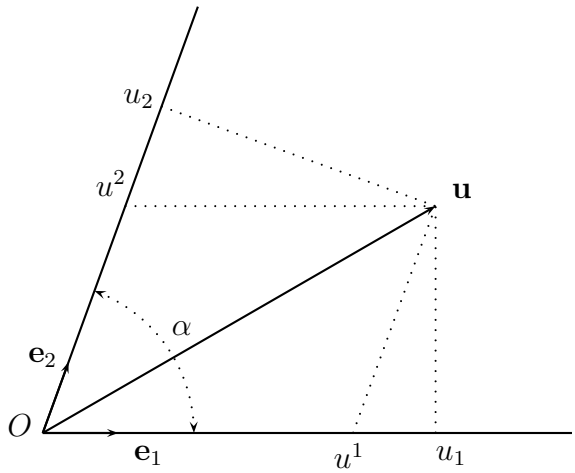


FIG. 12.2 – Base oblique normée

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Son déterminant vaut

$$\begin{aligned} g &= 1 - \cos^2(\alpha) \\ &= \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

et son inverse s'écrit :

$$\left[g^{ij}\right] = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \tag{12.22}$$

Pour les bases obliques non normées, prenons un exemple :

Exemple 8.3: Tenseur métrique et son dual dans une base oblique non normée

Soit $\{\mathbf{e}_1(2,0), \mathbf{e}_2(-1,3)\}$ une base de l'espace vectoriel euclidien E_2. Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ g_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ g_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 \\ g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 4 \\ g_{12} = -2 \\ g_{21} = -2 \\ g_{22} = 10 \end{cases} \Rightarrow G \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Cette base est oblique (termes rectangles) et non normée. Déterminons les composantes du tenseur dual du tenseur métrique, $[g^{ij}]$. L'inverse d'une matrice vaut un sur le déterminant fois la transposée de la comatrice :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}[\mathrm{com}(M)]^T$$

Or :

$$\begin{aligned} g &= 4 \times 10 - (-2) \times (-2) \\ &= 36 \end{aligned}$$

La comatrice de toute matrice symétrique est symétrique. Ici elle a pour composantes :

$$\mathrm{com}\, G \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Toute matrice symétrique étant égale à sa transposée $(\mathrm{com}\, G)^T = \mathrm{com}\, G$, et :

$$[g^{ij}] = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons aussi déterminer le tenseur dual du tenseur métrique grâce aux relations (12.13) p. 209 :

$$\begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \delta^1{}_1 \\ g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \delta^2{}_1 \\ g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21} = \delta^1{}_2 \\ g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = \delta^2{}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4g^{11} - 2g^{21} = 1 \\ 4g^{12} - 2g^{22} = 0 \\ -2g^{11} + 10g^{21} = 0 \\ -2g^{12} + 10g^{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{11} = 5/18 \\ g^{12} = 1/18 \\ g^{21} = 1/18 \\ g^{22} = 1/9 \end{cases}$$

Chapitre 13

RELATIVITÉ RESTREINTE

Sommaire

1 Référentiels et principe de relativité 218
2 Transformation de Galilée des coordonnées 220
3 Quadridistance spatio-temporelle - Intervalle d'univers 222
4 Vitesse de la lumière et vitesse limite 225
5 Invariants relativistes - Sphère de lumière 226
6 Convention de genre temps 227
7 Espace homogène et isotrope, temps homogène 228
8 Loi de composition interne 228
9 Intervalle infinitésimal d'univers 229
10 Métrique de Minkowski 230
11 Géodésique de l'espace-temps de Minkowski 233
12 Transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées 235
13 Temps propre - Durée propre 241
14 Jumeaux de Langevin 245
15 Longueur propre 246
16 Longueur d'une courbe en relativité restreinte 247
17 Vecteur tangent à une courbe 248
18 Longueur d'une courbe 248
19 Courbe régulière 250
20 Diagramme d'espace-temps en cinématique classique 251
21 Diagramme d'espace-temps de Minkowski 254
22 Diagramme d'espace-temps de Poincaré 262
23 Cinématique relativiste 266
24 Dynamique relativiste 307
25 Quadri-opérateur nabla 316
26 Quadrigradient 317
27 Équation de conservation 318

L'espace de la relativité restreinte est l'exemple prototypique d'espace *pseudo-euclidien*. Les espaces pré-euclidiens regroupent les espaces euclidiens (aussi appelés proprement euclidiens) et les espaces pseudo-euclidiens.

En physique relativiste, le temps et l'espace n'ont pas d'existence intrinsèque, ils dépendent du mouvement relatif entre observateur et système observé. Il existe autant d'espaces et de temps qu'il y a d'observateurs en mouvement relatif. Les référentiels ne se déplacent pas dans un espace ou dans un temps qui préexisteraient mais dans un espace-temps qui préexiste, ils « emportent » avec eux leur propre espace et leur propre temps.

1 Référentiels et principe de relativité

Pour définir un référentiel en relativité nous devons préciser que l'on parle d'« un » espace et non de l'espace, et d'« un » temps et non du temps, car l'espace et le temps ne sont pas absolus comme en mécanique classique, mais dépendent de l'état de mouvement relatif des référentiels en question. Seul l'espace-temps est absolu. On précise donc la déf. 2.1 p. 134 :

Définition 1.1: Référentiel, cas relativiste

Un référentiel est un espace muni d'un système de coordonnées, et un temps mesuré par des horloges fixes dans cet espace.

Reprenons la déf. 2.4 p. 135 d'un référentiel galiléen en mécanique classique. Un mouvement en translation signifie sans rotation sur soi-même, rectiligne signifie sans accélération normale au mouvement, et uniforme signifie sans accélération tangentielle au mouvement. Par transitivité, les référentiels galiléens se déplacent d'un mouvement en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. On donne alors la définition alternative suivante sans faire appel aux étoiles lointaines :

Définition 1.2: Référentiels galiléens

Les référentiels équivalents sont appelés galiléens ssi ils se distinguent les uns des autres à la fois par :

- leur position relative
- leur origine temporelle
- leur orientation relative
- un mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme

Le mouvement relatif de ces référentiels est à l'origine du nom donné au principe de relativité. Dans cette définition des référentiels galiléens, l'équivalence quelle que soit

- leur position, suppose implicitement l'homogèneité de l'espace
- leur origine temporelle, suppose implicitement l'homogénéité du temps
- leur orientation (et leur direction prise en translation rectiligne), suppose implicitement l'isotropie de l'espace

Définition 1.3: Coordonnées galiléennes

Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires dans l'espace d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et soit t son temps propre (mesuré dans le référentiel). Les coordonnées rectangulaires (pseudo-cartésiennes normales) spatio-temporelles (t, x, y, z), où l'axe de la coordonnée

temporelle est représenté normal aux axes des coordonnées spatiales, sont appelées coordonnées galiléennes de $\mathcal{R}$.

Définition 1.4: Coordonnées galiléennes réduites

Les coordonnées (ct, x, y, z) sont appelées coordonnées galiléennes réduites.

Remarque 1.1

Les coordonnées galiléennes réduites ont toutes la dimension d'une longueur.

Notation 1.1

Par convention nous indiquons la coordonnée temporelle avant les coordonnées spatiales, (t, x, y, z) ou (ct, x, y, z). Cette notation permet d'ajouter ou d'enlever une ou plusieurs coordonnées spatiales.

Nous prenons la notation suivante :

Notation 1.2: Notation indicielle

Les coordonnées galiléennes réduites sont notées x^α avec $\alpha = 0, \ldots, 3$:

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z$$

L'indice zéro met en évidence le caractère particulier du temps par rapport aux coordonnées spatiales.

Définition 1.5: Configuration standard

Deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en configuration standard ssi :

- les centres de ces référentiels se croisent et se superposent à l'instant $t_0 = t'_0 = 0$
- on utilise les coordonnées galiléennes ou galiléennes réduites
- les repères naturels associés aux coordonnées galiléennes sont orthonormés directs
- le mouvement rectiligne n'a lieu que selon les axes Ox et $O'x'$ parallèles et de même sens (confondus quand les centres se superposent)
- le mouvement de translation est tel que les axes Oy et $O'y'$ sont parallèles, donc aussi les axes Oz et $O'z'$: pas de rotation statique
- le mouvement relatif uniforme de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ est dans le sens des x croissants

Si l'on note $\mathbf{v}_e$ le 3-vecteur vitesse d'entrainement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, on en déduit que ce vecteur est selon l'axe Ox : $\|\mathbf{v}_e\| = v_{ex} = v_e > 0$ et $v_{ey} = v_{ez} = 0$.

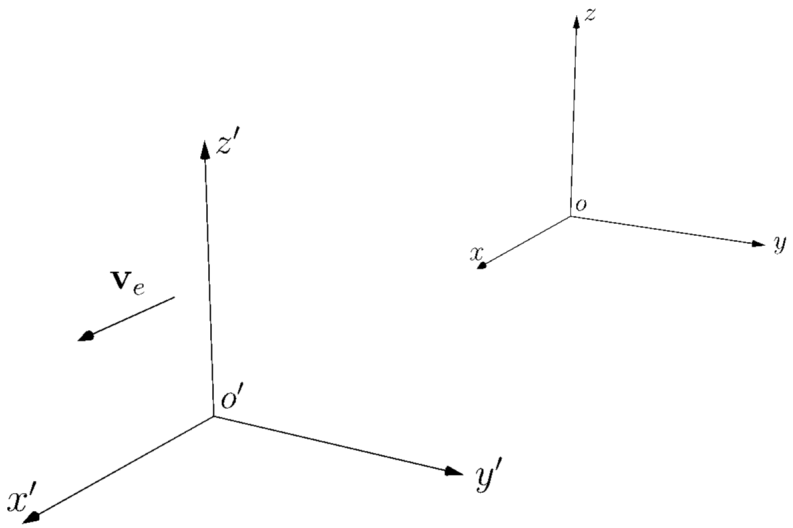


FIG. 13.1 – Référentiels en configuration standard

Remarque 1.2

On précise ici que $\mathbf{v}_e$ est le 3-vecteur vitesse d'entrainement de $\mathcal{R}'$ tel que mesuré par un observateur dans $\mathcal{R}$. Autrement dit l'espace parcouru par $\mathcal{R}'$ est mesuré dans $\mathcal{R}$, il est divisé par le temps mesuré dans $\mathcal{R}$ également. Par symétrie des rôles de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et par isotropie supposée de l'espace, le 3-vecteur vitesse d'entrainement $\mathbf{v}'_e$ de $\mathcal{R}$ mesuré par un observateur dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\mathbf{v}'_e = -\mathbf{v}_e$$

2 Transformation de Galilée des coordonnées

Définition 2.1: Transformation des coordonnées

On appelle transformation de coordonnées un changement de système de coordonnées par changement de référentiel.

On exclue donc les changements de coordonnées comme le passage d'un système de coordonnées rectangulaire à un système de coordonnées sphériques.

En physique newtonienne, pour passer des coordonnées spatiales et temporelle d'un point dans un référentiel galiléen aux coordonnées du même point dans un autre référentiel galiléen, c.-à-d. pour effectuer un changement de référentiel galiléen de l'observateur, nous utilisons la transformation de coordonnées suivante :

Définition 2.2: Transformation de Galilée

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). La transformation $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ est appelée transformation de Galilée (directe) :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Cette transformation linéaire est une transvection (§ 4.5 p. 104) qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous obtenons la transformation de Galilée inverse $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$, soit en inversant les relations précédentes, soit en changeant v_e en $-v_e$ et en permutant les coordonnées de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{13.2}$$

Définition 2.3: Invariant

En mécanique classique, un invariant est une quantité physique qui reste identique à elle-même par changement de référentiel galiléen par la transformation de coordonnées de Galilée.

Exemple 2.1

Le temps, la distance spatiale entre deux points de l'espace, la masse sont des exemples d'invariants de la mécanique classique.

Remarque 2.1

Le vecteur vitesse d'un mobile ou le vecteur champ électrique sont des vecteurs mathématiques déf. 1.11 p. 27, mais ne sont pas des vecteurs physiques déf. 1.6 p. 24 car ils ne sont pas invariants par changement de référentiel galiléen. La norme de la vitesse d'un mobile ou son énergie cinétique sont des scalaires mathématiques déf. 1.12 p. 27, mais ne sont pas des scalaires physiques déf. 1.3 p. 23 car ils ne sont pas invariants par changement de référentiel galiléen.

3 Quadridistance spatio-temporelle - Intervalle d'univers

En relativité restreinte, l'espace et le temps sont liés par la constante c homogène à une vitesse (un espace divisé par un temps). Ils forment *l'espace-temps* ou *univers*, dans lequel c est une vitesse limite pour la matière, l'énergie, les interactions et l'information. c est aussi appelée *constante de structure de l'espace-temps* ou *constante chronogéométrique*.

En multipliant la coordonnée temporelle par cette constante c nous obtenons la coordonnée ct homogène à une longueur ou une distance. On mesure alors le temps en mètres, ou l'espace en secondes, ce qui ne pose pas de problème puisque l'on connait la valeur de la constante de passage c. Cette coordonnée n'a pas le même statut que les coordonnées spatiales x, y, z mais permet de définir une distance dans l'espace-temps. L'espace-temps devient *de facto* un espace métrique à quatre dimensions, et l'on cherche à y définir une distance entre deux évènements qui soit invariante par changement de référentiel. À un changement de référentiel correspond un changement de temps et d'espace, c.-à-d. un changement de coordonnées, qui s'effectue par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cette quadridistance est appelée *intervalle d'univers*, sous-entendu entre deux points ayant chacun quatre coordonnées. Un espace dans lequel on peut définir une distance est dit *métrique*[1], sinon il est dit *affine*. Ainsi, l'espace et le temps de la physique non relativiste sont deux espaces métriques distincts, et leur « réunion » n'est pas un espace métrique, alors que l'espace-temps de la relativité est un espace métrique.

Fig. 13.2 – Exemple d'espace affine (à gauche sur le schéma) et d'espace métrique (à droite)

Figure 13.2 les coordonnées y et z ne sont pas représentées. On note que :

- en coordonnées galiléennes (t, x, y, z), la longueur d'un segment n'a pas de sens précis, les coordonnées n'ont pas la même dimension, l'espace n'est pas métrique
- en coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219, la longueur d'un segment existe et on peut la mesurer. Les coordonnées ont même dimension, celle d'une longueur ou distance, et définissent un espace métrique. Sur l'axe des ordonnées les durées sont transformées en distances, avec 1 s = 299 792 458 m et 1 m ≈ 3,34 ns.

Figure 13.2 dessin de droite, les échelles de distance ne sont pas les mêmes, des mètres en abscisse et des « trois centaines de milliers de kilomètres » en ordonnée.

1. du grec $\mu\varepsilon\tau\rho\omega\upsilon$, mesure

Remarque 3.1

Un cas similaire existe en mécanique classique. Dans l'aviation on mesure les altitudes en centaines de pieds ou flight level (FL) et les distances sol en milles marins ou nautical miles (NM). Difficile dans ces conditions de mesurer une distance autre qu'une différence d'altitude ou qu'une distance sol.

FIG. 13.3 – Unités d'un espace métrique

Pour cette raison nous redéfinissons le mètre et/ou la seconde pour avoir la même unité en abscisse et en ordonnée, ce qui revient à poser

$$c = 1 \tag{13.3}$$

Remarque 3.2

Le mètre et la seconde, comme toutes les unités de la physique, sont arbitraires.

Définition 3.1: Système d'unités géométriques

Le système d'unité dans lequel on pose la vitesse limite $c = 1$ sans dimension, et la constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 1$ sans dimension, est appelé système d'unités géométriques.

Dans le système d'unités géométriques il n'y a plus lieu de distinguer l'unité de temps de l'unité de distance. Les vitesses n'ont alors plus de dimension.

Remarque 3.3

En principe on ne devrait pas simplifier les unités. Par exemple, si l'on dit qu'un projet prend un mois de retard tous les vingt-quatre mois, on ne peut simplifier par « mois ». De même, la vitesse d'un cours d'eau augmente à mesure que l'on s'éloigne de la berge et que l'on se rapproche du centre, cette variation de vitesse se mesure en (m/s)/m. Si l'on simplifie les unités on obtient des Hertz pour cette variation de vitesse.

L'espace et le temps ne sont plus absolus puisqu'ils se combinent l'un dans l'autre, mais l'espace-temps prend un caractère *absolu*. Il est modélisé par un espace métrique mathématique de dimension quatre appelé *espace de Poincaré-Minkowski* ou *espace-temps de Minkowski*, de système de coordonnées (t, x, y, z) où $c = 1$.

Notation 3.1

L'espace de Poincaré-Minkowski est noté $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{M}$.

Tout comme l'espace est constitué de l'ensemble des points de cet espace, l'espace-temps est constitué de l'ensemble des *évènements* ou *points d'univers*.

Définition 3.2: Évènement ou point d'univers

Un évènement est quelque chose qui a lieu quelque part à un instant donné.

On ne se soucie pas de la nature de ce qui arrive mais uniquement du lieu et de l'instant.

Notation 3.2

On note un évènement $E(t, x, y, z)$ en coordonnées galiléennes et $E(ct, x, y, z)$ en coordonnées galiléennes réduites.

En relativité, les évènements héritent du caractère absolu de l'espace-temps. Ce sont des invariants relativistes.

Remarque 3.4

Le terme « évènement » existe aussi en mécanique classique où il a aussi pour coordonnées (t, x, y, z), mais où le temps est universel.

L'espace-temps est absolu signifie que les évènements sont absolus, ils existent en eux-mêmes indépendamment de tout référentiel ou de tout observateur. Le choix d'un référentiel (avec son espace, son temps, son système de coordonnées et son horloge) pour localiser un évènement est arbitraire, par conséquent les coordonnées spatio-temporelles des évènements ont le même arbitraire.

Nous cherchons à généraliser la distance spatiale entre deux points de l'espace physique tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Galilée, à une distance spatio-temporelle entre deux évènements de l'espace-temps quadridimensionnel $\mathbb{R}^4$, invariante par changement de référentiel galiléen par une transformation qui laisse invariante c. Cette transformation des coordonnées que l'on cherche à établir porte le noms de ses découvreurs, c'est la transformation de Lorentz et Poincaré.

De même qu'en mathématique la distance entre deux points d'un espace est invariante par changement de coordonnées, en relativité la distance spatio-temporelle entre deux évènements de l'espace-temps est invariante par changement de coordonnées spatio-temporelle, c'est-à-dire par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Le tableau suivant donne les équivalences de vocabulaire selon que l'on met en avant l'aspect mathématique ou physique :

Mathématique	Physique relativiste
point	évènement
vecteur	4-vecteur
métrique	distance de minkowski, 4-distance, intervalle
pseudo-norme	4-norme
système de coordonnées, repère	référentiel
chgt de coordonnées, chgt de base	chgt de référentiel, transformation de Lorentz
espace euclidien	espace newtonien
espace pré-euclidien	espace plat (newtonien ou de la relativité restreinte)
espace non euclidien	espace courbe
espace pseudo-euclidien	espace-temps, 4-espace, espace de Minkowski, univers
variété, espace riemannien, espace	espace courbe ou plat
espace pseudo-riemannien	espace-temps de la relativité générale

4 Vitesse de la lumière et vitesse limite

On suppose l'existence d'une vitesse limite. Il est impossible de prouver expérimentalement que la lumière se propage à la vitesse limite. La seule chose que pourrait montrer une expérience serait que la lumière ne va pas à la vitesse limite.

Exemple 4.1

Lorsqu'une balance indique zéro on ne peut pas conclure, car soit la balance n'est pas assez précise soit l'objet pesé a effectivement un poids nul.

Par analogie, une expérience qui n'indique pas de différence entre la vitesse de la lumière et la vitesse limite ne permet pas de conclure. Quant à la théorie, elle ne peut pas se prononcer sur ce qui se mesure, sauf à utiliser d'autres valeurs mesurées.

Définition 4.1: Loi covariante

Une loi physique est dite covariante ssi elle est invariante de forme fonctionnelle dans tous les référentiels équivalents, c'est-à-dire, si elle s'écrit sous la même forme mathématique pour tous les observateurs équivalents.

Les quatre équations de Maxwell permettent d'établir l'équation d'une onde dont la vitesse de propagation est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide. Cette vitesse est celle du champ électromagnétique sur tout son spectre de fréquence, donc aussi celle de la lumière. Les

équations de Maxwell ne sont pas covariantes par la transformation de Galilée mais le sont par celle de Lorentz-Poincaré. Cela indique que la vitesse de la lumière est très proche, sinon confondue, avec la vitesse limite.

La transformation de Lorentz-Poincaré fait intervenir la vitesse limite, alors que les équations de Maxwell font intervenir la vitesse de la lumière. Si l'on trouvait une masse (pour les anglophones une masse au repos) aux photons, la lumière n'irait pas à la vitesse limite et les équations de Maxwell ne seraient plus covariantes. Il faudrait les réécrire [2].

5 Invariants relativistes - Sphère de lumière

Revenons sur l'hypothèse de l'existence d'une vitesse limite.

Remarque 5.1

Les transformations de Lorentz-Poincaré peuvent être démontrées à partir d'hypothèses très générales sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace, sur l'homogénéité du temps, sur le fait que les transformations de Lorentz-Poincaré doivent former un groupe (déf 1.13 p. 28) et sur le respect de la causalité. L'existence d'une vitesse limite est une conséquence de ces hypothèses et elle est alors démontrée et non postulée.

La vitesse limite est invariante par changement de référentiel galiléen, elle a même valeur pour tous les observateurs galiléens sinon nous pourrions la dépacer par changement de référentiel galiléens. C'est notre premier exemple d'*invariant relativiste*.

Définition 5.1: Invariant relativiste

On appelle invariant relativiste, invariant de Lorentz, scalaire de Lorentz ou 4-scalaire, une quantité physique qui reste identique à elle-même par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz des coordonnées.

Remarque 5.2

En unifiant le temps et l'espace avec la constante chronogéométrique c pour former l'espace-temps, nous perdons deux invariants de la mécanique classique, le temps universel et la distance entre deux points, mais nous obtenons un nouvel invariant, c elle-même. Nous avons bon espoir de trouver un deuxième invariant relativiste à partir du temps et de l'espace, en particulier une 4-distance entre deux évènements de l'espace-temps.

À partir de la vitesse limite, cherchons un deuxième invariant relativiste qui fasse intervenir les coordonnées spatio-temporelles. Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). Nous supposons que la lumière se propage à la vitesse limite, mais cette hypothèse n'a aucune nécessité, elle permet de mieux se représenter l'expérience de pensée qui suit. Imaginons qu'à l'instant initial $t_0 = t'_0 = 0$, à l'origine spatiale de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ se produise un flash isotrope. Un observateur dans $\mathcal{R}$ verra une sphère de lumière de centre O s'étendre dans l'espace, d'équation dans $\mathcal{R}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \tag{13.4}$$

ct est le rayon de la sphère dans $\mathcal{R}$ à l'instant t.

2. Voir les travaux d'Alexandru Proca

En mécanique classique, les transformations de Galilée inverses (13.2) p. 221 permettent de savoir ce que voit un observateur dans $\mathcal{R}'$:

$$(x' + v_e t')^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

C'est l'équation d'une sphère de lumière de centre O et de rayon ct' à l'instant t'. Dans $\mathcal{R}'$ la lumière va à $c + v_e$ selon l'axe $-x'$ et à $c - v_e$ selon l'axe x'.

En relativité restreinte comme en physique non relativiste, un observateur dans $\mathcal{R}'$ verra aussi une sphère de lumière s'étendre dans l'espace. S'il voyait un ellipsoïde de révolution la vitesse de la lumière ne serait pas isotrope, c.-à-d. la même dans toutes les directions. Cependant, par invariance de c par changement de référentiel galiléen, la sphère n'a pas pour centre O mais O', et a donc pour équation dans $\mathcal{R}'$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

Par comparaison avec (13.4), nous voyons que l'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiels galiléens. C'est un invariant relativiste.

Remarque 5.3

Notez que l'équation de la sphère de lumière n'est pas invariante par changement de référentiels non galiléens.

Si le flash n'a pas pour origine le centre O de $\mathcal{R}$ à l'instant $t = 0$ mais le point de coordonnées quelconques (t_0, x_0, y_0, z_0), alors l'équation de la sphère de lumière de centre ce point s'écrit dans $\mathcal{R}$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = [c(t - t_0)]^2$$
$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2$$

Et dans $\mathcal{R}'$:

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = c^2 \Delta t'^2$$

6 Convention de genre temps

L'équation de la sphère de lumière étant la même dans tous les référentiels galiléens, cela suggère de poser au choix

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) \qquad \text{convention de genre temps} \tag{13.5}$$

ou

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \qquad \text{convention de genre espace}$$

En convention de genre temps, Δs^2 est positif lorsque la partie temporelle est prépondérante sur la partie spatiale.

Remarque 6.1

Cette expression rappelle le carré de la distance euclidienne en trois dimensions d'espace, le théorème de Pythagore. Dans tout triangle rectangle de côtés a, b, c et d'hypothénus c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ce qui implique

$$c < a + b$$

En revanche ici, en posant $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$:

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 \\ c^2\Delta t^2 &= \Delta s^2 + \Delta r^2 \\ c\Delta t &< \Delta s + \Delta r \\ \Delta s &> c\Delta t - \Delta r \end{aligned}$$

Quelle que soit la convention choisie, si s^2 est nul dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors il est nul dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, autrement dit s et s' sont proportionnels :

$$s = \alpha s'$$

7 Espace homogène et isotrope, temps homogène

Reprenons la déf. 1.2 p. 218 d'un référentiel galiléen et ses implications :

- l'espace étant supposé homogène (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'endroit où on la réalise), le facteur de proportionnalité α ne peut être fonction des coordonnées spatiales
- le temps étant également supposé homogène (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'époque à laquelle elle est réalisée), α ne peut être fonction de la coordonnée temporelle
- l'espace étant supposé isotrope (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'orientation choisie dans l'espace), α ne peut être fonction de la direction de la vitesse relative des référentiels

α n'est donc fonction que de la norme de la vitesse relative des référentiels :

$$s = \alpha(v_e)s'$$

8 Loi de composition interne

Si l'on considére trois référentiels galiléens nous avons

$$\begin{cases} s_1 = \alpha(v_{12})s_2 \\ s_2 = \alpha(v_{23})s_3 \\ s_1 = \alpha(v_{13})s_3 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha(v_{12})\alpha(v_{23})s_3 \\ \alpha(v_{13}) &= \alpha(v_{12})\alpha(v_{23}) \end{aligned}$$

Or v_{13} dépend non seulement des valeurs v_{12} et v_{23}, mais aussi de l'angle entre les vecteurs $\mathbf{v}_{12}$ et $\mathbf{v}_{23}$. Par conséquent α est une constante :

$$\alpha = \alpha^2$$

Cela laisse deux possibilités, $\alpha = 0$ qui donne $s = s' = 0$, et $\alpha = 1$ qui donne $s = s'$. Dans les deux cas

$$\boxed{s = s'} \tag{13.6}$$

s est donc un invariant de Lorentz. Nous aurons $s = s' = 0$ pour toute propagation à la vitesse limite, la partie temporelle et la partie spatiale s'annulant. En trois dimensions d'espace on retrouve l'équation de la sphère de lumière. Pour la lumière, à supposer qu'elle se propage à la vitesse limite, dans tout référentiel galiléen :

$$\boxed{s = 0}$$

9 Intervalle infinitésimal d'univers

Soient deux évènements $E_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$, nous définissons le carré de *l'intervalle d'univers* entre ces deux évènements par :

$$\begin{aligned} Intervalle^2(E_1, E_2) &\overset{\text{def}}{=} c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ &\overset{\text{def}}{=} c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \end{aligned}$$

L'invariance de l'équation de la sphère de lumière du § 5 p. 226 nous assure que l'intervalle d'univers est bien invariant par changement de référentiel galiléen. L'intervalle d'univers va donc nous servir de *distance spatio-temporelle*, $d(E_1, E_2)$.

Remarque 9.1

En convention de genre espace :

$$Intervalle^2(E_1, E_2) \overset{\text{def}}{=} (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

Cette distance dans l'espace-temps est aussi appelée *distance d'univers*, *intervalle d'univers*, *intervalle d'espace-temps* ou *pseudo-métrique de l'espace-temps*. Elle a même valeur dans tout référentiel galiléen.

Définition 9.1: Intervalle infinitésimal d'univers

En convention de genre temps, le carré de l'intervalle infinitésimal d'univers entre deux évènements infiniment proches (t, x, y, z) et $(t + \mathrm{d}t, x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$ s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 \overset{\text{def}}{=} c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Si les deux évènements appartiennent à une trajectoire décrite avec une vitesse $v(t)$,

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = v^2(t)\mathrm{d}t^2$$

si bien que

$$\mathrm{d}s^2 = \left[c^2 - v^2(t)\right] \mathrm{d}t^2 \tag{13.7}$$

Si $v(t) < c$ alors :

- $\mathrm{d}s^2$ est positif et s est réel en convention de genre temps
- $\mathrm{d}s^2$ est négatif et s est imaginaire en convention de genre espace

ce qui justifie notre choix de la convention de genre temps (13.5) p. 227 : s réel pour une trajectoire réelle. Il faut ici faire le rapprochement avec la conclusion du § 1 p. 195 sur le plongement de la sphère.

Remarque 9.2

Pour un déplacement à la vitesse limite, l'intervalle d'univers Δs est nul.

Nous sommes ainsi conduits, en relativité restreinte, à douer la variété d'univers V_4 de la pseudo-métrique définie par la forme quadratique différentielle indéfinie, déf. 1.9 p. 89,

$$Q(t,x,y,z) = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

de rang 4 et de signature $(1,3)$ en convention de genre temps, appelée *métrique de Minkowski*. Cette pseudo-métrique étant à coefficients constants elle définit V_4 comme un espace pseudo-euclidien : le « pseudo » vient du fait que la métrique n'a pas que des signes positifs ou que des signes négatifs, le « euclidien » vient des coefficients constants.

Remarque 9.3

Nous verrons que l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte est un espace osculateur (tangent à l'ordre deux) à l'espace courbe pseudo-riemannien de la relativité générale.

10 Métrique de Minkowski

10.0.1 En convention de genre temps

Substituons au système de coordonnées galiléennes (t,x,y,z), le système de coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 (ct,x,y,z), et prenons la notation indicielle (1.2) p. 219 (x^0,x^1,x^2,x^3). En convention de genre temps (13.5) p. 227, la pseudo-métrique s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \left(\mathrm{d}x^0\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^3\right)^2\\ &= \begin{pmatrix}\mathrm{d}x^0 & \mathrm{d}x^1 & \mathrm{d}x^2 & \mathrm{d}x^3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x^0\\ \mathrm{d}x^1\\ \mathrm{d}x^2\\ \mathrm{d}x^3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matrice 4×4 appelée matrice de Minkowski, représente le tenseur métrique qui structure l'espace-temps de la relativité restreinte (cf. ex. 8.2 p. 212).

Notons $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base (pseudo-orthonormale) de l'espace-temps, avec $\boldsymbol{e}_0$ le vecteur de base de la coordonnée temporelle :

$$\begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

En convention de genre temps :

$$\begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Notation 10.1

Le tenseur métrique de l'espace de Poincaré-Minkowski est noté $\eta_{\alpha\beta}$, la matrice de Minkowski est notée $[\eta_{\alpha\beta}]$.

$$[\eta_{\alpha\beta}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \tag{13.8}$$

Les termes carrés valent ± 1 et les termes rectangles (non diagonaux) sont nuls.

Le déterminant de la matrice de Minkowski est négatif :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 \times -1 \times -1 \times -1 \\ &= -1 \end{aligned} \tag{13.9}$$

Dans un espace pseudo-euclidien, le déterminant de la matrice représentative du tenseur métrique peut être négatif. Le tenseur métrique a pour signature $(+ - - -)$.

Pour les composantes contravariantes x^α (avec $\mathrm{t} = t$, c.-à-d. $c = 1$) :

$$x^0 = t \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z$$

Le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Pour les composantes covariantes, $x_\beta = \eta_{\alpha\beta}\, x^\alpha$, nous avons :

$$x_0 = t \quad ; \quad x_1 = -x \quad ; \quad x_2 = -y \quad ; \quad x_3 = -z$$

Ainsi, en convention de genre temps nous avons le changement de variance suivant :

$$x_0 = x^0 \quad ; \quad x_1 = -x^1 \quad ; \quad x_2 = -x^2 \quad ; \quad x_3 = -x^3$$

En coordonnées rectangulaires et pseudo-rectangulaires les termes rectangles sont nuls, autrement dit $\eta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$. Le carré de l'intervalle entre deux évènements se note alors :

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta \\ &= \eta_{\alpha\alpha}\, x^\alpha x^\alpha \\ &= x_\alpha x^\alpha \end{aligned}$$

Il peut prendre des valeurs positives, négatives ou nulle, selon la distance et le temps lumière qui séparent ces deux évènements. Enfin, d'après l'ex. (8.2) p. 212, le tenseur de Minkowski est égal à son dual :

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$$

10.0.2 En convention de genre espace

En convention de genre espace, le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

Notation 10.2

En convention de genre espace les termes carrés valent aussi ± 1 et les termes rectangles (non diagonaux) sont nuls.

$$[\eta_{\alpha\beta}] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

Le déterminant de la matrice de Minkowski est également négatif, $\eta = -1$. Le tenseur métrique a pour signature $(-+++)$ et les composantes contravariantes s'écrivent à nouveau :

$$x^0 = t \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z$$

Pour les composantes covariantes :

$$x_0 = -t \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z$$

Ainsi, en convention de genre espace nous avons le changement de variance suivant :

$$x_0 = -x^0 \quad ; \quad x_1 = x^1 \quad ; \quad x_2 = x^2 \quad ; \quad x_3 = x^3 \tag{13.10}$$

Pour insister sur le choix d'une signature, la notation $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{M}$ de l'espace-temps 3.1 p. 223, est remplacée par celle-ci :

Notation 10.3

En convention de genre temps, l'espace-temps de Minkowski est noté $\mathbb{R}^{1,3}$. On a alors

$$\mathbb{R}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta_{\alpha\beta})$$

où $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
L'espace-temps de Minkowski est noté $\mathbb{R}^{3,1}$ en convention de genre espace.

En notation tensorielle en coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219, quelle que soit la convention de genre temps ou espace, la pseudo-métrique de Minkowski s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \tag{13.11}$$

10.0.3 Métrique d'apparence euclidienne

Le carré de l'intervalle élémentaire peut aussi s'écrire

$$s^2 = (it)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{ou} \qquad s^2 = t^2 + (ix)^2 + (iy)^2 + (iz)^2$$

La matrice de Minkowski devient :

$$[\eta_{ab}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les indices latins varient de 1 à 4. La métrique a une apparence euclidienne, de signature $(+\,+\,+\,+)$. Les composantes covariantes et contravariantes sont confondues. On adopte au choix une notation avec pour quatrième coordonnée une coordonnée temporelle imaginaire (la coordonnée est imaginaire, le temps reste réel) :

$$x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z \quad ; \quad x^4 = it$$

ou une notation avec des coordonnées spatiales imaginaires :

$$x^1 = ix \quad ; \quad x^2 = iy \quad ; \quad x^3 = iz \quad ; \quad x^4 = t$$

Dans ces deux cas, le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$$

Le plan de coordonnées (x, it) ne doit pas être confondu avec le plan complexe (x, t). Dans le premier cas le carré de la pseudo-norme d'un vecteur s'écrit $x^2 - t^2$ et il peut être positif, négatif ou nul, alors que dans le second cas le carré de la norme d'un vecteur s'écrit $x^2 + t^2$.

$\mathbb{M}$ peut bien entendu être rapporté à un système de coordonnées curvilignes (y^α) quelconque et sa pseudo-métrique s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}(y)\mathrm{d}y^\alpha \mathrm{d}y^\beta$$

Les composantes du tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ sont ici fonction des coordonnées curvilignes. D'après la loi d'inertie de Sylvester 4 p. 93, le déterminant η est négatif également en coordonnées curvilignes.

11 Géodésique de l'espace-temps de Minkowski

Appliquons la déf. 3.1 p. 9 d'une géodésique à l'espace-temps de Minkowski.

Définition 11.1: Géodésique

Une trajectoire joignant deux évènements E_a et E_b de $\mathbb{M}$ est une géodésique ssi sa longueur est extrémale.

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} \mathrm{d}s = 0$$

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219, avec la notation indicielle 1.2 p. 219 et la convention de sommation 1.3 p. 15 :

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{c^2 \mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)} = 0$$

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{\frac{c^2 \mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}p^2} - \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}p^2} + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}p^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}p^2}\right)} \mathrm{d}p = 0$$

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{\eta_{\alpha\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}p}\right)^2} \mathrm{d}p = 0 \tag{13.12}$$

avec $\eta_{00} = 1$, et $\forall \alpha = 1, 2, 3,\ \eta_{\alpha\alpha} = -1$.

Théorème 11.1: Géodésique

Dans $\mathbb{M}$, un mobile a une 4-accélération nulle ssi il décrit une géodésique.

Démonstration. Dans (13.12) p. 234, posons le lagrangien

$$\mathcal{L} = \eta_{\alpha\alpha} \left(x'^\alpha\right)^2$$

Or,

$$\delta \int_{E_a}^{E_b} \sqrt{\mathcal{L}}\, \mathrm{d}p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta \int_{E_a}^{E_b} \mathcal{L}\, \mathrm{d}p = 0$$

en conservant la condition $\mathcal{L} \geqslant 0$. Nous obtenons le système de quatre équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(2\eta_{\alpha\alpha}\, x'^\alpha\right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\eta_{\alpha\alpha} \left(x'^\alpha\right)^2\right] = 0$$

$$2\eta_{\alpha\alpha}\, x''^\alpha + 2\,\frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha}\,\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}p}\left(x'^\alpha\right)^2 - \frac{\partial \eta_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha}\left(x'^\alpha\right)^2 = 0$$

Les coefficients $\eta_{\alpha\alpha}$ ne sont pas fonction des coordonnées x^α :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad x''^\alpha = 0$$

Ce système de n équations différentielles ordinaires du second ordre, pour les quatre coordonnées galiléennes réduites $x^\alpha(p)$ fonction du paramètre quelconque p, donne une géodésique de $\mathbb{M}$. Contrairement au cas de la mécanique classique, la coordonnée temporelle x^0 est une fonction linéaire du paramètre p, et réciproquement le paramètre est une fonction linéaire de la coordonnée temporelle.

12 Transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées

Nous cherchons à établir la transformation de coordonnées dite de Lorentz-Poincaré, qui permet le changement de référentiel dans le cadre relativiste, c.-à-d. en maintenant invariant c. Chaque référentiel a *a priori* son propre système de coordonnées spatio-temporelles. À tout changement de référentiel galiléen correspond une transformation des coordonnées spatio-temporelles. La transformation de coordonnées que l'on cherche est donc une transformation des coordonnées spatio-temporelles qui laisse invariante c. Appliquons la transformation de Galilée à l'équation de la sphère de lumière dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ (x - v_e t)^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x^2 - 2xv_e t + v_e^2 t^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \end{aligned} \tag{13.13}$$

Ce n'est pas une sphère de centre O dans $\mathcal{R}$ à cause des termes supplémentaires $-2xv_e t$ et $v_e^2 t^2$.

12.1 Transformation spéciale de Lorentz

Au § 6 p. 227, nous avons vu que l'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiel (changement de coordonnées spatio-temporelles). Pour obtenir une sphère à partir de (13.13), nous ne pouvons pas garder $t' = t$ si nous voulons éliminer le terme croisé $-2xv_e t$. On essaye alors la transformation la plus simple envisageable,

$$\begin{cases} t' = t + Kx \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

où K est une constante homogène à l'inverse d'une vitesse, qu'il faut déterminer. Appliquons cette transformation de coordonnées à l'équation de la sphère de lumière dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ x^2 - 2xv_e t + v_e^2 t^2 + y^2 + z^2 &= c^2 (t + Kx)^2 \\ &= c^2 t^2 + 2c^2 Kxt + c^2 K^2 x^2 \\ x^2 \left(1 - c^2 K^2\right) - 2xt \left(v_e + c^2 K\right) + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme en xt on pose

$$\begin{aligned} v_e + c^2 K &= 0 \\ K &= -\frac{v_e}{c^2} \end{aligned}$$

La transformation de coordonnées devient

$$\begin{cases} t' = t - \dfrac{v_e x}{c^2} \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

et l'équation dans $\mathcal{R}$ devient :

$$x^2\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)$$

Pour obtenir une sphère dans $\mathcal{R}$ nous devons diviser x' et t' par le terme $\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}$.

Définition 12.1: Facteur relativiste

On définit le facteur relativiste par :

$$\gamma(v_e) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}}$$

Le facteur relativiste est aussi appelé facteur de Lorentz ou coefficient de parallaxe spatio-temporelle.

Notation 12.1

$\gamma(v_e)$ est noté simplement γ_e

Ce facteur est sans dimension. Pour toute vitesse relative, c.-à-d. pour tout couple de référentiels ou d'observateurs, il existe un facteur relativiste. Lorsque il y a plusieurs vitesses relatives il faut préciser de quel facteur relativiste il s'agit. On aura donc les écritures suivantes :

$$\gamma_e, \gamma_v, \gamma_{v'} \dots$$

Sa valeur est toujours supérieure ou égale à un :

$$0 \leqslant v_e \leqslant c \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma_e \geqslant 1 \tag{13.14}$$

Nous obtenons la transformation de coordonnées suivante :

Définition 12.2: Transformation spéciale de Lorentz

Pour deux référentiels en configuration standard (déf. 1.5 p. 219), la transformation (changement de système de coordonnées par changement de référentiel galiléen)

$$\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - \dfrac{v_e x}{c^2}\right) \\ x' = \gamma_e \left(x - v_e t\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

est appelée transformation spéciale de Lorentz.

La vitesse d'entrainement relative v_e des référentiels est le paramètre du groupe des transformations de Lorentz. La transformation est dite « spéciale » en ce qu'elle n'inclue pas les rotations

statiques ordinaires de l'espace, autrement dit le mouvement relatif a lieu selon les axes x et x' confondus. Elle est obtenue ici grâce à l'hypothèse de l'invariance de c (qui entraine celle de l'équation de la sphère de lumière) et en partant de la transformation de Galilée en considérant un mouvement de $\mathcal{R}'$ dans le sens des x croissants de $\mathcal{R}$.

12.2 Symétrie de la transformation spéciale de Lorentz

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219, la transformation spéciale de Lorentz est symétrique en x et ct :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - \dfrac{v_e x}{c^2} \right) \\ x' = \gamma_e \left(x - v_e t \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ct' = \gamma_e \left(ct - \dfrac{x v_e}{c} \right) \\ x' = \gamma_e \left(x - \dfrac{ct v_e}{c} \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

En posant

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} \tag{13.16}$$

nous voyons clairement la symétrie entre les coordonnées ct et x :

$$\boxed{\begin{cases} ct' = \gamma_e (ct - \beta_e x) & \text{(13.17a)} \\ x' = \gamma_e (x - \beta_e ct) & \text{(13.17b)} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}}$$

12.3 Écriture matricielle de la transformation spéciale de Lorentz

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition 12.3: Matrice de Lorentz

La matrice changement relativiste de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz des coordonnées est appelée matrice de Lorentz :

$$\Lambda \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notation 12.2

La matrice de Lorentz est habituellement notée avec la lettre L majuscule ou avec la lettre grecque lambda majuscule en l'honneur d'Hendrik Lorentz.

12.4 Transformation spéciale de Lorentz inverse

Nous obtenons la transformation spéciale de Lorentz inverse $\mathcal{R}' \to \mathcal{R}$, soit en inversant les relations précédentes, soit en changeant v_e en $-v_e$ et en permutant les coordonnées de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} t = \gamma_e \left(t' + \dfrac{v_e x'}{c^2} \right) \\ x = \gamma_e \left(x' + v_e t' \right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Remarque 12.1

Quel que soit le problème à résoudre, nous avons toujours le choix entre la transformation de Lorentz directe ou inverse. La résolution est plus ou moins simple selon ce choix.

La matrice de Lorentz inverse s'écrit :

$$\bar{\Lambda} \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13.18}$$

12.5 Linéarité de la transformation spéciale de Lorentz

La transformation spéciale de Lorentz prend en entrée un vecteur de l'espace-temps et donne en sortie un vecteur de l'espace-temps tout en étant linéaire, c'est donc un endomorphisme de l'espace-temps (déf. 1.5 p. 97). Chaque coordonnée d'un évènement E exprimée dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est une fonction linéaire de l'ensemble des coordonnées de ce même évènement E exprimées dans un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$:

$$t = f(t', x')$$
$$x = g(t', x')$$

où les fonctions f et g sont linéaires. La transformation spéciale de Lorentz est donc une application linéaire selon la déf. 1.2 p. 96. Soit $O(0,0,0,0)$ l'évènement origine d'un référentiel galiléen, et soient $E_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ deux autres évènements :

$$\Lambda(\lambda \mathbf{OE}_1 + \mathbf{OE}_2) = \lambda\Lambda\mathbf{OE}_1 + \Lambda\mathbf{OE}_2$$

12.6 Système d'unités géométriques

Dans (13.17) p. 237, remplaçons toutes les vitesses v par $\beta = v/c$, y compris c, ce qui revient à poser $c = 1$ et donc $\beta = v$:

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e\,(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e\,(x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \overset{c=1}{\Rightarrow} \begin{cases} t' = \gamma_e(t - v_e x) \\ x' = \gamma_e(x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{13.19}$$

Pour passer de $c = 299\ 792\ 458$ m/s à $c = 1$, on utilisera le passage :

$$\begin{cases} ct \to t \\ ct' \to t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \to t/c \\ t' \to t'/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}t \to \mathrm{d}t/c \\ \mathrm{d}t' \to \mathrm{d}t'/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}t^2 \to \mathrm{d}t^2/c^2 \\ \mathrm{d}t'^2 \to \mathrm{d}t'^2/c^2 \end{cases}$$

Appliquons ces relations pour la vitesse,

$$\begin{cases} \mathrm{d}r/\mathrm{d}t \to c\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}r'/\mathrm{d}t \to c\,\mathrm{d}r'/\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \to cv \\ v' \to cv' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v/c \to v \\ v'/c \to v' \end{cases}$$

et pour l'accélération :

$$\begin{cases} \mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2 \to c^2\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}^2r'/\mathrm{d}t^2 \to c^2\mathrm{d}^2r'/\mathrm{d}t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \to c^2 a \\ a' \to c^2 a' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a/c^2 \to a \\ a'/c^2 \to a' \end{cases}$$

Si l'on souhaite revenir à $c = 299\ 792\ 458$ m/s on utilisera le passage :

$$\begin{cases} t \to ct \\ t' \to ct' \end{cases} \qquad \begin{cases} v \to v/c \\ v' \to v'/c \end{cases}$$

12.7 Transformation spéciale de Lorentz en notation indicielle

Notation 12.3

En notation indicielle et matricielle, la transformation spéciale de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e\beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e\beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notation 12.4

En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad x^{\mu'} = \Lambda_0^{\mu'} x^0 + \Lambda_1^{\mu'} x^1 + \Lambda_2^{\mu'} x^2 + \Lambda_3^{\mu'} x^3$$

Notation 12.5

En notation indicielle avec la convention de sommation 1.3 p. 15 :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

12.8 Transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque

Dans le cas de la transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque, les origines des référentiels se croisent à $t = t' = 0$, leurs axes sont parallèles mais leur vitesse relative n'est pas selon l'axe des x.

Soit M un évènement, on pose $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ le vecteur position de M dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{O'M} = \mathbf{r}'$ son vecteur position dans $\mathcal{R}'$. On note $\mathbf{r}_{||}$ le vecteur position parallèle à $\mathbf{v}_e$ et $\mathbf{r}_{\perp}$ le vecteur position perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$, de sorte que :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{||} + \mathbf{r}'_{\perp}$$

La transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (13.19) p. 239 donne directement :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_e \left(t - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}\right) \\ \mathbf{r}'_{||} &= \gamma_e (\mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}_e t) \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned}$$

D'où la relation entre $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \gamma_e (\mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}_e t) + \mathbf{r}_{\perp} \\ &= \mathbf{r} + (\gamma_e - 1)\mathbf{r}_{||} - \gamma_e \mathbf{v}_e t \end{aligned}$$

Or nous avons aussi,

$$\mathbf{r}_{||} = \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e$$

donc en unités géométriques,

$$\boxed{\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}\right) & \text{(13.20a)} \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma_e - 1) \dfrac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e t & \text{(13.20b)} \end{cases}}$$

On obtient la transformation inverse en permutant $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$, t et t', et en changeant $\mathbf{v}_e$ en $-\mathbf{v}_e$:

$$\begin{cases} t = \gamma_e \left(t' + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}'\right) \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\gamma_e - 1) \dfrac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{r}'}{v_e^2} \mathbf{v}_e + \gamma_e \mathbf{v}_e t' \end{cases}$$

13 Temps propre - Durée propre

Définition 13.1: Temps propre

Le temps indiqué par une horloge fixe dans un référentiel est appelé temps propre de ce référentiel, quel que soit le mouvement de ce référentiel.

Par exemple, le temps propre à bord d'un avion est indiqué par une horloge embarquée. À chaque observateur ou référentiel son temps propre. C'est le temps du référentiel propre (déf. 2.3 p. 134) lorsque celui-ci est défini.

Notation 13.1

Le temps propre est habituellement noté τ ou t_0.

Un temps qui n'est pas un temps propre est appelé *temps impropre* ou *temps coordonnée*. Il n'est qu'une coordonnée au même titre que les coordonnées spatiales, et a le même arbitraire. Il dépend de notre choix de référentiel.

La notion de temps n'a que peu d'intérêt car on ne mesure jamais que des durées.

Définition 13.2: Durée propre

La durée séparant deux évènements qui ont lieu au même endroit ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$) dans un référentiel, par exemple en son point origine, est appelée durée propre ou intervalle de temps propre.

Une durée propre est toujours lue sur une seule et même horloge. En convention de genre temps, l'intervalle infinitésimal d'univers déf. 9.1 p. 229 est un réel positif ou négatif :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}\tau^2 \\ \mathrm{d}s &= \pm c\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{13.22}$$

où la vitesse limite c est positive.

Remarque 13.1

En convention de genre espace le ds est un imaginaire pur :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -c^2\mathrm{d}\tau^2 \\ \mathrm{d}s &= \pm ic\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Définition 13.3: Ligne d'univers

On appelle ligne d'univers ou ligne d'espace-temps, la trajectoire d'un mobile dans l'espace-temps.

ds peut être vu comme l'intervalle infinitésimal entre deux évènements infiniment proches le long d'une ligne d'univers. On choisit ds de même signe que dτ, le sens de parcours de la ligne d'univers a lieu dans le sens de l'écoulement du temps :

$$\boxed{\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau} \tag{13.23}$$

Une ligne d'univers a pour équation les quatre coordonnées d'espace-temps en fonction d'un paramètre p quelconque :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad x^\alpha = x^\alpha(p)$$

Si le mouvement est en cours, le paramètre est le temps, propre ou impropre.

Par deux évènements E_1 et E_2 il passe une infinité de lignes d'univers. Dans l'espace-temps plat de la relativité restreinte une seule est une géodésique, sa 4-distance dans l'espace-temps est extrémale. Autrement dit, parmi l'infinité de référentiels ayant leur point origine passant par deux évènements, un seul est galiléen. Nous verrons que la durée propre mesurée dans ce référentiel entre ces deux évènements est supérieure aux durées propres mesurées dans des référentiels non galiléens (accélérés) passant par ces deux mêmes évènements. L'intervalle fini de temps propre entre deux évènements est l'intégrale curviligne du temps propre infinitésimal selon la ligne d'univers passant par les deux évènements :

$$\Delta\tau = \int_{E_1(\tau_1)}^{E_2(\tau_2)} \mathrm{d}\tau$$

L'intervalle de temps propre dépend de la ligne d'univers parcourue. En revanche l'intervalle de temps propre dans un référentiel galiléen est absolu, tous les observateurs s'accordent sur sa valeur. Il n'est pas invariant par changement de référentiel puisqu'il n'est défini que dans un seul référentiel, celui galiléen. D'après (13.23), l'intervalle s est égal au temps propre au facteur c près, autrement dit le temps propre d'un mobile est la distance d'univers qu'il parcourt dans l'espace-temps au facteur c près :

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{1}{c}\int_{E_1(s_1)}^{E_2(s_2)} \mathrm{d}s} \tag{13.24}$$

$\mathrm{d}s$ est un élément de longueur de la ligne d'univers passant par les deux évènements.

Remarque 13.2

Ce n'est pas parce qu'un observateur mesure une durée entre deux évènements avec sa montre qu'il va obtenir une durée propre. Encore faut-il qu'il soit présent à l'endroit même de chaque évènement. Ne pas confondre temps propre (d'un observateur) et durée propre (entre deux évènements).

Les relations (13.7) p. 229 et (13.22) p. 241 donnent le lien entre le temps coordonnée t et le temps propre τ,

$$\begin{aligned} c^2\mathrm{d}\tau^2 &= \left(c^2 - v^2\right)\mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}\tau &= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t &= \gamma_v \mathrm{d}\tau \qquad \gamma_v \geqslant 1 \end{aligned} \tag{13.25}$$

où l'on s'est servi de la déf. 12.1 p. 236 du facteur relativiste γ. Ce facteur est aussi appelé *facteur de dilatation temporelle*.

Lorsque $\beta_e \ll 1$ plutôt que d'approximer le facteur de Lorentz par un et retrouver $dt' = dt$, nous pouvons utiliser l'approximation :

$$\gamma_e \approx 1 + \frac{\beta_e^2}{2}$$

Nous obtenons alors :

$$dt' \approx dt + \frac{\beta_e^2}{2}\,dt$$

Définition 13.4: Durée impropre

La durée mesurée dans un référentiel, séparant deux évènements qui ont lieu en deux endroits distincts de ce référentiel est appelée durée impropre ou intervalle de temps impropre.

La durée impropre est la différence d'indication de deux horloges préalablement synchronisées, une horloge située en chaque évènement. Elle dépend d'un choix arbitraire de référentiel (de son vecteur vitesse), elle a donc le même arbitraire.

Remarque 13.3

La synchronisation de deux horloges fixes dans un même référentiel peut se faire par émission de signaux. Avec des signaux lumineux, on mesure le temps de parcours de la lumière d'une horloge à l'autre comme étant la moitié du temps qu'elle met lorsqu'elle est émise de la première horloge et se reflète sur un miroir au niveau de la seconde horloge. N'importe quel signal fait l'affaire, par exemple un signal électrique. On peut également synchroniser les horloges au même endroit, déplacer l'une d'elles jusqu'au point voulu puis la ramener pour mesurer le déphasage lors du trajet aller-retour. Puis refaire l'aller simple et tenir compte du déphasage.

Dans la suite de ce document nous noterons $\mathcal{R}$ le référentiel de l'observatrice Anna et t son temps propre, $\mathcal{R}'$ le référentiel de l'observateur Robert, alias Bob, et t' son temps propre. Nous supposerons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ne sont pas confondus, qu'Anna et Bob ont chacun une montre au poignet et plusieurs horloges synchronisées placées en différents endroits de leur référentiel. Nous préciserons s'ils sont galiléens ou non.

Supposons Anna et Bob galiléens. L'affichage midi et l'affichage 13h sur la montre d'Anna sont deux évènements qui ont lieu au même endroit dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna, la durée Δt d'une heure les séparant lue par Anna est une durée propre, on la note $\Delta\tau$. En revanche, ces évènements ont lieu en deux endroits distincts dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob, deux endroits où Bob a placé des horloges.

Différentions la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (13.19) p. 239 entre les observateurs galiléens Anna et Bob :

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma_e \mathrm{d}t - \gamma_e v_e \mathrm{d}x & \text{(13.26a)} \\ \mathrm{d}x' = \gamma_e \mathrm{d}x - \gamma_e v_e \mathrm{d}t & \text{(13.26b)} \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \end{cases}$$

Pour la transformation inverse :

$$\begin{cases} \mathrm{d}t = \gamma_e \mathrm{d}t' + \gamma_e v_e \mathrm{d}x' \\ \mathrm{d}x = \gamma_e \mathrm{d}x' + \gamma_e v_e c\, \mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \end{cases}$$

Ces transformations permettent de calculer la durée $\Delta t'$ que doit mesurer Bob par soustraction de l'indication de deux de ses horloges situées sur le trajet d'Anna. Dans le référentiel d'Anna, la montre d'Anna ne bouge pas, à chaque instant $\mathrm{d}r = 0$:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$$

t devient un temps propre et avec (13.26a) p. 243 :

$$\mathrm{d}t' = \gamma_e \mathrm{d}\tau \tag{13.28}$$

En intégrant :

$$\boxed{\Delta t' = \int_{midi}^{13\text{h}} \gamma_e \mathrm{d}\tau}$$

D'après (13.14) p. 236, $\gamma_e \geqslant 1$, la *durée impropre* $\Delta t'$ mesurée par Bob entre les deux évènements est plus longue que la durée propre affichée par la montre d'Anna. Bob mesure par exemple une durée d'une heure et dix minutes. L'intervalle de temps propre d'un objet mobile est toujours inférieur à l'intervalle de temps impropre mesuré dans le référentiel dans lequel l'objet est mobile.

Sans passer par la transformation de Lorentz des coordonnées, nous obtenons les mêmes résultats en nous servant de l'invariance de l'intervalle d'univers (13.6) p. 229 et de sa déf. 9.1 p. 229 :

$$c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 = c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}r'^2$$

En posant $\mathrm{d}r = 0$, le temps t devient un temps propre τ :

$$\begin{aligned} c^2\mathrm{d}\tau^2 &= c^2\mathrm{d}t'^2\left(1 - v_e^2\right) \\ \mathrm{d}\tau^2 &= \mathrm{d}t'^2\left(1 - \beta_e^2\right) \\ \mathrm{d}\tau &= \frac{\mathrm{d}t'}{\gamma_e} \end{aligned}$$

Si l'on connait la durée mesurée par Bob on peut en déduire celle lue par Anna :

$$\Delta\tau = \int_{midi}^{13\text{h}10\text{mn}} \frac{1}{\gamma_e}\,\mathrm{d}t'$$

Remarques 13.1

- (13.26b) p. 243 donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x' &= -\gamma_e v_e \mathrm{d}t \\ &= -v_e \mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' &= -v_e \end{aligned}$$

  On retrouve le fait que v_e est la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et $-v_e$ celle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$.

- On vérifie la cohérence de la transformation spéciale de Lorentz. Supposons que les deux évènements aient lieu au même endroit dans le référentiel de Bob. Dans ce cas Bob lit un temps propre sur sa montre. Injectons $\mathrm{d}x' = 0$ dans (13.26a) et (13.26b) p. 243 :

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma_e \mathrm{d}t - \gamma_e v_e \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = v_e \mathrm{d}t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t' = \gamma_e\left(1 - v_e^2\right)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \gamma_e \mathrm{d}\tau$$

- Le temps de la mécanique classique n'est ni le temps propre ni le temps impropre, c'est leur ancêtre commun mais ce n'est ni l'un ni l'autre. Ce modèle de la réalité n'est valable qu'à faible vitesse devant c. Chaque notion de mécanique classique faisant intervenir le temps (la vitesse, l'accélération, la quantité de mouvement, la force), fait émerger deux notions en mécanique relativiste, l'une avec le temps propre, l'autre avec le temps impropre.

Le temps propre mesuré dans un référentiel galiléen n'est pas invariant par changement de référentiel puisqu'il n'est défini que dans ce référentiel, mais il a un caractère *absolu* pusique tous les observateurs s'accordent sur le temps que mesure Anna dans son référentiel galiléen entre deux évènements ayant lieu au même endroit pour elle.

14 Jumeaux de Langevin

Imaginons qu'Anna et Bob soient jumeaux, ils ont le même âge à quelques minutes près. Alors qu'Anna reste sur Terre, Bob part en fusée pour un voyage interstellaire jusqu'à l'étoile la plus proche de la Terre après le Soleil, Proxima du Centaure, puis revient sur Terre. Pendant ce voyage il atteint par exemple une vitesse relative à la Terre de 90% c. Les jumeaux mesurent tous les deux une durée propre, ils sont présents aux évènements départ et retour de Bob. Chacun voyant l'autre avec une vitesse relative pense que son jumeau sera plus jeune. En réalité la situation n'est pas symétrique et Bob vieilli moins qu'Anna. Pour l'aller, Bob est présent aux deux évènements, départ de la Terre et arrivée à Proxima, il mesure une durée propre $\Delta\tau$. Au retour Bob est aussi présent aux deux évènements, départ de Proxima et arrivée sur Terre. Par symétrie, il mesure également une durée propre $\Delta\tau$ pour le retour. Anna mesure deux fois une durée impropre Δt, elle n'est pas présente sur Proxima. La relation (13.25) p. 242 donne la durée impropre mesurée par Anna pour l'aller comme pour le retour :

$$\Delta t = \gamma_v \Delta\tau \qquad \gamma_v \geqslant 1$$

Anna mesure une durée plus longue que Bob, il a donc moins vieilli qu'Anna, il arrive en quelque sorte dans le futur d'Anna.

La dissymétrie semble venir du fait que Bob subit au moins une phase de décélération suivie d'une accélération pour revenir sur Terre, et par conséquent ne soit plus galiléen pendant cette phase. Cependant cette phase peut avoir une durée aussi courte que l'on veut sans que cela ne change beaucoup le résultat, et on voit mal comment cette petite partie du trajet pourrait influer sur un résultat qui concerne tout le trajet. De plus on peut rendre Anna non galiléenne en imaginant qu'elle fasse une accélération suivie d'une décélération équivalentes à celle de Bob.

Supposons que Bob se serve du champ gravitationnel de Proxima pour faire son demi-tour, il n'est plus galiléen mais il reste inertiel (déf. 2.9 p. 138), ce qui est autrement plus important. La solution demanderait l'utilisation de la relativité générale pour la phase de demi-tour, mais là encore on voit mal comment cette phase seule pourrait influer sur un résultat qui concerne tout un trajet.

Pour éviter toute phase d'accélération et rester dans l'espace-temps plat de la relativité restreinte, imaginons que l'espace-temps soit cylindrique. Cet espace euclidien n'a pas de courbure intrinséque mais une courbure extrinsèque. Au moment du départ, Bob croise Anna en étant déjà à vitesse constante (départ lancé), puis en continuant tout droit croise à nouveau Anna à vitesse constante. Les référentiels d'Anna et Bob sont galiléens, ils sont sur des géodésiques du cylindres. L'analyse montrent [3] que si Anna reste sur une génératrice du cylindre et Bob fait le tour du cylindre (indice « d'enroulement » de 1) alors Bob vieilli moins vite qu'Anna. Ce ne sont donc pas les phases d'accélération qui sont responsables de ce résultat mais la longueur de la ligne d'univers de chacun des jumeaux. À partir de (13.24) p. 242, le temps écoulé indiqué par une horloge est l'intégrale de la ligne d'univers de cette horloge au facteur c près. Par exemple

3. Jean-Philippe Uzan, Jean-Pierre Luminet, *Twin paradox and space topology.*

pour l'aller, en appelant $\mathcal{R}'$ le référentiel du voyageur :

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\int_{\text{♁}}^{Proxima} \mathrm{d}s' &= \frac{1}{c}\int_{\text{♁}}^{Proxima} \mathrm{d}s \\ \Delta\tau &= \frac{1}{c}\int_{\text{♁}}^{Proxima} \sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2} \\ &= \int_{\text{♁}}^{Proxima} \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Delta t}{\gamma_e}\end{aligned}$$

La durée est maximale pour une horloge fixe, celle d'Anna, dont la trajectoire dans l'espace est la plus courte. Ce résultat est dû au caractère hyperbolique de l'espace-temps de la relativité restreinte.

15 Longueur propre

Nous parlons de longueur pour un objet et de distance pour un trajet.

Définition 15.1: Longueur propre et distance propre

La longueur propre d'un objet physique est la longueur de cet objet lorsqu'il est immobile, c.-à-d. la longueur mesurée dans le référentiel propre de cet objet. La distance propre entre deux évènements est la distance mesurée dans le référentiel dans lequel les deux évènements sont simultanés.

Notation 15.1

La longueur propre et la distance propre sont habituellement notées σ.

a) Si l'objet est immobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ de Bob alors $\Delta x'$ est sa longueur propre. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de Anna nous devons avoir $\Delta t = 0$, c.-à-d. $t_1 = t_2$. Les horloges devant lesquelles passent l'avant et l'arrière de l'objet doivent indiquer le même temps. La transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (13.19) p. 239 s'écrit avec $\Delta t = 0$:

$$\begin{cases}\Delta t' = -\gamma_e v_e \Delta x \\ \Delta x' = \gamma_e \Delta x \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z\end{cases}$$

$$\boxed{\Delta x = \Delta\sigma/\gamma_e}$$

Comme $\gamma_e > 1$, la *longueur impropre* Δx mesurée par Anna est plus courte que la longueur propre mesurée par Bob.

b) Si l'objet est immobile dans $\mathcal{R}$ alors Δx est sa longueur propre. Dans $\mathcal{R}'$ nous devons avoir $\Delta t' = 0$:

$$\begin{cases} \Delta t = v_e \Delta x \\ \Delta x' = \gamma_e \left(\Delta x - v_e \Delta t\right) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \gamma_e \left(1 - v_e^2\right) \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \Delta\sigma / \gamma_e$$

Remarque 15.1

Il n'y a pas de contraction réelle des distances ou des longueurs dans le sens du mouvement, cette contraction est observationnelle et réciproque. Si la contraction était réelle, du gaz dans un récipient serait comprimé et deviendrait liquide pour un observateur en mouvement relatif mais pas pour un observateur dans le référentiel propre du gaz.

16 Longueur d'une courbe en relativité restreinte

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites (x^α) de $\mathbb{M}$ (déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219), la longueur d'une courbe

$$\mathscr{C}(p) : \forall \alpha \; x^\alpha = x^\alpha(p)$$

de paramètre p et d'abscisse curviligne $s(p)$ a pour expression :

$$\Gamma = \int_{s_0}^{s_1)} \mathrm{d}s$$

avec $s_0 = s(p=0)$ et $s_1 = s(p=1)$. (13.11) p. 232 donne l'expression de la pseudo-métrique :

$$\Gamma = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{|\eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta|}$$

Définition 16.1: Fonction indicatrice ε

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \quad \text{si} \quad \eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \geqslant 0 \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad \eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta} \\ &= \int_{p=0}^{p=1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}p}}\, \mathrm{d}p \end{aligned} \tag{13.29}$$

17 Vecteur tangent à une courbe

Définition 17.1: Vecteur tangent à une courbe

Soit $\mathbf{r}(x^\alpha)$ le vecteur position à n composantes d'un point d'une courbe $\mathscr{C}$. Si les coordonnées $x^\alpha(p)$ de ce vecteur sont fonction d'un paramètre p, son vecteur dérivée par rapport à ce paramètre s'écrit :

$$\mathbf{u}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}p}$$

Il a pour composantes

$$\forall \alpha = 0, \ldots, n \qquad u^\alpha(p) = \frac{\mathrm{d}x^\alpha(p)}{\mathrm{d}p}$$

Ces vecteurs dérivées forment un champ de vecteurs tangents en tout point de la courbe $\mathscr{C}$. Avec (13.29), la longueur de $\mathscr{C}(p)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{p=0}^{p=1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}\, \mathrm{d}p \\ &= \int_{p=0}^{p=1} \|\mathbf{u}(p)\| \mathrm{d}p\end{aligned}$$

où $\|\mathbf{u}(p)\|$ est la quadrinorme du 4-vecteur $\mathbf{u}(p)$.

Dans l'espace-temps, $\mathbf{r}(x^\alpha)$ est le quadrivecteur position à 4 composantes d'un évènement de la ligne d'univers $\mathscr{C}$. Les quadrivecteurs $\mathbf{u}(p)$ forment un champ de vecteurs tangents en tout évènement de la ligne d'univers $\mathscr{C}(p)$. Si le paramètre est le temps propre τ du mobile (temps affiché par une horloge liée au mobile) qui suit cette ligne d'univers $\mathscr{C}(\tau)$, alors $\mathbf{u}(\tau)$ est la *quadrivitesse* de ce mobile, de composantes :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad u^\alpha(\tau) = \frac{\mathrm{d}x^\alpha(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$$

18 Longueur d'une courbe

La métrique de l'espace de la cinématique classique est définie positive. Une courbe paramétrique est de longueur nulle lorsque l'abscisse curviligne est nulle quelle que soit la valeur du paramètre. En revanche, la métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est indéfinie. Une courbe a une longueur nulle lorsque sa partie temporelle et sa partie spatiale sont égales.

Exemple 18.1: Courbe de longueur nulle en relativité restreinte

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites (x^α) de $\mathbb{M}$, considérons la courbe $\mathscr{C}$ de paramètre p :

$$\mathscr{C}(p) \ : \ \begin{cases} x^0(p) = 5p \\ x^1(p) = 3\sin(p) \\ x^2(p) = 3\cos(p) \\ x^3(p) = 4p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}\left(\mathrm{d}_p x^\alpha\right) \ : \ \begin{cases} u^0 = 5 \\ u^1(p) = 3\cos(p) \\ u^2(p) = -3\sin(p) \\ u^3 = 4 \end{cases}$$

Le quadrivecteur tangent à $\mathscr{C}(p)$ a pour expression

$$\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}(5, 3\cos(p), -3\sin(p), 4)$$

En convention de genre temps, la diagonale principale du tenseur métrique s'écrit :

$$diag(\eta_{\alpha\beta}) = (1, -1, -1, -1)$$

La longueur de $\mathscr{C}(p)$ est nulle (quelle que soit la convention) :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta}\, \mathrm{d}p \\ &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{\varepsilon \left\{5^2 - [3\cos(p)]^2 - [-3\sin(p)]^2 - 4^2\right\}}\, \mathrm{d}p \\ &= 0 \end{aligned}$$

Définition 18.1: Arc de courbe

Un arc de courbe est une portion de courbe délimitée par deux points distincts de cette courbe. C'est un sous-ensemble connexe de la courbe.

Définition 18.2: Courbe nulle en un point

Une courbe est nulle au point de paramètre p_0 ssi en ce point l'abscisse curviligne $s(p)$ cesse de croître ou de décroître avec le paramètre p :

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right|_{p_0} = 0$$

Exemple 18.2

En cinématique classique, soit un mobile décrivant une trajectoire en fonction du temps avec une vitesse décroissante. La trajectoire est nulle au point où la vitesse s'annule. En ce point la distance parcourue par le mobile cesse de croître ou de décroître avec le temps. C'est soit un stop-and-go, soit une inversion du sens du vecteur vitesse.

Le vecteur tangent à la courbe en ce point est nul :

$$\begin{aligned} \vec{u}(p) &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}p} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Définition 18.3: Courbe nulle

Une courbe est nulle ssi l'un de ses arcs est de longueur nulle. Un arc représente plus d'un point, et correspond à un intervalle $c \geqslant p \geqslant d$ du paramètre p, avec $c > d$.

Exemple 18.3

En cinématique classique, la trajectoire d'un mobile est nulle si le mobile observe un arrêt complet pendant un temps non nul sur une partie de sa trajectoire.

Pour une métrique définie positive, l'abscisse curviligne est bien définie comme une fonction strictement croissante du paramètre de la courbe. Réciproquement, ce paramètre est lui aussi une fonction strictement croissante de l'abscisse curviligne. Nous pouvons librement passer de l'un de ces paramètres à l'autre. Ce n'est plus le cas pour une courbe nulle, l'abscisse curviligne ne peut plus être définie.

Définition 18.4: Ensemble nul d'une courbe

L'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles les arcs de courbe sont nuls s'appelle l'ensemble nul de la courbe.

Une courbe peut être nulle sans que sa longueur soit nulle, il suffit en effet que l'un de ses arcs soit de longueur nulle. En revanche, une courbe de longueur nulle est nécessairement nulle.

19 Courbe régulière

Définition 19.1: Courbe régulière

Une courbe est régulière si elle n'a pas de point nul, c.-à-d. si en tout point

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} \neq 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} < 0$$

Exemple 19.1

En cinématique classique, la trajectoire d'un mobile est régulière si la vitesse du mobile n'est jamais nulle.

Soit une courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne :

$$\mathscr{C}(s) : \forall \alpha \; x^\alpha = x^\alpha(s)$$

Soit $\mathbf{r}(x^\alpha)$ le vecteur position d'un point de $\mathscr{C}(s)$, dont les composantes $x^\alpha(p)$ sont fonction du paramètre p :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}$$

Remarque 19.1

Pour une courbe nulle la dérivée $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}$ n'est pas définie.

Avec la définition 17.1 248 du vecteur tangent à une courbe :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{u}(p)}{\|\mathbf{u}(p)\|} = \mathbf{t}(p)$$

$\mathbf{t}(\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}s)$ est le vecteur tangent unitaire en chaque point de $\mathscr{C}$. Lorsque le paramètre p est le temps propre du mobile qui décrit la courbe, $\mathbf{t}(\tau)$ est sa quadrivitesse unitaire (§ 17 p. 248).

20 Diagramme d'espace-temps en cinématique classique

20.1 Diagramme spatial

En cinématique classique, le passage d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ (changement de référentiel galiléen) correspond à un changement d'origine du système de coordonnées spatiales. La coordonnée temporelle étant la même dans tous les référentiels galiléens, on ne la représente pas mais on représente deux, ou trois, des trois coordonnées spatiales à un instant donné. Les référentiels sont habituellement en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). La figure 13.4 représente l'instant initial $t_0 = t'_0$ où les référentiels se croisent.

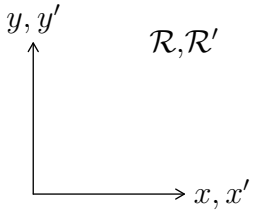


Fig. 13.4 – Représentation spatiale des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à l'instant $t_0 = t'_0$

Le vecteur vitesse d'entrainement (constant) des référentiels est selon les axes x et x' confondus. La figure 13.5 représente les référentiels à un instant t_1 quelconque.

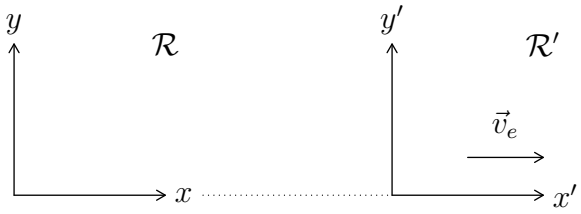


Fig. 13.5 – Représentation spatiale des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, à l'instant t_1

La trajectoire relative est repésentée en pointillés. La représentation du vecteur $\mathbf{v}_e$ attaché à $\mathcal{R}'$ implique que l'observateur (nous) se situe dans $\mathcal{R}$. Par convention nous sommes toujours *a priori* au repos dans $\mathcal{R}$. Nous sommes immobiles dans $\mathcal{R}$ et nous observons $\mathcal{R}'$ s'éloigner de nous à la vitesse $\mathbf{v}_e$. Il est tout aussi vrai de dire que $\mathcal{R}$ s'éloigne de $\mathcal{R}'$ à la vitesse $-\mathbf{v}_e$.

20.2 Diagramme spatial et temporel

Pour faire le lien avec la représentation de l'espace-temps de la relativité restreinte, représentons l'axe temporel et un (ou deux) axe spatial sur une feuille de papier. Les axes portant des quantités de nature différente, l'espace mathématique (x, t) est affine, on ne peut y définir de distance ou d'angle. Le plan (x, t) n'est pas euclidien et les axes x et t n'ont pas de raison d'être orthogonaux. Ces axes ne se croisent que parce qu'on les représente sur un même plan, celui de la feuille de papier qui est un plan euclidien. Par convention ils se croisent sur la feuille de papier au point $o(0, 0, 0, 0)$.

Pour dessiner les axes de coordonnées x' et t' dans le système de coordonnées (x, t) sur la même feuille de papier, reprenons la transformation de Galilée (déf. 2.2 p. 221) pour deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.5 p. 219) :

$$\begin{cases} x' = x - v_e t \\ t' = t \end{cases}$$

L'axe x' est l'ensemble des évènements pour lesquels $t' = 0$. Il a pour équation dans le système de coordonnées (x, t), à la fois $t = 0$ et $x' = x$. Par conséquent les axes x' et x sont confondus.

De même que l'axe de coordonnée t est l'ensemble des évènements ayant lieu en $x = 0$, c.-à-d. à l'origine de $\mathcal{R}$, l'axe de coordonnée t' est l'ensemble des évènements ayant lieu en $x' = 0$, c.-à-d. à l'origine de $\mathcal{R}'$. L'axe t' a donc pour équation dans le système de coordonnées (x, t) :

$$\begin{aligned} 0 &= x - v_e t \\ t &= x/v_e \end{aligned}$$

C'est une droite passant par l'origine et de pente $1/v_e$ dans le plan (x, t). Si l'on pose $\tan\alpha = 1/v_e$ alors l'angle α est l'angle entre x' et t' mesuré dans le plan (x, t). La feuille de papier sur laquelle est tracé le diagramme affine de la figure 13.6 p. 252 est un plan spatial euclidien à deux dimensions, sur lequel les distances et les angles sont définis. Si l'on représente l'axe t perpendiculairement à l'axe x alors α est aussi l'angle mesuré sur la feuille de papier. La transformation de Galilée est alors un « cisaillement ». Plus la vitesse relative est grande et plus l'axe t' se rapproche de l'horizontale. À l'instant t_0 où les référentiels se croisent nous avons la représentation suivante :

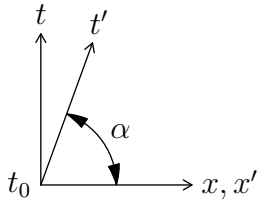


Fig. 13.6 – $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ pour un observateur au repos dans $\mathcal{R}$

À l'instant $t_1 = t'_1$ nous avons la représentation suivante, dans laquelle les observateurs se trouvent au croisement des axes temporel et spatial (Fig. 13.7) :

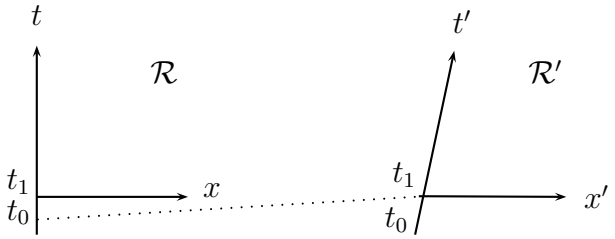


FIG. 13.7 – Référentiels à $t_1 = t'_1$

Ici, la représentation de la trajectoire indique que l'on se situe dans $\mathcal{R}$.

Se pose la question de savoir si les coordonnées (x', t') d'un point de ce diagramme s'obtiennent par projection parallèle ou par projection orthogonale aux axes. Un évènement sur l'axe t' a pour coordonnée $x' = 0$, et un évènement sur l'axe x' a pour coordonnée temporelle $t' = 0$, par conséquent les coordonnées s'obtiennent par projection parallèle aux axes.

Sur la feuille (figure 13.8) les évènements A et B sont simultanés dans $\mathcal{R}$ et donc aussi dans $\mathcal{R}'$ puisque le temps est universel. Les évènements simultanés forment des droites de simultanéité parallèles à l'axe $x = x'$.

Les distances sur la feuille, de l'origine au point t_A et de l'origine au point t'_A représentent la même durée. Les unités temporelles sur la feuille ne sont pas identiques.

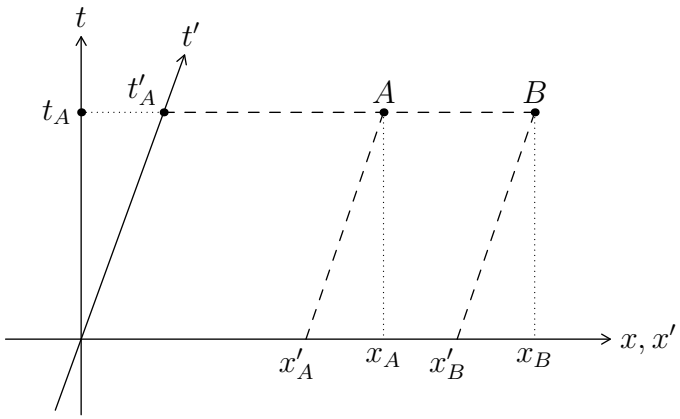


FIG. 13.8 – Coordonnées des évènements A et B dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

On remarque que

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{t_A}{x_A - x'_A} \\ \frac{1}{v_e} &= \frac{t_A}{x_A - x'_A} \\ x_A - x'_A &= v_e t_A \end{aligned}$$

Les unités de distance x et x' sur la feuille de papier (figure 13.8) sont identiques.

La ligne d'univers du point A immobile dans $\mathcal{R}$ entre les instants $t = 0$ et $t = t_A$, c.-à-d. la trajectoire de A dans l'espace (x, t) entre ces instants, est représentée par le segment de droite en pointillés de x_A à A. La ligne d'univers de ce même point A dans $\mathcal{R}'$ entre les mêmes instants

est représentée par le segment de droite discontinu de x'_A à A. Les lignes d'univers d'un même point ne sont pas confondus, on ne peut pas représenter sur ce diagramme différents instants.

21 Diagramme d'espace-temps de Minkowski

En relativité restreinte, à un changement de référentiel dans l'espace-temps correspond un changement d'origine du système de coordonnées spatiales, et un changement de la coordonnée temporelle et de la coordonnée spatiale dans l'axe du mouvement. Le temps et l'espace se « mélangent » lorsqu'on observe un référentiel autre que le sien propre.

Nous sommes dans $\mathcal{R}$ et nous observons le référentiel $\mathcal{R}'$ dont les axes de coordonnées spatio-temporelles sont obliques. En représentant les coordonnées (t, x) à l'instant t_1 on a la figure 13.9,

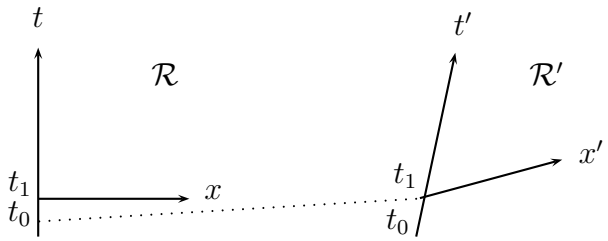


FIG. 13.9 – Référentiels à t_1 vus de $\mathcal{R}$

qui fait le lien avec la figure 13.7 de la cinématique classique. Dans la représentation relativiste de Minkowski-Poincaré on ne s'intéresse plus au déplacement dans l'espace comme en cinématique classique, mais on représente les coordonnées (t, x) des référentiels à l'instant t_0 où ils se croisent. En relativité restreinte le changement d'origine ayant peu d'importance, du changement de système de coordonnées on ne retient que le changement de coordonnées (on considère le changement de base et non le changement de repère). On note ici qu'en physique non relativiste c'est le contraire, du changement de système de coordonnées on ne retient que le changement d'origine, les coordonnées restant identiques au facteur additif $v_e t$ près. On ne s'intéresse donc pas au déplacement des référentiels dans l'espace comme en cinématique classique (fig. 13.5 p. 251), mais aux axes de coordonnées (x, ct) et (x', ct') des référentiels galiléens à l'instant $t_0 = t'_0$ où ils se croisent (fig. 13.6 p. 252).

Nous pouvons trouver l'équation des axes ct' et x' de deux façons :

a) le centre O' de $\mathcal{R}'$ se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse β_e, sa trajectoire a pour équation $x = \beta_e ct$. Or la trajectoire de O' c'est l'axe du temps ct', qui a donc pour équation $ct = x/\beta_e$ dans le système de coordonnées (x, ct). La trajectoire d'un photon se déplaçant à la vitesse limite à pour équation $ct = x$ et est une bissectrice du système de coordonnées (x, ct), représentée en orange figure 13.10. Pour que cette vitesse soit aussi c dans le système de coordonnées (x', ct'), il faut que l'axe x' ait pour équation $ct = \beta_e x$ dans le système de coordonnées (x, ct). La trajectoire d'un photon a alors pour équation $ct' = x'$ et est une bissectrice du système de coordonnées (x', ct').

b) en nous servant de la transformation spéciale de Lorentz (13.17) p. 237. Sur l'axe ct' nous avons $x' = 0$ car tous les axes se croisent en un point pris pour origine $O'(0,0,0,0)$:

$$0 = \gamma_e(x - \beta_e ct)$$
$$x = \beta_e ct$$

C'est l'équation de l'axe de coordonnée ct' dans le système de coordonnées (x, ct). De même, sur l'axe x' nous avons $ct' = 0$, soit,

$$0 = \gamma_e(ct - \beta_e x)$$
$$ct = \beta_e x$$

qui est l'équation de l'axe de coordonnée x' dans le système de coordonnées (x, ct). La représentation de l'espace-temps (fig. 13.10) est appelée diagramme de Minkowski.

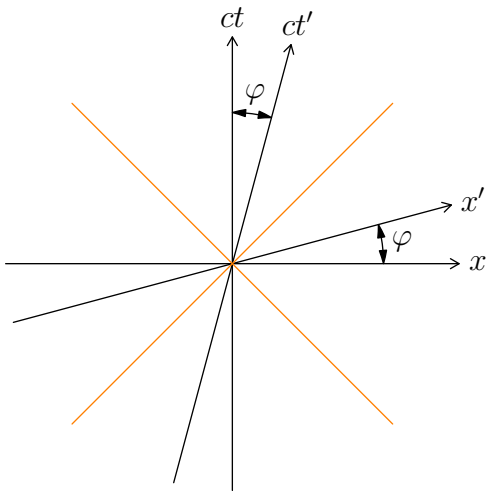


Fig. 13.10 – Diagramme de Minkowski

En posant

$$\boxed{\beta_e = \tan(\varphi)}$$

nous pouvons représenter l'angle φ sur la figure 13.10.

Lorsque $\beta_e = 1$ et $\varphi = \pi/4$, la vitesse d'entrainement est maximale et, vues du référentiel $\mathcal{R}$, les coordonnées spatiales et temporelle du référentiel $\mathcal{R}'$ se rejoignent sur la bissectrice.

L'ensemble de tous les évènements formant un intervalle nul avec l'évènement origine O ou O' est représenté par deux droites oranges sur la figure 13.10, se croisant à angle droit aux origines communes O et O'. Ces droites ont un caractère absolu, elles ne dépendent pas de la vitesse relative β_e des référentiels, ce sont des rayons de lumière si celle-ci se déplace à la vitesse limite.

Plaçons nous dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et considérons un évènement A. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ les coordonnées de l'évènement A s'obtiennent en projetant le point A parallèlement aux axes x' et ct'. L'axe x étant la droite d'équation $ct = 0$, les lignes de simultanéité dans $\mathcal{R}$ sont des droites parallèles à l'axe x. De même, l'axe x' étant la droite d'équation $ct' = 0$, les lignes de simultanéité dans $\mathcal{R}'$ sont des droites parallèles à l'axe x'. Les lignes de coordonnée x' constante sont parallèles à l'axe ct' (Fig. 13.11).

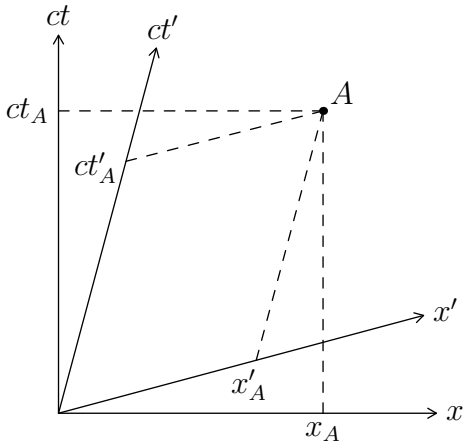


FIG. 13.11 – Coordonnées de l'évènement A

21.1 Approximation de la transformation spéciale de Lorentz

Pour une vitesse d'entrainement v_e très inférieure à c, c.-à-d. lorsque $\beta_e \ll 1$, nous devons retrouver la transformation de Galilée (déf. 2.2 p. 221) à partir de celle de Lorentz. Or, lorsque $\beta_e \ll 1$ le facteur de Lorentz γ_e (déf. 12.1 p. 236) tend vers un. À partir de (13.17b) p. 237 on retrouve bien la transformation spatiale de Galilée :

$$x' = x - \beta_e ct$$

Pour retrouver la transformation temporelle de Galilée $t' = t$ à partir de (13.17a) il faut de toute évidence respecter la condition suivante sur les coordonnées de l'évènement quelconque A :

$$\beta_e x_A \ll ct_A$$

Pour comprendre la signification de cette relation, prenons les deux cas extrêmes pour l'évènement quelconque A par rapport à l'évènement origine :

- $x_A = 0$ et t_A quelconque. Dans ce cas on retrouve la transformation de Galilée $t' = t$
- x_A est très grand mais l'évènement A est dans le cône de lumière de l'évènement origine, sinon il n'existerait pas pour celui-ci. Sur le cône de lumière de sommet l'origine, $x_A = ct_A$:

  $$\beta_e ct_A \ll ct_A$$
  $$\beta_e \ll 1$$

  C'est notre hypothèse de départ, autrement dit dans les deux cas on retrouve bien la transformation de Galilée lorsque v_e est très inférieure à la vitesse limite c. Pour tout changement de référentiel galiléen, on peut appliquer l'une des deux transformations de coordonnées suivantes :

  - la transformation de Galilée si l'on est dans le domaine non relativiste
  - la transformation de Lorentz-Poincaré si l'on est dans le domaine relativiste

21.2 Hyper-cône de lumière

D'après le § 6 p. 227, une sphère de lumière se propageant à la vitesse limite dans l'espace correspond à un intervalle nul et a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

où t est un paramètre. En deux dimensions d'espace c'est un cercle de lumière de rayon ct et d'équation dans $\mathcal{R}$:

$$x^2 + y^2 = (ct)^2$$

Dans $\mathcal{R}'$ on observe aussi un cercle d'équation

$$x'^2 + y'^2 = (ct')^2$$

Ces cercles de rayon croissant forment dans l'espace-temps où t est une variable, un cône de sommet les origines communes O et O' :

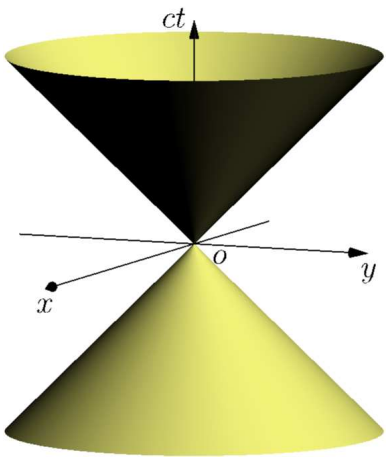


Fig. 13.12 – Cône de lumière invariant

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, pour un évènement origine donné, les intervalles nuls forment un hyper-cône appelé *hyper-cône de lumière*.

21.3 Hyperboles invariantes

Au § 8 p. 228, nous avons vu que l'intervalle s entre deux évènements est invariant par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cette distance spatio-temporelle est l'analogue de la distance purement spatiale de la physique non relativiste. En deux dimensions, intéressons-nous à l'ensemble des points à distance unité du point origine. Dans l'espace c'est un cercle de rayon unité $r^2 = 1$, soit $r = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dans l'espace-temps c'est l'ensemble des évènements tels que $s^2 = 1$, soit $s = \pm 1$:

$$\begin{cases} (ct)^2 - x^2 = 1 \\ (ct)^2 - x^2 = -1 \end{cases} \tag{13.30}$$

Chaque équation est une hyperbole à deux branches. Sur la figure 13.13, la première hyperbole pour $s = 1$ est représentée en bleu, la seconde pour $s = -1$ est représentée en vert. Ces hyperboles ont pour asymptotes communes les deux droites perpendiculaires représentées en orange :

$$ct = \pm x$$

Ces asymptotes sont possiblement les lignes d'univers des photons.

De même dans $\mathcal{R}'$ nous avons :

$$x'^2 - (ct')^2 = \pm 1$$

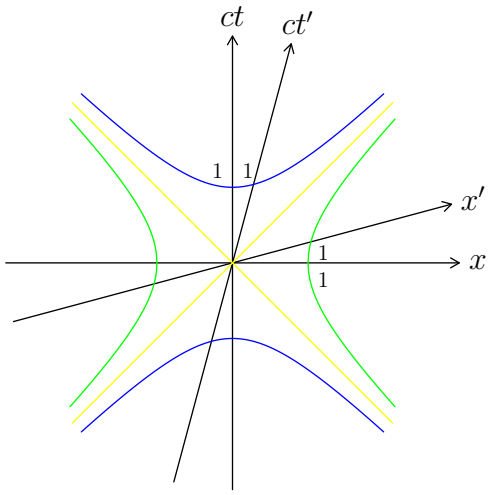


Fig. 13.13 – Hyperboles invariantes

L'intervalle permet d'indiquer les unités des différents axes. Fig. 13.13, sur l'hyperbole bleue

$$(ct)^2 - x^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad (ct')^2 - x'^2 = 1$$

En $x = 0$ nous avons $ct = \pm 1$, et en $x' = 0$ nous avons $ct' = \pm 1$. Considérons un référentiel passant par l'évènement origine $O(0, 0, 0, 0)$, lorsque son temps propre vaudra l'unité ($c\tau = 1$) ce référentiel sera quelque part sur la branche d'hyperbole bleue supérieure.

Sur l'hyperbole verte :

$$(ct)^2 - x^2 = -1 \qquad \text{et} \qquad (ct')^2 - x'^2 = -1$$

En $ct = 0$ nous avons $x = \pm 1$, et en $ct' = 0$ nous avons $x' = \pm 1$.

Ces hyperboles sont *absolues* car elles ne dépendent pas de la vitesse relative β_e de l'observateur. Dans l'espace-temps de la relativité restreinte, en une dimension d'espace et une de temps, les points situés à une distance spatio-temporelle dont le carré s^2 est donné, forment deux hyperboles *invariantes* par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré. Pour chaque valeur fixée de l'intervalle entre l'origine et les autres évènements, nous pouvons tracer une branche d'hyperbole invariante. Lorsque la valeur de l'intervalle tend vers zéro, les hyperboles tendent vers les deux droites oranges perpendiculaires. Lorsque la valeur de l'intervalle change de signe, on passe d'une hyperbole à l'autre.

Remarque 21.1

L'hyperbole est invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré, mais les évènements formant l'hyperbole n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: ils « glissent » sur l'hyperbole lorsque l'on change continuement de référentiel.

En deux dimensions d'espace et une de temps, les hyperboles invariantes bleues sur les figures précédentes forment un hyperboloïde à deux nappes :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 1$$

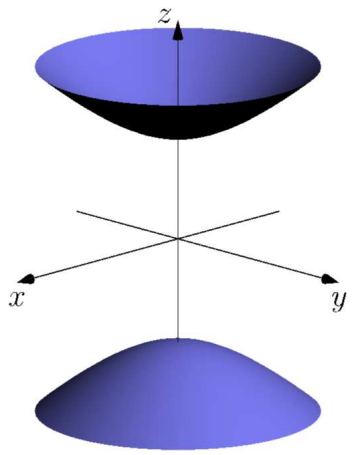


FIG. 13.14 – Hyperboloïde à deux nappes invariant

Les hyperboles invariantes vertes forment un hyperboloïde à une nappe :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = -1$$

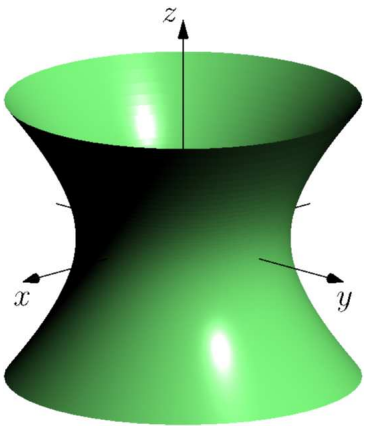


FIG. 13.15 – Hyperboloïde à une nappe invariant

Les deux droites perpendiculaires invariantes oranges forment un cône de révolution, appelé cône de lumière (fig. 13.12 p. 257) d'équation :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 0$$

Les deux espaces hyperboliques à deux et à une nappe sont asymptotes au cône de lumière.

Dans la transformation de Lorentz-Poincaré (13.17) p. 237, changeons le temps en durée et la position en distance. En effet, temps et position n'ont pas de sens tant que l'on n'a pas préciser une origine temporelle et spatiale. Ce n'est pas le cas pour les durées et les distances. Soient un

premier évènement de coordonnées (t_a, x_a, y_a, z_a), et un second de coordonnées (t_b, x_b, y_b, z_b) :

$$\begin{cases} ct'_a = \gamma_e(ct_a - \beta_e x_a) \\ x'_a = \gamma_e(x_a - \beta_e ct_a) \\ y'_a = y_a \\ z'_a = z_a \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'_b = \gamma_e(ct_b - \beta_e x_b) \\ x'_b = \gamma_e(x_b - \beta_e ct_b) \\ y'_b = y_b \\ z'_b = z_b \end{cases}$$

en soustrayant,

$$\begin{cases} ct'_b - ct'_a = \gamma_e(ct_b - \beta_e x_b) - \gamma_e(ct_a - \beta_e x_a) \\ x'_b - x'_a = \gamma_e(x_b - \beta_e ct_b) - \gamma_e(x_a - \beta_e ct_a) \\ y'_b - y'_a = y_b - y_a \\ z'_b - z'_a = z_b - z_a \end{cases} \begin{cases} c\Delta t' = \gamma_e(c\Delta t - \beta_e \Delta x) \\ \Delta x' = \gamma_e(\Delta x - \beta_e c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Avec la convention de genre temps (13.5) p. 227 qui donne une métrique de signature $(+---)$, le carré de l'intervalle entre ces deux évènements s'écrit :

$$\begin{aligned} s^2 &= (ct_b - ct_a)^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2}$$

Sur la figure 13.12 p. 257 représentant le cône de lumière issu de l'évènement O :

a) intervalle de genre lumière

Lorsque les parties temporelle et spatiale du carré de l'intervalle sont égales, celui-ci est nul, il est dit *isotrope* ou de *genre lumière*. Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine O est du genre lumière constituent les deux nappes du cône de lumière, l'une constituée des évènements pour lesquels $t > 0$ qui sont dans le futur (absolu) de O, l'autre constituée des évènements pour lesquels $t < 0$ qui sont dans le passé (absolu) de O. L'évènement origine ne peut interagir avec ces évènements qu'avec des signaux se déplaçant à la vitesse limite, venant du passé vers l'évènement origine, ou émis vers le futur à partir de l'évènement origine.

b) intervalle de genre temps

Lorsque la partie temporelle du carré de l'intervalle est supérieure à sa partie spatiale, l'intervalle est dit de genre temps. Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre temps sont dans le cône de lumière. L'intérieur de la nappe supérieure du cône de lumière est appelé *futur absolu* de l'évènement origine. L'évènement origine pourra éventuellement être la cause d'un ou plusieurs de ces évènements. L'intérieur de la nappe inférieure est appelé *passé absolu* de l'évènement origine. Certains de ces évènements peuvent éventuellement être la cause de l'évènement origine.

c) intervalle de genre espace

Lorsque la partie spatiale du carré de l'intervalle est supérieure à sa partie temporelle, l'intervalle est dit de genre espace.

Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre espace sont à l'extérieur du cône de lumière, cet endroit est appelé *ailleurs absolu* de l'évènement origine. L'évènement origine ne peut interagir d'aucune façon avec les évènements qui en font partie, il ne peut y avoir de relation causale entre l'évènement origine et ces évènements.

En un point (évènement) quelconque de la ligne d'univers d'un mobile, traçons un cône de lumière ayant ce point pour sommet. La ligne d'univers sera toujours à l'intérieur du cône de lumière car la vitesse de tout objet physique est toujours inférieure à c.

21.4 Causalité

Définition 21.1: Causalité

Le futur causal d'un évènement E est l'ensemble de tous les évènements sur lesquels cet évènement E peut influer. Le passé causal d'un évènement E est l'ensemble de tous les évènements qui peuvent influer sur l'évènement E.

Dans l'espace-temps, soient P et Q deux évènements tels que Q soit dans le futur absolu de P. Il existe un référentiel galiléen dans lequel la coordonnée x_Q est supérieure à x_P, un référentiel galiléen dans lequel P et Q ont même coordonnée $x'_P = x'_Q$, et un référentiel galiléen dans lequel la coordonnée x''_Q est inférieure à x''_P.

Remarque 21.2

Si l'on considère que Q est dans le passé absolu de P, leurs rôles sont simplement inversés.

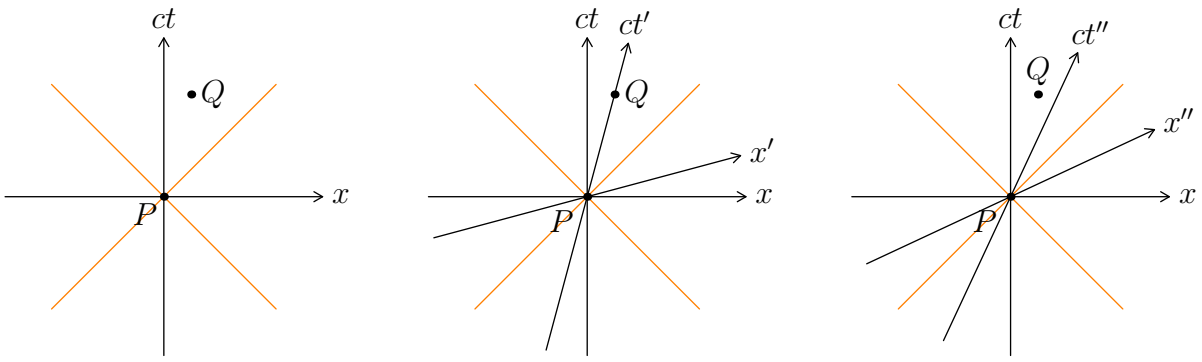


FIG. 13.16 – Évènement Q dans le futur absolu de P

Le cône de lumière s'applique aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. L'évènement Q reste donc toujours dans le futur absolu de P. Cela est dû à l'invariance de l'intervalle par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, le genre de l'intervalle est indépendant de tout référentiel. Ainsi la causalité est préservée : si P est la cause de Q, ce sera le cas dans tout référentiel galiléen.

Dans l'espace-temps, soient P et Q deux évènements tels que Q soit dans l'ailleurs absolu de P. Il existe alors un référentiel galiléen dans lequel Q est postérieur à P, un référentiel galiléen dans lequel P et Q sont simultanés, et un référentiel galiléen dans lequel Q est antérieur à P.

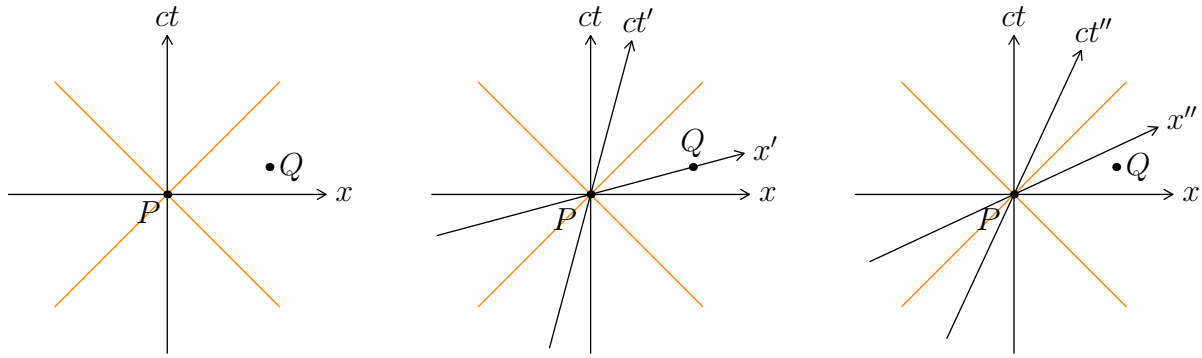


FIG. 13.17 – Évènement Q dans l'ailleurs absolu de P

Le cône de lumière s'applique aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. L'évènement Q reste donc toujours dans l'ailleurs absolu de P, autrement dit il ne peut jamais être la cause de P et P ne peut jamais être la cause de Q, même s'il existe des référentiels dans lequels il est antérieur à P (antérieur mais trop loin).

22 Diagramme d'espace-temps de Poincaré

À partir des équations (13.30) p. 257, nous pouvons obtenir un cercle plutôt que deux hyperboles. En unités géométriques, puis en posant $\mathrm{t} = it$:

$$\begin{aligned} x^2 - t^2 &= \pm 1 \\ x^2 + (it)^2 &= \pm 1 \\ x^2 + \mathrm{t}^2 &= \pm 1 \end{aligned}$$

En prenant une coordonnée temporelle imaginaire l'espace-temps devient euclidien. Dans la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (13.19) p. 239, multiplions la première relation par i et remplaçons $-t$ par $i^2 t$ dans la seconde :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e(t - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} it' = i\gamma_e t - iv_e\gamma_e x \\ x' = \gamma_e x + i^2 v_e \gamma_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{t}' = \gamma_e \mathrm{t} - iv_e\gamma_e x \\ x' = \gamma_e x + iv_e\gamma_e \mathrm{t} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{13.31}$$

Cherchons l'équation de l'axe t′. Sur l'axe t′ nous avons $x' = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_e x + iv_e\gamma_e \mathrm{t} \\ x &= -iv_e t \end{aligned}$$

Dans le repère direct (t, x), c'est l'équation d'une doite de coefficient directeur $-iv_e$. L'axe t′ fait un angle α_e avec l'axe t tel que :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_e) &= \frac{x}{\mathrm{t}} \\ &= -iv_e \end{aligned}$$

Dans le repère direct (x, t) l'axe t′ fait un angle ψ_e avec l'axe t tel que :

$$\tan(\psi_e) = iv_e$$

De même, cherchons l'équation de l'axe x' dans le repère (t, x). Sur l'axe x' nous avons $\mathrm{t}' = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_e \mathrm{t} - iv_e\gamma_e x \\ \mathrm{t} &= iv_e x \end{aligned}$$

Dans le repère (x, t), c'est l'équation d'une doite de coefficient directeur iv_e. L'axe x' fait un angle ψ_e avec l'axe x tel que :

$$\begin{aligned} \tan(\psi_e) &= \frac{\mathrm{t}}{x} \\ &= iv_e \end{aligned}$$

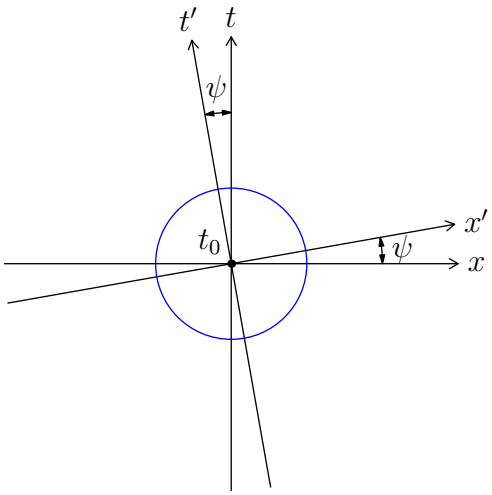


Fig. 13.18 – Diagramme de Poincaré

À toute vélocité v on associe un angle imaginaire ψ tel que :

$$\tan(\psi) \overset{\text{def}}{=} iv \tag{13.32}$$

Remarque 22.1

Le cercle est bien invariant par rotation des axes, mais les évènements formant le cercle n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Cette remarque rejoint la remarque 21.1 p. 258.

La trigonométrie nous donne :

$$\begin{cases} \cos(\psi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\psi)}} \\ \sin(\psi) = \dfrac{\tan(\psi)}{\sqrt{1+\tan^2(\psi)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\psi_e) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_e^2}} \\ \sin(\psi_e) = \dfrac{iv_e}{\sqrt{1-v_e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\psi_e) = \gamma_e \\ \sin(\psi_e) = iv_e\gamma_e \end{cases}$$

La transformation spéciale de Lorentz (13.31) p. 262 devient :

$$\begin{cases} \mathrm{t}' = -iv_e\gamma_e x + \gamma_e \mathrm{t} \\ x' = \gamma_e x + iv_e\gamma_e \mathrm{t} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{t}' = -x\sin(\psi_e) + \mathrm{t}\cos(\psi_e) \\ x' = x\cos(\psi_e) + \mathrm{t}\sin(\psi_e) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{t}' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi_e) & \cos(\psi_e) & 0 & 0 \\ \cos(\psi_e) & \sin(\psi_e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{t} \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La transformation spéciale de Lorentz est une rotation d'angle imaginaire ψ_e dans l'espace-temps de Poincaré (x, it). Soit l'angle réel φ tel que :

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} i\psi$$

Avec la déf 13.32 p. 263 :

$$\begin{aligned} iv_e &\overset{\text{def}}{=} \tan(\psi_e) \\ &= \tan(i\varphi_e) \\ &= i\tanh(\varphi_e) \\ v_e &= \tanh(\varphi_e) \end{aligned}$$

Définition 22.1: Rapidité

À toute vélocité v on associe l'angle réel φ appelé rapidité, tel que :

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} \arg\tanh(v) \tag{13.33}$$

Reprenons la formule de composition des vitesses selon l'axe x (13.39a) p. 275 :

$$v'_x = \frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x}$$

Remplaçons les vitesses par la tangente hyperbolique de la rapidité :

$$\begin{aligned} \tanh(\varphi') &= \frac{\tanh(\varphi) - \tanh(\varphi_e)}{1 - \tanh(\varphi_e)\tanh(\varphi)} \\ &= \tanh(\varphi + \varphi_e) \end{aligned}$$

Les rapidités s'additionnent comme le font les vitesses en relativité galiléenne :

$$\boxed{\varphi' = \varphi + \varphi_e}$$

La rapidité φ est le paramètre additif du groupe des transformations de Lorentz. Le passage du référentiel galiléen $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$ puis au référentiel $\mathcal{R}''$ s'effectue par deux rotations successives dont la somme des angles est l'angle de rotation final. En multipliant par le nombre imaginaire i, on voit que ce résultat est aussi valable pour l'angle imaginaire ψ. Nous pouvons représenter plusieurs référentiels galiléens ayant des vitesses différentes sur un même diagramme de Poincaré :

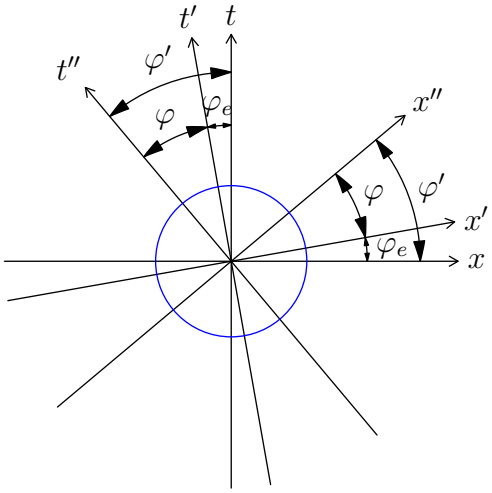


FIG. 13.19 – Diagramme de Poincaré - trois référentiels galiléens

La rapidité est le paramètre additif du groupe de transformation de Lorentz-Poincaré, c'est l'analogue de l'angle de rotation pour le groupe des rotations dans le plan. Avec les coordonnées réelles (x, y, z, t) la géométrie est pseudo-euclidienne. Avec les coordonnées (x, y, z, it) la géométrie est euclidienne mais la coordonnée temporelle est imaginaire. À la rotation euclidienne d'angle imaginaire ψ correspond la rotation pseudo-euclidienne d'angle réel φ.

La trigonométrie hyperbolique nous donne :

$$\begin{cases} \cosh(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tanh^2(\varphi)}} \\ \sinh(\varphi) = \dfrac{\tanh(\varphi)}{\sqrt{1+\tanh^2(\varphi)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_e^2}} \\ \sinh(\varphi) = \dfrac{v_e}{\sqrt{1-v_e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh(\varphi) = \gamma_e \\ \sinh(\varphi) = v_e\gamma_e \end{cases}$$

La transformation spéciale de Lorentz (13.17) p. 237 s'écrit :

$$\begin{cases} t' = -\gamma_e v_e x + \gamma_e t \\ x' = \gamma_e x - \gamma_e v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -x\sinh(\varphi) + t\cosh(\varphi) \\ x' = x\cosh(\varphi) - t\sinh(\varphi) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La transformation spéciale de Lorentz est une *rotation hyperbolique* d'angle φ dans l'espace-temps de Poincaré (x, it).

23 Cinématique relativiste

23.1 Changement de référentiel

23.1.1 Comparaison des cinématiques newtonienne et relativiste

En cinématique classique :

- l'espace physique a trois coordonnées d'espace, il est modélisé par un espace mathématique euclidien à trois dimensions. Les vecteurs ont donc trois composantes Le temps n'est pas une coordonnée c'est un paramètre, tout comme la vitesse relative des référentiels
- un changement de coordonnées est purement spatial, par exemple des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques
- un changement de référentiel implique une transformation de Galilée (déf. 2.2 p. 221)
- les vecteurs champ électrique et champ magnétique dépendent de la vitesse relative, ils ne sont pas invariants par la transformation de Galilée
- les équations de l'électromagnétisme de Maxwell ne sont pas invariantes par la transformation de Galilée

En cinématique relativiste :

- l'espace-temps physique a trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps, il est modélisé par un espace mathématique à quatre dimensions. Les vecteurs ont donc quatre composantes
- un changement de coordonnées purement spatial est encore possible, par exemple des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques
- un changement de référentiel implique une transformation de coordonnées entre la coordonnée temporelle et au moins une coordonnée d'espace, appelée transformation de Lorentz-Poincaré (déf. 12.2 p. 236)
- les vecteurs et tenseurs sont tous indépendants de la vitesse relative et sont invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré
- les vecteurs champ électrique et champ magnétique sont remplacés par le tenseur champ électromagnétique
- les équations de l'électromagnétisme de Maxwell sont invariantes par la transformation de Lorentz-Poincaré

23.2 Quadrivecteurs

Dotons l'espace-temps absolu et plat de la relativité restreinte d'un système de coordonnées rectangulaires, dont la base naturelle associée est pseudo-orthonormée. Les vecteurs sont des *objets géométriques*, ce qui signifie qu'ils sont indépendants du repère ou de la base dans lesquels on les exprime. Dans l'espace-temps de dimension quatre de la relativité restreinte nous allons construire des vecteurs de même dimension que cet espace, appelés *quadrivecteurs*, ou $4-$*vecteurs*, ou encore *vecteurs d'univers*. Ce sont des vecteurs, ils sont donc invariants par changement de base. Or, en relativité, un changement de base est un changement de coordonnées spatio-temporelles. Et un changement de coordonnées spatio-temporelles est provoqué par un changement de référentiel. Les 4-vecteurs seront donc construits pour être invariants par changement de référentiel, c.-à-d. invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées.

Les 4-vecteurs ne sont rien d'autre que des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension quatre sur $\mathbb{R}$. Nous les notons $[{}_4\mathrm{q}]$ pour les distinguer des 3-vecteurs purement spatiaux.

Dans un référentiel R, les composantes contravariantes du 4-vecteur $[{}_4\mathrm{q}]$ s'écrivent :

$$[{}_4\mathrm{q}]\begin{pmatrix} q^t \\ q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{q}]\begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$$

Remarque 23.1

En notation indicielle on note la composante temporelle avec l'indice zéro plutôt que quatre car elle met en avant le caractère particulier de cette composante, elle permet l'introduction éventuelle d'une autre coordonnée spatiale et permet le lien avec la notation habituelle en relativité générale.

Notation 23.1

- les composantes contravariantes du 4-vecteur $[{}_4\mathrm{q}]$ se notent aussi en ligne :
$$[{}_4\mathrm{q}]\left(q^t, q^x, q^y, q^z\right) = [{}_4\mathrm{q}]\left(q^0, q^1, q^2, q^3\right)$$
- dans le référentiel R′, le même 4-vecteur s'écrit :
$$[{}_4\mathrm{q}]'\left(q'^t, q'^x, q'^y, q'^z\right) = [{}_4\mathrm{q}]'\left(q^{0'}, q^{1'}, q^{2'}, q^{3'}\right)$$
où en suivant la notation 1.5 p. 16 le prime est sur l'indice
- le prime sur le vecteur et sur les composantes n'a pas le même sens. Sur les composantes il indique que celles-ci sont différentes. Sur le vecteur il indique qu'il est exprimé dans une base primée, mais c'est le même vecteur
- la notation suivante met en évidence les parties temporelle et spatiale :
$$[{}_4\mathrm{q}]\left(q^t, \mathbf{q}\right) = [{}_4\mathrm{q}]\left(q^0, q^i\right) \quad i = 1, 2, 3$$

Remarque 23.2

La présence de virgules entre les composantes indique qu'il ne s'agit pas de la transposée d'une matrice unicolonne représentant un vecteur :

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \neq \mathbf{v} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^2 \end{pmatrix}$$

Nous utilisons la notation suivante pour la transposée d'un vecteur $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}^T \begin{pmatrix} \mathbf{v}^1 & \mathbf{v}^2 \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons la notation indicielle q^μ qui confond le vecteur avec ses composantes car :

- elle distingue le vecteur q^μ de son covecteur q_μ écrit en composantes covariantes
- elle permet une généralisation aux tenseurs
- elle permet le calcul indiciel
- l'indice grec unique variant de 0 à 3 indique qu'il s'agit d'un 4-vecteur

23.3 Trivecteur position relativiste

Définition 23.1: Triposition relativiste

Dans un espace ponctuel euclidien de repère rectangulaire (O, x, y, z), à tout point $P(P_x, P_y, P_z)$ on associe un 3-vecteur position relativiste $\mathbf{r}$ de l'espace vectoriel euclidien associé, de composantes contravariantes (P_x, P_y, P_z), tel que

$$\mathbf{r} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{OP}$$

Notation 23.2

En notation indicielle le 3-vecteur position s'écrit $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ ou x^i.

Remarques 23.1

- L'existence d'un vecteur position n'est possible que dans un espace plat, euclidien ou pseudo-euclidien. À la surface d'une sphère de dimension deux, si l'on tentait de définir des vecteurs ayant deux composantes (par exemple (ρ, θ)), la somme vectorielle ne serait pas commutative. De façon générale, dans un espace courbe la somme de deux « vecteurs courbes » n'est pas commutative. Si l'on plonge un espace courbe dans un espace euclidien de dimension supérieure, la somme de deux « vecteurs » n'appartiendrait pas à l'espace courbe de départ mais à l'espace euclidien de plongement
- La 3-position relativiste est la partie spatiale du 4-vecteur position que nous allons voir. Elle ne se transforme pas par changement de référentiel galiléen comme la 3-position classique non relativiste. La première se transforme par la transformation de Lorentz des coordonnées, la seconde par la transformation de Galilée des coordonnées

23.4 Quadrivecteur position

Dans l'espace-temps relativiste, soit un évènement E (absolu) ayant des coordonnées spatio-temporelles dans un référentiel R. Dans la base naturelle associée au système de coordonnées de R on construit notre premier quadrivecteur, le 4-vecteur position dans l'espace-temps ou 4-position qui relie le centre du repère à cet évènement E. La base étant naturelle, les composantes contravariantes de la 4-position sont confondues avec les coordonnées de l'évènement.

Définition 23.2: Quadriposition temps-espace

Dans un référentiel R de système de coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 de centre l'évènement $O(0,0,0,0)$, à tout évènement $E(ct,x,y,z)$ on associe un 4-vecteur position temps-espace $[_4\mathrm{x}]$, tel que

$$[_4\mathrm{x}] = [_4\mathrm{OE}]$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites d'un référentiel R (déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219 : $ct = x^0$), les composantes de $[_4\mathrm{x}]$ ont toutes la dimension d'une longueur. Les composantes contravariantes du 4-vecteur $[_4\mathrm{x}]$ s'écrivent :

$$[_4\mathrm{x}]\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [_4\mathrm{x}]\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notation 23.3

En notation en ligne la 4-position s'écrit aussi :

$$[_4\mathrm{x}](ct,x,y,z) = [_4\mathrm{x}](x^0,x^1,x^2,x^3)$$
$$[_4\mathrm{x}](ct,\mathbf{r}) = [_4\mathrm{x}](x^0,x^i) \quad i=1,2,3$$

En unités géométriques déf. 3.1 p. 223 les composantes ont même unité. En coordonnées galiléennes réduite avec $c=1$ sans dimension on retrouve :

$$[_4\mathrm{x}](t,\mathbf{r})$$

Comme indiqué au § 23.2 p. 267, on utilisera préférentiellement la notation indicielle x^μ.

Remarques 23.2

- le quadrivecteur position est aussi appelé vecteur d'univers, quadrirayon-vecteur, quadrivecteur espace-temps, ou ici quadrivecteur temps-espace. La 4-position généralise à l'espace-temps la 3-position purement spatial en lui ajoutant une composante temporelle (une « position » dans le temps)
- notre premier 4-vecteur relativiste est l'association d'un scalaire de la mécanique classique, le temps universel, qui en relativité n'est ni un scalaire ni universel, et d'un 3-vecteur de la mécanique classique, le vecteur position. Nous verrons que cela sera toujours le cas. De même, les 4-tenseurs (tenseur 4×4) relativistes seront toujours l'association d'un 3-vecteur classique et d'un 3-tenseur classique

Exemple 23.1: Quadrivecteur position de Bob dans le référentiel d'Anna

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna de temps propre t, la 4-position de Bob, relie dans l'espace-temps le centre du référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna au centre du référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob de temps propre t'. Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites du référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna, elle a pour composantes contravariantes :

$$[_4\mathrm{x}](ct,x,y,z)$$

Prenons le cas limite où Anna et Bob sont dans le même référentiel, $\mathcal{R}\equiv\mathcal{R}'$. Dans le référentiel propre de Bob, sa 4-position

$$[_4\mathrm{x}]'(ct',\mathbf{0})$$

n'est nulle qu'à l'instant initial $t' = 0$.

Rien ne nous dit que la 4-position d'espace-temps est bien covariante (invariante de Lorentz). Pour cela, sa longueur (4-norme), sa direction et son sens doivent être invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées.

Les évènements $O(0,0,0,0)$ et $E(ct,x,y,z)$ étant absolus, la direction et le sens de $[{}_4\mathrm{OE}]$ le sont aussi. Il reste à définir la distance d'univers entre les deux, telle qu'elle soit invariante de Lorentz. Or la 4-norme de tout 4-vecteur doit être invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées. Cette distance d'univers sera donc la 4-norme de la 4-position, qu'il nous faut construire.

23.4.1 Quadrinorme du quadrivecteur position temps-espace

Prenons pour 4-norme de la 4-position de composantes (ct,x,y,z), l'intervalle entre l'évènement origine $(0,0,0,0)$ et l'évènement de coordonnées (ct,x,y,z), c.-à-d. la métrique déf. 9.1 p. 229, dont le carré s'écrit en convention de genre temps (13.5) p. 227 :

$$\|[{}_4\mathrm{x}]\|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{13.34}$$

D'après (13.6) p. 229, la 4-norme de la 4-position est alors par construction invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Remarque 23.3

Les composantes (contravariantes ou covariantes) des vecteurs peuvent être vues comme des vases communicants. Par changement de référentiel, nous pouvons augmenter la valeur d'une composante à condition de diminuer celle d'une autre composante en maintenant la valeur de la norme du vecteur. En appliquant cela aux 4-vecteurs, il est toujours intéressant de mettre toute la 4-norme dans une seule composante en annulant les autres. Cela revient à se placer dans le référentiel propre.

23.4.2 Transformation des composantes contravariantes de la 4-position

On rappelle que les 4-vecteurs sont invariants par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ils ne se transforment donc pas mais leurs composantes changent. De plus, à tout point de l'espace-temps correspond un 4-vecteur ayant pour composantes contravariantes les coordonnées de ce point. La transformation spéciale de Lorentz des coordonnées est donc aussi la transformation des composantes de la 4-position par changement de référentiel :

$$[{}_4\mathrm{x}]' \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{x}] \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t' = \gamma_e \left(ct - \beta_e x\right) \\ x' = \gamma_e (x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Remarque 23.4

$[{}_4\mathrm{x}]'$ et $[{}_4\mathrm{x}]$ sont deux notations pour le même vecteur, selon qu'on l'exprime dans $\mathcal{R}'$ ou dans $\mathcal{R}$. Il n'en va pas de même pour leurs composantes qui elles, sont différentes.

Notation 23.4

En notation indicielle :

$$[{}_4\mathrm{X}]' \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{X}] \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x^{0'} = \gamma_e x^0 - \gamma_e v_e x^1 \\ x^{1'} = -\gamma_e v_e x^0 + \gamma_e x^1 \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases}$$

Notation 23.5

En notation indicielle et matricielle :

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e v_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e v_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Notation 23.6

En notation indicielle avec la convention de sommation 1.3 p. 15 :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \tag{13.35}$$

Cette relation est la loi de transformation des composantes d'un 4-vecteur particulier (celui de position), mais s'applique aux composantes des 4-vecteurs en général, lors d'un changement de base (changement de référentiel galiléen par la transformation spéciale de Lorentz). Cette loi de transformation assure que le vecteur reste égal à lui-même lors du changement de référentiel.

Réciproquement, toute suite ordonnée de quatre nombres qui se transforme de la sorte par changement de référentiel galiléen constitue un 4-vecteur.

23.4.3 Transformation des composantes covariantes de la 4-position

Les composantes covariantes se transforment par changement de référentiel galiléen en utilisant la transposée de la matrice inverse de Lorentz déf. 12.3 p. 237. La matrice de Lorentz étant symétrique, nous pouvons oublier la transposition. Calculons son déterminant :

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= \gamma_e^2 - \gamma_e^2 \beta_e^2 \\ &= \gamma_e^2 \left(1 - \beta_e^2\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Son inverse à pour expression :

$$\Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{0'} \\ x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e\beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e\beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma_e x_0 + \gamma_e\beta_e x_1 \\ \gamma_e\beta_e x_0 + \gamma_e x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Une seconde méthode consiste à utiliser les relations (13.38) p. 273 entre composantes covariantes et contravariantes pour une signature $(+---)$: $a_0 = a^0$ et $a_i = -a^i$. Avec la notation 23.4 p. 271 :

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma_e x^0 - \gamma_e\beta_e x^1 \\ x^{1'} = -\gamma_e\beta_e x^0 + \gamma_e x^1 \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{0'} = \gamma_e x_0 + \gamma_e\beta_e x_1 \\ x_{1'} = \gamma_e\beta_e x_0 + \gamma_e x_1 \\ x_{2'} = x_2 \\ x_{3'} = x_3 \end{cases}$$

23.4.4 Transformation spéciale des composantes d'un quadritenseur

Écrivons l'invariance de s^2 (13.6) p. 229 par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, puis utilisons (13.11) p. 232, puis (13.35) p. 271 :

$$\begin{aligned} s^2 &= s'^2 \\ \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta &= \eta_{\gamma'\delta'}x^{\gamma'}x^{\delta'} \\ &= \eta_{\gamma'\delta'}\Lambda^{\gamma'}_{\alpha}x^\alpha\Lambda^{\delta'}_{\beta}x^\beta \\ \eta_{\alpha\beta} &= \Lambda^{\gamma'}_{\alpha}\Lambda^{\delta'}_{\beta}\eta_{\gamma'\delta'} \end{aligned}$$

Cette relation est la loi de transformation des composantes deux fois contravariantes d'un 4-tenseur d'ordre deux (deux indices) particulier (le tenseur métrique de $\mathbb{M}$ § 10 p. 230) donc aussi la loi de transformation des composantes deux fois contravariantes des tenseurs d'ordre deux en général, lors d'un changement de base (changement de référentiel galiléen par la transformation spéciale de Lorentz). Cette loi de transformation assure que le tenseur reste égal à lui-même lors du changement de référentiel. Réciproquement, toute suite ordonnée de seize nombres qui se transforme de la sorte par changement de référentiel galiléen constitue un 4-tenseur. Nous dirons que les vecteurs sont des tenseurs d'ordre un, et que les scalaires sont des tenseurs d'ordre zéro. La valeur d'un scalaire reste la même par changement de référentiel galiléen.

23.5 Quadriproduit scalaire

Nous cherchons à définir un produit scalaire dans l'espace-temps de la relativité restreinte. De façon générale, dans la base naturelle $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ pseudo-orthonormale de la relativité restreinte, le quadriproduit scalaire (ou produit scalaire de Minkowski) de deux 4-vecteurs $[{}_4\mathrm{a}]$ et $[{}_4\mathrm{b}]$ donne le scalaire (ou quadriscalaire) :

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{a}] \bullet [{}_4\mathrm{b}] &= (a^0\boldsymbol{e}_0 + a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3) \bullet (b^0\boldsymbol{e}_0 + b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + b^3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a^0b^0\boldsymbol{e}_0 \bullet \boldsymbol{e}_0 + a^1b^1\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_1 + a^2b^2\boldsymbol{e}_2 \bullet \boldsymbol{e}_2 + a^3b^3\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_3 \\ &= \eta_{00}a^0b^0 + \eta_{11}a^1b^1 + \eta_{22}a^2b^2 + \eta_{33}a^3b^3\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\forall \mu, \nu = 0, \ldots, 3 \qquad \boldsymbol{e}_\mu \bullet \boldsymbol{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

En notation tensorielle :

$$[{}_4\mathrm{a}] \bullet [{}_4\mathrm{b}] = \eta_{\mu\nu}a^\nu b^\mu \tag{13.36}$$

Le 4-produit scalaire d'un 4-vecteur avec lui-même doit donner le carré de sa 4-norme. Or, pour le 4-vecteur position nous avons d'après (13.34) p. 270 :

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{x}] \bullet [{}_4\mathrm{x}] &= \|[{}_4\mathrm{x}]\|^2 \\ &= \pm\left[(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2\right]\end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir le 4-produit scalaire relativiste de deux façons selon la convention de signe adoptée pour le carré de la distance d'univers s^2 :

- en convention de genre temps avec une métrique de signature $(+---)$, déf. 9.1 p. 229 :

$$\boxed{[{}_4\mathrm{a}] \bullet [{}_4\mathrm{b}] \overset{\text{def}}{=} a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3} \tag{13.37}$$

$$\begin{cases} a_0 = \eta_{00}a^0 \\ a_1 = \eta_{11}a^1 \\ a_2 = \eta_{22}a^2 \\ a_3 = \eta_{33}a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a^0 \\ a_1 = -a^1 \\ a_2 = -a^2 \\ a_3 = -a^3 \end{cases} \tag{13.38}$$

Exemple 23.2

En composantes covariantes la 4-position s'écrit

$$[{}_4\mathrm{x}](t, -\mathbf{r})$$

où la 3-position $\mathbf{r}$ est écrite en composantes contravariantes.

- en convention de genre espace avec une métrique de signature $(-+++)$:

$$[{}_4\mathrm{a}] \bullet [{}_4\mathrm{b}] \overset{\text{def}}{=} -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$$

$$\begin{cases} a_0 = \eta_{00}a^0 \\ a_1 = \eta_{11}a^1 \\ a_2 = \eta_{22}a^2 \\ a_3 = \eta_{33}a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -a^0 \\ a_1 = a^1 \\ a_2 = a^2 \\ a_3 = a^3 \end{cases}$$

Quelle que soit la signature choisie (convention de genre temps ou espace), avec (13.36) p. 273 :

$$\begin{aligned}[_4\mathrm{a}] \bullet [_4\mathrm{b}] &= a^\mu b_\mu \\ &= a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 \\ &= a_\mu b^\mu \\ &= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3\end{aligned}$$

Le carré de la 4-norme de la 4-position, (13.34) p. 270, s'écrit :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{x}]\|^2 &= [_4\mathrm{x}] \bullet [_4\mathrm{x}] \\ &= \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu \\ &= x_\mu x^\mu\end{aligned}$$

23.5.1 Invariance du quadriproduit scalaire

La somme de deux 4-vecteurs étant un 4-vecteur, sa 4-norme est invariante ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{a}] + [_4\mathrm{b}]\|^2 &= ([_4\mathrm{a}] + [_4\mathrm{b}]) \bullet ([_4\mathrm{a}] + [_4\mathrm{b}]) \\ &= ([_4\mathrm{a}] \bullet [_4\mathrm{a}]) + ([_4\mathrm{b}] \bullet [_4\mathrm{b}]) + [_4\mathrm{a}] \bullet [_4\mathrm{b}] + [_4\mathrm{b}] \bullet [_4\mathrm{a}] \\ &= \|[_4\mathrm{a}]\|^2 + \|[_4\mathrm{b}]\|^2 + 2([_4\mathrm{a}] \bullet [_4\mathrm{b}])\end{aligned}$$

Les 4-normes $\|[_4\mathrm{a}] + [_4\mathrm{b}]\|$, $\|[_4\mathrm{a}]\|$ et $\|[_4\mathrm{b}]\|$ étant invariantes, le 4-produit scalaire de deux 4-vecteurs est un scalaire invariant par changement de référentiel.

23.6 Trivecteur vélocité relativiste

Définition 23.3: Trivélocité relativiste

La 3-vélocité d'un mobile dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est le 3-vecteur dérivée de la 3-position relativiste $\mathbf{r}(t)$ du mobile dans $\mathcal{R}$ par le temps propre t de $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{v}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Notation 23.7

En notation indicielle la 3-vélocité s'écrit $\mathbf{v}(v^1, v^2, v^3)$ ou v^i.

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{v}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

Exemple 23.3: Vélocité de Bob

La vélocité de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est le vecteur dérivée du rayon vecteur de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ mesuré par Anna par le temps propre d'Anna :

$$\mathbf{v}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Réciproquement, la vélocité d'Anna dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob est la dérivée du rayon vecteur reliant $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$ mesuré par Bob par le temps propre de Bob :

$$\mathbf{v}'(t') \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'(t')}{\mathrm{d}t'}$$

où $\mathrm{d}\mathbf{r}' = -\mathrm{d}\mathbf{r}$. Par symétrie, Anna et Bob mesurent la même vitesse relative $v = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{v}'(t')\|$:

$$\mathbf{v}'(t') = -\mathbf{v}(t)$$

23.6.1 Transformation spéciale de la vélocité

La 3-vélocité n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel ainsi que le 3-vecteur vélocité lui-même. Soit un mobile de vélocité $\mathbf{v}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna et de vélocité $\mathbf{v}'$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ de Bob. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). Différentions la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (13.19) p. 239 entre les référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma_e \left(\mathrm{d}t - v_e \mathrm{d}x\right) \\ \mathrm{d}x' = \gamma_e \left(\mathrm{d}x - v_e \mathrm{d}t\right) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \end{cases}$$

Remarque 23.5

$\mathrm{d}v_e$ n'apparait pas car v_e n'est pas fonction du temps (c'est la vitesse relative de deux référentiels galiléens).

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \\ v'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \\ v'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v'_x = \dfrac{\mathrm{d}x - v_e \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - v_e \mathrm{d}x} \\ v'_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\gamma_e \left(\mathrm{d}t - v_e \mathrm{d}x\right)} \\ v'_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\gamma_e \left(\mathrm{d}t - v_e \mathrm{d}x\right)} \end{cases}$$

En divisant par $\mathrm{d}t$ les numérateurs et dénominateurs, nous obtenons la transformation spéciale de Lorentz de la vélocité, qui permet de calculer la vélocité du mobile dans $\mathcal{R}'$ mesurée par Bob lorsque l'on connait la vélocité du mobile dans $\mathcal{R}$ mesurée par Anna et la vitesse d'entrainement de Bob et Anna. En unités géométriques :

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} & \text{(13.39a)} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma_e \left(1 - v_e v_x\right)} & \text{(13.39b)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma_e \left(1 - v_e v_x\right)} & \text{(13.39c)} \end{cases}$$

C'est la loi de composition relativiste des vitesses. Elle remplace la loi de composition des vitesses de la cinématique classique que l'on retrouve en posant $v_e \ll c$:

$$\begin{cases} v'_x = v_x - v_e \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Remarque 23.6

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer v'_x, v_x et v_e respectivement par v'_x/c, v_x/c et v_e/c, puis simplifier.

— si le mobile est immobile dans le référentiel d'Anna $\mathbf{v}(0,0,0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\mathbf{v}'(-v_e,0,0)$

— si le mobile atteint la vitesse limite selon l'axe des x dans le référentiel d'Anna $\mathbf{v}(1,0,0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\mathbf{v}'(1,0,0)$

— si le mobile atteint la vitesse limite selon l'axe des y dans le référentiel d'Anna $\mathbf{v}(0,1,0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\mathbf{v}'(-v_e,1/\gamma_e,0)$. Dans ce cas on peut vérifier que si $v_e = 0$ alors $\gamma_e = 1$ et on retrouve $\mathbf{v}'(0,1,0)$. De plus $\|\mathbf{v}'\|^2 = v_e^2 + 1/\gamma_e^2 = 1$

— si la vitesse d'entrainement entre Anna et Bob atteint la vitesse limite $v_e = 1$ alors $\gamma_e = +\infty$, et la vélocité $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ du mobile dans le référentiel d'Anna s'écrit $\mathbf{v}'(1,0,0)$ dans celui de Bob

On obtient la transformation inverse de deux façons.

- en inversant les relations :

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma_e\,(1 - v_e v_x)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma_e\,(1 - v_e v_x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x\,(1 - v_e v_x) + v_e = v_x \\ v'_y \gamma_e\,(1 - v_e v_x) = v_y \\ v'_z \gamma_e\,(1 - v_e v_x) = v_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x - v_e v_x v'_x + v_e = v_x \\ v'_y \gamma_e - v'_y \gamma_e v_e v_x = v_y \\ v'_z \gamma_e - v'_z \gamma_e v_e v_x = v_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = v'_y \gamma_e (1 - v_e v_x) \\ v_z = v'_z \gamma_e (1 - v_e v_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = v'_y \gamma_e \left(1 - \dfrac{v_e(v'_x + v_e)}{1 + v_e v'_x}\right) \\ v_z = v'_z \gamma_e \left(1 - \dfrac{v_e(v'_x + v_e)}{1 + v_e v'_x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma_e\,(1 + v_e v'_x)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma_e\,(1 + v_e v'_x)} \end{cases}$$

- en permutant les composantes entre référentiels et en changeant v_e en $-v_e$:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma_e\,(1 + v_e v'_x)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma_e\,(1 + v_e v'_x)} \end{cases} \tag{13.40}$$

Le carré de la norme de la vélocité du mobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob s'écrit en unités géométriques :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}'\|^2 &= v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \\ &= \frac{(v_x - v_e)^2 + \left(v_y^2 + v_z^2\right)/\gamma_e^2}{(1 - v_e v_x)^2}\end{aligned}$$

23.6.2 Loi de composition des vitesses

Nous établissons ici transformation de Lorentz-Poincaré de la vélocité, c.-à-d. la transformation générale de Lorentz et non plus spéciale. La 3-vélocité n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel ainsi que le 3-vecteur vélocité lui-même. Les relations (13.39) p. 275 peuvent être mises sous forme vectorielle. Différentions la transformation de Lorentz-Poincaré sous forme intrinsèque en unités géométriques (13.20) p. 240 dans laquelle le vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_e$ est constant :

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma_e\left(\mathrm{d}t - \mathbf{v}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\right) \\ \mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{d}\mathbf{r} + (\gamma_e - 1)\dfrac{\mathbf{v}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{v_e^2}\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \mathrm{d}t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r} + (\gamma_e - 1)\frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{v_e^2}\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \mathrm{d}t}{\gamma_e\left(\mathrm{d}t - \mathbf{v}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\right)}$$

En divisant par $\mathrm{d}t$ le numérateur et le dénominateur, en unités géométriques :

$$\boxed{\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e}{\gamma_e\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)}} \tag{13.41}$$

Remarque 23.7

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}$ et v_e respectivement par $\mathbf{v}'/c$, $\mathbf{v}/c$ et $\mathbf{v}_e/c$, puis simplifier.

Pour inverser la relation, permutons $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ et remplaçons $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e + \gamma_e \mathbf{v}_e}{\gamma_e\left(1 + \mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}_e\right)}$$

Nous voyons que les rôles de $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ ne sont pas symétriques, ils ne sont pas échangeables. Pour un observateur quelconque, en général il n'est pas équivalent d'observer un mobile de vitesse $\mathbf{v}'$ dans un référentiel de vitesse $\mathbf{v}_e$, et un mobile de vitesse $\mathbf{v}_e$ dans un référentiel de vitesse $\mathbf{v}'$. En général donc, la loi de composition des vitesses n'est pas commutative. Dans le cas particulier où $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ sont parallèles, la vélocité du mobile dans $\mathcal{R}'$ s'écrit $\mathbf{v}'(v', 0, 0)$ et donne avec (13.40) p. 276 une loi de composition commutative :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v' + v_e}{1 + v_e v'} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

23.6.3 Autre écriture vectorielle de la vélocité

Une autre forme vectorielle consiste à écrire le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ comme la somme d'un vecteur $\mathbf{v}_{||}$ parallèle à $\mathbf{v}_e$, et d'un vecteur $\mathbf{v}_\perp$ perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_\perp \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{||} + \mathbf{v}'_\perp$$

Les relations (13.39) p. 275 s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\boxed{\mathbf{v}'_{||} = \frac{\mathbf{v}_{||} - \mathbf{v}_e}{1 - v_e v_{||}} \quad ; \quad \mathbf{v}'_\perp = \frac{\mathbf{v}_\perp}{\gamma_e \left(1 - v_e v_{||}\right)}}$$

Lorsque $\mathbf{v}$ est colinéaire à (est un multiple de) $\mathbf{v}_e$, on a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||}$ et $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{v}'_{||} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_e}{1 - v_e v} \quad ; \quad \mathbf{v}'_\perp = \mathbf{0}$$

Par symétrie, en échangeant les rôles de v' et v et en remplaçant $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{v}_e}{1 + v_e v'} \quad ; \quad \mathbf{v}'_\perp = \mathbf{0}$$

C'est la loi de composition des vitesses.

Lorsque $\mathbf{v}$ est perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$, c.-à-d. lorsque $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp$ et $\mathbf{v}_{||} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{v}'_{||} = -\mathbf{v}_e \quad ; \quad \mathbf{v}'_\perp = \frac{\mathbf{v}}{\gamma_e}$$

Remarque 23.8

Contrairement aux coordonnées perpendiculaires au mouvement qui restent identiques $y = y'$ et $z = z'$, les composantes de la vitesse perpendiculaires au mouvement sont divisées par le facteur relativiste γ_e. En mécanique classique nous avons :

$$\mathbf{v}'_{||} = -\mathbf{v}_e \quad ; \quad \mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}$$

Le carré de la norme de la vélocité dans $\mathcal{R}'$ s'écrit en unités géométriques :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}'\|^2 &= v'^2_{||} + v'^2_\perp \\ &= \frac{\left(\mathbf{v}_{||} - \mathbf{v}_e\right)^2 + v_\perp^2/\gamma_e^2}{\left(1 - v_e v_{||}\right)^2} \end{aligned}$$

23.7 Trivecteur vitesse propre relativiste

On ne peut définir la vitesse propre comme étant la vitesse dans le référentiel propre, car bien évidemment elle serait nulle. On peut cependant se servir du temps propre.

Définition 23.4: Trivitesse propre relativiste ou célérité

La 3-vitesse propre d'un mobile se déplaçant dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, est le 3-vecteur dérivée de la 3-position $\mathbf{r}(t)$ de ce mobile dans $\mathcal{R}$ par le temps propre t' du mobile :

$$\mathbf{u}(t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{13.42}$$

Notation 23.8

En notation indicielle, la 3-vitesse propre s'écrit $\mathbf{u}(\mathsf{u}^1, \mathsf{u}^2, \mathsf{u}^3)$ ou u^i.

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{u}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t'}\right)$$

Exemple 23.4: Vitesse propre de Bob

La 3-vitesse propre de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est la dérivée du rayon vecteur de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ mesuré par Anna par le temps propre de Bob :

$$\mathbf{u}(t') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t'}$$

Nous faisons le lien avec la déf. 23.3 p. 274 de la vélocité grâce au facteur de dilatation temporelle (13.28) p. 243 :

$$\mathbf{u}(t') = \gamma_v \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathbf{u}(t') = \gamma_v \mathbf{v}(t)} \tag{13.43}$$

Remarque 23.9

La vitesse propre n'est pas limitée par une valeur maximale, elle peut tendre vers l'infini.

Remarque 23.10

En mécanique classique $\gamma_v = 1$, les 3-vecteurs célérité et vélocité sont confondus et appelés vecteur vitesse. La vélocité et la célérité ont un ancètre commun, la vitesse, qui n'est ni la vélocité ni la célérité car en mécanique classique le temps n'est ni le temps propre ni le temps impropre. Ce sont des notions qui n'existent qu'en relativité.

23.7.1 Transformation spéciale de la vitesse propre

La 3-vitesse propre n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré ainsi que le 3-vecteur vitesse propre lui-même.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). Soit l'observateur Henri de temps propre τ, de vitesse propre $\mathbf{u}$ et de vélocité $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$, et de vitesse propre $\mathbf{u}'$ et de vélocité $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. Différentions la transformation spéciale de Lorentz en unités géométriques (13.19) p. 239 avec v_e constante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma_e \left(\mathrm{d}t - v_e \mathrm{d}x\right) \\ \mathrm{d}x' = \gamma_e \left(\mathrm{d}x - v_e \mathrm{d}t\right) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_e \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - v_e \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathsf{u}'_x = \gamma_e \left(\mathsf{u}_x - v_e \gamma_v\right) & (13.44a) \\ \mathsf{u}'_y = \mathsf{u}_y & (13.44b) \\ \mathsf{u}'_z = \mathsf{u}_z & (13.44c) \end{cases}$$

La transformation spéciale de Lorentz de la vitesse propre permet de calculer la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}'$ mesurée par Bob lorsque l'on connait la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}$ mesurée par Anna et la vitesse d'entrainement de Bob et Anna.

Remarque 23.11

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer u'_x, u_x et v_e par u'_x/c, u_x/c et v_e/c, puis simplifier.

On a la transformation inverse en permutant les composantes et en remplaçant v_e par $-v_e$:

$$\begin{cases} \mathsf{u}_x = \gamma_e \left(\mathsf{u}'_x + v_e \gamma_v\right) \\ \mathsf{u}_y = \mathsf{u}'_y \\ \mathsf{u}_z = \mathsf{u}'_z \end{cases}$$

Le carré de la norme de la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}'\|^2 &= \mathsf{u}'^2_x + \mathsf{u}'^2_y + \mathsf{u}'^2_z \\ &= \gamma_e^2 (\mathsf{u}_x - v_e \gamma_v)^2 + \mathsf{u}_y^2 + \mathsf{u}_z^2 \end{aligned}$$

23.7.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse propre

Le 3-vecteur vitesse propre se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Pour établir la transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse propre d'Henri lors du passage du référentiel d'Anna à celui de Bob, différentions la transformation de Lorentz sous forme intrinsèque en unités géométriques (13.20b) p. 240, dans laquelle le vecteur vitesse relative $\mathbf{v}_e$ est constant :

$$\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{d}\mathbf{r} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\boxed{\mathbf{u}' = \mathbf{u} + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}}{v_e^2} \mathbf{v}_e - \gamma_e \mathbf{v}_e \gamma_v}$$

Pour inverser la relation permutons $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$, et remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + (\gamma_e - 1) \frac{\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}'}{v_e^2} \mathbf{v}_e + \gamma_e \mathbf{v}_e \gamma_{v'}$$

23.8 Quadrivecteur vitesse

La 4-position déf. 23.2 p. 269 de Bob dans $\mathcal{R}$ est invariant par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que sa forme infinitésimale $\mathrm{d}[{}_4\mathrm{x}](c\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}\mathbf{r})$ comme différence de deux 4-vecteurs. La durée propre infinitésimale $\mathrm{d}t'$ mesurée par Bob dans $\mathcal{R}'$ étant absolue, nous posons la définition :

Définition 23.5: Quadrivitesse

La 4-vitesse de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna, est la dérivée de la 4-position de Bob dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps propre de Bob :

$$[{}_4\mathrm{u}] \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}[{}_4\mathrm{x}]}{\mathrm{d}t'}$$

Notation 23.9

En notation indicielle la 4-vitesse s'écrit en composantes contravariantes $[{}_4\mathrm{u}](\mathsf{u}^0, \mathsf{u}^1, \mathsf{u}^2, \mathsf{u}^3)$ ou u^α.

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad \mathsf{u}^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \tag{13.45}$$

Remarque 23.12

La quadrivitesse est aussi appelée quadrivecteur vitesse d'univers, vitesse spatio-temporelle, vitesse quadridimensionnelle.

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{u}] &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}[{}_4\mathrm{x}](ct, \mathbf{r})}{\mathrm{d}t'} \\ &= [{}_4\mathrm{u}]\left(\frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t'}\right)\end{aligned} \tag{13.46}$$

Avec la relation (13.28) p. 243 entre temps propre et temps impropre

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{u}] &= [{}_4\mathrm{u}](c\gamma_v, \mathbf{u}) \\ &= [{}_4\mathrm{u}](\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v})\end{aligned} \tag{13.47}$$

où $\mathbf{u}$ est la 3-vitesse propre de Bob dans $\mathcal{R}$, (13.42) p. 278, et $\mathbf{v}$ sa vélocité (23.3) p. 274.

La 4-vitesse généralise à l'espace-temps la 3-vitesse propre déjà relativiste mais purement spatiale, en lui ajoutant une composante temporelle (une vitesse de déplacement dans le temps) :

$$\mathsf{u}_t = c\gamma_v \tag{13.48}$$

La trajectoire d'un mobile dans l'espace-temps, c.-à-d. sa ligne d'univers, ne sort jamais du cône de lumière d'un quelconque évènement appartenant à cette ligne d'univers, sinon sa vélocité serait supérieure à c. Par conséquent sa 4-vitesse, tangente à sa ligne d'univers, est un vecteur à quatre dimensions de genre temps, dirigé vers le futur.

23.8.1 Quadrinorme de la quadrivitesse

Comme pour tout 4-vecteur, la 4-norme de la 4-vitesse est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré (cf. l'introduction du § 23.2 p. 267) :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{u}]\|^2 &= \gamma_v\,(c,\mathbf{v}) \bullet \gamma_v\,(c,\mathbf{v}) \\ &= \gamma_v^2\left(c^2 - v^2\right) \\ &= \gamma_v^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2 \\ &= c^2\end{aligned} \tag{13.49}$$

Remarque 23.13

En convention de genre espace le carré de la 4-norme de la 4-vitesse est négatif :

$$\|[_4\mathrm{u}]\|^2 = -c^2$$

Nous pouvons également trouver ce résultat lorsque la vitesse entre Anna et Bob est nulle. Lorsque le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna et $\mathcal{R}'$ de Bob sont confondus, $\gamma_e = 1$ et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, et la 4-vitesse de Bob n'est pas nulle :

$$[_4\mathrm{u}]'(c,\mathbf{0})$$

C'est la 4-vitesse de Bob, pour Bob. Sa vitesse spatiale est nulle mais sa vitesse temporelle (composante temporelle de sa 4-vitesse) est non nulle, il se déplace dans le temps vers le futur à la vitesse limite.

Remarque 23.14

En mécanique classique, l'écoulement du temps mesure la vitesse à laquelle nous nous déplaçons tous vers le futur. En ce sens, l'invariant non relativiste t est remplacé par l'invariant relativiste c.

La 4-norme de la 4-vitesse étant invariante :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{u}]\| &= \|[_4\mathrm{u}]'\| \\ &= c\end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites ($x^0 = ct$) de base naturelle pseudo-orthonormée, le carré de la 4-norme s'écrit :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{u}]\|^2 &= [_4\mathrm{u}] \cdot [_4\mathrm{u}] \\ &= \eta_{\alpha\beta}\mathrm{u}^\alpha \mathrm{u}^\beta\end{aligned}$$

En convention de genre temps (13.5) p. 227 :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{u}]\|^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau^2} \\ &= c^2\end{aligned}$$

En divisant la 4-vitesse par sa 4-norme c, ce qui revient à poser $c = 1$, avec (13.25) p. 242 nous obtenons la *quadrivitesse unitaire* :

$$[_4\mathrm{u}] = [_4\mathrm{u}](\gamma_v, \gamma_v\beta)$$

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad \mathsf{u}^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$$

23.8.2 Quadriproduit scalaire de la quadrivitesse avec la quadriposition

Le 4-produit scalaire de la 4-position de Bob dans $\mathcal{R}$ par sa 4-vitesse dans $\mathcal{R}$ est un invariant. Avec (13.20a) p. 240 :

$$\begin{aligned}
[{}_4\mathrm{x}]\,(ct, \mathbf{r}) \bullet [{}_4\mathrm{u}]\,(\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v}) &= \gamma_v c^2 t - \gamma_v \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\
&= c^2 \gamma_v \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \\
&= c^2 t'
\end{aligned}$$

où t' est le temps propre de Bob. Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de Bob nous avons directement

$$[{}_4\mathrm{x}]'\,(ct', \mathbf{0}) \bullet [{}_4\mathrm{u}]'\,(\gamma_{v'} c, \mathbf{0}) = c^2 t'$$

où $\gamma_{v'} = 1$ car $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, la vélocité de Bob dans son référentiel est nulle.

23.8.3 Transformation spéciale des composantes de la quadrivitesse

La 4-vitesse étant un 4-vecteur, elle est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré mais ses composantes se transforment. Le lien entre les composantes de la 4-vitesse dans deux référentiels est donné par la transformation spéciale de Lorentz des coordonnées galiléennes en unités géométriques (13.19) p. 239.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). Soit l'observateur Henri de vélocité $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. La 4-vitesse d'Henri étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[{}_4\mathrm{u}] \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{u}]' \begin{pmatrix} u'_t \\ u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \mathsf{u}'_t = \gamma_e(\mathsf{u}_t - v_e \mathsf{u}_x) \\ \mathsf{u}'_x = \gamma_e(\mathsf{u}_x - v_e \mathsf{u}_t) \\ \mathsf{u}'_y = \mathsf{u}_y \\ \mathsf{u}'_z = \mathsf{u}_z \end{cases}$$

En remplaçant u_t par γ_v ((13.48) p. 281) on retrouve la transformation de la vitesse propre (13.44) p. 280.

Notation 23.10

En notation indicielle avec la convention de sommation 1.3 p. 15 :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad \mathsf{u}^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} \mathsf{u}^\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathsf{u}^{0'} = \gamma_e \mathsf{u}^0 - \gamma_e v_e \mathsf{u}^1 \\ \mathsf{u}^{1'} = -\gamma_e v_e \mathsf{u}^0 + \gamma_e \mathsf{u}^1 \\ \mathsf{u}^{2'} = \mathsf{u}^2 \\ \mathsf{u}^{3'} = \mathsf{u}^3 \end{cases}$$

23.9 Trivecteur-accélération relativiste

Remarque 23.15

La relativité restreinte traite les référentiels accélérés car le calcul différentiel-intégral y est encore valable. En revanche elle ne traite pas la gravitation car elle est modélisée par une force à distance instantanée. Elle permettrait la transmission d'information à distance plus vite que la vitesse limite.

Définition 23.6: Tri-accélération relativiste

La 3-accélération relativiste d'un mobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est la dérivée de la 3-vélocité (23.3) p. 274 de ce mobile dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps propre t d'Anna :

$$\mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Notation 23.11

En notation indicielle, l'accélération s'écrit $\mathbf{a}(a^1, a^2, a^3)$ ou a^i.

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{a}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

23.9.1 Transformation spéciale des composantes de la tri-accélération

La 3-accélération n'étant pas un 4-vecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré ainsi que le 3-vecteur accélération lui-même.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.5 p. 219), et soit l'observateur Henri de vélocité $\mathbf{v}(t)$ dans $\mathcal{R}$ et de vélocité $\mathbf{v}'(t')$ dans $\mathcal{R}'$.

Pour la composante en x' de la 3-accélération d'Henri dans $\mathcal{R}'$, à partir de (13.39a) p. 275, en unités géométriques :

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t'} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x}\right) \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \end{aligned}$$

À partir de la transformation spéciale de Lorentz du temps en unités géométriques (13.19) p. 239, nous avons :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e\left(t - v_e x\right) \\ t = \gamma_e\left(t' + v_e x'\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma_e\left(1 - v_e v_x\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma_e\left(1 + v_e v'_x\right) \end{cases}$$

Utilisons l'inverse de la dérivée $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$ pour faire apparaitre v_x :

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{a_x\left(1-v_e v_x\right)-\left(v_x-v_e\right)\left(-v_e a_x\right)}{\left(1-v_e v_x\right)^2} \times \frac{1}{\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)} \\ &= \frac{a_x\left(1-v_e^2\right)}{\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)^3} \\ &= \frac{a_x}{\gamma_e^3\left(1-v_e v_x\right)^3} \end{aligned}$$

Pour la composante selon l'axe des y, à partir de (13.39b) p. 275 :

$$\begin{aligned} a'_y &= \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{v_y}{\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)}\right] \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \\ &= \frac{a_y\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)+v_y\gamma_e v_e a_x}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^2} \times \frac{1}{\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)} \\ &= \frac{a_y+v_e(a_x v_y-a_y v_x)}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^3} \end{aligned}$$

Nous raisonnons par symétrie pour l'axe des z. La transformation spéciale de Lorentz de la 3-accélération d'Henri s'écrit en unités géométriques :

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{a_x}{\gamma_e^3\left(1-v_e v_x\right)^3} & \text{(13.50a)} \\ a'_y = \dfrac{a_y+v_e(a_x v_y-a_y v_x)}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^3} & \text{(13.50b)} \\ a'_z = \dfrac{a_z+v_e(a_x v_z-a_z v_x)}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^3} & \text{(13.50c)} \end{cases}$$

Elle permet de calculer les composantes de la 3-accélération $\mathbf{a}'$ d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob lorsque l'on connait les composantes de la 3-accélération $\mathbf{a}$ d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna.

Remarque 23.16

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer a'_x, a'_y, a'_z, a_x, a_y, a_z, v_x, v_y, v_z et v_e par a'_x/c^2, a'_y/c^2, a'_z/c^2, a_x/c^2, a_y/c^2, a_z/c^2, v_x/c, v_y/c, v_z/c et v_e/c, puis simplifier.

On obtient la transformation inverse en permutant les composantes entre référentiels et en changeant v_e en $-v_e$:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{a'_x}{\gamma_e^3\left(1+v_e v'_x\right)^3} \\ a_y = \dfrac{a'_y-v_e(a'_x v'_y-a'_y v'_x)}{\gamma_e^2\left(1+v_e v'_x\right)^3} \\ a_z = \dfrac{a'_z-v_e(a'_x v'_z-a'_z v'_x)}{\gamma_e^2\left(1+v_e v'_x\right)^3} \end{cases}$$

23.9.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la tri-accélération

La 3-accélération n'étant pas un 4-vecteur, elle se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Dérivons par rapport au temps propre d'Anna la transformation de Lorentz-Poincaré de la vélocité en unités géométriques (13.41) p. 277 :

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e\mathbf{v}_e}{\gamma_e\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)}$$

Soient les fonctions vectorielles U et W telles que :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \frac{U}{W}\\ \mathrm{d}\mathbf{v}' &= \frac{dUW - UdW}{W^2}\\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{dU}{W\mathrm{d}t'} - \frac{UdW}{W^2\mathrm{d}t'}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} U = \mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e\mathbf{v}_e \\ W = \gamma_e\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} dU = \mathrm{d}\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e \\ dW = -\gamma_e(\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)\end{cases}$$

En différentiant (13.20a) p. 240 ($c = 1$) :

$$\mathrm{d}t' = \gamma_e\left(\mathrm{d}t - \mathbf{v}_e\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right)$$

Pour le premier terme :

$$\begin{aligned}\frac{dU}{W} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\gamma_e\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)} + \frac{(\gamma_e - 1)(\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)}\\ \frac{dU}{W\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)\left(\mathrm{d}t - \mathbf{v}_e\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right)} + \frac{(\gamma_e - 1)(\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)\left(\mathrm{d}t - \mathbf{v}_e\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right)}\\ &= \frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^2} + \frac{(\gamma_e - 1)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^2}\end{aligned}$$

Pour le second terme :

$$\begin{aligned}\frac{UdW}{W^2} &= \frac{-\left[\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e\mathbf{v}_e\right](\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)}{\gamma_e\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^2}\\ \frac{UdW}{W^2\mathrm{d}t'} &= \frac{-\left[\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e\mathbf{v}_e\right](\mathrm{d}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^2\left(\mathrm{d}t - \mathbf{v}_e\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\right)}\\ &= \frac{-\left[\mathbf{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e\mathbf{v}_e\right](\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^3}\\ &= -\frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)\mathbf{v}_e - \gamma_e\mathbf{v}_e\right](\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^3} - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^3}\end{aligned}$$

En soustrayant le second terme du premier :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^2} + \frac{(\gamma_e - 1)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^2} + \frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right) - \gamma_e\right](\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^3} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}}{\gamma_e^2\left(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e\right)^3}$$

Les termes centraux donnent :

$$\begin{aligned}
&\frac{(\gamma_e-1)\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}+\frac{\left[(\gamma_e-1)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e}{v_e^2}\right)-\gamma_e\right]v_e^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}\\
&=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}\left[(\gamma_e-1)\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)+(\gamma_e-1)\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)-\gamma_e v_e^2\right]\\
&=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}\left(\gamma_e-1-\gamma_e v_e^2\right)\\
&=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}\left[\gamma_e\left(1-v_e^2\right)-1\right]\\
&=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}\,\frac{(1-\gamma_e)}{\gamma_e}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors la transformation de Lorentz-Poincaré de la 3-accélération en unités géométriques,

$$\boxed{\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^2}-\frac{(\gamma_e-1)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^3\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}+\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}}{\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_e)^3}} \tag{13.51}$$

et la relation inverse en permutant $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ et en remplaçant $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}_e$ par $-\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}'}{\gamma_e^2\,(1+\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v}')^2}-\frac{(\gamma_e-1)(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}_e}{v_e^2\gamma_e^3\,(1+\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v}')^3}-\frac{(\mathbf{a}'\cdot\mathbf{v}_e)\mathbf{v}'}{\gamma_e^2\,(1+\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v}')^3}$$

23.9.3 Autre écriture vectorielle de la tri-accélération

Nous pouvons écrire la 3-accélération $\mathbf{a}$ comme la somme d'un vecteur $\mathbf{a}_{||}$ parallèle à $\mathbf{v}_e$, et d'un vecteur $\mathbf{a}_\perp$ perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_{||}+\mathbf{a}_\perp \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a}'=\mathbf{a}'_{||}+\mathbf{a}'_\perp$$

Les relations de transformation (13.50) p. 285 deviennent ($c=1$) :

$$\mathbf{a}'_{||}=\frac{\mathbf{a}_{||}}{\gamma_e^3\,(1-\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v})^3} \quad ; \quad \mathbf{a}'_\perp=\frac{\mathbf{a}_\perp+\mathbf{v}_e\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})}{\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v})^3}$$

Lorsque $\mathbf{a}$ est colinéaire à $\mathbf{v}_e$, c.-à-d. lorsque $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{||}$ et $\mathbf{a}_\perp=\mathbf{0}$:

$$\mathbf{a}'_{||}=\frac{\mathbf{a}}{\gamma_e^3\,(1-\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v})^3} \quad ; \quad \mathbf{a}'_\perp=\frac{\mathbf{v}_e\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})}{\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v})^3}$$

Lorsque $\mathbf{a}$ est perpendiculaire à $\mathbf{v}_e$, c.-à-d. lorsque $\mathbf{a}_{||}=\mathbf{0}$ et $\mathbf{a}=\mathbf{a}_\perp$:

$$\mathbf{a}'_{||}=\mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{a}'_\perp=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{v}_e\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})}{\gamma_e^2\,(1-\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{v})^3}$$

23.10 Trivecteur-accélération propre relativiste

La 3-accélération propre de Bob est celle qu'il mesure avec son accéléromètre trois axes. Contrairement aux notions cinématiques que nous avons vu, celle-ci est liée à un unique instrument de mesure physique, ne faisant pas intervenir l'espace et le temps. L'accélération propre de Bob est nulle si Bob est galiléen. L'accélération propre n'est pas invariante par changement de référentiel puisqu'elle n'est définie que dans un seul référentiel, celui de l'accéléromètre. Elle est *absolue* car tous les observateurs s'accordent sur sa valeur, mesurée par Bob. Elle est donc primordiale, les autres notions s'en déduisent.

Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel propre de Bob, et soit t' son temps propre. Bob veut mesurer son accélération propre instantanée, c.-à-d. son accélération propre à un instant t' donné, $\mathbf{a}(t')$. Supposons qu'à l'instant t', le référentiel de Bob croise le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna. Elle mesure la distance que Bob parcourt dans $\mathcal{R}$ en une durée $\mathrm{d}t'$ juste avant qu'ils ne se croisent, puis celle qu'il parcourt en une durée $\mathrm{d}t'$ juste après qu'ils se soient croisés. Bob en déduit sa variation de vitesse propre dans $\mathcal{R}$ en une durée $\mathrm{d}t'$, c.-à-d. son accélération propre.

Définition 23.7: Tri-accélération propre relativiste

La 3-accélération propre d'un mobile est la dérivée de sa 3-vitesse propre dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, déf. 13.42 p. 278, par rapport à son temps propre :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t') &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}(t')}{\mathrm{d}t'}\\ &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}(\gamma_v \mathbf{v}(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\\ &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t')}{\mathrm{d}t'^2}\end{aligned}$$

Notation 23.12

En notation indicielle l'accélération propre s'écrit $\mathbf{a}(\mathsf{a}^1, \mathsf{a}^2, \mathsf{a}^3)$ ou a^i.

23.10.1 Lien entre accélération propre et tri-accélération

Faisons apparaitre le 3-vecteur vélocité $\mathbf{v}(t)$ de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna, relation (13.43) p. 279. L'accélération propre de Bob s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t') &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}(\gamma_v \mathbf{v})}{\mathrm{d}t'}\\ &= \gamma_v \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t'} + \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t'}\\ &= \gamma_v \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} + \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\\ &= \gamma_v^2\,\mathbf{a} + \gamma_v \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Dérivons le facteur relativiste par rapport au temps t :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\\ &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\times\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\\ &= \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\left(2v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+2v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+2v_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \frac{\gamma_v^3}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\gamma_v^3}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} \qquad (13.52)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{a}=\gamma_v^2\mathbf{a}+\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})} \qquad (13.53)$$

Cette relation permet le calcul de l'accélération propre de Bob à partir de son 3-vecteur vélocité instantanée dans $\mathcal{R}$ et de sa 3-accélération dans $\mathcal{R}$.

Remarque 23.17

Si l'on prend $c=1$ la relation (13.52) :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t}=\gamma_v^3\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$$

Pour retrouver la relation avec $c=299\ 792\ 458$ m/s, remplaçons t par ct, $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}/c$ et $\mathbf{a}$ par $\mathbf{a}/c^2$:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{c\,\mathrm{d}t}=\gamma_v^3\,\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\frac{\mathbf{a}}{c^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma_v^3}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$$

Remarque 23.18

On fera attention à ce qui suit.
Nous avons d'une part,

$$\frac{\mathrm{d}\|\mathbf{v}\|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right\| &= \|\mathbf{a}\|\\ &= \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\\ &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2}\end{aligned}$$

Par conséquent si l'on note $v=\|\mathbf{v}\|$ et $a=\|\mathbf{a}\|$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\neq a$$

23.10.2 Transformation spéciale des composantes de l'accélération propre

Reprenons la transformation spéciale de Lorentz de la 3-accélération (13.50) p. 285. Supposons qu'à l'instant $\tau_0 = t_0$, et seulement à cet instant, Henri ait même 3-vecteur vélocité qu'Anna dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob. Soit $\mathbf{v}'(t')$ la vélocité d'Henri dans $\mathcal{R}'$:

$$\mathbf{v}' \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma_e = \gamma_{v'}$$

Soit $\mathbf{v}(t)$ la vélocité d'Henri dans $\mathcal{R}$, elle est momentanément nulle si bien que (13.50) p. 285 donne :

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a'_x = \dfrac{a_x}{\gamma_{v'}^3} \\ a'_y = \dfrac{a_y}{\gamma_{v'}^2} \\ a'_z = \dfrac{a_z}{\gamma_{v'}^2} \end{cases}$$

Or, l'accélération propre d'Henri $\mathbf{a}$ est confondue avec sa 3-accélération $\mathbf{a}$ dans $\mathcal{R}$, car les temps propres d'Anna et Henri sont égaux pendant une durée infinitésimale (Anna et Henri ont même vecteur vitesse) :

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{\mathsf{a}_x}{\gamma_{v'}^3} & \text{(13.54a)} \\ a'_y = \dfrac{\mathsf{a}_y}{\gamma_{v'}^2} & \text{(13.54b)} \\ a'_z = \dfrac{\mathsf{a}_z}{\gamma_{v'}^2} & \text{(13.54c)} \end{cases}$$

Ces relations permettent de calculer la 3-accélération d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob, à partir de l'accélération propre d'Henri. Réciproquement :

$$\begin{cases} \mathsf{a}_x = a'_x \gamma_e^3 \\ \mathsf{a}_y = a'_y \gamma_e^2 \\ \mathsf{a}_z = a'_z \gamma_e^2 \end{cases}$$

23.11 Quadrivecteur accélération

Définition 23.8: Quadri-accélération

La 4-accélération de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est le 4-vecteur dérivée de la 4-vitesse de Bob dans $\mathcal{R}$ par rapport à son temps propre :

$$[{}_4\mathrm{a}] \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}[{}_4\mathrm{u}]}{\mathrm{d}t'}$$

Notation 23.13

En notation indicielle la 4-accélération s'écrit $[{}_4\mathrm{a}](a^0, a^1, a^2, a^3)$ ou a^μ.

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites de $\mathcal{R}$, il a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{a}] &= \frac{\mathrm{d}[{}_4\mathrm{u}]\,(c\gamma_v, \mathbf{u})}{\mathrm{d}t'} \\ &= [{}_4\mathrm{a}]\left(c\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}t'}, \mathbf{a}\right)\end{aligned}$$

La 4-accélération généralise à l'espace-temps la 3-accélération propre (notion déjà relativiste) purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle :

$$a^0 = c\frac{d\gamma_v}{\mathrm{d}t'}$$

Une rotation classique purement spatiale de la 3-vitesse propre ne fait varier que les composantes spatiales de la 4-accélération, car la composante temporelle n'est fonction que de la norme de la 3-vitesse propre par l'intermédiaire du facteur relativiste γ_v. La seule autre rotation possible, la rotation hyperbolique entre temps et espace (le changement de référentiel par la transformation de Lorentz), fait donc varier la composante temporelle et par conséquent également au moins l'une des composantes spatiales car la 4-norme de la 4-accélération est invariante. Une accélération en norme est donc une rotation hyperbolique dans l'espace-temps, alors qu'une accélération par changement de direction est une rotation purement spatiale.

Grâce aux relations (13.52) p. 289 et (13.53) p. 289, nous trouvons l'expression de la 4-accélération de Bob dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna,

$$[{}_4\mathrm{a}]\left(\frac{\gamma_v^4}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\ \gamma_v^2\mathbf{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\right)$$

où $\mathbf{v}$ est le 3-vecteur vélocité instantanée de Bob dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{a}$ est sa 3-accélération dans $\mathcal{R}$. La 4-accélération de Bob dans $\mathcal{R}$ a pour composantes contravariantes en unités géométriques :

$$[{}_4\mathrm{a}]\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{a}]\begin{pmatrix} \gamma_v^4\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} \\ \gamma_v^2 a_x + \gamma_v^4 v_x\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} \\ \gamma_v^2 a_y + \gamma_v^4 v_y\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} \\ \gamma_v^2 a_z + \gamma_v^4 v_z\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} \end{pmatrix} \tag{13.55}$$

Utilisons la relation de calcul vectoriel :

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \\ \vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{C}) &= \vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}^2\vec{C} \\ \vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{C}) &= \vec{A}^2\vec{C} + \vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{C}) \\ \mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) &= v^2\mathbf{a} + \mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{a}]\left(\frac{\gamma_v^4}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\ \gamma_v^2\mathbf{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\right) &= [{}_4\mathrm{a}]\left(\gamma_v^4\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\ \gamma_v^2\mathbf{a} + \gamma_v^4 v^2\mathbf{a} + \gamma_v^4\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\right) \\ &= [{}_4\mathrm{a}]\left(\gamma_v^4\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\ \mathbf{a}\left(\gamma_v^2 + \gamma_v^4 v^2\right) + \gamma_v^4\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\right)\end{aligned}$$

À partir de la déf. 12.1 p. 236 du facteur de Lorentz exprimé en unités géométriques :

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \frac{1}{1-v^2}\\ \gamma^2 - \gamma^2 v^2 &= 1\\ \gamma^2 &= 1+\gamma^2 v^2\end{aligned}$$

si bien que la 4-accélération s'écrit aussi :

$$[{}_4\mathrm{a}]\left(\gamma_v^4 \mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\ \gamma_v^4\mathbf{a}+\gamma_v^4\mathbf{v}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\right)$$

Remarque 23.19

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer $\mathbf{a}$ par $\mathbf{a}/c^2$ et $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}/c$, puis simplifier.

Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de Bob, $\gamma_v = 1$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, la 4-accélération de Bob a pour composantes :

$$[{}_4\mathrm{a}]'(0,\mathbf{a}') = [{}_4\mathrm{a}]'(0,\mathbf{a}')$$

Lorsque la 3-accélération propre d'un observateur est nulle sa 4-accélération est nulle elle aussi.

23.11.1 Quadrinorme de la quadri-accélération

La 4-norme de la 4-accélération est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[{}_4\mathrm{a}]\|^2 &= [{}_4\mathrm{a}]\,(0,\mathbf{a}) \bullet [{}_4\mathrm{a}]\,(0,\mathbf{a})\\ &= -\mathbf{a}^2\end{aligned}$$

23.11.2 Quadriproduit scalaire avec la quadrivitesse

Le 4-produit scalaire des 4-vecteurs vitesse et accélération est un invariant :

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{u}]\,(\gamma_v c,\gamma_v\mathbf{v}) \bullet [{}_4\mathrm{a}]\left(\frac{\gamma_v^4}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\gamma_v^2\mathbf{a}+\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\right) &= \gamma_v^5\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}-\gamma_v\mathbf{v}\cdot\left(\gamma_v^2\mathbf{a}+\gamma_v^4\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\right)\\ &= \gamma_v^5\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}-\gamma_v^3\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}-\gamma_v^5 v^2\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c^2}\\ &= \gamma_v^5\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\gamma_v^3\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\\ &= 0\end{aligned}$$

Directement en se plaçant dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{u}]'\,(c,\mathbf{0}) \bullet [{}_4\mathrm{a}]'\,(0,\mathbf{a}) &= c\times 0-\mathbf{0}\cdot\mathbf{a}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les 4-vecteurs vitesse et accélération sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps, au sens du 4-produit scalaire (8.8) p. 127. Par suite, la 4-accélération est aussi pseudo-orthogonale à la ligne d'univers. C'est un vecteur à quatre dimensions de direction du genre espace. On arrive au même résultat en dérivant par rapport au temps propre le carré de la 4-norme de la 4-vitesse (13.49) p. 282. Le carré de la norme d'un vecteur étant le produit scalaire de ce vecteur avec

lui-même, on se sert de l'expression du produit scalaire en notation indicielle (13.36) p. 273 :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right) &= \frac{dc^2}{\mathrm{d}t'}\\ \eta_{\mu\nu}\left(u^\mu\frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}t'}+u^\nu\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}t'}\right) &= 0\\ 2\eta_{\mu\nu}\left(u^\mu\frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}t'}\right) &= 0\\ \eta_{\mu\nu}u^\mu a^\nu &= 0\end{aligned}$$

23.11.3 Quadriproduit scalaire avec la quadriposition

$$\begin{aligned}\left[{}_4\mathrm{x}\right]'(ct',\mathbf{0})\bullet\left[{}_4\mathrm{a}\right]'(0,\mathbf{a}) &= ct'\times 0-\mathbf{0}\cdot\mathbf{a}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les 4-vecteurs position et accélération sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps, au sens du 4-produit scalaire (13.37) p. 273.

23.11.4 Transformation spéciale des composantes de la quadri-accélération

La 4-accélération étant un 4-vecteur, seules ses composantes se transforment par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels d'Anna et Bob en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). Soit l'observateur Henri de vélocité $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. La 4-accélération d'Henri étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$\left[{}_4\mathrm{a}\right]\begin{pmatrix}a_t\\a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\left[{}_4\mathrm{a}\right]'\begin{pmatrix}a'_t\\a'_x\\a'_y\\a'_z\end{pmatrix}\qquad\text{avec}\qquad\begin{cases}a'_t=\gamma_e(a_t-v_e a_x)\\a'_x=\gamma_e(a_x-v_e a_t)\\a'_y=a_y\\a'_z=a_z\end{cases}$$

où les composantes de la 4-accélération dans $\mathcal{R}$ sont données par (13.55) p. 291. En notation indicielle :

$$\forall\mu=0,\dots,3\qquad a^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}_{\nu}a^\nu\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}a^{0'}=\gamma_e a^0-\gamma_e v_e a^1\\a^{1'}=-\gamma_e v_e a^0+\gamma_e a^1\\a^{2'}=a^2\\a^{3'}=a^3\end{cases}$$

Exemple 23.5: Vaisseau spatial quittant la Terre

À bord d'un vaisseau spatial, Bob quitte Anna restée sur la Terre, d'un mouvement rectiligne accéléré. À partir de l'instant initial t_0, la centrale inertielle à bord indique que l'accélération propre $\mathbf{a}$ est constante. La norme de la vélocité du vaisseau dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen est notée v. La relation (13.54a) p. 290 selon l'axe

du mouvement en x donne,

$$a = \frac{\mathsf{a}}{\gamma_v^3}$$

et montre que l'accélération a du vaisseau mesurée sur Terre par Anna tend vers zéro lorsque sa vitesse croit. C'est une condition nécessaire pour qu'il ne dépasse pas la vitesse limite c. Cherchons la vitesse du vaisseau mesurée sur Terre par Anna en fonction de la durée T écoulée sur Terre :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= a \\ &= \mathsf{a}\left(1 - \mathrm{v}^2/c^2\right)^{3/2} \\ \int_0^{v(T)} \frac{\mathrm{d}v}{\left(1 - \mathrm{v}^2/c^2\right)^{3/2}} &= \int_0^T \mathsf{a}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour intégrer on utilise

$$\begin{aligned}\beta_v &= v/c \\ c\,\mathrm{d}\beta_v &= \mathrm{d}v\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{\beta_v(T)} \frac{\mathrm{d}\beta_v}{\left(1-\beta_v^2\right)^{3/2}} &= \frac{\mathsf{a}}{c}\int_0^T \mathrm{d}t \\ \frac{\beta_v}{\left(1-\beta_v^2\right)^{1/2}} &= \frac{\mathsf{a}}{c}T \\ \frac{\beta_v^2}{1-\beta_v^2} &= \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2 \\ \beta_v^2 &= \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2 - \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2 \beta_v^2 \\ \beta_v^2\left[1 + \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2\right] &= \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2 \\ \beta_v^2 &= \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2 \left[1 + \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1} \\ v^2 &= \mathsf{a}^2 T^2 \left[1 + \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1}\end{aligned} \tag{13.56}$$

$$\boxed{v(T) = \mathsf{a}T\left[1 + \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1/2}}$$

Calculons la distance parcourue dans le référentiel terrestre en fonction du temps terrestre :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v \\ \int_0^{\mathrm{X}(T)} dx &= \mathsf{a}\int_0^T t\left[1 + \left(\frac{\mathsf{a}}{c}\right)^2 t^2\right]^{-1/2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable :

$$\begin{aligned}\theta &= \mathsf{a}^2t^2/c^2\\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t &= 2\mathsf{a}^2t/c^2\\ c^2\mathrm{d}\theta/(2\mathsf{a}) &= \mathsf{a}t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(T) &= \frac{c^2}{2\mathsf{a}}\int_0^{\mathsf{a}^2T^2/c^2}(1+\theta)^{-1/2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{c^2}{\mathsf{a}}\left[\sqrt{1+\theta}\right]_0^{\mathsf{a}^2T^2/c^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{X}(T) = \frac{c^2}{\mathsf{a}}\left(\sqrt{1+\frac{\mathsf{a}^2T^2}{c^2}}-1\right)} \tag{13.57}$$

Inversons cette relation pour avoir la durée en fonction de la distance parcourue :

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{a}}{c^2}\mathrm{X}+1 &= \sqrt{1+\frac{\mathsf{a}^2T^2}{c^2}}\\ \left(\frac{\mathsf{a}}{c^2}\mathrm{X}+1\right)^2-1 &= \frac{\mathsf{a}^2T^2}{c^2}\\ T &= \frac{c}{\mathsf{a}}\sqrt{\left(\frac{\mathsf{a}}{c^2}\mathrm{X}+1\right)^2-1}\\ &= \frac{c}{\mathsf{a}}\sqrt{\left(\frac{\mathsf{a}}{c^2}\right)^2\mathrm{X}^2+\frac{2\mathsf{a}}{c^2}\mathrm{X}}\end{aligned}$$

$$\boxed{T = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{X}}{c}\right)^2+\frac{2\mathrm{X}}{\mathsf{a}}}}$$

Comparons l'écoulement du temps sur Terre à celui à bord du vaisseau :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t' &= \mathrm{d}t/\gamma_v\\ \int_0^{T'}\mathrm{d}t' &= \int_0^T\left(1-\beta_v^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Avec (13.56) p. 294 :

$$\begin{aligned}\beta_v^2 &= \frac{\mathsf{a}^2t^2/c^2}{1+\mathsf{a}^2t^2/c^2}\\ \left(1-\beta_v^2\right)^{1/2} &= \left(1-\frac{\mathsf{a}^2t^2/c^2}{1+\mathsf{a}^2t^2/c^2}\right)^{1/2}\\ &= \left(1+\mathsf{a}^2t^2/c^2\right)^{-1/2}\end{aligned}$$

D'où

$$T' = \int_0^T\left(1+\mathsf{a}^2t^2/c^2\right)^{-1/2}\mathrm{d}t$$

On pose

$$\Phi = \mathsf{a}t/c$$
$$d\Phi = \mathsf{a}\mathrm{d}t/c$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} T' &= \frac{c}{\mathsf{a}} \int_0^{\mathsf{a}T/c} \left(1+\Phi^2\right)^{-1/2} d\Phi \\ &= \frac{c}{\mathsf{a}} \Big[\arg\sinh(\Phi) \Big]_0^{\mathsf{a}T/c} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathsf{a}T'}{c} = \arg\sinh\left(\frac{\mathsf{a}T}{c}\right)}$$

Réciproquement :

$$\boxed{\frac{\mathsf{a}T}{c} = \sinh\left(\frac{\mathsf{a}T'}{c}\right)}$$

Exprimons la distance parcourue en fonction du temps propre. À partir de (13.57) p. 295 :

$$\mathrm{X}(T) = \frac{c^2}{\mathsf{a}}\left(\sqrt{1+(\mathsf{a}/c)^2T^2}-1\right)$$
$$\mathrm{X}(T') = \frac{c^2}{\mathsf{a}}\left(\sqrt{1+\sinh^2(\mathsf{a}T'/c)}-1\right)$$

$$\boxed{\mathrm{X}(T') = \frac{c^2}{\mathsf{a}}\left[\cosh\left(\frac{\mathsf{a}T'}{c}\right)-1\right]}$$

Inversons cette relation :

$$\frac{\mathsf{a}}{c^2}\mathrm{X}+1 = \cosh\left(\frac{\mathsf{a}T'}{c}\right)$$

$$\boxed{T' = \frac{c}{\mathsf{a}}\arg\cosh\left(\frac{\mathsf{a}}{c^2}\mathrm{X}+1\right)}$$

L'accélération propre a un caractère absolu. Si on l'intègre par rapport au temps propre du vaisseau on obtient la norme de la vitesse propre indiqué en fonction du temps propre par les instruments de bord du vaisseau :

$$\begin{aligned} u(T') &= \int_0^{T'} \mathsf{a}\mathrm{d}t' \\ &= \mathsf{a}T' \end{aligned}$$

Nous pouvons l'exprimer en fonction de la vélocité $v(T)$ mesurée dans le référentiel terrestre :

$$\begin{aligned} \mathsf{a}T' &= \int_0^{T'} \mathsf{a}\mathrm{d}t' \\ &= \int_0^{T'} \gamma_v^3 a\mathrm{d}t' \end{aligned}$$

La relation entre temps propre t à bord du vaisseau et temps impropre t' sur Terre donne :

$$\mathrm{d}t = \gamma_v(t)\mathrm{d}t'$$
$$T = \int \gamma_v(t)\mathrm{d}t'$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}T' &= \int_0^T \gamma_v^2 a \mathrm{d}t \\
u(T') &= \int_0^{v(T)} \frac{\mathrm{d}v}{1 - \mathrm{v}^2/c^2} \\
&= c\left[\arg\tanh\left(\frac{v}{c}\right)\right]_0^{v(T)} \\
&= c\arg\tanh\left[\frac{v(T)}{c}\right] \\
&= c\arg\tanh\left[\beta_v(T)\right]
\end{aligned}$$

Avec la déf. 13.33 p. 264 de la rapidité φ :

$$\boxed{u(T') = c\varphi} \tag{13.58}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}T' &= c\varphi \\
\mathsf{a} &= c\varphi/T' \\
\mathsf{a}(t') &= c\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t'}
\end{aligned}$$

L'accélération propre est donc, au facteur c près, la variation de rapidité en fonction du temps propre. Inversons (13.58) :

$$\boxed{v(T) = c\tanh\left[\frac{u(T')}{c}\right]}$$

23.12 Quadrivecteur d'onde

23.12.1 Équation de propagation d'une onde

Soit $\psi = f(x)$ une fonction quelconque de x. Si a est une constante positive, $\psi = f(x-a)$ représente la même fonction translatée de a dans le sens des x croissants puisque la valeur $f(0)$ qui était en $x = 0$ se retrouve en $x = a$. Faisons maintenant intervenir le temps t pour décrire une « impulsion » qui se propage sans déformation à la vitesse v selon l'axe des x croissants. Elle est représentée par une fonction des variables x et t de la forme :

$$f(x,t) = f(x - vt)$$

$f(x+vt)$ représente bien sûr une propagation selon les x décroissants.

23.12.2 Onde sinusoïdale

Les fonctions circulaires sinus et cosinus servent à contruire un modèle physique très simple d'onde *sinusoïdale*, on dit encore *harmonique* ou *monochromatique* (l'onde n'a qu'une fréquence, donc qu'une couleur). Prenons la fonction cosinus :

$$f(x) = \cos(x)$$

Cette fonction mathématique s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ (domaine de définition $x \in]+\infty, -\infty[$). D'après le § 23.12.1, l'argument d'une fonction quelconque doit être de la forme $(x-vt)$ pour un déplacement de l'ensemble de la fonction selon les x croissants à la vitesse v pour un paramètre temps t croissant. La repésentation en x de la fonction

$$\psi(x,t) = \cos(x - vt)$$

avec pour paramètre le temps t croissant, donne l'illusion de la propagation d'une onde selon l'axe des abscisses positifs à la vitesse v, sans dissipation d'énergie. Les points de la courbe oscillent verticalement indépendamment les uns des autres, aucune information n'est transmise d'un point à l'autre, de proche en proche. Cette vitesse apparente qui n'est pas celle d'un transport de matière, d'énergie, ou d'information, est appelée *vitesse de phase* de l'onde et est notée v_φ. Elle est liée au modèle mathématique le plus simple d'une onde, et n'est pas limitée par la vitesse limite de l'espace-temps physique, supposée confondue avec la vitesse lumière.

Remarque 23.20

Certains phénomènes donnent l'illusion de se propager plus vite que la vitesse limite. Par exemple un chenillard constitué par un ensemble de diodes alignées qui s'allument les unes après les autres. Si on allume toutes les diodes en même temps la vitesse apparente de propagation (fictive) du signal est infinie. Cela est possible parce que l'allumage d'une diode n'est pas assujetti à l'allumage de la diode précédente, il n'y a pas de transport d'information d'une diode à la suivante, ni de propagation d'un quelconque signal. De même une ola dans un stade pourrait théoriquement dépasser la vitesse de la lumière si chaque personne décidait de se lever à un instant précis donné d'avance, sans se soucier de ce que font les personnes sur ses côtés. Il n'y aurait alors pas de transport d'information d'une personne à l'autre. Si toutes les personnes se lèvent en même temps la vitesse de la ola est infinie. Un autre exemple est le déferlement d'une vague. Si la vague casse en une fois, la vitesse de déferlement est infinie. Même chose pour le point de coupe d'une paire de ciseaux, sa propagation n'est qu'une illusion. Si l'on sépare les lames du ciseaux en les mettant parfaitement parallèles, le point de coupe à une vitesse infinie.

Dans notre modèle, l'onde sinusoïdale ne transporte rien, ni matière, ni énergie, ni information, sa vitesse n'est pas limitée.

L'amplitude de ψ (sa valeur à un instant donné) est comprise entre 1 et -1. Pour supprimer cette limitation dans notre modèle d'onde périodique, nous introduisons *l'amplitude maximale* ψ_{max} du mouvement :

$$\psi(x,t) = \psi_{max} \cos(x - v_\varphi t)$$

L'argument de toute fonction doit être sans dimension sinon la valeur de la fonction dépendrait de l'unité choisie (par exemple mètre ou pied). Par conséquent les arguments x et t de la fonction cosinus sont ici deux variables sans dimension physique, et v_φ est aussi un paramètre sans dimension.

23.12.3 Équation d'onde en k et ω

Pour donner une dimension physique aux variables x et t, introduisons le *nombre d'onde* k propre à l'onde, homogène à l'inverse d'une longueur pour que x puisse être une longueur. L'équation qui modélise l'onde sinusoïdale devient :

$$\psi(x,t) = \psi_{max}\cos[k(x - v_\varphi t)]$$

Définition 23.9: Pulsation ou fréquence angulaire

Définissons la pulsation ou fréquence angulaire de l'onde par

$$\omega \overset{\text{def}}{=} kv_\varphi$$

l'équation s'écrit :

$$\psi(x,t) = \psi_{max}\cos(kx - \omega t)$$

Pour que ψ reste une sinusoïde sans se déformer dans le temps et dans l'espace, k et ω, et donc v_φ, doivent être des constantes dans l'espace et dans le temps. Puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'à l'origine des temps et de l'espace $\psi(0,0)$ soit égale à ψ_{max}, nous introduisons une constante φ_0. L'équation d'onde en k et ω s'écrit :

$$\boxed{\psi(x,t) = \psi_{max}\cos(kx - \omega t + \varphi_0)} \tag{13.59}$$

On pose les définitions :

Définition 23.10: Phase du mouvement sinusoïdal

$$\varphi(x,t) \overset{\text{def}}{=} kx - \omega t + \varphi_0$$

Définition 23.11: Phase à l'origine des temps et de l'espace

$$\varphi_0 \overset{\text{def}}{=} \varphi(0,0)$$

23.12.4 Période spatiale

$\psi(x,t)$ étant une fonction cosinus, elle est périodique dans l'espace,

$$\begin{aligned}\psi_{max}\cos(kx - \omega t) &= \psi_{max}\cos(kx - \omega t + 2\pi)\\ &= \psi_{max}\cos[k(x + 2\pi/k) - \omega t]\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \psi\left(x + 2\pi/k, t\right)\\ &= \psi\left(x + \lambda, t\right)\end{aligned}$$

L'onde se répète identique à elle-même dans l'espace, toutes les distances multiples de λ.

Définition 23.12: Longueur d'onde

La période spatiale de l'onde s'appelle la longueur d'onde, λ.

C'est par exemple la distance entre deux maxima ou entre deux minima d'amplitude de l'onde. On se représente facilement λ, elle donne sens au nombre d'onde que nous avons introduit précédemment :

$$k \overset{\text{def}}{=} 2\pi/\lambda$$

23.12.5 Période temporelle

De la même façon, $\psi(x,t)$ est périodique dans le temps,

$$\begin{aligned}\psi_{max}\cos(kx-\omega t) &= \psi_{max}\cos(kx-\omega t+2\pi)\\ &= \psi_{max}\cos[kx-\omega(t+2\pi/\omega)]\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \psi\left(x,t+2\pi/\omega\right)\\ &= \psi\left(x,t+T\right)\end{aligned}$$

L'onde se répète identique à elle-même dans le temps, toutes les durées multiples de T. La période temporelle de l'onde est appelée simplement *période* de l'onde.

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega}\\ &= \frac{2\pi}{kv_\varphi}\\ &= \frac{2\pi}{v_\varphi}\frac{\lambda}{2\pi}\end{aligned}$$

Définition 23.13: Période

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{v_\varphi}$$

On se représente facilement T, elle donne sens à la pulsation que nous avons introduit précédemment :

$$\omega \overset{\text{def}}{=} 2\pi/T$$

23.12.6 Équation d'onde en λ et T

En λ et T, l'équation de l'onde (13.59) p. 299 devient :

$$\boxed{\psi(x,t) = \psi_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)} \tag{13.60}$$

23.12.7 Équation d'onde en σ et ν

Posons les définitions suivantes :

Définition 23.14: Fréquence spatiale d'une onde

$$\sigma \overset{\text{def}}{=} 1/\lambda$$

Définition 23.15: Fréquence temporelle d'une onde

$$\nu \overset{\text{def}}{=} 1/T$$

L'équation d'onde en σ et ν s'écrit :

$$\psi(x,t) = \psi_{max} \cos\left[2\pi\left(\sigma x - \nu t + \varphi_0\right)\right]$$

En résumé, pour la partie spatiale nous avons :

$$\begin{cases} k = 2\pi/\lambda = 2\pi\sigma \\ \lambda = 2\pi/k = 1/\sigma \\ \sigma = 1/\lambda = k/(2\pi) \end{cases}$$

On mesure alors la longueur d'onde λ ou la fréquence spatiale σ et l'on calcule k. Pour la partie temporelle :

$$\begin{cases} \omega = 2\pi/T = 2\pi\nu \\ T = 2\pi/\omega = 1/\nu \\ \nu = 1/T = \omega/(2\pi) \end{cases}$$

On mesure la période T ou la fréquence ν et l'on calcule ω. Les relations suivantes donnent le passage entre parties spatiale et temporelle :

$$\begin{cases} \omega = kv_\varphi = 2\pi v_\varphi/\lambda = 2\pi\sigma v_\varphi \\ k = \omega/v_\varphi = 2\pi/(Tv_\varphi) = 2\pi\nu/v_\varphi \end{cases}$$

23.12.8 L'onde plane harmonique

Considérons un gaz contenu dans une enceinte parallélépipédique rectangle. Si l'une des parois de l'enceinte oscille parallèlement à elle-même, une onde plane de pression est créée dans le gaz. Un plan d'onde est défini comme un plan dans lequel la pression est égale en tout point de ce plan.

Soit O le centre d'un repère, et soit P un point quelconque de ce plan d'onde. Appelons $\mathbf{r}$ le rayon vecteur $\overrightarrow{\text{OP}}$, et $\mathbf{s}$ le vecteur vitesse de phase unitaire de direction et de sens celui de la propagation du plan d'onde :

$$\mathbf{s} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{v}_\varphi / \|\mathbf{v}_\varphi\| \tag{13.61}$$

Le plan d'onde est défini par l'ensemble des points P tels qu' à un instant t fixé,

$$\mathbf{r}(P) \cdot \mathbf{s} = D(t)$$

C'est la projection de $\mathbf{r}$ sur $\mathbf{s}$, où la fonction du temps $D(t)$ est la distance du point O au plan d'onde à l'instant t, comme indiqué sur la figure 13.20.

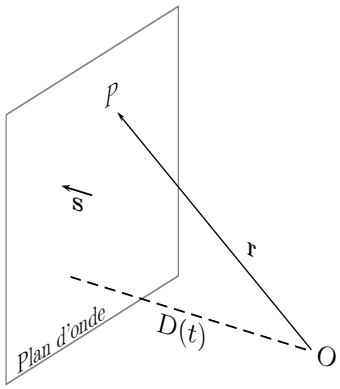


FIG. 13.20 – Plan d'onde

Nous tirons avantage de la notation complexe pour les fonctions circulaires. Il est plus simple de différentier ou d'intégrer la fonction exponentielle car elle ne change pas de forme. Nous effectuons donc le passage

$$\cos(kx - \omega t) \to e^{i(kx-\omega t)}$$

et nous ne conserverons que la partie réelle des résultats à venir. En supposant nulle la phase à l'origine, le modèle d'onde périodique (13.59) p. 299 s'écrit

$$\psi(x,t) = \psi_{max} e^{i(kx-\omega t)} \tag{13.62}$$

23.12.9 Le vecteur d'onde k

À partir du nombre d'onde, déf. 23.9 p. 299, et de la définition (13.61) p. 301 du vecteur vitesse de phase unitaire, on définit le *vecteur d'onde* :

Définition 23.16: Trivecteur d'onde

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &\overset{\text{def}}{=} k\mathbf{s} \\ &= \frac{\omega}{v_\varphi}\,\mathbf{s}\end{aligned}$$

$$\mathbf{k}\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix} = \mathbf{k}\begin{pmatrix}\omega/v_{\varphi_x}\\\omega/v_{\varphi_y}\\\omega/v_{\varphi_z}\end{pmatrix}$$

Nous pouvons à présent généraliser l'équation d'onde (13.62) à une onde plane :

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_{max} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

23.12.10 Invariance de la phase de l'onde plane sinusoïdale

Pour construire le 4-vecteur d'onde, montrons l'invariance relativiste de la phase de l'onde plane sinusoïdale. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). Un train d'ondes sphériques est émis au moment où les deux référentiels se croisent en $O = O'$ à $(t = t' = 0)$. Il arrive au point M' de $\mathcal{R}'$ à l'instant $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'/v'_\varphi$, et fini de passer à l'instant t', pour un temps total de passage en M' :

$$t' - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'/v'_\varphi$$

Remarque 23.21

Au voisinage d'un point loin de la source O, la sphère est approximée par son plan tangent en ce point, et les ondes sont supposées planes.

Ce même train d'onde arrive au point M de $\mathcal{R}$ à l'instant $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}/v_\varphi$, et fini de passer à l'instant t, pour un temps total de passage en M :

$$t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}/v_\varphi$$

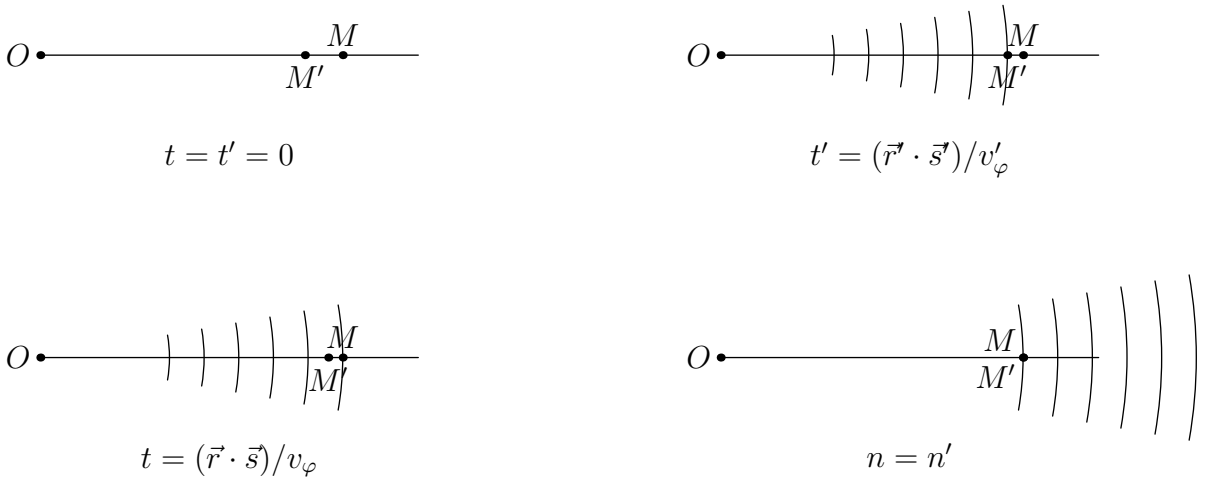


Fig. 13.21 – Onde plane dans le référentiel $\mathcal{R}$

Soient ν et ν' la fréquence de l'onde mesurée respectivement dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. Les nombres n et n' de crêtes (nombre de maxima ou de minima d'amplitude) sont les mêmes dans les deux référentiels puisqu'il s'agit du même train d'ondes :

$$\begin{gathered} n = n' \\ \nu\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v_\varphi}\right) = \nu'\left(t - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s}'}{v'_\varphi}\right) \\ \frac{\omega}{2\pi}\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{\omega}\right) = \frac{\omega'}{2\pi}\left(t - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}'}{\omega'}\right) \\ \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' \end{gathered}$$

La phase d'une onde sinusoïdale est bien invariante par changement de référentiel galiléen, quelle que soit sa vitesse de phase. On pourrait le vérifier en lui appliquant la transformation de Lorentz-Poincaré. Cet invariant relativiste peut s'écrire comme le 4-produit scalaire d'un

4-vecteur d'onde $[_4\mathrm{k}](k^0, \mathbf{k})$ dont la partie temporelle reste à définir, avec la 4-position (c est ici la vitesse limite et non celle de la lumière) :

$$\begin{aligned}[_4\mathrm{k}](k^0, \mathbf{k}) \cdot [_4\mathrm{x}](ct, \mathbf{r}) &= k^0 ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \\ &= \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\end{aligned}$$

Donc $k^0 = \omega/c$:

Définition 23.17: Quadrivecteur d'onde

Le 4-vecteur d'onde a pour composantes :

$$[_4\mathrm{k}]\left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$$

Notation 23.14

En notation indicielle le 4-vecteur d'onde s'écrit $[_4\mathrm{k}](k^0, k^1, k^2, k^3)$ ou k^μ.

23.12.11 Quadrinorme du quadrivecteur d'onde

Comme pour tout 4-vecteur, la 4-norme du 4-vecteur d'onde est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{k}]\|^2 &= \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \bullet \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} - \|\mathbf{k}\|^2 \\ &= \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_\varphi^2}\right)\end{aligned}$$

On modélise une onde électromagnétique monochromatique (un LASER parfait) se propageant dans le vide, par une sinusoïde dont la vitesse de phase est la vitesse de la lumière. On suppose de plus que la lumière se propage à la vitesse limite :

$$v_\varphi = c$$

Par conséquent, avec la déf. 23.16 p. 302

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\,\mathbf{s}$$

et :

$$\|[_4\mathrm{k}]\|^2 = 0$$

Les 4-vecteurs d'ondes électromagnétiques sont alors des 4-vecteurs nuls (déf. 5.4 p. 121).

23.12.12 Transformation spéciale des composantes du quadrivecteur d'onde

Le 4-vecteur d'onde étant un 4-vecteur, seules ses composantes se transforment par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Soient les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.5 p. 219) :

$$[_4\mathrm{k}]\begin{pmatrix} k_t \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = [_4\mathrm{k}]'\begin{pmatrix} k'_t \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} k'_t = \gamma_e(k_t - v_e k_x) \\ k'_x = \gamma_e(k_x - v_e k_t) \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \end{cases}$$

où les composantes du 4-vecteur d'onde dans $\mathcal{R}$ sont données par (23.17) p. 304. En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \dots, 3 \qquad k^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} k^{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} k^{0'} = \gamma_e k^0 - \gamma_e v_e k^1 \\ k^{1'} = -\gamma_e v_e k^0 + \gamma_e k^1 \\ k^{2'} = k^2 \\ k^{3'} = k^3 \end{cases}$$

23.13 Quadrivecteur densité numérique-flux

Reprenons la déf. 6.2 p. 181 du nombre volumique d'éléments. L'évènement E_0 est maintenant un point non plus dans l'espace et dans le temps, mais dans l'espace-temps. ρ_n est absolu, tous les observateurs s'accordent sur sa valeur, puisqu'elle n'est mesurée que dans $\mathcal{R}$. Considérons un 3-volume V au repos dans $\mathcal{R}$, supposons que ce soit un parallélépipède rectangle dont l'un des bords soit selon l'axe x. Pour un observateur dans $\mathcal{R}'$ en configuration standard avec $\mathcal{R}$, par contraction de Lorentz selon les x :

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\Delta x}{\gamma_v}\Delta y \Delta z \\ &= \frac{V}{\gamma_v} \end{aligned}$$

Pour la densité nous avons alors :

$$\begin{aligned} \rho'_n &= \frac{n}{V'} \\ &= \gamma_v \rho_n \end{aligned}$$

Cette relation est similaire à celle entre temps propre et temps impropre (13.25) p. 242. Par analogie avec la déf. 23.5 p. 281 de la 4-vitesse, on construit le 4-vecteur :

Définition 23.18: Quadridensité numérique-flux

La 4-densité numérique-flux est le produit de la densité numérique par la 4-vitesse :

$$[_4\rho_\mathrm{n}] \overset{\text{def}}{=} \rho_n [_4\mathrm{u}]$$

On peut montrer que $[{}_4\rho_\mathrm{n}]$ est bien un 4-vecteur par le raisonnement suivant. La charge est un invariant relativiste par hypothèse observationnelle, donc la charge infinitésimale $\rho \mathrm{d}v$ également. Dans l'égalité ci-dessous, le membre de gauche est un 4-vecteur, donc le membre de droite également.

$$\rho \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}x^i = \rho \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}t \,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

Or $\mathrm{d}v \,\mathrm{d}t$ est un scalaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v'\mathrm{d}t' &= \frac{\mathrm{d}v}{\gamma_v}\,\gamma_v \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}v \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc $\rho \,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ est un 4-vecteur.

Remarque 23.22

En coordonnées galiléennes réduites :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\ &= c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v \\ &= \mathrm{d}V \end{aligned}$$

$\mathrm{d}\Omega$ est un invariant de Lorentz en tant que le 4-volume élémentaire de l'espace-temps relativiste absolu.

$$[{}_4\rho_\mathrm{n}](\rho_n\gamma_v c, \rho_n \mathbf{u}) = [{}_4\rho_\mathrm{n}](\rho'_n c, \rho'_n \mathbf{v})$$

Dans $\mathcal{R}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ et les composantes spatiales de $[{}_4\rho_\mathrm{n}]$ sont nulles. Il reste à comprendre ce qu'elles représentent dans $\mathcal{R}'$. Soit une surface d'aire A' fixe dans $\mathcal{R}'$ et perpendiculaire au mouvement relatif des référentiels (donc $A' = A$). Notez bien que cette surface n'a rien à voir avec le parallélépipède rectangle qui nous a permis de mesurer le nombre volumique. L'expression

$$\gamma_v \rho_n v_x \Delta t' A'$$

$v_x \Delta t' A'$ est bien un volume, cette expression est le nombre d'éléments passant à travers l'aire A' en un temps $\Delta t'$ vu depuis $\mathcal{R}'$, dans lequel la densité est $\rho'_n = \gamma_v \rho_n$. Donc la composante spatiale $\gamma_v \rho_n v_x$ est le nombre d'éléments passant à travers une surface par unité d'aire et par unité de temps, autrement dit le *flux* de poussière selon l'axe x'. Dans $\mathcal{R}'$ les autres composantes spatiales, ρ_{Ny} et ρ_{Nz} sont nulles.

Exemple 23.6

Le 4-vecteur densité-courant électrique s'écrit

$$[{}_4\mathrm{j}] = (c\rho, \mathbf{j})$$

où ρ est la densité volumique de charge et $\mathbf{j}$ est la densité de courant, ex. 6.3 p. 183.

24 Dynamique relativiste

24.1 Masse inerte

Pour un choc à vitesse relative v quasi nulle, la relation (9.2) p. 144 doit redonner la conservation de la quantité de mouvement de la mécanique classique, c.-à-d.

$$k = \frac{m_2}{m_1}$$

où m_1 et m_2 sont les masses inertes des corps 1 et 2, indépendantes de la vitesse relative v avant l'interaction. Lorsque cette vitesse relative tend vers zéro, les référentiels galiléens des corps avant impact sont quasi confondus. La mesure a donc quasiment lieu dans le référentiel galiléen commun aux corps 1 et 2. La masse inerte d'un système est par définition mesurée dans le référentiel propre de ce système, donc pour une vitesse d'interaction quasi nulle.

La masse inerte d'un système mesurée dans le référentiel propre de ce système, notée simplement m ou parfois m_0, ne peut être qu'*absolue*, tous les observateurs s'accordent évidemment sur sa valeur. Elle est appelée *masse propre*, *masse intrinsèque*, *masse au repos*, *masse invariable* ou simplement *masse*.

24.2 Quadrivecteur impulsion

Définition 24.1: Quadri-impulsion

La 4-impulsion d'un système dans $\mathcal{R}$ est le produit de sa masse (propre) par sa 4-vitesse dans $\mathcal{R}$, (13.47) p. 281 :

$$[{}_4\mathrm{p}] \overset{\text{def}}{=} m[{}_4\mathrm{u}]$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$[{}_4\mathrm{p}](m\gamma_v c, m\mathsf{u}^x, m\mathsf{u}^y, m\mathsf{u}^z) = [{}_4\mathrm{p}]\left(\gamma_v mc, m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}, m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}, m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t'}\right)$$

Définition 24.2: Inertie

L'inertie ou masse relativiste d'un système de 3-vecteur vélocité $\mathbf{v}$ dans un référentiel galiléen est le produit de la masse propre de ce système par le facteur relativiste lié à sa vélocité :

$$I(v) \overset{\text{def}}{=} \gamma_v m$$

Remarque 24.1

Contrairement à la masse, l'inertie n'est pas absolue, ce n'est pas un invariant relativiste car elle dépend de la vitesse de l'observateur. Elle ne peut donc pas être la charge gravitationnelle relativiste, la masse qui apparait

dans les équations de la relativité générale. Si c'était le cas, un observateur ayant une vitesse suffisamment élevée par rapport à une étoile la percevrait comme un trou noir.

Définition 24.3: Quantité de mouvement relativiste

Le 3-vecteur quantité de mouvement relativiste ou 3-impulsion [a] relativiste est le produit :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\overset{\text{def}}{=} \gamma_v m\mathbf{v} \\ &\overset{\text{def}}{=} I\mathbf{v} \\ &\overset{\text{def}}{=} m\mathbf{u} \end{aligned} \tag{13.63}$$

a. Originellement, une impulsion désignait une variation de quantité de mouvement $\Delta\mathbf{p}$

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaire (x, y, z), la 3-quantité de mouvement relativiste a pour composantes contravariantes :

$$\mathbf{p}\left(m\mathsf{u}_x, m\mathsf{u}_y, m\mathsf{u}_z\right) = \mathbf{p}\left(m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}, m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}, m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t'}\right)$$

La 4-impulsion généralise à l'espace-temps la 3-impulsion relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle de même dimension.

Remarque 24.2

À faible vitesse devant c ou lorsque c tend vers l'infini, $m\mathbf{u}$ tend vers le 3-vecteur quantité de mouvement non relativiste $m\mathbf{v}$.

24.3 Énergie relativiste

Pour faire le lien avec la mécanique classique, prenons une vitesse v petite devant la vitesse limite c. Le facteur relativiste γ_v tendant vers un, l'inertie tend vers la masse inerte. La partie spatiale du 4-vecteur impulsion, c.-à-d. la 3-quantité de mouvement relativiste $\mathbf{p}$, tend vers la quantité de mouvement non relativiste $m\mathbf{v}$.

Pour la partie temporelle du 4-vecteur impulsion, remarquons que le facteur relativiste déf. 12.1 p. 236 s'écrit sous la forme

$$\gamma_v = (1+x)^\alpha$$

avec $\alpha = -1/2$ et $x = -v^2/c^2$, tel que $x \in [-1; 1]$. Prenons son développement en série :

$$\begin{aligned} \gamma_v &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\, x^3 + \ldots \end{aligned}$$

La somme des termes au delà du rang i devient négligeable devant le terme de rang i asymptotiquement (lorsque i tend vers l'infini). Nous pouvons approximer le facteur relativiste en limitant le développement au rang que l'on souhaite, l'approximation étant d'autant meilleure

que v^2/c^2 est proche de zéro. Pour $v \ll c$, le développement limité à l'ordre deux s'écrit :

$$\begin{aligned}\gamma_v &= 1 + \frac{-1}{2}\left(\frac{-v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2} - 1\right)\right]\left(\frac{-v^2}{c^2}\right)^2 + o\left[\left(\frac{-v^2}{c^2}\right)^2\right] \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2\end{aligned}$$

Notons p^0 la composante temporelle de la 4-impulsion. La multiplication par c nous fait passer du domaine des impulsions au domaine des énergies :

$$\begin{aligned}p^0 &= \gamma_v mc \\ &\approx mc + \frac{mv^2}{2c} + \frac{3mv^4}{8c^3} \\ p^0 c &\approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2}\end{aligned} \tag{13.64}$$

Le premier terme mc^2 est une énergie constante qui existe aussi à vitesse nulle, donc dans le référentiel propre. Le deuxième terme $mv^2/2$ est l'énergie cinétique de la mécanique classique.

Définition 24.4: Énergie au repos

L'énergie au repos d'un système, ou énergie propre, ou énergie de masse est le produit :

$$E_0 \stackrel{\text{def}}{=} mc^2$$

E_0 n'existe pas en mécanique classique parce que l'on ne mesure ou calcule que des différences d'énergie. Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie au repos est la masse (inerte au repos) du système.

Remarque 24.3

Faire la différence entre énergie au repos et masse inerte revient à faire la différence entre un prix en dollars et un prix en euros avec un taux de change fixe.

Définition 24.5: Énergie cinétique relativiste

L'énergie cinétique relativiste est toute l'énergie due au mouvement relatif, donc l'ensemble des termes contenant v :

$$\begin{aligned}T &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (\gamma_v - 1)\, mc^2\end{aligned}$$

Remarque 24.4

Lorsque la vitesse tend vers c le facteur relativiste γ_v tend vers l'infini et donc l'énergie cinétique tend aussi vers l'infini. Il existe une vitesse limite mais pas une énergie cinétique limite.

Définition 24.6: Énergie totale relativiste

L'énergie totale est la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique relativiste :

$$\begin{aligned} E &\overset{\text{def}}{=} E_0 + T \\ &= \gamma_v m c^2 \\ &= I c^2 \end{aligned} \tag{13.65}$$

Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie totale relativiste du système est son inertie I. La relation (13.65) est appelée *équivalence masse-énergie*. Elle donne la possibilité théorique de transformer de la masse en énergie et de l'énergie en masse. En relativité il n'y a donc plus conservation de la masse ni de l'énergie, mais de la masse-énergie.

La 4-impulsion s'écrit :

$$[{}_4\mathrm{p}]\,(Ic, \mathbf{p}) = [{}_4\mathrm{p}]\left(\tfrac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \tag{13.66}$$

L'énergie totale (et par conséquent l'inertie) est la composante temporelle du 4-vecteur impulsion, au facteur c près. L'énergie totale est donc l'analogue de la quantité de mouvement dans l'espace, elle mesure le mouvement dans le temps. Tout objet a une énergie totale relativiste car il se déplace dans le temps de l'observateur. Il a toujours à minima une énergie propre, énergie au repos E_0, car il se déplace dans son temps propre τ.

Remarque 24.5

Multiplier la 4-impulsion par c la rend homogène à une énergie, pour former une sorte de « quadri-énergie ». Diviser la 4-impulsion par c la rend homogène à une masse, pour former une sorte de « quadri-inertie ». Elle n'est jamais homogène aux trois en même temps, sauf lorsque $c = 1$. Nous devrions l'appeler 4-vecteur inertie-énergie-impulsion, mais nous retiendrons le terme 4-impulsion.

Les définitions (13.63) p. 308 et (13.65) donnent une nouvelle relation pour la 3-quantité de mouvement relativiste :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= I\mathbf{v} \\ c^2\mathbf{p} &= c^2 I\mathbf{v} \\ &= E\mathbf{v} \end{aligned}$$

L'énergie totale est liée à l'énergie au repos et à la 3-quantité de mouvement relativiste :

$$\begin{aligned} \gamma_v^2(v) &= \frac{1}{1-\beta^2} \\ \gamma_v^2 - \gamma_v^2 v^2/c^2 &= 1 \\ \gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 v^2 m^2 c^2 &= m^2 c^4 \\ \boxed{E^2 = E_0^2 + p^2 c^2} & \end{aligned} \tag{13.67}$$

24.3.1 Quadrinorme de la quadri-impulsion

La 4-norme de la 4-impulsion est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{p}]\|^2 &= [_4\mathrm{p}] \bullet [_4\mathrm{p}] \\ &= m[_4\mathrm{u}] \cdot m[_4\mathrm{u}] \\ &= m^2\|[_4\mathrm{u}]\|^2 \\ &= m^2c^2 \\ &= mE_0 \\ &= \frac{E_0^2}{c^2}\end{aligned}$$

Nous pouvons également trouver ce résultat en remarquant que dans le référentiel propre :

$$[_4\mathrm{p}]' \, (mc, \mathbf{0})$$

La 4-norme de la 4-impulsion étant invariante :

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{p}]\|^2 &= \|[_4\mathrm{p}]'\|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{c^2}\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\|[_4\mathrm{p}]\|^2 &= p_t^2 - \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p^2\end{aligned}$$

et avec le résultat précédent nous retrouvons (13.67). En inversant le raisonnement nous pouvons dire que la masse est invariante car c'est la 4-norme d'un 4-vecteur (la 4-impulsion), en revanche l'inertie n'est pas un invariant relativiste car c'est la partie temporelle de ce même 4-vecteur.

24.3.2 Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadriposition

Avec le 4-produit scalaire de la 4-vitesse avec la 4-position § 23.8.2 p. 283 :

$$\begin{aligned}[_4\mathrm{p}] \cdot [_4\mathrm{x}] &= m[_4\mathrm{u}] \bullet m[_4\mathrm{x}] \\ &= mc^2t'\end{aligned}$$

C'est un invariant.

24.3.3 Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadrivitesse

Le 4-produit scalaire de la 4-vitesse de Bob par sa 4-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}[_4\mathrm{p}] \cdot [_4\mathrm{u}] &= m[_4\mathrm{u}] \bullet [_4\mathrm{u}] \\ &= mc^2\end{aligned}$$

24.3.4 Quadriproduit scalaire de la quadri-impulsion avec la quadri-accélération

Le 4-produit scalaire de la 4-accélération et de la 4-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}[{}_4\mathrm{p}] \cdot [{}_4\mathrm{a}] &= m[{}_4\mathrm{u}] \bullet m[{}_4\mathrm{a}] \\ &= 0\end{aligned}$$

Ils sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps.

24.3.5 Particules de masse nulle - Cas des photons

D'après la déf. 24.6 p. 310, l'énergie totale relativiste d'une particule a pour expression :

$$\begin{aligned}E &= \gamma_v mc^2 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}\end{aligned}$$

Pour avoir une énergie non nulle, une particule de masse nulle doit se déplacer à la vitesse limite. Réciproquement, une particule se déplaçant à la vitesse limite doit avoir une masse nulle sinon son énergie totale serait infinie. Dans le cas d'une particule de masse nulle se déplaçant à la vitesse limite, l'expression précédente donne zéro sur zéro et l'énergie de la particule est indéterminée (plus précisément, elle ne peut être déterminée par cette expression).

Supposons que la masse du photon soit nulle et qu'il se déplace à la vitesse limite. Son énergie (donc son inertie) et sa 3-quantité de mouvement relativiste ne sont pas nulles, car en utilisant la relation de Planck qui lie l'énergie totale du photon à sa fréquence ν, nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned}E &= h\nu \\ I &= \frac{h\nu}{c^2}\end{aligned}}$$

Avec la déf. 24.3 p. 308, la norme de son 3-vecteur quantité de mouvement relativiste s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned}p &= Ic \\ &= \frac{h\nu}{c}\end{aligned}}$$

Si donc la masse du photon est nulle et sa vitesse constante (égale à la vitesse limite), il a quand même une énergie (donc une inertie) et une 3-quantité de mouvement relativiste non nulles, et variables car fonctions de la fréquence ν. Les grandeurs E et $\mathbf{p}$ sont donc plus fondamentales que les grandeurs masse et vitesse, car elles subsistent lorsque la masse est nulle et la vitesse constante.

24.3.6 Transformation spéciale des composantes de la quadri-impulsion

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). La 4-impulsion étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[{}_4\mathrm{p}] \begin{pmatrix} p_t \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{p}]' \begin{pmatrix} p'_t \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} p'_t = \gamma_e(p_t - v_e p_x) \\ p'_x = \gamma_e(p_x - v_e p_t) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

où les composantes de la 4-impulsion sont données par (13.66) p. 310.

Remarque 24.6

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer v_e par v_e/c.

Notation 24.1

En notation indicielle avec la convention de sommation 1.3 p. 15 :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} p^{0'} = \gamma p^0 - \gamma v_e p^1 \\ p^{1'} = -\gamma v_e p^0 + \gamma p^1 \\ p^{2'} = p^2 \\ p^{3'} = p^3 \end{cases}$$

24.3.7 Conservation de la quadri-impulsion

Comme tout 4-vecteur, la 4-impulsion est invariante par changement de référentiel galiléen, mais cela ne signifie pas, ni n'implique, que la somme des 4-impulsions se conserve lors d'une interaction. Invariance et conservation sont deux notions bien distinctes.

D'après (13.64) p. 309, à vitesse basse mais non nulle, la composante temporelle de la 4-impulsion donne l'énergie cinétique sur c, et ses composantes spatiales donnent la quantité de mouvement, deux quantités qui se conservent lors d'une interaction en mécanique classique (l'énergie d'agitation thermique est une forme d'énergie cinétique).

On vérifie expérimentalement mais on ne peut démontrer que la 4-impulsion *se conserve lors d'une interaction*, autrement dit que la 4-impulsion d'un système isolé *se conserve dans le temps*. Puisqu'elle se conserve elle est *additive*, la 4-impulsion d'un système isolé est la somme des 4-impulsion de ses sous-systèmes constitutifs. Elle réunit la conservation de la masse, celle de l'énergie et celle de la quantité de mouvement. Soient deux systèmes de 4-impulsion $[{}_4\mathrm{p}]_1$ et $[{}_4\mathrm{p}]_2$. Par hypothèse basée sur l'expérience :

$$\forall \mu = 1, \ldots, 4 \qquad p^{\mu}_1 + p^{\mu}_2 = p'^{\mu}_1 + p'^{\mu}_2$$

- la partie temporelle donne la conservation de l'inertie et non plus celle de la masse inerte de la mécanique classique. Avec (13.66) p. 310 :

$$p_1^0 + p_2^0 = p_1'^0 + p_2'^0$$
$$I_1 c + I_2 c = I_1' c + I_2' c$$
$$I_1 + I_2 = I_1' + I_2'$$

L'inertie $I(v)$ d'un mobile, donc son énergie totale $E = Ic^2$, n'est pas invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais la somme des inerties (donc des énergies totales) est conservée par hypothèse lors d'une interaction.

Réciproquement, la masse m d'un mobile, donc son énergie au repos $E_0 = mc^2$, est absolue puisqu'elle n'est définie que dans le référentiel propre de ce mobile, mais la somme des masses (donc des énergies au repos) ne se conserve pas lors d'une interaction puisque c'est la somme des énergies totales qui se conserve.

- la partie spatiale donne la conservation de la quantité de mouvement relativiste selon chaque axe :

$$\begin{aligned} p_1^1 + p_2^1 = p_1^{1'} + p_2^{1'} \quad &\Rightarrow \quad p_{x_1} + p_{x_2} = p'_{x_1} + p'_{x_2} \\ p_1^2 + p_2^2 = p_1^{2'} + p_2^{2'} \quad &\Rightarrow \quad p_{y_1} + p_{y_2} = p'_{y_1} + p'_{y_2} \\ p_1^3 + p_2^3 = p_1^{3'} + p_2^{3'} \quad &\Rightarrow \quad p_{z_1} + p_{z_1} = p'_{z_1} + p'_{z_1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$$

La conservation de la quantité de mouvement est remplacée par la conservation de la quantité de mouvement relativiste, l'inertie $I(v) = \gamma_v m$ remplaçant la masse inerte m.

La quantité de mouvement relativiste d'un mobile n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais par hypothèse la somme des quantités de mouvement relativistes se conserve lors d'une interaction.

24.4 Quadrivecteur force

Définition 24.7: Quadriforce

La 4-force exercée sur un système est la dérivée de la 4-impulsion de ce système par rapport au temps propre de ce système :

$$[{}_4\mathrm{f}] \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}[{}_4\mathrm{p}]}{\mathrm{d}\tau}$$

Autrement dit

$$[{}_4\mathrm{f}] \left(c\frac{\mathrm{d}(\gamma_v m)}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}(\gamma_v m\mathbf{v})}{\mathrm{d}\tau} \right)$$

En supposant la masse (inerte au repos) du système constante, avec (13.53) p. 289 :

$$[{}_4\mathrm{f}] = m[{}_4\mathrm{a}] \left(c\frac{\mathrm{d}\gamma_v}{\mathrm{d}\tau}, \mathbf{a} \right)$$

d'où

$$[{}_4\mathrm{f}]\left(m\,\frac{\gamma_v^4}{c}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a},\ m\gamma_v^2\mathbf{a}+m\,\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\right)$$

Définition 24.8: Trivecteur force relativiste

La 3-force relativiste est la dérivée de la 3-quantité de mouvement relativiste par le temps propre :

$$\mathbf{f}\overset{\text{def}}{=}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau}$$

Avec la déf. 24.3 p. 308 de la 3-quantité de mouvement relativiste :

$$\mathbf{f}=\frac{\mathrm{d}(m\mathbf{u})}{\mathrm{d}\tau}$$

En supposant la masse constante, avec la déf. 23.7 p. 288 de l'accélération propre :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= m\mathbf{a}\\
&= m\left[\gamma_v^2\mathbf{a}+\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\right]\\
\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} &= \gamma_v^2 m\left[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})+\frac{\gamma_v^2}{c^2}\,v^2\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\right]\\
&= \gamma_v^2 m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\left(1+\frac{\gamma_v^2 v^2}{c^2}\right)\\
&= \gamma_v^2 m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\left(1+\frac{v^2}{c^2(1-\mathrm{v}^2/c^2)}\right)\\
&= \gamma_v^2 m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\left(\frac{c^2-v^2+v^2}{c^2(1-\mathrm{v}^2/c^2)}\right)\\
&= \gamma_v^4 m\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}
\end{aligned}$$

La 4-force généralise à l'espace-temps la 3-force relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle :

$$[{}_4\mathrm{f}]\left(\tfrac{1}{c}\,\vec{f}\cdot\mathbf{v},\vec{f}\right)$$

$$[{}_4\mathrm{f}]\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\,\vec{f}\cdot\mathbf{v}\\ f_x\\ f_y\\ f_z\end{pmatrix}\tag{13.68}$$

24.4.1 Transformation spéciale des composantes de la quadriforce

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (déf. 1.5 p. 219). La quadriforce étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit en unités géométriques :

$$[{}_4\mathrm{f}] \begin{pmatrix} f_t \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{f}]' \begin{pmatrix} f'_t \\ f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} f'_t = \gamma_e(f_t - v_e f_x) \\ f'_x = \gamma_e(f_x - v_e f_t) \\ f'_y = f_y \\ f'_z = f_z \end{cases}$$

où les composantes de la quadriforce sont données par (13.68) p. 315.

Remarque 24.7

Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer v_e par v_e/c.

Notation 24.2

En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad f^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} f^{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f^{0'} = \gamma_e f^0 - \gamma_e v_e f^1 \\ f^{1'} = -\gamma_e v_e f^0 + \gamma_e f^1 \\ f^{2'} = f^2 \\ f^{3'} = f^3 \end{cases}$$

25 Quadri-opérateur nabla

Définition 25.1: Quadri-opérateur nabla

Le 4-opérateur nabla est une généralisation à l'espace-temps du 3-opérateur purement spatial nabla :

$$\nabla_4 \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla_3 \right)$$

On vérifie qu'il est bien covariant par la transformation de Lorentz. Soit $f = f(x, ct)$ une fonction quelconque de l'espace et du temps. Puisque $x = x(x', ct')$ et $ct = ct(x', ct')$, on a également $f(x, ct) = g(x', ct')$.

Remarque 25.1

Soit $f(x) = x^2$. En posant $X = x^2$ on a $g(X) = X$ avec $g(X) = f(x)$.

Donc

$$df(x,ct) = dg(x',ct')$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{c\partial t}\,c\,\mathrm{d}t = \frac{\partial g}{\partial x'}\,\mathrm{d}x' + \frac{\partial g}{c\partial t'}\,c\,\mathrm{d}t'$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \frac{\partial g}{\partial x'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial x'}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{\partial g}{\partial t'}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial t'}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial}{c\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial t} \end{cases}$$

Avec les transformations de Lorentz (13.17a) et (13.17b) :

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma_e\dfrac{\partial}{\partial x'} - \gamma_e v_e\dfrac{\partial}{\partial t'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = -\gamma_e v_e\dfrac{\partial}{\partial x'} + \gamma_e\dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \gamma_e\left(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \beta_e\dfrac{\partial}{c\partial t'}\right) \\ \dfrac{\partial}{c\partial t} = \gamma_e\left(\dfrac{\partial}{c\partial t'} - \beta_e\dfrac{\partial}{\partial x'}\right) \end{cases}$$

26 Quadrigradient

Le 4-gradient du champ de scalaires $\phi(x^\alpha)$ s'écrit :

$$\nabla_4\phi\left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, -\nabla_3\phi\right)$$

En notation indicielle il s'écrit :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha\phi$$

L'indice α étant en bas, il s'agit d'un 4-covecteur. En composantes contravariantes, d'après le changement de variance (13.10) p. 232 en convention de genre temps :

$$\nabla_4\phi\left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, \nabla_3\phi\right)$$

En notation indicielle, on dérive par rapport aux coordonnées covariantes :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} \equiv \partial^\alpha\phi$$

L'indice α étant en haut, il s'agit d'un 4-vecteur.

26.1 Quadrinorme du quadrigradient

Comme pour tout 4-vecteur, la 4-norme du 4-gradient est invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Son carré s'identifie à l'opérateur spatio-temporel dalembertien $\Box$.

$$\begin{aligned}\|\nabla_4\phi\|^2 &= \nabla_4\phi \bullet \nabla_4\phi \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, -\nabla_3\phi\right) \bullet \left(\frac{\partial\phi}{c\partial t}, -\nabla_3\phi\right) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{c^2\partial t^2} - \nabla_3^2\phi \\ &= \Box\phi\end{aligned}$$

En notation indicielle :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\right\| &= g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}\end{aligned}$$

27 Équation de conservation

Le 4-produit scalaire du 4-opérateur nabla avec le 4-vecteur densité numérique-flux (23.18) p. 305, c.-à-d. la 4-divergence du 4-vecteur densité numérique-flux, est invariant par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré :

$$\begin{aligned}\nabla_4 \bullet [{}_4\rho_{\mathrm{n}}] &= \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla_3\right) \bullet (\gamma_v\rho_n c, \gamma_v\rho_n\mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial\rho'_n}{\partial t} + \nabla_3\cdot(\rho'_n\mathbf{v})\end{aligned}$$

Lorsque la quantité est conservative, on retrouve l'équation de conservation sous sa forme locale (9.30) p. 183 :

$$\begin{aligned}\nabla_4 \bullet [{}_4\rho] &= \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla_3\right) \bullet (\gamma_v\rho c, \gamma_v\rho\mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho'\mathbf{v}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla_4 \bullet [{}_4\rho] = 0} \tag{13.69}$$

Notation 27.1

En notation indicielle, l'équation de conservation du 4-vecteur densité numérique-flux s'écrit :

$$\frac{\partial \rho^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

La 4-divergence du 4-vecteur densité numérique-flux est nulle.

Chapitre 14

ESPACES RIEMANNIENS

Sommaire

1 Les différents espaces 321

2 Propriétés du tenseur métrique 322

1 Les différents espaces

Les espaces proprement riemanniens regroupent les espaces euclidiens (plats) et non euclidiens (courbes). La métrique proprement riemannienne est une forme différentielle quadratique définie positive. Les espaces pseudo-riemanniens regroupent les espaces pseudo-euclidiens (plats), et pseudo-riemanniens courbes. La métrique pseudo-riemannienne est une forme différentielle quadratique indéfinie.

Les espaces riemanniens regroupent les espaces proprement riemanniens et pseudo-riemanniens. Dans le système de coordonnées (x^i), leurs métriques s'écrivent :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x^i)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

Une variété munie d'un tenseur métrique est appelée variété riemannienne ou pseudo-riemannienne. Les variétés généralisent donc les espaces riemanniens en levant la contrainte sur l'écriture de la métrique. Le tableau suivant récapitule les différents espaces :

Variété ou espace	Proprement r. Pré-euclidien Euclidien	Proprement r. Non-euclidien	Pseudo-riemann. Pré-euclidien Pseudo-euclidien	Pseudo-riemann. Pseudo-r. courbe
Métrique	déf. positive	déf. positive	indéf.	indéf.
Signature	+	+	+ et -	+ et -
Représentation	plat	courbe	plat	courbe
Sys. de coord.	rectiligne	curviligne	rectiligne	curviligne
Coefficients	constants	f(x)	constants	f(x)
Application	Méca class.	Méca. analytique	RR	RG
Exemple	plan	sphère	e. de Minkowski	trajec. Mercure

Par « métrique » on entend forme quadratique associée au tenseur métrique ou bien matrice représentative du tenseur métrique. Les coefficients de la métrique sont les composantes du tenseur métrique.

2 Propriétés du tenseur métrique

Propriété 2.1: Tenseur métrique d'un espace riemannien

1) les composantes $g_{ij}(x^i)$ sont différentiables de classe $\mathcal{C}^2$ (leurs dérivées partielles secondes par rapport aux coordonnées existent et sont continues)
2) les g_{ij} sont symétriques : $g_{ij} = g_{ji}$
3) la matrice G est telle que sa forme quadratique différentielle associée est une distance : $g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ doit être invariante par changement de coordonnées
4) définie : $\forall \mathbf{u},\ g_{ij}u^iu^j = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5) positive : $\forall \mathbf{u},\ g_{ij}u^iu^j \geqslant 0$

Lorsque G est définie positive, le déterminant g et les termes diagonaux $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}$ sont tous positifs. Dans les espaces pseudo-riemanniens les propriétés 4) et 5) sont remplacées par la propriété moins restrictive :

4) la matrice G est inversible (ssi son déterminant est non nul : $g \neq 0$). Elle est dite non singulière ou définie

Remarque 2.1

G est symétrique. Supposons que ce ne soit pas le cas et décomposons le tenseur métrique en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\forall i, j \qquad g_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(g_{ij} + g_{ji}\right) + \tfrac{1}{2}\left(g_{ij} - g_{ji}\right)$$

La contribution à $\mathrm{d}s^2$ de la partie antisymétrique est nulle,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(g_{ij}-g_{ji}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - g_{ji}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - g_{ij}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^i\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

et la métrique est symétrique.

La métrique d'un espace riemannien étant symétrique, calculons le nombre d'éléments différents de la matrice G, appelés composantes indépendantes du tenseur métrique. Comptons les éléments diagonaux plus les éléments de la partie triangulaire supérieure de la matrice. Cela représente la moitié des n^2 éléments, plus la moitié restante des n éléments diagonaux, soit

$$\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2} \tag{14.1}$$

éléments différents.

Remarque 2.2

Si la matrice G

- est définie et positive, l'espace est dit *proprement riemannien* : pour tout vecteur $\mathbf{v}$ non nul,
$$g_{ij}\,v^iv^j>0$$
g et $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}$ sont tous positifs. De plus, G^{-1} est aussi définie positive. On peut faire le rapprochement avec la définition d'un espace (proprement) euclidien.
- n'est pas définie positive, la métrique peut être positive, négative ou nulle, elle est indéfinie et l'espace est dit pseudo-riemannien. On peut faire le rapprochement avec la définition d'un espace pseudo-euclidien.

Remarque 2.3

Un espace riemannien existe en lui-même et n'a nul besoin d'être plongé dans un espace de dimension supérieure pour être représenté.

Exemple 2.1: Matrice représentant un tenseur métrique

Montrons que le champ de matrice suivant est le tenseur métrique d'un espace riemannien :

$$\begin{bmatrix}(x^1)^2-1 & 1 & 0\\ 1 & (x^2)^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{64}{9}\end{bmatrix}$$

On suppose que la métrique associée à cette matrice est invariante par changement de coordonnées.

a) les éléments de la matrice sont des polynômes en x^1 et x^2, donc de classe $\mathcal{C}^2$

b) la matrice est symétrique

c) par hypothèse la métrique associée est invariante par changement de coordonnées

d) $g=\frac{64}{9}\left\{(x^2)^2\left[(x^1)^2-1\right]-1\right\}$. On suppose que $\left[(x^1)^2-1\right]-1\neq 1$ pour que la matrice soit inversible.

Calculons la longueur de la courbe paramétrée $\mathscr{C} : \forall i = 1,2,3\ x^i = x^i(p)$:

$$\mathscr{C} \quad : \quad \begin{cases} x^1 = 2p - 1 \\ x^2 = 2p^2 \\ x^3 = p^3 \end{cases} \qquad (0 \leqslant p \leqslant 1)$$

Le carré de la dérivée de la distance élémentaire s'écrit :

$$\varepsilon \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}$$

En notation matricielle :

$$\varepsilon \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\right)^T G \left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}\right)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4p & 3p^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (2p-1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (2p^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4p \\ 3p^2 \end{pmatrix}$$

$$= 64p^6 + 64p^4 + 16p^2$$

donc $\varepsilon = 1$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = \left(8p^3 + 4p\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} = 8p^3 + 4p$$

Pour $1 > p > 0$:

$$\Gamma = \int_0^1 \mathrm{d}s = \int_0^1 \left(8p^3 + 4p\right) \mathrm{d}p = \left[2p^4 + 2p^2\right]_0^1 = 4$$

Chapitre 15

FORMES LINÉAIRES

Sommaire

1	Formes et formes linéaires	325
2	Expression analytique d'une forme linéaire	330
3	Espace vectoriel dual d'un espace vectoriel	331
4	Base duale d'une base	332
5	Base réciproque	333
6	Indépendance linéaire des vecteurs réciproques	335
7	Composantes contravariantes dans la base réciproque	338
8	Composantes covariantes dans la base réciproque	339
9	Transformation des composantes en bases réciproques	340

1 Formes et formes linéaires

Définition 1.1: Forme

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Une forme $\tilde{x}$ est une application de E dans $\mathbb{K}$.

Une forme est une application qui prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire. C'est une application qui a la particularité d'avoir pour ensemble d'arrivée le corps de l'espace vectoriel de départ.

$$\begin{aligned} \tilde{x} : E &\to \mathbb{K} \\ \mathbf{v} &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \alpha \end{aligned}$$

Exemple 1.1: Norme d'un vecteur

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit $\mathbf{v}$ un vecteur de E de composantes $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$. L'application qui à un vecteur associe sa norme est une

forme linéaire (cf. la déf. 7.1 p. 211 de la norme d'un vecteur) :

$$\tilde{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n) \mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{g_{ij} v^i v^j}$$

Le scalaire obtenu est positif ou nul.

La déf. 1.2 qui suit est une alternative à la déf. 1.6 p. 88 d'une forme linéaire, l'équivalence entre les deux définitions est démontrée par le th. 1.2 p. 330.

Définition 1.2: Forme linéaire

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Une forme linéaire $\tilde{x}$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Si l'on reprend la déf. 1.2 p. 96 d'une application linéaire, alors la forme linéaire $\tilde{x}$ est une application de E dans $\mathbb{K}$

$$\tilde{x} : E \to \mathbb{K}$$
$$\mathbf{v} \mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \alpha$$

qui est linéaire, c.-à-d. $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$:

- additive : $\tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})$
- homogène de degré un : $\tilde{x}(\alpha \odot \mathbf{u}) = \alpha \tilde{x}(\mathbf{u})$

Remarque 1.1

On dit aussi qu'à tout vecteur d'un espace vectoriel, la forme linéaire associe, ou fait correspondre, un scalaire de son propre corps.

Remarque 1.2

Les deux conditions de linéarité peuvent être remplacées par la seule condition suivante :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \tilde{x}(\alpha \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})$$

Notation 1.1

L'ensemble des formes linéaires de l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

$\tilde{x}$ prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire, en conservant les deux opérations de base d'un espace vectoriel, l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire, déf. 1.11 p. 27.

Nous dirons que $\tilde{x}$ préserve les opérations de combinaison linéaire des vecteurs (déf. 1.2 p. 22) car peu importe que $\tilde{x}$ soit appliquée avant ou après l'addition vectorielle ou la multiplication par un scalaire.

Exemple 1.2: Application $i^{\text{ème}}$ projection

Soit π_i l'application $i^{\text{ème}}$ projection, qui prend en entrée un vecteur et donne en sortie sa $i^{\text{ème}}$ composante :

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{v} \mapsto \pi_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_i$$

L'application projection possède les propriétés de linéarité de la déf. 1.2 p. 96 d'une application linéaire :

a) additivité : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$ tels que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\pi_i(\mathbf{u}) + \pi_i(\mathbf{v}) &= u_i + v_i \\ &= w_i \\ &= \pi_i(\mathbf{w}) \\ &= \pi_i(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})\end{aligned}$$

b) homogénéité de degré un : soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{v} = \alpha \odot \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned}\alpha\pi_i(\mathbf{u}) &= \alpha u_i \\ &= v_i \\ &= \pi_i(\mathbf{v}) \\ &= \pi_i(\alpha \odot \mathbf{u})\end{aligned}$$

Par conséquent, π_i est une forme linéaire.

Exemple 1.3: Forme linéaire dans un espace vectoriel de dimension 2

Soit $E = \mathbb{R}^2$ un espace vectoriel de dimension 2, et soit $\mathbf{v}$ un vecteur de E de composantes (v^1, v^2). L'application,

$$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(v^1, v^2) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = 2v^1 + 3v^2\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet, $\tilde{x}$ prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire (sous la forme d'un polynôme homogène de degré un des variables v^1 et v^2). Vérifions les deux conditions de linéarité :

a) additivité : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$ tels que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \tilde{x}(\mathbf{w}) \\ &= 2w^1 + 3w^2 \\ &= 2(u^1 + v^1) + 3(u^2 + v^2) \\ &= 2u^1 + 3u^2 + 2v^1 + 3v^2 \\ &= \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

b) homogénéité de degré un : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\alpha \odot \mathbf{v}) &= \tilde{x}(\mathbf{u}) \\ &= 2u^1 + 3u^2 \\ &= 2(\alpha v^1) + 3(\alpha v^2) \\ &= \alpha(2v^1 + 3v^2) \\ &= \alpha\tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Exemple 1.4: Produit scalaire avec un vecteur donné

Soit $\mathbf{a}$ un vecteur donné d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{R}$. Le produit scalaire avec le vecteur $\mathbf{a}$, noté f_a, prend en entrée un vecteur $\mathbf{u}$ de E et donne en sortie un scalaire de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{u}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \\ &= a^i x_i \end{aligned}$$

De plus, le produit scalaire possède les propriétés de linéarité de la déf. 1.2 p. 96 d'une application linéaire :

a) additivité : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$ tels que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{u}) + f_a(\mathbf{v}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} \\ &= f_a(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \end{aligned}$$

b) homogénéité de degré un : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{v} = \alpha \odot \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \alpha f_a(\mathbf{u}) &= \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\alpha \odot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \\ &= f_a(\mathbf{v}) \\ &= f_a(\alpha \odot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Par conséquent, f_a est une forme linéaire. Reprenons l'expression (12.7) p. 205 du produit scalaire :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i$$

Nous pouvons l'écrire

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = u_i v^i$$

où $\tilde{u}$ prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire. Notons que par symétrie du produit scalaire :

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = \tilde{v}(\mathbf{u})$$

Le produit scalaire avec un vecteur donné est une forme linéaire, en revanche le produit scalaire lui-même est une forme bilinéaire (cf. ex. 1.1 p. 344).

Exemple 1.5: Dérivée en un point

Soit $\mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et de dérivées continues. Soient $x_0 \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$. La dérivée $n^{\text{ème}}$ en x_0,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty &\to \mathbb{R} \\ f(x) &\mapsto f^n(x_0) \end{aligned}$$

qui à toute fonction $f(x)$ de $\mathcal{C}^\infty$ associe sa dérivée $n^{\text{ème}}$ en x_0 est une forme linéaire.

Exemple 1.6: Intégrale définie

Soit $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues. L'intégrale définie,

$$C \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \mapsto \int_a^b f(t)dt$$

qui à toute fonction $f(x)$ de C associe son intégrale définie de a à b est une forme linéaire.

Exemple 1.7: Norme, carré de la norme et forme quadratique

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit $\mathbf{v}$ un vecteur de E de composantes $(v^1, v^2, \dots, v^n)$. L'application qui à un vecteur associe sa norme est non linéaire. En effet, soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$:

$$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|\\ &\neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\\ &\neq \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

L'application qui à un vecteur associe le carré de sa norme est une forme quadratique :

$$\tilde{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n) \mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij}v^iv^j$$

Elle est non linéaire. En effet, soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$:

$$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2\\ &\neq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\\ &\neq \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Remarque 1.3

Une forme est définie de manière intrinsèque, le scalaire associé à tout vecteur ne dépend pas de la base choisie. Le scalaire associé à $\mathbf{u}$ est déterminé de façon définitive, nous dirons que $\tilde{x}(\mathbf{u})$ est un scalaire intrinsèque. Ainsi, dans le cas où l'on associe au vecteur $\mathbf{u}$ la valeur de l'une de ses composantes u^i dans une base donnée, on garde cette valeur y compris lorsque l'on change de base. Autrement dit, on ne refait pas l'association du vecteur avec sa nouvelle valeur de composantes.

Montrons l'équivalence avec de la déf. 1.2 p. 326 avec la déf. 1.6 p. 88 d'une forme linéaire.

Théorème 1.1

Tout polynôme homogène de degré un des n variables $v^1, v^2, \dots, v^n$ est une application linéaire qui au vecteur $\mathbf{v}(v^1, v^2, \dots, v^n)$ de l'espace vectoriel E sur le corps des réels fait correspondre un réel.

Démonstration. C'est la généralisation à $\mathbb{R}^n$ de l'ex. 1.3 p. 327.

Soit $a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n$ un polynôme homogène de degré un, il existe une application $\tilde{x}$ telle que :

$$\begin{gathered}\tilde{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \forall a_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n) \mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n \\ \forall a_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}(u^1, u^2, \ldots, u^n) \mapsto \tilde{x}(\mathbf{u}) = a_1u^1 + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n\end{gathered}$$

Alors cette application est linéaire :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= a_1(\lambda u^1 + v^1) + a_2(\lambda u^2 + v^2) + \cdots + a_n(\lambda u^n + v^n) \\ &= \lambda a_1u^1 + a_1v^1 + \lambda a_2u^2 + a_2v^2 + \cdots + \lambda a_nu^n + a_nv^n \\ &= \lambda\tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

□

Réciproquement :

Théorème 1.2

Toute forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme un polynôme homogène de degré un par rapport à n variables $v^1, v^2, \ldots, v^n$. Pour toute une forme linéaire $\tilde{x}$:

$$\begin{gathered}\tilde{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n) \mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n\end{gathered}$$

où $\forall i$ $a_i \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbf{v}$ le vecteur de composantes $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$. En utilisant l'additivité puis l'homogénéité,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{v}) &= \tilde{x}(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2 \oplus \cdots \oplus v^n\mathbf{e}_n) \\ &= \tilde{x}(v^1\mathbf{e}_1) + \tilde{x}(v^2\mathbf{e}_2) + \cdots + \tilde{x}(v^n\mathbf{e}_n) \\ &= v^1\tilde{x}(\mathbf{e}_1) + v^2\tilde{x}(\mathbf{e}_2) + \cdots + v^n\tilde{x}(\mathbf{e}_n) \\ &= a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n \\ &= a_iv^i\end{aligned}$$

où l'on a posé $\forall i$ $\tilde{x}(\mathbf{e}_i) = a_i \in \mathbb{R}$. □

2 Expression analytique d'une forme linéaire

Dans la base $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel E, soit $\mathbf{u}$ un vecteur :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) &= \tilde{x}(u^i\mathbf{e}_i) \\ &= u^i\tilde{x}(\mathbf{e}_i) \\ &= u^ia_i\end{aligned} \tag{15.1}$$

où l'on a posé $\forall i$ $\tilde{x}(\mathbf{e}_i) = a_i \in \mathbb{R}$. La forme linéaire $\tilde{x}(\mathbf{u})$ est donc parfaitement déterminée par les n scalaires a_i, sa décomposition étant unique. Ainsi on peut déterminer une forme linéaire par correspondance des vecteurs de base avec des scalaires déterminés.

3 Espace vectoriel dual d'un espace vectoriel

Considérons l'ensemble des formes linéaires définies sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour en faire un espace vectoriel adoptons pour cet ensemble les deux lois de composition :

1) addition vectorielle

La somme de deux formes linéaires est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{y}(\mathbf{u}) &= u^i a_i + u^i b_i \\ &= \sum_i u^i (a_i + b_i) \\ &= u^i c_i \\ &= \tilde{z}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

2) multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire d'une forme linéaire est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\alpha\tilde{x}(\mathbf{u}) &= \alpha(u^i a_i) \\ &= (\alpha a_i) u^i \\ &= b_i u^i \\ &= \tilde{y}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

Ces deux lois de composition vérifient les propriétés énoncées au § 2.8 p. 43. Par conséquent, l'ensemble des formes linéaires munies de ces deux lois forment un espace vectoriel appelé *dual*[1], dont les formes linéaires de E en sont les vecteurs. Un espace vectoriel et son dual sont isomorphes, déf. 1.4 p. 96. Ils ont même structure et les règles de calcul y sont analogues, on peut y définir des mesures de longeurs et d'angles (donc un produit scalaire).

Notation 3.1

L'espace duale de E est noté E^* ou $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ ou $\hom(E, \mathbb{K})$.

Remarque 3.1

L'espace dual de l'espace dual, appelé espace *bidual* et noté E^{**}, est assimilable à l'espace vectoriel de départ E.

1. « dual » signifie « deux ».

4 Base duale d'une base

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur d'un espace vectoriel E, et soit la forme linéaire e^{*i} telle que :

$$\forall i \qquad e^{*i}(\mathbf{u}) = u^i$$

C'est l'applicaton projection de l'ex. 1.2 p. 326. Cette forme linéaire donne en sortie la $i^{ème}$ composante contravariante du vecteur qu'elle prend en entrée. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u^i \mathbf{e}_i \\ &= e^{*i}(\mathbf{u})\, \mathbf{e}_i\end{aligned}$$

D'après (15.1) p. 330, pour toute forme linéaire $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) &= u^i a_i \\ &= a_i e^{*i}(\mathbf{u}) \\ \tilde{x} &= a_i e^{*i}\end{aligned}$$

La forme linéaire $\tilde{x}$ se décompose d'une façon unique sur l'espace des formes linéaires e^{*i}. Les n formes linéaires e^{*i} constituent donc une base de l'espace vectoriel dual E^*, et les a_i sont les composantes de la forme linéaire dans cette base.

De plus

$$\begin{aligned}&\forall j \quad e^{*j}(\mathbf{u}) = e^{*j}(u^i \mathbf{e}_i) \\ &\forall j \quad u^j = u^i e^{*j}(\mathbf{e}_i)\end{aligned}$$

donc :

$$\forall i, j \quad e^{*j}(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j$$

Définition 4.1: Base duale d'une base

La base $(e^{*1}, e^{*2}, \ldots, e^{*n})$ de E^* telle que

$$\forall i, j \qquad e^{*j}(\mathbf{e}_i) \overset{\text{def}}{=} \delta_i^j$$

est appelée base duale de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E. La base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E est appelée base antéduale de la base $(e^{*1}, e^{*2}, \ldots, e^{*n})$ de E^*.

Exemple 4.1

Soit la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons les composantes a_i et b_i des vecteurs $e^{*1}(a_1, a_2)$ et $e^{*2}(b_1, b_2)$ de la base duale (e^{*1}, e^{*2}). D'après la déf. 4.1 des bases duales, les formes linéaires sont telles que :

$$\begin{cases} e^{*1}(\mathbf{e}_1) = 1 \\ e^{*1}(\mathbf{e}_2) = 0 \\ e^{*2}(\mathbf{e}_1) = 1 \\ e^{*2}(\mathbf{e}_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{*1}(2,1) = 1 \\ e^{*1}(3,1) = 0 \\ e^{*2}(2,1) = 1 \\ e^{*2}(3,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 1 \\ 3a_1 + a_2 = 0 \\ 2b_1 + b_2 = 1 \\ 3b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 3 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = -2 \end{cases}$$

Donc les vecteurs de la base duale sont $e^{*1}(-1, 3)$ et $e^{*2}(1, -2)$.

5 Base réciproque

Définition 5.1: Base réciproque

La base $(\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ de l'espace vectoriel E_n, telle que

$$\forall i, j \qquad \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \overset{\text{def}}{=} \delta_{ij}$$

est appelée base réciproque de la base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de E_n.

Si la base $(\mathbf{e}_i)$ est la base formée par les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées, alors sa base réciproque ϵ_j est la base formée par les vecteurs perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées.

Remarque 5.1

Une base est confondue avec sa base réciproque si elle est orthogonale et normée. Normée car avec $\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 = 1$, si $\mathbf{e}_1 = 2$ alors $\epsilon_1 = 1/2$.

Cette définition est proche de la déf. 4.1 p. 332 ci-dessus de la base duale. Cependant on reste dans l'espace E et on utilise un produit scalaire. Dans les espaces définis sans produit scalaire, donc sans métrique, la base réciproque s'appelle base duale, et les covecteurs s'appellent des formes linéaires ou vecteurs duaux.

Soit B la matrice changement de base $(\boldsymbol{\epsilon}_j) \to (\mathbf{e}_i)$:

$$\begin{aligned} \forall i \qquad \mathbf{e}_i &= \sum_j B_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j \\ \forall i, k \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k &= \sum_j B_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ g_{ik} &= \sum_j B_{ij}\, \delta_{jk} \\ g_{ik} &= B_{ik} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall i \qquad \mathbf{e}_i = \sum_j g_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j$$

Le tenseur métrique G permet de passer des vecteurs d'une base réciproque à ceux de la base d'origine. Nous voyons que cette relation qui s'appliquait à des composantes, relations (12.5)

p. 204, s'applique ici à des vecteurs. Par analogie, les vecteurs de la base réciproque seront notés avec un indice supérieur, ce qui permettra l'emploi de la convention de sommation sur les indices répétés 1.3 p. 15. En remplaçant $\boldsymbol{\epsilon}_j$ par $\mathbf{e}^j$, la dernière relation s'écrit

$$\boxed{\forall i \qquad \mathbf{e}_i = g_{ij}\,\mathbf{e}^j}$$

et la déf. 5.1 p. 333 devient :

$$\boxed{\forall i,j \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j \overset{\text{def}}{=} \delta_i^j} \tag{15.2}$$

Avec (12.13) p. 209 :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j &= \delta_i^j \\ g_{ik}\,\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j &= g_{ik}\,g^{kj} \\ \forall k,j \qquad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j &= g^{kj} \end{aligned}$$

justifiant l'emploi d'indices supérieurs pour l'écriture du tenseur métrique réciproque. Soit A la matrice changement de base $(\mathbf{e}_j) \to (\mathbf{e}^i)$:

$$\begin{aligned} \forall i \qquad \mathbf{e}^i &= \sum_j A_{ij}\,\mathbf{e}_j \\ \forall i,k \qquad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k &= \sum_j A_{ij}\,\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k \\ g^{ik} &= \sum_j A_{ij}\,\delta_j^k \\ g^{ik} &= A_{ik} \end{aligned}$$

Le tenseur métrique $[g^{ij}]$ permet de passer d'une base à sa base réciproque :

$$\boxed{\forall i \qquad \mathbf{e}^i = g^{ij}\,\mathbf{e}_j} \tag{15.3}$$

Si la base d'origine n'est pas orthonormée, les vecteurs de la base réciproque ne sont pas de norme unité :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j &= \delta_i^j \\ \forall i \qquad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i &= 1 \\ \|\mathbf{e}_i\|\,\|\mathbf{e}^i\| \cos\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i\right) &= 1 \\ \|\mathbf{e}^i\| &= \frac{1}{\|\mathbf{e}_i\| \cos\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i\right)} \end{aligned}$$

6 Indépendance linéaire des vecteurs réciproques

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E_n. Pour démontrer que les vecteurs réciproques $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n)$ forment aussi une base de E_n, nous devons montrer qu'ils sont linéairement indépendants :

$$\lambda_j \mathbf{e}^j = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall j \quad \lambda_j = 0$$

Posons $\lambda_j \mathbf{e}^j = \mathbf{0}$. Soit $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ un vecteur de l'espace vectoriel E_n :

$$\begin{aligned} \lambda_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{u} &= \lambda_j \mathbf{e}^j \cdot u^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} &= \lambda_j u^i (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i) \\ 0 &= \lambda_j u^i \delta_i^j \\ 0 &= \lambda_j u^j \end{aligned}$$

Cette égalité devant être vérifiée quels que soient les u^j, tous les λ_j sont nuls et les vecteurs $\mathbf{e}^j$ sont linéairement indépendants.

Exemple 6.1: Base réciproque d'une base quelconque

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base d'un espace vectoriel euclidien E_2, telle que :

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs de base sont exprimés dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Déterminons sa base réciproque $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$.

a) en utilisant la définition de la base réciproque (15.2) p. 334.
Posons $\mathbf{e}^1(a, b)$ et $\mathbf{e}^2(c, d)$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 3 - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{e}^1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + 2d = 0 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2d \\ -2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{e}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

b) en se servant du tenseur dual du tenseur métrique (15.3) p. 334 :

$$G \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad [g^{ij}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 25 & -11 \\ -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^1 = g^{11}\mathbf{e}_1 + g^{12}\mathbf{e}_2 = \frac{25}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}^2 = g^{21}\mathbf{e}_1 + g^{22}\mathbf{e}_2 = -\frac{11}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Exemple 6.2: Base réciproque d'une base orthogonale

Soit $\{\mathbf{e}_1(a,0,0), \mathbf{e}_2(0,b,0), \mathbf{e}_3(0,0,c)\}$ une base de l'espace vectoriel euclidien E_3. Déterminons sa base réciproque. Soit $\mathbf{e}^1(x_1,x_2,x_3)$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^1=1 \\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}^1=0 \\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}^1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,0,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)=1 \\ (0,b,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)=0 \\ (0,0,c)\cdot(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1=1 \\ bx_2=0 \\ cx_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1/a \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

Par conséquent $\mathbf{e}^1=\left(\frac{1}{a},0,0\right)$. De même on trouve $\mathbf{e}^2=\left(0,\frac{1}{b},0\right)$ et $\mathbf{e}^3=\left(0,0,\frac{1}{c}\right)$. Lorsque la base est orthonormée, $a=b=c=1$, elle se confond avec sa base réciproque.

Exemple 6.3: Base réciproque d'une base normée

Soit $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ une base normée de l'espace vectoriel euclidien E_2, telle que $(\widehat{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2})=70°$. Construisons sa base réciproque.

a) en utilisant la définition de la base réciproque (15.2) p. 334 :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_1=1 \\ \mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_2=0 \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{e}^1\|=\frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|\cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}^1)}=\frac{1}{\cos(20)}\approx 1,064$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}_1=0 \\ \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}_2=1 \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{e}^2\|=\frac{1}{\|\mathbf{e}_2\|\cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}^2)}=\frac{1}{\cos(20)}\approx 1,064$$

b) en se servant du tenseur métrique (15.3) p. 334 :

$$G\begin{bmatrix} 1 & \cos(70) \\ \cos(70) & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [g^{ij}]=\frac{1}{\sin^2(70)}\begin{bmatrix} 1 & -\cos(70) \\ -\cos(70) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= g^{11}\mathbf{e}_1+g^{12}\mathbf{e}_2 \\ &= \frac{\mathbf{e}_1}{\sin^2(70)}-\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^2 &= g^{21}\mathbf{e}_1+g^{22}\mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\mathbf{e}_1+\frac{\mathbf{e}_2}{\sin^2(70)} \end{aligned}$$

En exprimant $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{1}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}\cos(70)\\\sin(70)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\-\cos(70)/\sin(70)\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}^2 = -\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}\cos(70)\\\sin(70)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1/\sin(70)\end{pmatrix}$$

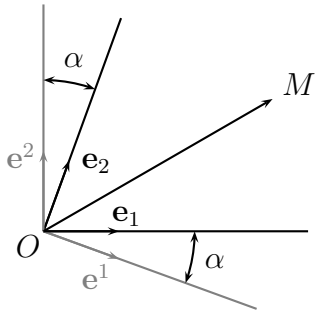


FIG. 15.1 – Bases réciproques

Exemple 6.4: Base réciproque de la base naturelle polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$

a) en utilisant la définition de la base réciproque (15.2) p. 334 :

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}^\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho = 1\\ \boldsymbol{e}^\rho \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0\end{cases} \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{e}^\rho\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_\rho\|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}^\rho = \boldsymbol{e}_\rho$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}^\theta \cdot \boldsymbol{e}_\rho = 0\\ \boldsymbol{e}^\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 1\end{cases} \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{e}^\theta\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_\theta\|} = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}^\theta = \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{\rho^2}$$

b) en se servant du tenseur dual du tenseur métrique en coordonnées polaires (12.15) p. 210 :

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\rho^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}^\rho = g^{\rho\rho}\boldsymbol{e}_\rho + g^{\rho\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$= \boldsymbol{e}_\rho$$

$$\boldsymbol{e}^\theta = g^{\theta\rho}\boldsymbol{e}_\rho + g^{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$= \boldsymbol{e}_\theta/\rho^2$$

Exemple 6.5: Base réciproque de la base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de la relativité restreinte

- en utilisant la définition de la base réciproque (15.2) p. 334. Pour le vecteur réciproque $\mathbf{e}^0$ porté par la coordonnée temporelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

En convention de genre temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1 \\ &= \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}_0 \end{aligned}$$

Pour le vecteur réciproque $\mathbf{e}^1$ porté par la première coordonnée spatiale :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= -1 \\ &= -\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}^1 \end{aligned}$$

De même $\mathbf{e}^2 = -\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_3$.

- d'après (12.21) p. 213 le tenseur métrique en relativité restreinte est égal à son inverse :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ -\mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

7 Composantes contravariantes dans la base réciproque

À partir de la déf. 2.13 p. 47 des composantes contravariantes dans la base réciproque :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \mathrm{u}^i \boldsymbol{\epsilon}_i \\ &= \sum_i \mathrm{u}^i \mathbf{e}^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall j \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \mathbf{e}_j &= \sum_i \mathrm{u}^i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_i \mathrm{u}^i \delta^i_j \\ u_j &= \mathrm{u}^j \end{aligned} \tag{15.4}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = u_i \mathbf{e}^i} \tag{15.5}$$

Exemple 7.1: Composantes contravariantes dans la base réciproque

En reprenant l'exercice 6.3 p. 336, représentons les composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base réciproque $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ non normée (Fig. 15.2) :

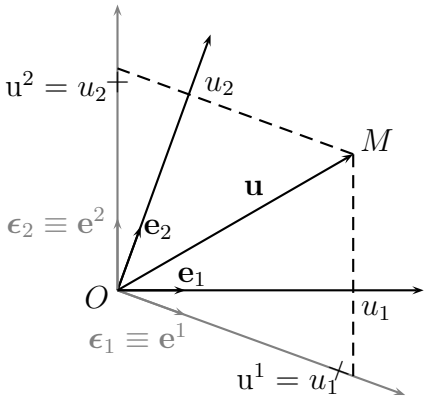


Fig. 15.2 – Composantes contravariantes dans la base réciproque

8 Composantes covariantes dans la base réciproque

À partir de la déf. 2.13 p. 47 des composantes contravariantes dans la base d'origine :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= u^i \mathbf{e}_i \\ \forall j \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j &= u^i \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \\ &= u^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j \\ &= u^i \delta^j_i \\ \mathrm{u}_j &= u^j \end{aligned} \tag{15.6}$$

et

$$\boxed{\forall i \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \mathbf{e}^i = u^i}$$

Exemple 8.1: Composantes covariantes dans la base réciproque

En reprenant l'exercice 6.3 p. 336, représentons les composantes covariantes du vecteur $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base réciproque $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ non normée (Fig. 15.3) :

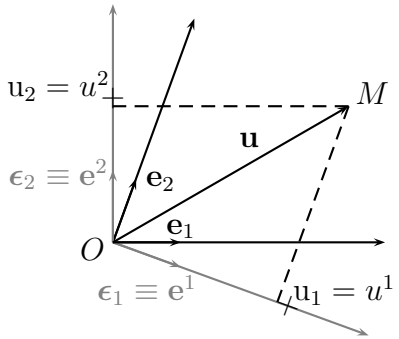


FIG. 15.3 – Composantes covariantes dans la base réciproque

9 Transformation des composantes en bases réciproques

9.1 Transformation des composantes contravariantes

Soient deux bases d'un espace vectoriel E_3, chacune ayant une base réciproque. Avec (15.4) p. 339 et (5.17) p. 81 :

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{u}^i &= u_i \\ &= A_i^{j'} u_{j'} \\ &= \sum_{j=1}^{3} A_i^{j'} \mathrm{u}^{j'} \end{aligned} \tag{15.7}$$

Les composantes contravariantes dans la base réciproque se transforment de façon identique aux composantes covariantes dans la base d'origine. Si les bases sont naturelles, avec la remarque 4.1 p. 73 :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{u}^i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathrm{u}^{j'}$$

9.2 Transformation des composantes covariantes

Soient deux bases d'un espace vectoriel E_3. Avec (15.6) p. 339 et (5.13) p. 76 :

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{u}_i &= u^i \\ &= B^i_{j'} u^{j'} \\ &= \sum_{j=1}^{3} B^i_{j'} \mathrm{u}_{j'} \end{aligned}$$

Les composantes covariantes dans la base réciproque se transforment de façon identique aux composantes contravariantes dans la base d'origine. Si les bases sont naturelles, avec la remarque 4.3 p. 74 :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{u}_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathrm{u}_{j'}$$

9.3 Transformation des vecteurs de base de la base réciproque

Soient $(\boldsymbol{\epsilon}_i)$ et $(\boldsymbol{\epsilon}_{j'})$ les bases réciproques respectives des bases $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{e}_{j'})$. Soient A la matrice changement de base $(\boldsymbol{e}_i) \to (\boldsymbol{e}_{j'})$, et A' la matrice changement de base $(\boldsymbol{e}_{j'}) \to (\boldsymbol{e}_i)$. Avec (15.7) p. 340 :

$$\begin{aligned} \mathrm{u}^{i'} \boldsymbol{\epsilon}_{i'} &= \mathrm{u}^j \boldsymbol{\epsilon}_j \\ \sum_{i=1}^{3} \mathrm{u}^{i'} \boldsymbol{\epsilon}_{i'} &= \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_i A^{i'}_j \mathrm{u}^{i'} \right) \boldsymbol{\epsilon}_j \\ \forall \mathrm{u}^{i'} \qquad \sum_{i=1}^{3} \mathrm{u}^{i'} \boldsymbol{\epsilon}_{i'} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} A^{i'}_j \boldsymbol{\epsilon}_j \right) \mathrm{u}^{i'} \\ \forall i = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{i'} &= \sum_{j=1}^{n} A^{i'}_j \boldsymbol{\epsilon}_j \end{aligned}$$

En changeant de notation, $\boldsymbol{\epsilon}_i$ devient $\boldsymbol{e}^i$:

$$\boxed{\forall i = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{e}^{i'} = A^{i'}_j \boldsymbol{e}^j}$$

En utilisant (5.10) p. 71 :

$$\begin{aligned} \forall k = 1,2,3 \qquad B^k_{i'} \boldsymbol{e}^{i'} &= B^k_{i'} A^{i'}_j \boldsymbol{e}^j \\ &= \delta^k_j \boldsymbol{e}^j \\ &= \boldsymbol{e}^k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k = 1,2,3 \qquad \boldsymbol{e}^k = B^k_{i'} \boldsymbol{e}^{i'}}$$

Les vecteurs de base de la base réciproque se transforment de façon « contraire » (par la matrice inverse de la transposée) aux vecteurs de base de la base d'origine, relations (5.7) p. 70.

Si $(\boldsymbol{e}_i)$ et $(\boldsymbol{e}_{j'})$ sont des bases naturelles :

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad \boldsymbol{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\, \boldsymbol{e}^j \tag{15.8}$$

$$\forall k = 1, 2, 3 \qquad \boldsymbol{e}^{k} = \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}}\, \boldsymbol{e}^{i'} \tag{15.9}$$

Chapitre 16

FORMES BILINÉAIRES

Sommaire

1	Définition d'une forme bilinéaire	343
2	Expression analytique d'une forme bilinéaire	345
3	Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique	346
4	Expression analytique d'une forme quadratique	347
5	Matrices et formes bilinéaires	347

1 Définition d'une forme bilinéaire

Définition 1.1: Forme bilinéaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme bilinéaire est une application qui à deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E^2 associe un scalaire de son propre corps $\mathbb{R}$,

$$B : E^2 \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha$$

qui est linéaire pour chacun de ses arguments. $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E^3,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$:

a) B est linéaire pour son premier argument,
- additive : $B(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
- homogène de degré un : $B(\lambda \odot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

b) B est linéaire pour son second argument :
- additive : $B(\mathbf{u}, \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
- homogène de degré un : $B(\mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Les formes bilinéaires généralisent les formes linéaires, en ce sens qu'elles prennent en entrée deux vecteurs plutôt qu'un seul. On appelle les formes linéaires des *une-formes*, et les formes bilinéaires des *deux-formes*, ce qui permet de généraliser aux *n-formes* qui prennent en entrée n vecteurs et donnent en sortie un scalaire.

Définition 1.2: Forme bilinéaire symétrique

B est une forme bilinéaire symétrique ssi :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \qquad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

Exemple 1.1

Le produit scalaire, déf. 6.1 p. 125, est une forme bilinéaire symétrique. En effet :

$$E^2 \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha$$

Le produit scalaire est linéaire dans ses deux arguments :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}$$
$$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v})$$

Le produit scalaire est symétrique :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Exemple 1.2

Le tenseur métrique est une forme bilinéaire symétrique. En effet :

$$g : E^2 \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \mapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha$$

g est linéaire dans ses deux arguments :

$$g_{ij} u^i v^j = g_{ij} \left(a^i + b^i\right) v^j = \left(g_{ij} a^i + g_{ij} b^i\right) v^j = g_{ij} a^i v^j + g_{ij} b^i v^j$$
$$g_{ij} u^i v^j = g_{ij} u^i \left(a^j + b^j\right) = u^i \left(g_{ij} a^j + g_{ij} b^j\right) = g_{ij} u^i a^j + g_{ij} u^i b^j$$
$$g_{ij} \left(\lambda u^i\right) v^j = \lambda g_{ij} u^i v^j = g_{ij} u^i \left(\lambda v^j\right)$$

g est symétrique :

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

Définition 1.3: Forme bilinéaire antisymétrique

B est une forme bilinéaire antisymétrique ssi :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \qquad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

On en déduit que pour une forme bilinéaire antisymétrique $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$.

2 Expression analytique d'une forme bilinéaire

Dans la base $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel E_n, soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= B(u^i\mathbf{e}_i, v^j\mathbf{e}_j) \\ &= u^i v^j B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) \\ &= u^i v^j a_{ij} \end{aligned}$$

où

$$\forall i,j \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} \overset{\text{def}}{=} B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$$

La forme bilinéaire $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est donc parfaitement déterminée par les n^2 scalaires a_{ij}, sa décomposition étant unique. Ainsi on peut déterminer une forme bilinéaire en mettant en correspondance les couples de vecteurs de base avec les scalaires déterminés.

Exemple 2.1: Décomposition d'une forme bilinéaire

La forme bilinéaire $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ se décompose sur $E_2 \times E_2$ selon :

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = au^1v^1 + b(u^1v^2) + b'(u^2v^1) + cu^2v^2$$

où a, b, b', c sont des scalaires.

2.1 Expression analytique d'une forme bilinéaire symétrique

Lorsque la forme bilinéaire est symétrique

$$a_{ij} = a_{ji}$$

sa décomposition est déterminée par les $n(n+1)/2$ scalaires a_{ij}.

Exemple 2.2: Décomposition d'une forme bilinéaire symétrique

La forme bilinéaire symétrique $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ se décompose sur $E_2 \times E_2$ selon :

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = au^1v^1 + b(u^1v^2 + u^2v^1) + cu^2v^2$$

où a, b, c sont des scalaires.

2.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire antisymétrique

Lorsque la forme bilinéaire est antisymétrique

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

sa décomposition est déterminée par les $n(n-1)$ scalaires a_{ij}.

Exemple 2.3: Décomposition d'une forme bilinéaire antisymétrique

La forme bilinéaire antisymétrique $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ se décompose sur $E_2 \times E_2$ selon :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= b\left(u^1v^2\right) - b\left(u^2v^1\right) \\ &= b\left(u^1v^2 - u^2v^1\right) \end{aligned}$$

où b est un scalaire.

3 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique

Soit B une forme bilinéaire symétrique et soit Q la forme quadratique telle que :

$$\begin{aligned} Q : E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto Q(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique B.

B étant symétrique, utilisons la linéarité des formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= B(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}) + B(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u},\mathbf{u}) + B(\mathbf{v},\mathbf{u}) + B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\ &= Q(\mathbf{u}) + 2B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + Q(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Soit Q une forme quadratique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans le corps des réels $\mathbb{R}$ et soit B la forme bilinéaire symétrique telle que :

$$\begin{aligned} B : E^2 &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u},\mathbf{v} &\mapsto B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}\left[Q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v})\right] \end{aligned}$$

B est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique Q. Toute forme quadratique définit une forme bilinéaire symétrique et réciproquement. Les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques se déterminent mutuellement. Les théories des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques sont essentiellement les mêmes.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} Q(\lambda \odot \mathbf{u}) &= B(\lambda \odot \mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 Q(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$:

$$Q(0 \odot \mathbf{u}) = 0^2 Q(\mathbf{u}) \qquad \Rightarrow \qquad Q(\mathbf{0}) = 0$$

4 Expression analytique d'une forme quadratique

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ &= B(u^i\mathbf{e}_i, u^j\mathbf{e}_j) \\ &= u^i u^j B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

Exemple 4.1

La forme bilinéaire sur $E_2 \times E_2$:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{u}) &= au^1u^1 + b(u^1u^2 + u^2u^1) + cu^2u^2 \\ &= a(u^1)^2 + 2b(u^1u^2) + c(u^2)^2 \end{aligned}$$

où a, b, c sont des scalaires.

5 Matrices et formes bilinéaires

D'après la déf. 1.2 p. 96, une transformation linéaire est une matrice carrée prenant en entrée un vecteur et donnant en sortie un vecteur. Les matrices carrées ne peuvent donc pas représenter aussi les formes bilinéaires qui elles prennent en entrée un vecteur et donnent en sortie une forme linéaire (ou prennent en entrée deux vecteurs et donne en sortie un scalaire).

Une représentation des formes bilinéaires reste cependant possible sous la forme d'une matrice ligne de matrices lignes. La relation (12.8) p. 208 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} u^2 \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} g_{11}u^1 & g_{12}u^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{21}u^2 & g_{22}u^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}u^1 + g_{21}u^2 & g_{12}u^1 + g_{22}u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{pmatrix} g_{11}u^1 + g_{21}u^2 & g_{12}u^1 + g_{22}u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

qui redonne bien le système :

$$\begin{cases} u_1 = g_{11}\, u^1 + g_{21}\, u^2 \\ u_2 = g_{12}\, u^1 + g_{22}\, u^2 \end{cases}$$

Dans un espace vectoriel de dimension trois, le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Pour inverser G nous devons revenir à une matrice carrée. De plus, cette notation n'est pas applicable à des tenseurs ayant plus de deux indices.

Exemple 5.1: Tenseur métrique en deux dimensions

Soit $\{\mathbf{e}_1(2,0), \mathbf{e}_2(-1,3)\}$ une base de l'espace vectoriel euclidien E_2. Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 4 \\ g_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -2 \\ g_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -2 \\ g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \quad G\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 10 \end{pmatrix}\right)$$

Exemple 5.2: Tenseur métrique en trois dimensions

Dans l'espace de la physique newtonienne, plaçons-nous dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Exemple 5.3: Tenseur métrique de l'espace-temps relativiste

Plaçons-nous dans l'une des deux bases canoniques (métrique de genre temps ou espace) $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, de l'espace-temps de la relativité restreinte en deux dimensions d'espace :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_0(1,0,0) \\ \boldsymbol{e}_1(0,i,0) \\ \boldsymbol{e}_2(0,0,i) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_0(i,0,0) \\ \boldsymbol{e}_1(0,1,0) \\ \boldsymbol{e}_2(0,0,1) \end{cases}$$

Dans le premier cas, le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Exemple 5.4: Inverse d'un tenseur métrique quelconque

Dans une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de l'espace vectoriel E_2, on se donne le tenseur métrique suivant :

$$G\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Déterminons les composantes de son inverse $[g^{ij}]$ grâce aux relations (12.13) p. 209 :

$$\begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \delta_1^1 \\ g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \delta_1^2 \\ g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21} = \delta_2^1 \\ g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = \delta_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2g^{11} - 3g^{21} = 1 \\ 2g^{12} - 3g^{22} = 0 \\ -3g^{11} + g^{21} = 0 \\ -3g^{12} + g^{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{11} = -1/7 \\ g^{12} = -3/7 \\ g^{21} = -3/7 \\ g^{22} = -2/7 \end{cases}$$

$$\left[g^{ij}\right] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La matrice de matrice suggère d'introduire un nouveau produit matriciel, le *produit de Kronecker*.

Chapitre 17

PRODUIT DE KRONECKER

Sommaire

1 Propriétés du produit de Kronecker 351
2 Formes bilinéaires 354

1 Propriétés du produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices de tailles arbitraires, carrées ou rectangulaires, donne une matrice de sous-matrices. Le produit de Kronecker de deux matrices s'écrit :

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes B \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Contrairement à la multiplication matricielle les matrices n'ont pas besoin d'être compatibles. Si la matrice A a n éléments, son produit de Kronecker aura aussi n éléments, qui seront des matrices.

Propriété 1.1: Produit de Kronecker

1) associativité :
$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$
2) distributivité à gauche par rapport à l'addition matricielle :
$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$
3) distributivité à droite par rapport à l'addition matricielle :
$$(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$$
4) multiplication par un scalaire :
$$k(A \otimes B) = (kA) \otimes B = A \otimes (kB)$$
5) en général non commutativité :
$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

Exemple 1.1: Produit de Kronecker de deux matrices colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice colonne de matrices colonnes, c.-à-d. une matrice ayant deux éléments et non quatre.

Exemple 1.2: Produit de Kronecker d'une matrice colonne par une matrice ligne

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice colonne de matrices lignes, ayant aussi deux éléments et non quatre. La pré-multiplication matricielle de ce résultat (et non le produit de Kronecker) par une forme linéaire $\underline{u}$ donne une forme linéaire,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} &= u_1\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}u_1a_1b_1 & u_1a_1b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_2a_2b_1 & u_2a_2b_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}u_1a_1b_1 + u_2a_2b_1 & u_1a_1b_2 + u_2a_2b_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

puis la post-multiplication matricielle par un vecteur $\mathbf{v}$ donne un scalaire :

$$\begin{pmatrix}u_1a_1b_1 + u_2a_2b_1 & u_1a_1b_2 + u_2a_2b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} = u_1a_1b_1v^1 + u_2a_2b_1v^1 + u_1a_1b_2v^2 + u_2a_2b_2v^2$$

Exemple 1.3: Produit de Kronecker d'une matrice ligne par une matrice colonne

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}b_1\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} & b_2\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1\\ b_1a_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_2a_1\\ b_2a_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le résultat est une matrice ligne de matrices colonnes. La post-multiplication matricielle de ce résultat par un vecteur $\mathbf{v}$ donne un vecteur,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1\\ b_1a_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_2a_1\\ b_2a_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}b_1a_1\\ b_1a_2\end{pmatrix}v^1 + \begin{pmatrix}b_2a_1\\ b_2a_2\end{pmatrix}v^2\\ &= \left[\begin{pmatrix}b_1a_1v^1\\ b_1a_2v^1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2a_1v^2\\ b_2a_2v^2\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}b_1a_1v^1 + b_2a_1v^2\\ b_1a_2v^1 + b_2a_2v^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

puis la pré-multiplication par une forme linéaire $\underline{u}$ donne le même scalaire qu'en 1.2 :

$$\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1v^1 + b_2a_1v^2\\ b_1a_2v^1 + b_2a_2v^2\end{pmatrix} = u_1b_1a_1v^1 + u_1b_2a_1v^2 + u_2b_1a_2v^1 + u_2b_2a_2v^2$$

2 Formes bilinéaires

Le produit de Kronecker d'une matrice ligne par une matrice ligne donne une matrice ligne de matrices lignes :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} & a_2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

On note que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} & b_2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_2 a_1 & b_2 a_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On vérifie que c'est une forme bilinéaire. La multiplication matricielle par un premier vecteur $\mathbf{u}$ donne une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix} u^1 + \begin{pmatrix} a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} u^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 u^1 & a_1 b_2 u^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 b_1 u^2 & a_2 b_2 u^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 u^1 + a_2 b_1 u^2 & a_1 b_2 u^1 + a_2 b_2 u^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La multiplication matricielle par un second vecteur $\mathbf{v}$ donne un scalaire :

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 u^1 + a_2 b_1 u^2 & a_1 b_2 u^1 + a_2 b_2 u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 u^1 v^1 + a_2 b_1 u^2 v^1 + a_1 b_2 u^1 v^2 + a_2 b_2 u^2 v^2$$

Chapitre 18

ESPACES VECTORIELS PRÉ-EUCLIDIENS

Sommaire

1 Définitions 355
2 Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien 356
3 Angle entre deux vecteurs 359

1 Définitions

Le produit scalaire ne fait pas partie intégrante de la structure d'espace vectoriel, mais est une structure supplémentaire qui peut ou non être introduite. Les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire portent les adjectifs suivants :

Définition 1.1: Espaces vectoriels pré-euclidiens

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (tout court) est appelé espace vectoriel pré-euclidien.

Définition 1.2: Espace vectoriel euclidien

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien est appelé espace vectoriel euclidien, ou parfois proprement euclidien ou purement euclidien.

Les espaces vectoriels euclidiens sont inclus dans les espaces vectoriels pré-euclidiens.

Exemple 1.1: Espace euclidien

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de nombres réels (un n-uplet est une liste (ou séquence ou multiplet) ordonnée de n objets, alors qu'un n-uple est une liste non ordonnée de n objets) muni du produit scalaire euclidien est un espace euclidien de dimension n. Les n-uplets de réels ne sont en fait que les coordonnées cartésiennes des points de l'espace euclidien.

Définition 1.3: Espace vectoriel pseudo-euclidien

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire indéfini (qui peut être positif, négatif ou nul) est appelé espace vectoriel pseudo-euclidien ou improprement euclidien.

Les espaces vectoriels pseudo-euclidiens sont inclus dans les espaces vectoriels pré-euclidiens.

Remarque 1.1

Les espaces vectoriels pré-euclidiens sont des espaces plats et réciproquement. Pré-euclidien et plat sont des synonymes. L'existence d'un produit scalaire n'est possible que dans ces espaces, et par conséquent les définit pleinement. Dans un espace courbe, le produit scalaire n'est défini que localement dans l'espace pré-euclidien tangent.

D'après le théorème de Gram-Schmidt, dans tout espace pré-euclidien on peut trouver une base orthonormale ou pseudo-orthonormale, par exemple en relativité restreinte. Le tenseur métrique est alors diagonal, ses termes sont indépendants des coordonnées et la base est donc globale. À cette base nous associons un système de coordonnées rectangulaires, global. En revanche, dans un espace courbe il n'existe pas de base globale, les vecteurs de base sont fonction des coordonnées. Le tenseur métrique est diagonal ssi le système de coordonnées est orthogonal, mais ses éléments dépendent des coordonnées, il est local.

2 Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien

Grâce au th. 8.1 p. 212 de Gram-Schmidt plaçons-nous dans une base orthogonale d'un espace vectoriel pré-euclidien. Dans cette base le tenseur métrique est diagonal et les coefficients g_{ij} sont des constantes. Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ s'écrit

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = g_{11}u^1v^1 + g_{22}u^2v^2 + \cdots + g_{nn}u^nv^n$$

et la norme d'un vecteur non nul $\mathbf{u}$ a pour expression :

$$\|\mathbf{u}\| = \left[g_{11}\left(u^1\right)^2 + g_{22}\left(u^2\right)^2 + \cdots + g_{nn}\left(u^n\right)^2\right]^{1/2}$$

Définition 2.1: Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien

On appelle signature d'un espace vectoriel l'ensemble des signes positifs et négatifs apparaissant dans l'expression du produit scalaire de deux vecteurs ou de la norme d'un vecteur, où l'on a remplacé tous les g_{ii} par leur valeur respective, positive ou négative.

Le nombre de signes + et de signes − est une caractéristique intrinsèque de l'espace vectoriel, indépendante de la base orthogonale considérée.

Si la signature ne comporte que des signes identiques elle est dite *euclidienne*. La forme quadratique est alors définie et l'espace vectoriel est euclidien.

Si elle ne comporte que des signes positifs, la forme quadratique est définie positive. Tous les g_{ii} sont positifs, le produit scalaire est euclidien et la norme d'un vecteur non nul est strictement positive.

Exemple 2.1: Signature de l'espace de la physique non relativiste

Dans une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien de la physique non relativiste, le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3$$

C'est l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, de signature euclidienne $(+++)$.

Exemple 2.2: Signature de l'espace vectoriel euclidien de dimension 2

À la surface d'un cylindre de rayon ρ, plaçons-nous dans la base naturelle $(\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z)$ associée aux coordonnées cylindriques (ϕ, z) (fig. 3.9 p. 41). Le tenseur métrique s'écrit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_\phi\cdot\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où ρ est constant. C'est l'espace euclidien de dimension 2, de signature $(++)$. Le tenseur métrique est le même que celui d'un plan car en déroulant un cylindre (ou un cône) on obtient un plan.

Si la signature comporte des signes différents, le produit scalaire est pseudo-euclidien, la norme s'appelle pseudo-norme (cf. § 5 p. 119) car elle ne satisfait pas à la condition de séparation. L'espace est pseudo-euclidien, son tenseur métrique est de la forme

$$\forall i,j \qquad g_{ij} = \pm\delta_{ij}$$

avec au moins un signe positif et un signe négatif. Lorsqu'un seul signe est différent des autres, la signature est dite *lorentzienne*.

Exemple 2.3: Signature de l'espace-temps de la relativité restreinte

Dans une base orthonormée de l'espace-temps de la relativité restreinte, le 4-produit scalaire en convention de genre temps (13.5) p. 227 s'écrit :

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = u^0v^0 - u^1v^1 - u^2v^2 - u^3v^3$$

C'est un espace pseudo-euclidien de dimension 4, de signature $(+---)$. Les signatures $(+---)$ et $(-+++)$ sont des signatures lorentziennes.

Exemple 2.4: Signature d'un espace dont on connait la métrique

Cherchons la signature de l'espace plat dont la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon ds^2 &= 4\left(dx^1\right)^2 + 5\left(dx^2\right)^2 - 2\left(dx^3\right)^2 + 2\left(dx^4\right)^2 - 4dx^2dx^3 - 4dx^2dx^4 - 10dx^3dx^4 \\ &= \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 & dx^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où la matrice carrée est la représentation du tenseur métrique dans la base inconnue d'origine. Nous supposons qu'il existe une base $(\mathbf{v}_i)$ dans laquelle la matrice représentative

du tenseur métrique est diagonale :

$$G\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}$$

Pour le premier vecteur $\mathbf{v}_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ de cette base hypothétique nous aurons :

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Autrement dit, dans cette base $(\mathbf{v}_i)$:

$$\forall i = 1,\dots,4 \qquad [G]\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i \tag{18.1}$$

Les λ_i sont les *valeurs propres* de la matrice G, les $\mathbf{v}_i$ sont les *vecteurs propres* de G, associés aux valeurs propres. Les vecteurs propres de G forment une base dans laquelle G est diagonale. Notez que les vecteurs propres sont définis à un coefficient multiplicateur près :

$$\begin{aligned}[G](k\mathbf{v}) &= k[G](\mathbf{v})\\ &= k(\lambda\mathbf{v})\\ &= \lambda(k\mathbf{v})\end{aligned}$$

Cherchons donc un scalaire λ et un vecteur non nul $\mathbf{v}$ associé à λ, respectant (18.1) :

$$\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2 & -5\\ 0 & -2 & -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5-\lambda & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2-\lambda & -5\\ 0 & -2 & -5 & 2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{18.2}$$

Ce système homogène a une solution non nulle ssi son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 5 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 0 \\ 2 & 2+\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 5 & \lambda-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\left[(\lambda-5)\begin{vmatrix} 2+\lambda & 3-\lambda \\ 5 & \lambda-7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 2 & \lambda-7 \end{vmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{aligned} \det(G-\lambda I) &= (4-\lambda)\left\{(\lambda-5)\left[(2+\lambda)(\lambda-7)-5(3-\lambda)\right]-2\left[2(\lambda-7)-2(3-\lambda)\right]\right\} \\ &= (4-\lambda)\left[(\lambda-5)\left(\lambda^2-29\right)-8(\lambda-5)\right] \\ &= (4-\lambda)(\lambda-5)\left(\lambda^2-37\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quatre valeurs propres annulent le déterminant : $\lambda = +4,\ +5,\ +\sqrt{37},\ -\sqrt{37}$
En injectant chaque valeur propre dans (18.2), on trouve le vecteur propre qui lui est associé. Il existe bien une transformation des coordonnées telle que dans le nouveau système de coordonnées la métrique s'écrive :

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathrm{d}s^2 &= 4\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + 5\left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \sqrt{37}\left(\mathrm{d}x^3\right)^2 - \sqrt{37}\left(\mathrm{d}x^4\right)^2 \\ &= \left(\mathrm{d}\bar{x}^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}\bar{x}^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}\bar{x}^3\right)^2 - \left(\mathrm{d}\bar{x}^4\right)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent la signature est $(+++-)$.

3 Angle entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel pré-euclidien donnés en fonction de leurs composantes contravariantes. À partir de (8.5) p. 118 :

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{|g_{pq}u^p u^q|}\sqrt{|g_{rs}v^r v^s|}} \tag{18.3}$$

Remarque 3.1

L'angle étant défini uniquement à partir de produits scalaires, il est invariant par changement de coordonnées.

3.1 Espace vectoriel euclidien

Dans un espace vectoriel euclidien nous pouvons supprimer les valeurs absolues :

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{pq}u^p u^q}\sqrt{g_{rs}v^r v^s}}$$

Théorème 3.1

On considère la base naturelle d'un système de coordonnées quelconque d'un espace vectoriel pré-euclidien. Soit G le tenseur métrique local. Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont les champs de vecteurs tangents à deux familles de courbes, alors ces familles sont mutuellement orthogonales ssi

$$g_{ij}u^i v^j = 0$$

Définition 3.1: Vecteur normal à une surface

Un vecteur est normal à une surface en un point P de cette surface, s'il est orthogonal au vecteur tangent de toute courbe appartenant à la surface et passant par ce point P.

Dans un système de coordonnées (x^i) d'un espace vectoriel euclidien, considérons l'hypersurface de coordonnée $x^\alpha = c^{ste}$. Tout vecteur $\mathbf{T}$ tangent à cette surface a sa composante t^α nulle :

$$\begin{aligned} t^\alpha &= \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où λ est un paramètre. Le vecteur $\mathbf{N}$ de composantes contravariantes

$$n^i = g^{i\alpha}$$

est normal à cette hyper-surface, en effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\cdot\mathbf{T} &= g_{ij}n^i t^j \\ &= g_{ij}g^{i\alpha}t^j \\ &= g^{i\alpha}t_i \\ &= t^\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression de l'angle θ entre les normales aux surfaces $x^\alpha = c^{ste}$ et $x^\beta = c^{ste}$. En appelant $\mathbf{u}\,(g^{i\alpha})$ et $\mathbf{v}\left(g^{j\beta}\right)$ les vecteurs normaux aux hyper-surfaces, (18.3) p. 359 donne :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{g_{ij}g^{i\alpha}g^{j\beta}}{\sqrt{g_{pq}g^{p\alpha}g^{q\alpha}}\sqrt{g_{rs}g^{r\beta}g^{s\beta}}} \\ &= \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sqrt{g^{\beta\beta}}} \end{aligned} \tag{18.4}$$

Par exemple, en coordonnées orthogonales (curvilignes ou rectilignes), donc pour lesquelles le cosinus de l'angle est nul, en tout point

$$\forall i \neq j \qquad g_{ij} = 0$$

ou de façon équivalente

$$\forall i \neq j \qquad g^{ij} = 0$$

Soit (x^i) un système de coordonnées quelconques et soit $x^\alpha(\lambda) = \lambda$ une ligne de coordonnée de paramètre λ, les autres coordonnées étant nulles :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \begin{cases} i = \alpha, & x^\alpha = \lambda \\ i \neq \alpha, & x^i = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \forall i = 1, \ldots, n \qquad x^i = \lambda \delta_{i\alpha}$$

Soit une autre ligne de coordonnées d'équation :

$$\forall j = 1, \ldots, n \qquad x^j = \lambda \delta_{j\beta}$$

(18.3) p. 359 donne l'angle ϕ entre ces deux lignes de coordonnées :

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{g_{ij} \lambda \delta_{i\alpha} \lambda \delta_{j\beta}}{\sqrt{g_{pq} \lambda \delta_{p\alpha} \lambda \delta_{q\alpha}} \sqrt{g_{rs} \lambda \delta_{r\beta} \lambda \delta_{s\beta}}} \\ &= \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}} \end{aligned}$$

En général cet angle est différent de l'angle θ donné par (18.4) p. 360.

Exemple 3.1: Angle entre deux vecteurs

Soient $\mathbf{u}(1, 0, -2, -1, 0)$ et $\mathbf{v}(0, 0, 2, 2, 0)$ deux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien E_5, alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2 &= 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 6 \\ \mathbf{v}^2 &= 0^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 1 \times 0 + 0 \times 0 - 2 \times 2 - 1 \times 2 + 0 \times 0 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Exemple 3.2: Familles de courbes orthogonales

En coordonnées polaires d'un espace vectoriel euclidien E_2, cherchons la famille de courbes orthogonales à la famille de courbes suivante :

$$\theta = \rho - c$$

où c est une constante. Nous pouvons la paramêtrer sous la forme :

$$\begin{cases} \rho(t) = t \\ \theta(t) = t - c \end{cases}$$

Le champ de vecteurs tangents à cette famille de courbes,

$$\mathbf{u} \begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est constant dans le système de coordonnées polaires. Nous cherchons la famille de courbes de paramètre τ, c.-à-d. $\rho(\tau)$ et $\theta(\tau)$, dont le champ de vecteurs tangents

$$\mathbf{v}\begin{pmatrix} v^\rho \\ v^\theta \end{pmatrix} = \mathbf{v}\begin{pmatrix} {}^{\mathrm{d}\rho}/_{\mathrm{d}\tau} \\ {}^{\mathrm{d}\theta}/_{\mathrm{d}\tau} \end{pmatrix}$$

est tel que le numérateur de (18.3) p. 359 soit nul :

$$\begin{aligned} g_{ij}u^i v^j &= 0 \\ g_{\rho\rho}u^\rho v^\rho + g_{\rho\theta}u^\rho v^\theta + g_{\theta\rho}u^\theta v^\rho + g_{\theta\theta}u^\theta v^\theta &= 0 \\ v^\rho + \rho^2 v^\theta &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} + \rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \end{aligned}$$

On résoud l'équation différentielle à variables séparables :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2} &= -\mathrm{d}\theta \\ \rho^{-1} &= \theta + c \\ \rho &= \frac{1}{\theta + c} \end{aligned}$$

où c est une constante.

Exemple 3.3: Courbes orthogonales

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un espace vectoriel euclidien E_3 (figure 3.10 p. 42), soient deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur une sphère de rayon a, d'équations :

$$\mathscr{C}_1 \quad : \quad \phi = f(\theta) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_2 \quad : \quad \phi = g(\theta)$$

Cherchons la condition pour que ces courbes soient orthogonales. Nous pouvons les paramêtrer :

$$\mathscr{C}_1(t) \quad : \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = t \\ \phi = f(t) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_2(\tau) \quad : \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = \tau \\ \phi = g(\tau) \end{cases}$$

Les vecteurs tangents à ces courbes sont respectivement :

$$\mathbf{u}\,(0, 1, \mathrm{d}_\theta f(\theta)) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}\,(0, 1, \mathrm{d}_\theta g(\theta))$$

D'après (18.3) p. 359, ces courbes sont orthogonales au point d'intersection (a, θ_0, ϕ_0) ssi le produit scalaire des vecteurs tangents est nul en ce point, $g_{ij}u^i v^j = 0$. En se servant de (6.2) p. 92 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta}|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2\sin^2(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta}|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \\ a^2\sin^2(\theta_0) \times \frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} = 0$$

$$a^2 + \mathrm{d}_\theta f(\theta)|_{\theta=\theta_0} \times a^2\sin^2(\theta_0) \times \mathrm{d}_\theta g(\theta)|_{\theta=\theta_0} = 0$$

$$\mathrm{d}_\theta f(\theta)|_{\theta=\theta_0} \times \mathrm{d}_\theta g(\theta)|_{\theta=\theta_0} = -\sin^{-2}(\theta_0)$$

Exemple 3.4: Champs de vecteurs orthogonaux

Soient deux champs de vecteurs en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) (figure 3.9 p. 41),

$$\mathbf{u}(0, 1, 2b\phi) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{v}\left(0, -2b\phi, \rho^2\right)$$

où b est une constante. Montrons qu'ils sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} g_{ij}u^iv^j &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2b\phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2b\phi \\ \rho^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2b\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2b\phi\rho^2 \\ \rho^2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{u}$ est le champ de vecteurs tangents à la courbe paramétrique de paramètre t

$$\mathscr{C} \quad : \quad \rho = a, \quad \phi = t, \quad z = bt^2$$

car en dérivant on retrouve $\mathbf{u}$:

$$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t = \mathrm{d}a/\mathrm{d}t = 0, \qquad \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = \mathrm{d}t/\mathrm{d}t = 1, \qquad \mathrm{d}z/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(bt^2)/\mathrm{d}t = 2bt = 2b\phi$$

D'après son système d'équations paramétriques, $\mathscr{C}$ est une hélice à pas variable sur le cylindre droit de rayon a. De même, la courbe $\mathcal{L}$ de paramètre τ :

$$\mathcal{L} \quad : \quad \rho = a, \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = -2b\phi, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = a^2$$

a pour champ de vecteurs tangents $\mathbf{v}$:

$$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\tau = 0, \qquad \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau = -2b\phi, \qquad \mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau = a^2$$

Nous avons montré que cette courbe est orthogonale à la courbe $\mathscr{C}$. La courbe $\mathcal{L}$ s'écrit aussi :

$$\rho = a, \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi} = -2b\mathrm{d}\tau, \quad z = a^2\tau + c_1$$

Supposons qu'à $\tau = 0,\ z = 0$:

$$\rho = a, \quad \ln\phi = -2b\tau + c_2, \quad z = a^2\tau$$

$$\rho = a, \quad \phi = C\exp\left(-2bz/a^2\right)$$

Cette solution n'inclue pas toutes les courbes orthogonales à $\mathscr{C}$ car certaines n'ont pas pour champ de vecteurs tangents $\mathbf{v}$.

3.2 Espace vectoriel pseudo-euclidien

Pour la métrique indéfinie d'un espace pseudo-euclidien, l'angle $(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$ entre deux vecteurs non nuls (dont la norme est non nulle) donnés en composantes contravariantes, s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\\ &= \frac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{|g_{pq}u^pu^q|}\sqrt{|g_{rs}v^rv^s|}}\\ &= \frac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{\varepsilon_1 g_{pq}u^pu^q}\sqrt{\varepsilon_2 g_{rs}v^rv^s}}\end{aligned}$$

Deux cas sont alors possibles :

— l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable :

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\\ \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} &\leqslant 1\\ -1 \leqslant \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) &\leqslant 1\end{aligned}$$

L'angle $(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}})$ des deux vecteurs existe, est unique et compris entre 0 et π.

— l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est plus valable :

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| > \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Nous avons alors

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = k \qquad (|k|>1)$$

Il existe une infinité de solutions pour l'angle, toutes complexes. Par convention on choisit :

$$(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = \begin{cases} i\ln\left(k+\sqrt{k^2-1}\right) & k>1\\ \pi + i\ln\left(-k+\sqrt{k^2-1}\right) & k<1\end{cases}$$

avec les limites $k\to 1^+$ et $k\to -1^-$

Chapitre 19

ESPACES PONCTUELS

Sommaire

1 Définitions 365
2 Repère et coordonnées d'un point 366
3 Distance 366
4 Dérivée et différentielle d'un vecteur et d'un point 369

1 Définitions

Au § 2 p. 28, à chaque vecteur nous avons associé un couple de points. Nous revenons ici sur cette correspondance.

Définition 1.1: Espace ponctuel pré-euclidien

On appelle espace ponctuel pré-euclidien, un espace ponctuel tel que l'espace vectoriel associé soit un espace pré-euclidien.

Définition 1.2: Espace ponctuel euclidien

On appelle espace ponctuel euclidien, un espace ponctuel tel que l'espace vectoriel associé soit un espace euclidien.

2 Repère et coordonnées d'un point

Définition 2.1: Repère d'un espace ponctuel

On appelle repère $(O, \mathbf{e}_i)$ d'un espace ponctuel ${}_En$, l'ensemble d'un point O de ${}_En$ appelé origine du repère, et d'une base quelconque $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel E_n associé à l'espace ponctuel ${}_En$.

Définition 2.2: Coordonnées d'un point

Dans un système de coordonnées cartésiennes de centre O d'un espace ponctuel pré-euclidien ${}_En$, les n coordonnées x^i d'un point M sont aussi les n composantes contravariantes x^i du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ de l'espace vectoriel associé E_n, exprimées dans le repère naturel $(O, \vec{e}_i)$ associé au système de coordonnées.

Dans un système de coordonnées quelconque, soient deux points $M(x^i_M)$ et $N(x^j_N)$. Dans la base naturelle de ce système de coordonnées, et uniquement dans cette base :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x^i_M \vec{e}_i \\ \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \mathrm{d}x^i_N \vec{e}_i \end{cases}$$

$\mathrm{d}x^i_M$ et $\mathrm{d}x^j_N$ sont respectivement les composantes contravariantes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$. En utilisant les deux premiers axiomes de la déf. 2.1 p. 29 :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{ON}} \\ &= \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{ON}} - \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= \left(\mathrm{d}x^i_N - \mathrm{d}x^i_M\right) \vec{e}_i \end{aligned} \tag{19.1}$$

$\mathrm{d}\left(x^i_N - x^i_M\right)$ sont les composantes contravariantes du vecteur infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$.

3 Distance

Définition 3.1: Distance euclidienne

La distance euclidienne MN entre deux points M et N d'un espace ponctuel euclidien ${}_En$, est la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ de l'espace vectoriel euclidien normé E_n associé à ${}_En$:

$$MN = \|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes (rectilignes), si les points M et N ont respectivement pour coordonnées x^i_M et x^i_N, dans la base naturelle (normée) associée à

ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} MN^2 &= \left(x^i_M - x^i_N\right) \vec{e}_i \cdot \left(x^j_N - x^j_M\right) \vec{e}_j \\ &= g_{ij} \left(x^i_N - x^i_M\right) \left(x^j_N - x^j_M\right) \end{aligned}$$

où le produit scalaire est défini positif, c.-à-d. euclidien.

Définition 3.2: Distance pré-euclidienne

La distance MN entre deux points M et N d'un espace ponctuel pré-euclidien ${}_En$, est la pseudo-norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ de l'espace vectoriel pré-euclidien normé E_n associé à ${}_En$:

$$MN = \|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|$$

Dans un système de coordonnées cartésienne (rectilignes), si les points M et N ont respectivement pour coordonnées x^i_M et x^i_N, dans la base naturelle (pseudo-normée) associée à ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} MN^2 &= \left(x^i_M - x^i_N\right) \vec{e}_i \cdot \left(x^j_N - x^j_M\right) \vec{e}_j \\ &= g_{ij} \left(x^i_N - x^i_M\right) \left(x^j_N - x^j_M\right) \end{aligned} \tag{19.2}$$

où le produit scalaire est non-dégénéré.

(19.2) n'est valable que lorsque les g_{ij} ne sont pas des fonctions des coordonnées, c.-à-d. en coordonnées cartésiennes (rectilignes), donc dans un espace pré-euclidien (euclidien ou pseudo-euclidien).

Supposons N infiniment proche de M et désignons par x^i les coordonnées de M et $x^i + \mathrm{d}x^i$ et les coordonnées de N. Si l'on note $\mathrm{d}s$ la distance infinitésimale MN, (19.2) devient la forme quadratique (déf. 1.7 p. 88) de différentielles, appelée *forme quadratique fondamentale*

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j} \tag{19.3}$$

où les coefficients g_{ij} sont les produits scalaires des vecteurs de base de la base naturelle du système de coordonnées quelconque (x^i). Ils sont fonction des coordonnées x^i lorsque la base varie localement. En permettant le calcul de la distance infinitésimale localement en chaque point et dans toutes les directions, les g_{ij} caractérisent complètement la géométrie de l'espace considéré (pré-euclidien ou non). Ils définissent cette géométrie de manière intrinsèque sans qu'il soit nécessaire de considérer que l'hypersurface est plongée dans un espace de dimension supérieure. Lorsque les g_{ij} sont fonction des coordonnées x^i, soit l'espace est pré-euclidien mais le système de coordonnées n'est pas cartésien (rectiligne), soit l'espace riemannien n'est pas pré-euclidien. Lorsque ${}_En$ est pré-euclidien, le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt p. 600 nous assure qu'il est toujours possible de trouver une base orthonormale ou pseudo-orthonormale.

Lorsque ${}_En$ est euclidien et le système de coordonnées rectangulaires, les termes diagonaux du tenseur métrique valent l'unité et les termes non diagonaux sont nuls. Il ne reste que les termes

carrés $\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i$, les termes rectangles $\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,\ i \neq j$ étant nuls :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{d}x^n\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^i \\ &= \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

La distance est alors positive, ou nulle si les points sont confondus. Cette expression généralise à n dimensions le carré de la distance élémentaire de l'espace euclidien de la géométrie classique en coordonnées rectangulaires (théorème de Pythagore).

Exemple 3.1: Distance en coordonnées rectilignes obliques (x^1, x^2)

En coordonnées cartésiennes obliques dans le plan le carré de la distance s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= g_{ij}\Delta x^i\Delta x^j \\ &= g_{11}\left(\Delta x^1\right)^2 + g_{12}\Delta x^1\Delta x^2 + g_{21}\Delta x^2\Delta x^1 + g_{22}\left(\Delta x^2\right)^2 \\ &= g_{11}\left(\Delta x^1\right)^2 + 2g_{12}\Delta x^1\Delta x^2 + g_{22}\left(\Delta x^2\right)^2 \\ &= \left(\Delta x^1\right)^2 + 2\cos(\alpha)\Delta x^1\Delta x^2 + \left(\Delta x^2\right)^2\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Pythagore pour le triangle quelconque.

Exemple 3.2: Distance en coordonnées polaires (ρ, θ)

Le carré de la distance infinitésimale

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2$$

est de signature $(++)$. Le premier terme $g_{11}\left(\mathrm{d}x^1\right)^2 = \mathrm{d}\rho^2$ est la distance entre deux points sur la ligne de coordonnée $x^1 = \rho$, et le second terme $g_{22}\left(\mathrm{d}x^2\right)^2 = \rho^2\mathrm{d}\theta^2$ est la distance entre deux points sur la ligne de coordonnée $x^2 = \theta$. Le terme croisé $2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ n'apparait pas car les coordonnées polaires sont orthogonales.

Nous pouvons donner une nouvelle définition du système de coordonnées rectangulaires :

Définition 3.3: Système de coordonnées rectangulaires

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, un système de coordonnées (x^i) est rectangulaire si la distance entre deux points arbitraires $P\left(x_P^1, \ldots, x_P^n\right)$ et $Q\left(x_Q^1, \ldots, x_Q^n\right)$ est donnée par une généralisation du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{\left(x_Q^1 - x_P^1\right)^2 + \cdots + \left(x_Q^n - x_P^n\right)^2} \\ &= \sqrt{\delta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j}\end{aligned}$$

où $\Delta x^i = x_Q^i - x_P^i$.
En notation vectorielle :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\mathbf{P}, \mathbf{Q}\right) &= \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\| \\ &= \sqrt{\left(\mathbf{Q} - \mathbf{P}\right)^T\left(\mathbf{Q} - \mathbf{P}\right)}\end{aligned}$$

Cherchons l'expression de la distance entre deux points lorsque l'on applique une transformation linéaire $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ inversible ($\det A \neq 0$). Posons $A^{-1} = B$ c.-à-d. $\mathbf{u} = B\mathbf{u}'$. La transformation linéaire conserve les distances :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\mathbf{u}', \mathbf{v}'\right) &= \mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\
&= \sqrt{(\mathbf{u}-\mathbf{v})^T (\mathbf{u}-\mathbf{v})} \\
&= \sqrt{(B\mathbf{u}'-B\mathbf{v}')^T (B\mathbf{u}'-B\mathbf{v}')} \\
&= \sqrt{[B(\mathbf{u}'-\mathbf{v}')]^T B(\mathbf{u}'-\mathbf{v}')} \\
&= \sqrt{(\mathbf{u}'-\mathbf{v}')^T B^T B(\mathbf{u}'-\mathbf{v}')}
\end{aligned}$$

On pose

$$G = B^T B = \left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = \left(A^T\right)^{-1} A^{-1} = \left(AA^T\right)^{-1}$$

Les éléments de la matrice A étant des constantes, les éléments de G sont aussi des constantes.

Exemple 3.3: Relativité restreinte

Plaçons-nous dans le système de coordonnées galiléennes (t, x, y, z). La distance de carré $c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ n'a pas d'intérêt car elle n'est pas invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré. En revanche, la distance d'univers de carré

$$\begin{aligned}
s^2 &= \pm(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\
&= \eta_{00}\, t^2 + \eta_{11}\, x^2 + \eta_{22}\, y^2 + \eta_{33}\, z^2
\end{aligned}$$

est invariante par la transformation de spéciale de Lorentz (relation (13.6) p. 229), l'autre invariant étant la constante de structure de l'espace-temps. Ces deux invariants relativistes remplacent les invariants de la physique non relativiste, la distance entre deux points de l'espace et la durée entre deux instants.
Pour « pseudo-normer » la base, c.-à-d. pour avoir $\eta_{00} = \pm 1$, il suffit d'effectuer le changement de variable $\mathrm{t} = ct$, ce qui revient à poser $c = 1$. C'est ce que nous ferons, les unités de temps et d'espace étant arbitraires, comme d'ailleurs toutes les unités de la physique.

4 Dérivée et différentielle d'un vecteur et d'un point

Définition 4.1: Vecteur fonction d'une variable

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit t une variable scalaire variant dans un intervalle $[a, b]$. Si à chaque valeur de t nous faisons correspondre un vecteur $\vec{u}$ de E, nous dirons que le vecteur $\vec{u}$ est une fonction de la variable t, et nous noterons ce vecteur variable $\vec{u}(t)$.

Définition 4.2: Vecteur tendant vers le vecteur nul

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un vecteur variable $\vec{u}(t)$ de E tend vers le vecteur nul, si le scalaire $\|\vec{u}(t)\|$ tend vers zéro quand t croît.

Définition 4.3: Vecteur fonction continue d'une variable

Le vecteur $\vec{u}(t)$ est une fonction continue de la variable t, si, la variable t ayant reçu un accroissement Δt, le vecteur

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)$$

tend vers zéro quand Δt tend vers zéro.

Définition 4.4: Vecteur dérivée d'un vecteur

S'il existe un vecteur $\dot{\vec{u}}(t)$ tel que,

$$\dot{\vec{u}}(t) - \frac{\Delta\vec{u}(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$$

nous dirons que $\dot{\vec{u}}(t)$ est le vecteur dérivée de $\vec{u}(t)$ pour la variable t. Nous noterons :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}(t)}{\Delta t}\\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Définition 4.5: Vecteur différentielle d'un vecteur

Nous appellerons différentielle du vecteur $\vec{u}(t)$, le vecteur :

$$\mathrm{d}\vec{u} = \dot{\vec{u}}\mathrm{d}t$$

Définition 4.6: Point fonction d'une variable

Soit $\mathcal{E}$ un espace ponctuel euclidien, et soit t une variable scalaire variant dans un intervalle $[a,b]$. Si à chaque valeur de t nous faisons correspondre un point M de $\mathcal{E}$, nous dirons que M est une fonction de la variable t, et nous noterons cette fonction $M(t)$.

Soit $M(t)$ une fonction de la variable t, et soit O un point fixe arbitraire d'un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}$: le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est alors une fonction de t. Soit O' un autre point fixe arbitraire de $\mathcal{E}$, alors, $\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$ étant constant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}}(t)\\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O'M}}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O'M}}(t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Le vecteur dérivée du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est indépendant du point fixe O choisi, d'où les notations :

Notation 4.1

Le vecteur dérivée d'un point M fonction de la variable t est noté :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\overrightarrow{M}}$$

Le vecteur différentielle d'un point M fonction de la variable t (ou différentielle de M) est noté :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{M} \equiv \dot{\overrightarrow{M}}\mathrm{d}t$$

Exemple 4.1: Vecteurs de base de la base naturelle du système de coordonnées (x^i)

Ils sont notés :

$$\vec{e_i} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x^i}$$

Chapitre 20

GRADIENT

Sommaire

1 Différentielle d'un champ de scalaires 373
2 Définition du gradient d'un champ de scalaires 374
3 Représentation du gradient 381
4 Base réciproque de la base naturelle 382

1 Différentielle d'un champ de scalaires

En un point donné d'un espace ponctuel $\mathcal{E}$, soient (x^i) et $(x^{i'})$ deux systèmes de coordonnées quelconques, rectilignes ou curvilignes, orthogonaux ou non. Soit f une fonction scalaire des coordonnées, déf. 1.5 p. 24. On note cette fonction $f(x^i)$ ou $f(x^{i'})$ selon les coordonnées employées. En un point donné, la différentielle de f est la même indépendamment de tout système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x^{i'}) &= \mathrm{d}f(x^i) \\ \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}\,\mathrm{d}x^{i'} &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\mathrm{d}x^{i'} \\ \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \end{aligned}$$

Notation 1.1

Les dérivées partielles sont notées avec un indice inférieur :

$$\forall i \qquad \partial_i f = \frac{\partial f^i}{\partial x^i}$$

Les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées se transforment comme les composantes covariantes d'un vecteur :

$$\forall i \qquad \partial_{i'} f = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i f \tag{20.1}$$

Exemple 1.1: Formule de dérivation en chaine

Soit (ρ, θ) et (x, y) deux systèmes de coordonnées d'un espace ponctuel euclidien ${}_E2$.
Soit f un champ de scalaires, en un point donné la différentielle de f s'écrit :

$$\mathrm{d}f(\rho,\theta) = \mathrm{d}f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} x = x(\rho,\theta) \\ y = y(\rho,\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \partial_\rho x\,\mathrm{d}\rho + \partial_\theta x\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \partial_\rho y\,\mathrm{d}\rho + \partial_\theta y\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

2 Définition du gradient d'un champ de scalaires

La différentielle du champ de scalaires f s'écrit sous la forme d'un produit scalaire,

$$\mathrm{d}f = \partial_i f \mathrm{d}x^i$$

où d'après (20.1) p. 374 les $\partial_i f$ sont les composantes covariantes d'un vecteur, et d'après la remarque 2.12 p. 49 les $\mathrm{d}x^i$ sont les composantes contravariantes du vecteur différentiel position. L'expression (12.7) p. 205 du produit scalaire permet d'écrire la définition :

Définition 2.1: Opérateur gradient

On appelle gradient d'un champ de scalaires f, le vecteur noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ tel que :

$$\mathrm{d}f \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \mathrm{d}\vec{M}$$

L'opérateur différentiel gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ prend en entrée un champ de scalaires f et donne en sortie un champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$.

Aux valeurs prises par la fonction f en un point de l'espace et au voisinage de ce point, le gradient associe le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$.

À partir de la définition du gradient et de celle de la base naturelle :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

$$\partial_i f \mathrm{d}x^i = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \vec{e}_i \mathrm{d}x^i \tag{20.2}$$

$$\forall i \qquad \partial_i f \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \vec{e}_i \tag{20.3}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ a donc pour composantes covariantes les $\partial_i f$ dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$ du système de coordonnées (x^i).

Remarque 2.1

Par abus de langage, nous dirons que les composantes covariantes forment le « covecteur » gradient

$$\underline{grad}(f)(\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f)$$

où le soulignement rappelle que les composantes entre parenthèses sont covariantes.

Dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$, posons momentanément les composantes contravariantes suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(f^1, f^2, \ldots, f^n)$$

On a alors

$$f^j \vec{e}_j = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$$

$$f^j \vec{e}_j \cdot \mathrm{d}x^i \vec{e}_i = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \mathrm{d}x^i \vec{e}_i$$

Avec (20.2) p. 375 :

$$f^j \vec{e}_j \cdot \mathrm{d}x^i \vec{e}_i = \partial_i f \mathrm{d}x^i$$

$$\forall j \qquad f^j g_{ij} = \partial_i f$$

$$f^j g_{ij} g^{ik} = \partial_i f g^{ik}$$

$$\forall k \qquad f^k = g^{ki} \partial_i f$$

Nous obtenons les composantes contravariantes dans la base naturelle, exprimées en fonction des composantes covariantes et du tenseur métrique :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(g^{1i}\partial_i f, g^{2i}\partial_i f, \ldots, g^{ni}\partial_i f) \tag{20.4}$$

Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = g^{1j}\partial_j f \vec{e}_1 + g^{2j}\partial_j f \vec{e}_2 + \cdots + g^{nj}\partial_n f \vec{e}_n$$

Remarque 2.2

Gradient est un vecteur qui, comme tous les vecteurs, n'est ni covariant ni contravariant. Ce n'est qu'après avoir choisi de l'exprimer en composantes covariantes ou contravariantes que, par abus de langage, on parle de covecteur ou de vecteur contravariant. Les composantes covariantes du vecteur gradient apparaissent en premier dans la théorie et permettent de calculer les composantes contravariantes.

Exemple 2.1: Expressions du vecteur gradient

- Soit $f(x, y, z)$ un champ de scalaires en fonction des coordonnées rectangulaires (x, y, z) de l'espace euclidien. Dans la base naturelle orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ associée,

les composantes covariantes du 3-vecteur gradient de f s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_x f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{\imath} \\ \partial_y f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{\jmath} \\ \partial_z f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Dans toute base orthonormée, les composantes contravariantes et covariantes des vecteurs sont confondues, et l'on a pour le 3-vecteur gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \partial_x f\, \vec{\imath} + \partial_y f\, \vec{\jmath} + \partial_z f\, \vec{k}$$

où les composantes contravariantes sont exprimées en fonction des composantes covariantes.

- Soit $f = f(\rho, \theta, z)$ une fonction scalaire des coordonnées cylindriques. Dans la base naturelle orthogonale $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associée, les composantes covariantes du 3-vecteur gradient f s'écrivent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_\rho = \partial_\rho f \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_\theta = \partial_\theta f \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \vec{e}_z = \partial_z f \end{cases}$$

Dans la base naturelle associée aux coordonnées cylindriques, les composantes covariantes forment donc le covecteur :

$$\underline{grad}(f)(\partial_\rho f, \partial_\theta f, \partial_z f)$$

Les coordonnées cylindriques étant orthogonales, les termes croisés du tenseur métrique sont nuls. En composantes contravariantes, avec (20.4) p. 375 puis avec (12.15) p. 210 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f) &= \left(g^{\rho\rho}\partial_\rho f + g^{\rho\theta}\partial_\theta f + g^{\rho z}\partial_z f\right)\vec{e}_\rho \\ &\qquad + \left(g^{\theta\rho}\partial_\rho f + g^{\theta\theta}\partial_\theta f + g^{\theta z}\partial_z f\right)\vec{e}_\theta \\ &\qquad\qquad + \left(g^{z\rho}\partial_\rho f + g^{z\theta}\partial_\theta f + g^{zz}\partial_z f\right)\vec{e}_z \\ &= \left(g^{\rho\rho}\partial_\rho f\right)\vec{e}_\rho + \left(g^{\theta\theta}\partial_\theta f\right)\vec{e}_\theta + \left(g^{zz}\partial_z f\right)\vec{e}_z \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \end{aligned} \tag{20.5}$$

Dans la base tangente orthonormée associée aux coordonnées cylindriques, avec (3.3) p. 40 :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{\text{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{\text{e}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{\text{e}}_z$$

- Soit $f = f(r, \theta, \phi)$ une fonction scalaire des coordonnées sphériques. Dans la base naturelle orthogonale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ associée, les composantes covariantes du 3-vecteur gradient f s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi$$

Dans la base tangente orthonormée associée aux coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{\text{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{\text{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{\text{e}}_\phi$$

Exemple 2.2: Vecteur gradient dans une base oblique normée

Soit (x, y) un système de coordonnées rectangulaire de l'espace ponctuel euclidien ${}_E2$. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base naturelle orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E_2 associé. Soit (x', y') un système de coordonnées cartésiennes obliques de base naturelle associée $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$. En s'aidant de la figure 20.1 la transformation de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x = x' + y'\cos(\alpha) \\ y = y'\sin(\alpha) \end{cases}$$

L'angle α étant constant, la transformation est linéaire.

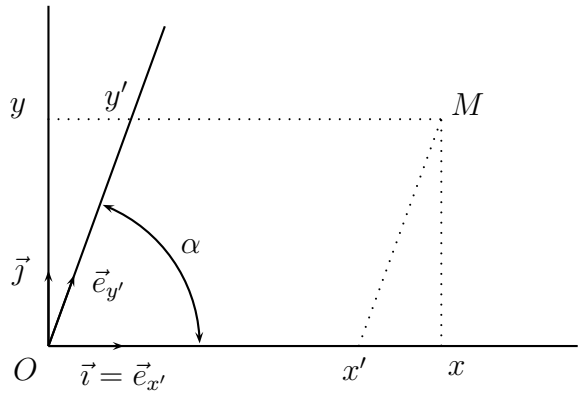


FIG. 20.1 – Base naturelle $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ en coordonnées cartésiennes obliques

Inversement :

$$\begin{cases} x' = x - y'\cos(\alpha) \\ y' = \dfrac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x - \dfrac{y}{\tan\alpha} \\ y' = \dfrac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OM}} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ &= [x' + y'\cos(\alpha)]\,\vec{\imath} + y'\sin(\alpha)\,\vec{\jmath} \end{aligned}$$

Cette relation donne les vecteurs de la base naturelle $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ du système de coordonnées cartésiennes obliques (x', y') :

$$\begin{cases} \vec{e}_{x'} = \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x'} \\ \vec{e}_{y'} = \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{e}_{x'} = \vec{\imath} \\ \vec{e}_{y'} = \cos(\alpha)\,\vec{\imath} + \sin(\alpha)\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

Ils sont de norme unité

$$\begin{cases} \|\vec{e}_{x'}\| = \|\vec{\imath}\| \\ \|\vec{e}_{y'}\|^2 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\vec{e}_{x'}\| = 1 \\ \|\vec{e}_{y'}\| = 1 \end{cases}$$

On a bien

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ &= [x' + y'\cos(\alpha)]\,\vec{\imath} + y'\sin(\alpha)\left[\frac{\vec{e}_{x'} - \cos(\alpha)\,\vec{\imath}}{\sin(\alpha)}\right] \\ &= x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}\end{aligned}$$

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les composantes covariantes du vecteur gradient f s'écrivent :

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{\imath} = \partial f/\partial x \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{\jmath} = \partial f/\partial y\end{cases}$$

Dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$, les composantes covariantes du vecteur gradient f s'écrivent :

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{e}_{x'} = \partial f/\partial x' \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{e}_{y'} = \partial f/\partial y'\end{cases}$$

Par exemple pour $f = x = x' + y'\cos(\alpha)$:

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{\imath} = 1 \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{\jmath} = 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{e}_{x'} = 1 \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\cdot\vec{e}_{y'} = \cos(\alpha)\end{cases}$$

Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les composantes contravariantes et covariantes sont confondues :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath} \\ &= \vec{\imath}\end{aligned}$$

Dans la base primée $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$, puisque $\vec{\imath} = \vec{e}_{x'}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{e}_{x'}$$

Exemple 2.3: Dérivée d'un champ de scalaires le long d'une courbe

Dans un espace vectoriel pré-euclidien, soit la courbe $\mathscr{C}$ d'équations paramétriques $x^i = x^i(p)$, et soit $\phi(x^i)$ une fonction scalaire le long de $\mathscr{C}$. Sa dérivée a pour expression :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}p} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \\ &= \partial_i\phi u^i\end{aligned}$$

$u^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}p$ est un vecteur partout tangent à $\mathscr{C}$. Il se transforme suivant les relations :

$$\begin{aligned}\forall i \qquad \mathrm{d}x^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \\ \frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}p} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \\ u^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,u^i\end{aligned}$$

u^i est contravariant. $\partial_i\phi$ est le gradient de la fonction ϕ, il est covariant d'après (20.1) p. 374. $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}p$ est donc invariant par changement de coordonnées :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi(x^i)}{\mathrm{d}p} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi(x^i)}{\mathrm{d}p} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}p}\\ &= \frac{\mathrm{d}\phi(x^{i'})}{\mathrm{d}p}\end{aligned}$$

En effet $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}p$ est le rapport de deux invariants. Le produit du covecteur $\partial_i\phi$ par le vecteur u^i est appelé *multiplication contractée*.

Exemple 2.4: Covecteur gradient en relativité restreinte

La 4-vitesse d'un mobile a pour expression en composantes contravariantes ((13.46) p. 281) en unités géométriques :

$$[{}_4\mathrm{u}]\begin{pmatrix}u^t\\u^x\\u^y\\u^z\end{pmatrix} = [{}_4\mathrm{u}]\begin{pmatrix}\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau\\\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau\\\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau\\\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}$$

où τ est le temps propre de ce mobile. Soit $\phi(t,x,y,z)$ une fonction scalaire, sa différentielle s'écrit :

$$\mathrm{d}\phi(t,x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

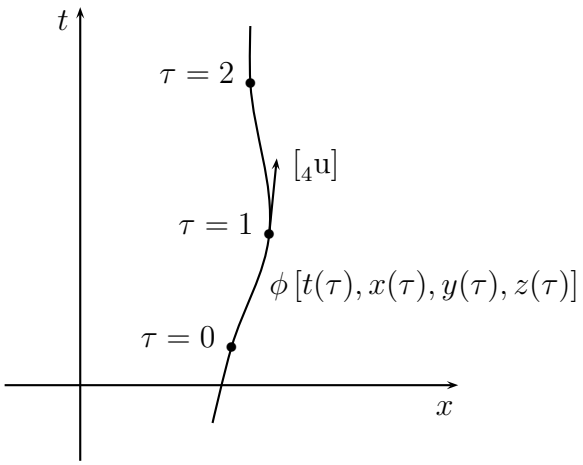


Fig. 20.2 – Champ de scalaires le long d'une ligne d'univers

Si l'on prend un point sur la ligne d'univers du mobile (Fig. 20.2), les coordonnées en entrée de ϕ sont toutes des fonctions du temps propre τ, et ϕ qui est une fonction explicite

des coordonnées, est aussi une fonction implicite du temps propre :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi\left[t(\tau),x(\tau),y(\tau),z(\tau)\right]}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\\ &= \partial_t\phi\, u^t+\partial_x\phi\, u^x+\partial_y\phi\, u^y+\partial_z\phi\, u^z\end{aligned}$$

On peut réécrire cette égalité sous forme matricielle :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}=\begin{pmatrix}\partial_t\phi & \partial_x\phi & \partial_y\phi & \partial_z\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^t\\u^x\\u^y\\u^z\end{pmatrix}$$

Les composantes $\partial_t\phi$, $\partial_x\phi$, $\partial_y\phi$, $\partial_z\phi$ étant covariantes, nous définissons le covecteur gradient phi par :

$$\underline{\mathrm{d}}\phi\begin{pmatrix}\partial_t\phi & \partial_x\phi & \partial_y\phi & \partial_z\phi\end{pmatrix}$$

Pour chaque évènement (t,x,y,z) de la ligne d'univers du mobile, $\phi(t,x,y,z)$ étant un scalaire, il en va de même de $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau$, si bien que la multiplication contractée du covecteur gradient par le 4-vecteur vitesse donne un champ de scalaires. Le covecteur gradient est donc une forme, une application qui à un vecteur fait correspondre un scalaire.
Contrairement au produit scalaire, la contraction (le fait d'égaler un indice contravariant et un indice covariant dans un monome) ne fait pas intervenir le tenseur métrique. En effet, l'un des deux membres est déjà un covecteur.

Exemple 2.5: Covecteur 4-vitesse

D'après l'ex. 3 p. 369, avec une métrique de genre temps de signature $(+---)$ et avec (12.5) p. 204 qui donnent le passage des composantes contravariantes aux covariantes, les composantes covariantes du covecteur 4-vitesse sont données par :

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau\\\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau\\\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau\\\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau\\-\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau\\-\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau\\-\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}$$

La notation du terme de droite sous forme de matrice colonne semble indiquer que les composantes sont contravariantes alors qu'elles sont covariantes. Seul le signe négatif permet la distinction. On note le covecteur en ligne,

$$\underline{u}(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau,-\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau,-\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau,-\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau)$$

où les virgules entre les composantes indiquent qu'il ne s'agit pas d'une matrice uniligne qui serait la transposée d'un vecteur unicolonne, mais d'un ensemble ordonné de valeurs.

On note aussi les composantes du covecteur explicitement avec un indice en bas :

$$u_1 = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$$
$$u_2 = -\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$$
$$u_3 = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$$
$$u_4 = -\mathrm{d}z/\mathrm{d}\tau$$

D'après (12.20) p. 211 et (20.4) p. 375, le vecteur adjoint (ou associé, ou réciproque) du covecteur gradient de ϕ, c.-à-d. le vecteur gradient de ϕ écrit en composantes contravariantes, s'écrit en relativité restreinte :

$$\begin{bmatrix} 1/1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t\phi \\ \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t\phi \\ -\partial_x\phi \\ -\partial_y\phi \\ -\partial_z\phi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi) \begin{pmatrix} \partial_t\phi \\ -\partial_x\phi \\ -\partial_y\phi \\ -\partial_z\phi \end{pmatrix}$$

Les composantes contravariantes sont écrites en fonction des composantes covariantes.

Remarque 2.3

La notation n'est pas parfaite, dans l'écriture verticale des composantes contravariantes, l'indice de dérivation partielle est en bas et semble indiquer une covariance des composantes.

Notation 2.1

On peut trouver la notation $\mathbf{u}^T = (x\ y\ z)$ pour le covecteur adjoint au vecteur $\mathbf{u}$. Or le covecteur n'est la transposée du vecteur que dans un espace vectoriel euclidien car le tenseur métrique est alors la matrice identité. En effet, l'ex. 3 p. 369 montre que dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte un signe négatif apparait.

3 Représentation du gradient

Il s'agit de représenter un covecteur gradient en un point donné de l'espace, en ayant à l'esprit que le covecteur gradient est l'archétype des covecteurs. Sa représentation servira pour tous les covecteurs. On représente de petites tangentes aux courbes de niveau (non représentées) localement autour du point (Fig. 20.3).

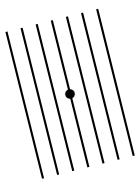


FIG. 20.3 – Représentation d'un covecteur en un point

Plus les lignes parallèles sont rapprochées et plus la norme du covecteur est grande (plus le gradient est fort). La contraction des composantes d'un covecteur et d'un vecteur est le nombre de segments de droite traversés par le vecteur en ce point, ici environ $3,4$ (Fig. 20.4).

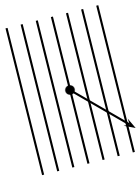


FIG. 20.4 – Contraction d'un covecteur et d'un vecteur

4 Base réciproque de la base naturelle

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace ponctuel euclidien ${}_En$, et soit M un point de cet espace. Soit $(\vec{e}_i)$ une base naturelle de l'espace vectoriel euclidien E_n associé à ${}_En$. Montrons que la base formée par les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}(x^j)$ est la base réciproque de la base $(\vec{e}_i)$. D'après la déf. 2.1 p. 374 du vecteur gradient :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \mathrm{d}\vec{M}$$

Pour $f = x^1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^1 &= \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \mathrm{d}\vec{M} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \left(\vec{e}_1\,\mathrm{d}x^1 + \vec{e}_2\,\mathrm{d}x^2 + \cdots + \vec{e}_n\,\mathrm{d}x^n\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \vec{e}_1 = 1 \\ \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \vec{e}_k = 0 \qquad \forall k = 2, \ldots, n \end{cases}$$

De même pour $f = x^2, \ldots, x^n$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall i, j \qquad \overrightarrow{\text{grad}}(x^j) \cdot \vec{e}_i = \delta_{ij}}$$

qui est la définition de bases réciproques. En général, les vecteurs de base de la base réciproque de la base naturelle ne sont pas de norme unité, comme on peut le constater dans l'ex. 2.2 p. 377.

Montrons que les vecteurs de base de la base réciproque sont perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées. Dans le système de coordonnées (x^i), considérons l'hypersurface de coordonnée $x^1 = c^{ste}$, sur laquelle la différentielle de x^1 est nulle :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^1 &= \overrightarrow{\text{grad}}(x^1) \cdot \mathrm{d}\vec{M} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}(x^1)$ est donc perpendiculaire à $\mathrm{d}\vec{M}$, lui même tangent en M à l'hypersurface $x^1 = c^{ste}$. Par conséquent $\overrightarrow{\text{grad}}(x^1)$ est perpendiculaire en M à l'hypersurface $x^1 = c^{ste}$.

Exemple 4.1: Base réciproque de la base naturelle polaire

- en utilisant l'expression du gradient en coordonnées cylindriques (20.5) p. 376 :

$$\begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \\ \vec{e}^{\,\theta} = \overrightarrow{\text{grad}}(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \partial_\rho \rho\, \vec{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}\, \partial_\theta \rho\, \vec{e}_\theta \\ \vec{e}^{\,\theta} = \partial_\rho \theta\, \vec{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}\, \partial_\theta \theta\, \vec{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \vec{e}_\rho \\ \vec{e}^{\,\theta} = \dfrac{\vec{e}_\theta}{\rho^2} \end{cases}$$

- en utilisant l'expression du gradient en coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \\ \vec{e}^{\,\theta} = \overrightarrow{\text{grad}}(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \partial_x \rho \vec{\imath} + \partial_y \rho \vec{\jmath} \\ \vec{e}^{\,\theta} = \partial_x \theta \vec{\imath} + \partial_y \theta \vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \vec{\imath} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \vec{\jmath} \\ \vec{e}^{\,\theta} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\, \vec{\imath} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\, \vec{\jmath} \end{cases}$$

Avec (3.3) p. 40 :

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \cos(\theta)\, \vec{\imath} + \sin(\theta)\, \vec{\jmath} \\ \vec{e}^{\,\theta} = -\dfrac{1}{\rho} \sin(\theta)\, \vec{\imath} + \dfrac{1}{\rho} \cos(\theta)\, \vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}^{\,\rho} = \vec{e}_\rho \\ \vec{e}^{\,\theta} = \dfrac{\vec{e}_\theta}{\rho^2} \end{cases}$$

Chapitre 21

ALGÈBRE TENSORIELLE

Sommaire

1 Introduction 385
2 Composantes deux fois contravariantes 388
3 Produit tensoriel 390
4 Produit scalaire 396
5 Base 398
6 Transformation des composantes d'un tenseur 401
7 Définition d'un tenseur 409
8 Le tenseur métrique 412
9 Symétrie et antisymétrie des tenseurs 414
10 Opérations sur les tenseurs 416
11 Équations tensorielles 423

1 Introduction

Les lois de la géométrie et de la physique ont une existence intrinsèque indépendante du système de coordonnées dans lequel on les exprime. Il est donc naturel d'essayer de se débarasser des systèmes de coordonnées et de raisonner sur des objets géométriques ou physiques. On a d'abord fait correspondre à ces objets des éléments simples euclidiens sur lesquels on a défini des opérations dont on a étudié les propriétés. Ce procédé a conduit au *Calcul vectoriel*, puis au *Calcul tensoriel*. Cependant, le choix d'un système de coordonnées est resté nécessaire, et les vecteurs et tenseurs, bien qu'indépendants de tout système de coordonnées, sont donnés par leurs coordonnées, sans que cela soit contradictoire. Plutôt que de particulariser un système de coordonnées en en choisissant un, on écrit les équations sous une forme valable dans n'importe quel système de coordonnées.

Il existe en physique des quantités intrinsèques qui, comme les vecteurs, existent en elles-mêmes indépendamment de la base dans laquelle on les exprime. Par exemple la matrice inertie ou la matrice rotation d'un solide. Ces matrices carrées particulières sont appelées des *tenseurs*. Toute

combinaison linéaire de deux tenseurs donne un tenseur, les tenseurs sont donc des vecteurs d'après la définition 1.11 p. 27. Les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont aussi des vecteurs, et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet, toute combinaison linéaire de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Elles sont de plus invariantes par changement de base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les tenseurs sont des matrices particulières car ils sont invariants par changement de base lié au changement de coordonnées de l'espace-temps physique. Un changement de coordonnées de l'espace-temps induit un changement de base de l'espace vectoriel des forces, des vitesses, des accélérations, et des tenseurs en général, mais pas de celui des matrices. Les tenseurs ont donc un sens physique que n'ont pas les matrices.

Un tenseur ayant p indices contravariants est dit contravariant d'ordre p et de type $(p, 0)$. Un tenseur ayant q indices covariants est dit covariant d'ordre q et de type $(0, q)$. S'il est les deux il est dit d'ordre $p + q$ et de type (p, q). L'ordre (ou rang) d'un tenseur est son nombre d'indices, et n'a donc rien à voir avec l'ordre n d'une matrice carré $n \times n$ qui est de combien varient ses indices.

Habituellement on appelle « vecteurs » uniquement les tenseurs d'ordre un alors que tous les tenseurs sont des vecteurs, quel que soit leur ordre. En physique, nous utiliserons cet abus de langage pour dire que les vecteurs appartiennent à une catégorie plus grande d'objets mathématiques, les tenseurs. Les scalaires sont alors des tenseurs d'ordre zéro.

Les tenseurs d'ordre deux sont souvent représentés par des matrices carrées dont les éléments sont leurs composantes. Pour les tenseur d'ordre trois la multiplication des matrices $3D$ n'est pas définie. Il faut alors abandonner la représentation matricielle des tenseurs et n'utiliser que la représentation indicielle.

Toutes les équations de la physique doivent être *invariantes de forme* par changement de coordonnées, donc par changement de base, elles sont dites *covariantes*. Elles varient toutes de la même façon, c'est le principe de covariance des équations de la physique. Or, pour les vecteurs comme pour les tenseurs, les composantes de même variance se transforment de la même façon. Par conséquent, toutes les équations de la physique doivent être écrites sous la forme d'une égalité entre tenseurs de même ordre et de même variance. Pour assurer l'invariance des tenseurs, leurs composantes doivent se transformer d'une façon bien précise que nous allons déterminer. Cette propriété d'invariance des tenseurs par changement de base est fondamentale puisqu'elle nous servira de définition des tenseurs. Dans un second temps, de même que nous avons défini les vecteurs et les espaces vectoriels uniquement à partir de leurs propriétés opératoires, nous définirons les tenseurs et les espaces tensoriels uniquement à partir de leurs propriétés opératoires.

Exemple 1.1: Multiplication des composantes de deux vecteurs

Une façon simple de former un nouveau vecteur (dans le sens d'une quantité indépendante de la base dans laquelle on l'exprime), consiste à multiplier les composantes de deux vecteurs dans un ordre déterminé. Soient $\mathbf{u}\,(u^1, u^2)$ et $\mathbf{v}\,(v^1, v^2)$ deux vecteurs de l'espace vectoriel E_2, le nouveau vecteur T a quatre composantes et appartient à l'espace vectoriel E_4 (les dimensions des espaces vectoriels de départ se multiplient) :

$$\mathsf{T} = \left(u^1v^1, u^1v^2, u^2v^1, u^2v^2\right)$$

Notation 1.1

En notation indicielle, si $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ alors

$$\forall i, j \qquad t^{ij} = u^i v^j$$

où l'ordre des indices i et j compte car en général $u^1 v^2 \neq u^2 v^1$ donc $t^{ij} \neq t^{ji}$.

En utilisant cette notation :

$$\mathsf{T} = \left(t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22}\right)$$

T est un tenseur, appelé produit tensoriel de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. On note $\mathsf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, et on lit « $\mathbf{u}$ tensoriel $\mathbf{v}$ ». On défini le produit tensoriel par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \left(u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2\right) \otimes \left(v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2\right) \\
&= u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^1 \mathbf{e}_1 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^2 \mathbf{e}_2 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^2 \mathbf{e}_2 \\
&= u^1 v^1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + u^1 v^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + u^2 v^1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + u^2 v^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\
&= t^{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t^{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + t^{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + t^{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\
&= \mathsf{T}
\end{aligned}$$

Soient $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ les vecteurs de base d'une base orthonormée de E_2 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= (1 \times 1, 1 \times 0, 0 \times 1, 0 \times 0) \\
&= (1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 &= (1 \times 0, 1 \times 1, 0 \times 0, 0 \times 1) \\
&= (0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 &= (0 \times 1, 0 \times 0, 1 \times 1, 1 \times 0) \\
&= (0, 0, 1, 0) \\
\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 &= (0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1) \\
&= (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

En écriture matricielle, effectuons le produit de Kronecker (chapitre 17) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^1 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ u^2 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 v^1 \\ u^1 v^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u^2 v^1 \\ u^2 v^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t^{21} \\ t^{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notez qu'ici le produit de Kronecker a deux composantes et non quatre. En effectuant le produit tensoriel nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} &= \begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}u^1v^1\\u^1v^2\\u^2v^1\\u^2v^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^{11}\\t^{12}\\t^{21}\\t^{22}\end{pmatrix}\\ &= \mathsf{T}\end{aligned}$$

2 Composantes deux fois contravariantes

Par changement de base, les composantes du tenseur T produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, se tranforment à l'aide de (5.13) p. 76 :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad t^{i'j'} &= u^{i'}v^{j'}\\ &= B^{i'}_k u^k B^{j'}_l v^l\\ &= B^{i'}_k B^{j'}_l u^k v^l\\ &= B^{i'}_k B^{j'}_l t^{kl}\end{aligned} \tag{21.1}$$

Les t^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes du tenseur T. Par changement de base naturelle :

$$\forall i,j \qquad t^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l}t^{kl}$$

Le produit tensoriel des vecteurs des bases est défini de façon à assurer l'invariance du tenseur T par changement de base grâce aux relations (5.7) p. 70 :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad (\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)' &= \boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\\ &= A^k_{i'}\boldsymbol{e}_k\otimes A^l_{j'}\boldsymbol{e}_l\\ &= A^k_{i'}A^l_{j'}(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\end{aligned} \tag{21.2}$$

T est alors indépendant de la base naturelle dans laquelle on l'exprime :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})' &= (u^i\boldsymbol{e}_i\otimes v^j\boldsymbol{e}_j)'\\ &= (u^iv^j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)'\\ &= t^{i'j'}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)'\\ &= B_k^{i'}B_l^{j'}t^{kl}A_{i'}^kA_{j'}^l(\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l)\\ &= t^{kl}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l\\ &= u^k\boldsymbol{e}_k\otimes v^l\boldsymbol{e}_l\\ &= \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\end{aligned}$$

Exemple 2.1: Composantes d'un produit tensoriel

Dans une base quelconque $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ de l'espace vectoriel euclidien E_2, on considère les deux vecteurs $\mathbf{u}=4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{v}=\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2$. Déterminons les composantes contravariantes du produit tensoriel de $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$ dans la base $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\otimes(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$.

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\\ &= (4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)\otimes(\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2)\\ &= 4\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+20\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+3\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1+15\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Nous avons :

$$t^{11}=4,\qquad t^{12}=20,\qquad t^{21}=3,\qquad t^{22}=15$$

En reprenant l'exercice 4.1 p. 74 de rotation d'une base, déterminons les composantes contravariantes du produit tensoriel dans la nouvelle base. Par changement de base, les composantes de T se tranforment selon (21.1) p. 388 avec $B_i^{j'}$ telle que :

$$B_1^{1'}=\cos(\alpha),\qquad B_1^{2'}=-\sin(\alpha),\qquad B_2^{1'}=\sin(\alpha),\qquad B_2^{2'}=\cos(\alpha)$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases}t^{1'1'} = B_1^{1'}B_1^{1'}t^{11}+B_1^{1'}B_2^{1'}t^{12}+B_2^{1'}B_1^{1'}t^{21}+B_2^{1'}B_2^{1'}t^{22}\\ t^{1'2'} = B_1^{1'}B_1^{2'}t^{11}+B_1^{1'}B_2^{2'}t^{12}+B_2^{1'}B_1^{2'}t^{21}+B_2^{1'}B_2^{2'}t^{22}\\ t^{2'1'} = B_1^{2'}B_1^{1'}t^{11}+B_1^{2'}B_2^{1'}t^{12}+B_2^{2'}B_1^{1'}t^{21}+B_2^{2'}B_2^{1'}t^{22}\\ t^{2'2'} = B_1^{2'}B_1^{2'}t^{11}+B_1^{2'}B_2^{2'}t^{12}+B_2^{2'}B_1^{2'}t^{21}+B_2^{2'}B_2^{2'}t^{22}\end{cases}$$

$$\begin{cases}t^{1'1'} = 4\cos^2(\alpha)+23\cos(\alpha)\sin(\alpha)+15\sin^2(\alpha)\\ t^{1'2'} = 11\sin(\alpha)\cos(\alpha)+20\cos^2(\alpha)-3\sin^2(\alpha)\\ t^{2'1'} = 11\sin(\alpha)\cos(\alpha)-20\sin^2(\alpha)+3\cos^2(\alpha)\\ t^{2'2'} = 4\sin^2(\alpha)-23\sin(\alpha)\cos(\alpha)+15\cos^2(\alpha)\end{cases}$$

3 Produit tensoriel

Dans ce paragraphe nous formalisons ce que nous venons de voir en introduction.

3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs

Soient E_n et F_p deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, et soit $E_n \times F_p$ un espace à $q = n \times p$ dimensions. $\forall \mathbf{u} \in E_n, \forall \mathbf{v} \in F_p$, au couple de vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nous faisons correspondre l'élément noté $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ de l'espace $E_n \times F_p$, la loi de composition $\otimes$ ayant les propriétés suivantes :

1) $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in E_n$, $\forall (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in F_p$, la loi $\otimes$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition vectorielle (notée $+$) :

$$\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2$$
$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}$$

2) Soit α un scalaire. La loi $\otimes$ est associative par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned} \alpha (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \otimes \alpha \mathbf{v} \end{aligned}$$

Définition 3.1: Élément produit tensoriel de deux vecteurs

La loi de composition $\otimes$ est appelée multiplication tensorielle. L'élément $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ est appelé produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ou produit dyadique.

Définition 3.2: Espace produit cartésien

L'espace produit cartésien $E_n \times F_p$ est l'ensemble des produits tensoriels de tous les vecteurs des espaces vectoriels E_n et F_p. Ce n'est pas un espace vectoriel car une combinaison linéaire de ses éléments ne donne pas nécessairement un élément de cet espace.

Définition 3.3: Espace produit tensoriel

L'espace vectoriel $G_q = E_n \otimes F_p$ est appelé produit tensoriel des espaces vectoriels E_n et F_p. C'est l'espace de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $E_n \times F_p$.

La loi de composition $\otimes$ a également la propriété suivante :

(3) Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base de E_n et soit $(\boldsymbol{f}_\alpha)$ une base de F_p. Les np éléments,

$$\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

forment une base de G_q.

Remarque 3.1

L'espace $E_n \otimes F_p$ se distingue de l'espace G_q en ce qu'il est muni de la loi $\otimes$. Nous dirons que G_q constitue le support de $E_n \otimes F_p$.

3.2 Expression analytique du produit tensoriel

Théorème 3.1

Les espaces E_n, F_p, et $E_n \otimes F_p$ étant rapportés à des bases associées par les relations $\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha = \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}$, la seule loi de composition satisfaisant aux propriétés du § 3.1 p. 390 est celle qui aux vecteurs $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha$ fait correspondre le vecteur $u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}$ de $E_n \otimes F_p$.

Démonstration. Soient $(\mathbf{e}_i)_{i=1,\dots,n}$, $(\boldsymbol{f}_\alpha)_{\alpha=1,\dots,p}$, et $(\boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha})_{i=1,\dots,n\ ;\ \alpha=1,\dots,p}$ des bases respectives de E_n, F_p et de $E_n \otimes F_p$. Alors :

$$\forall \mathbf{u} \in E_n, \forall \mathbf{v} \in F_p, \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i \otimes v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha$$

Supposons $n = 2$ et $p = 3$:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \left(u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2\right) \otimes \left(v^1 \boldsymbol{f}_1 + v^2 \boldsymbol{f}_2 + v^3 \boldsymbol{f}_3\right)$$

En utilisant l'axiome (1)) :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^1 \boldsymbol{f}_1 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^2 \boldsymbol{f}_2 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^3 \boldsymbol{f}_3 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^1 \boldsymbol{f}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^2 \boldsymbol{f}_2 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^3 \boldsymbol{f}_3$$

En utilisant l'axiome (2)) :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^1 v^1 \mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1 + u^1 v^2 \mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2 + u^1 v^3 \mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_3 + u^2 v^1 \mathbf{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1 + u^2 v^2 \mathbf{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2 + u^2 v^3 \mathbf{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_3$$

En généralisant à n et p quelconques,

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

et avec l'axiome (3) :

$$\boxed{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}} \tag{21.3}$$

Les trois axiomes du § 3.1 p. 390 impliquent que les composantes du produit tensoriel $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ s'écrivent sous la forme $u^i v^\alpha$ dans la base $\boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}$.

L'expression analytique (21.3) de la loi de composition $\otimes$, implique-t-elle à son tour ces trois axiomes ?

Pour retrouver l'axiome (1)) p. 390, posons $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_3 \\
&= u^i v_3^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= u^i \left(v_1^\alpha + v_2^\alpha\right) \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= \left(u^i v_1^\alpha + u^i v_2^\alpha\right) \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= u^i v_1^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha + u^i v_2^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= u^i \mathbf{e}_i \otimes v_1^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha + u^i \mathbf{e}_i \otimes v_2^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Pour retrouver l'axiome (2)) p. 390 à partir de (21.3) p. 391, posons $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \otimes \mathbf{v} &= w^i v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\beta \\ (\alpha\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} &= \sum_i \left[\left(\alpha u^i\right) v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\beta\right] \\ &= \alpha\left(u^i v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\beta\right) \\ &= \alpha\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\end{aligned}$$

(21.3) p. 391 est elle compatible avec l'axiome (3) p. 390 ?

Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base de E_n et soit $(\boldsymbol{f}_\alpha)$ une base de F_p, le produit tensoriel $(\mathbf{e}_i) \otimes (\boldsymbol{f}_\alpha)$ forme une base de $E_n \otimes F_p$ par hypothèse. Soit $(\mathbf{e}_{j'})$ une autre base de E_n et soit $(\boldsymbol{f}_{\beta'})$ une autre base de F_p, le produit tensoriel $(\mathbf{e}_{j'}) \otimes (\boldsymbol{f}_{\beta'})$ est-t-il une base de $E_n \otimes F_p$?

Soient $A_i^{j'}$ et $B_\alpha^{\beta'}$ les matrices changement de base :

$$\begin{cases}\forall i \ \mathbf{e}_i = A_i^{j'} \mathbf{e}_{j'} \\ \forall \alpha \ \boldsymbol{f}_\alpha = B_\alpha^{\beta'} \boldsymbol{f}_{\beta'}\end{cases}$$

Les éléments T s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\ &= t^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \qquad (21.4)\end{aligned}$$

Effectuons le changement de base :

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= t^{i\alpha} A_i^{j'} \mathbf{e}_{j'} \otimes B_\alpha^{\beta'} \boldsymbol{f}_{\beta'} \\ &= t^{i\alpha} A_i^{j'} B_\alpha^{\beta'} \mathbf{e}_{j'} \otimes \boldsymbol{f}_{\beta'} \qquad (21.5)\end{aligned}$$

Les $\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$ formant une base par hypothèse, d'après (21.4),

$$\mathsf{T} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall i, \alpha, \quad t^{i\alpha} = 0$$

Cette implication restant vraie pour (21.5), les éléments $\mathbf{e}_{j'} \otimes \boldsymbol{f}_{\beta'}$ sont linéairement indépendants, et constituent donc une base de l'espace $E_n \otimes F_p$. Nous dirons que $(\mathbf{e}_{j'}) \otimes (\boldsymbol{f}_{\beta'})$ est la base associée aux bases $(\mathbf{e}_{j'})$ et $(\boldsymbol{f}_{\beta'})$. □

3.3 Éléments d'un espace produit tensoriel

Tous les éléments de l'espace $E_n \otimes F_p$ sont-ils des produits tensoriels ?

Soit T un élément de l'espace $E_n \otimes F_p$:

$$\mathsf{T} = t^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

Peut-on toujours l'écrire sous la forme :

$$\mathsf{T} = u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

où $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ est un vecteur de E_n et $\mathbf{v} = v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha$ un vecteur de F_p ? Raisonnons par l'absurde et supposons que, quel que soit $t^{i\alpha}$, l'on ait :

$$\forall i, \alpha \qquad t^{i\alpha} = u^i v^\alpha$$

Pour $n = p = 2$:

$$\mathsf{T}(t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22}) = \mathsf{T}(u^1v^1, u^1v^2, u^2v^1, u^2v^2)$$

soit,

$$u^1v^1 = t^{11} \quad ; \quad u^1v^2 = t^{12} \quad ; \quad u^2v^1 = t^{21} \quad ; \quad u^2v^2 = t^{22}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} \dfrac{v^1}{v^2} = \dfrac{t^{11}}{t^{12}} \\ \dfrac{v^1}{v^2} = \dfrac{t^{21}}{t^{22}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{t^{11}}{t^{12}} = \frac{t^{21}}{t^{22}}$$

ce qui *a priori* n'est pas toujours vrai, les composantes de l'élément T étant quelconques. Nous en concluons qu'il existe des éléments de l'espace $E_n \otimes F_p$ qui ne sont pas des produits tensoriels de deux vecteurs.

Exemple 3.1: Identification d'un tenseur comme produit tensoriel

Le tenseur T suivant est-il le produit tensoriel de deux vecteurs ?

$$\mathsf{T} = 11\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

Si T est le produit tensoriel de deux vecteurs alors il est de la forme

$$\mathsf{T} = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

et l'on a :

$$u^1v^1 = 11, \qquad u^1v^2 = 8, \qquad u^2v^1 = 20, \qquad u^2v^2 = 12$$

En faisant les rapports des deux premières expressions puis celui des deux dernières :

$$\frac{v^1}{v^2} = \frac{11}{8} \qquad \frac{v^1}{v^2} = \frac{20}{12}$$

Ces valeurs étant différentes, T n'est pas le produit tensoriel de deux vecteurs.

3.4 Produit tensoriel de deux espaces identiques

En pratique on a très souvent à effectuer le produit tensoriel de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels identiques. Soient $(\mathbf{e}_i)$ une base de E_n, et soient $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j$ deux vecteurs de cet espace. Le produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= u^i v^j \, (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= t^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Le produit tensoriel de E_n par lui-même est noté $E_n \otimes E_n$ ou encore $E_n^{(2)}$. D'après l'axiome (3) p. 390, les vecteurs (les tenseurs) $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ constituent une base de $E_n^{(2)}$.

Exemple 3.2: Espace vectoriel du tenseur métrique

Le tenseur métrique appartient à l'espace produit tensoriel de l'espace vectoriel E_n avec lui-même, $E_n^{(2)}$.

3.5 Non commutativité du produit tensoriel

Le produit tensoriel d'un espace vectoriel E_n avec lui-même, $E_n \otimes E_n$, a pour vecteurs de base les produits tensoriels $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Par exemple, les vecteurs $(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ sont chacun des vecteurs de base, et ne peuvent donc pas être confondus. Le produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}_j$ n'est donc pas commutatif. Il en va de même pour tout produit tensoriel de vecteurs.

Exemple 3.3: Non commutativité du produit tensoriel

Soient $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$ deux vecteurs de l'espace vectoriel E_2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= u^i v^j \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right) \\ &= u^1 v^1 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right) + u^1 v^2 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\right) + u^2 v^1 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\right) + u^2 v^2 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\right) \\ &= \mathsf{T}\left(u^1 v^1, u^1 v^2, u^2 v^1, u^2 v^2\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &= v^j u^i \left(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\right) \\ &= v^1 u^1 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right) + v^1 u^2 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\right) + v^2 u^1 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\right) + v^2 u^2 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\right) \\ &= \mathsf{Z}\left(u^1 v^1, u^2 v^1, u^1 v^2, u^2 v^2\right)\end{aligned}$$

Par suite, en général :

$$\boxed{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}}$$

3.6 Associativité du produit tensoriel

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, trois vecteurs appartenant respectivement aux espaces vectoriels E_n, F_p, G_q. Nous pouvons multiplier tensoriellement l'élément $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ de $E_n \otimes F_p$ par le vecteur $\mathbf{w}$ de G_q. Nous obtenons alors l'élément $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$ de l'espace vectoriel $H_{npq} = (E_n \otimes F_p) \otimes G_q$.

Nous posons comme nouvel axiome que le produit tensoriel des espaces vectoriels est associatif :

$$\begin{aligned}H_{npq} &= (E_n \otimes F_p) \otimes G_q \\ &= E_n \otimes F_p \otimes G_q\end{aligned}$$

Cela revient à poser l'associativité des vecteurs de base :

$$(\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha) \otimes \boldsymbol{g}_\beta = \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \otimes \boldsymbol{g}_\beta \tag{21.6}$$

Pour les éléments résultants, nous avons :

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = (u^i \mathbf{e}_i \otimes v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha) \otimes w^\beta \boldsymbol{g}_\beta$$

En utilisant le th. 3.1 p. 391

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} &= \left(u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}\right) \otimes w^\beta \boldsymbol{g}_\beta \\ &= u^i v^\alpha w^\beta \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha} \otimes \boldsymbol{g}_\beta \\ &= u^i v^\alpha w^\beta \left(\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha\right) \otimes \boldsymbol{g}_\beta\end{aligned}$$

et, en utilisant l'axiome (21.6) :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w} &= u^i v^\alpha w^\beta \mathbf{e}_i\otimes\boldsymbol{f}_\alpha\otimes\boldsymbol{g}_\beta\\ &= u^i\mathbf{e}_i\otimes\left(v^\alpha w^\beta\boldsymbol{f}_\alpha\otimes\boldsymbol{g}_\beta\right)\\ &= u^i\mathbf{e}_i\otimes\left(v^\alpha\boldsymbol{f}_\alpha\otimes w^\beta\boldsymbol{g}_\beta\right)\\ &= \mathbf{u}\otimes(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\otimes\mathbf{w}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}}$$

3.7 Produit tensoriel de plusieurs espaces

Étant donné un nombre fini r d'espaces vectoriels $E_n, F_p, G_q, \ldots$ la définition par récurrence du produit tensoriel de ces r espaces résulte du § précédent. D'après le § 3.3 p. 392, tout élément de $E_n\otimes F_p\otimes G_q\otimes\ldots$ n'étant pas nécessairement le produit tensoriel de r vecteurs appartenant respectivement à $E_n, F_p, G_q, \ldots$ nous sommes conduit à la définition suivante :

Définition 3.4: Tenseur

On appelle tenseur construit sur les espaces de base $E_n, F_p, G_q, \ldots$ tout élément de l'espace vectoriel $E_n\otimes F_p\otimes G_q\otimes\ldots$

Soit T un tenseur « contravariant d'ordre p » et « covariant d'ordre q », et soit U un tenseur « contravariant d'ordre r » et « covariant d'ordre s ». Le produit tensoriel de ces deux tenseurs donne un tenseur V « contravariant d'ordre $p+r$ » et « covariant d'ordre $q+s$ » :

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\otimes\mathsf{U} =& t^{i_1\,i_2\,\ldots\,i_p}_{j_1\,j_2\,\ldots\,j_q}\left(\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_p}\otimes\mathbf{e}^{j_1}\otimes\mathbf{e}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_q}\right)\\ &\otimes u^{k_1\,k_2\,\ldots\,k_r}_{l_1\,l_2\,\ldots\,l_s}\left(\mathbf{e}_{k_1}\otimes\mathbf{e}_{k_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_r}\otimes\mathbf{e}^{l_1}\otimes\mathbf{e}^{l_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{l_s}\right)\\ =& t^{i_1\,i_2\ldots\,i_p}_{j_1\,j_2\,\ldots\,j_q}\,u^{k_1\,k_2\,\ldots\,k_r}_{l_1\,l_2\,\ldots\,l_s}\left(\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_p}\otimes\mathbf{e}^{j_1}\otimes\mathbf{e}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_q}\right.\\ &\left.\otimes\,\mathbf{e}_{k_1}\otimes\mathbf{e}_{k_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_r}\otimes\mathbf{e}^{l_1}\otimes\mathbf{e}^{l_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{l_s}\right)\\ =&\mathsf{V}\end{aligned}$$

Remarque 3.2

Les tenseurs ont un ordre mais pas de variance. Parler d'un tenseur contravariant d'ordre p et covariant d'ordre q est un abus de langage pour parler d'un tenseur d'ordre $p+q$ dont p composantes sont contravariantes et q sont covariantes.

4 Produit scalaire

4.1 Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base

Définition 4.1: Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base

Soient $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E_n. Le produit scalaire du produit tensoriel $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ par un vecteur de base $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ de $E_n^{(2)}$ s'écrit :

$$\forall i, j \qquad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \overset{\text{def}}{=} u_i v_j$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\forall i, j \qquad u^k v^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u^k v^l g_{ki} g_{lj} \\ &\forall i, j, k, l \qquad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = g_{ik} g_{jl} \end{aligned} \tag{21.7}$$

$$\forall i, j, k, l \qquad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)\,(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l)$$

Exemple 4.1: Composantes du tenseur métrique de l'espace produit tensoriel

Soit $\{\mathbf{e}_1(2,0,0), \mathbf{e}_2(1,3,0), \mathbf{e}_3(1,1,1)\}$ une base de l'espace vectoriel E_3. Déterminons les composantes du tenseur métrique de l'espace produit tensoriel $E_3 \otimes E_3$. Les vecteurs de base s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = (4,0,0,0,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = (2,6,0,0,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 = (2,2,2,0,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 = (2,0,0,6,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = (1,3,0,3,9,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 = (1,1,1,3,3,3,0,0,0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 = (2,0,0,2,0,0,2,0,0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 = (1,3,0,1,3,0,1,3,0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1) \end{cases}$$

Leur produit scalaire donne 81 composantes dont voici les premières :

$$\begin{cases}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)=16\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3)=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1)=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3)=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1)=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2)=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)=4\end{cases}\quad\begin{cases}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)=40\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3)=16\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1)=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)=20\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3)=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1)=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2)=20\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)=8\end{cases}\quad\dots$$

On retrouve le résultat précédent en utilisant (21.7) p. 396. Le tenseur métrique de E_3 a pour composantes :

$$G\begin{bmatrix}4&2&2\\2&10&4\\2&4&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)=g_{11}g_{11}=16\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)=g_{11}g_{12}=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3)=g_{11}g_{13}=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1)=g_{12}g_{11}=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)=g_{12}g_{12}=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3)=g_{12}g_{13}=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1)=g_{13}g_{11}=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2)=g_{13}g_{12}=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)=g_{13}g_{13}=4\end{cases}\quad\begin{cases}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)=g_{11}g_{21}=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)=g_{11}g_{22}=40\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3)=g_{11}g_{23}=16\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1)=g_{12}g_{21}=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)=g_{12}g_{22}=20\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3)=g_{12}g_{23}=8\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1)=g_{13}g_{21}=4\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2)=g_{13}g_{22}=20\\(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)=g_{13}g_{23}=8\end{cases}\quad\dots$$

4.2 Composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux

Notation 4.1

Si $u_i=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i$, $v_j=\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_j$, et $\mathsf{T}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ alors

$$\forall i,j\qquad t_{ij}=u_iv_j$$

Pour tout tenseur $\mathsf{T}=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien $E_n^{(2)}$, avec (21.7) p. 396 et la déf. 4.1 p. 396, le produit scalaire de ce tenseur par un vecteur de base s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall i,j\qquad(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)&=(u^k\mathbf{e}_k\otimes v^l\mathbf{e}_l)\cdot(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)\\\forall i,j\qquad u_iv_j&=u^kv^l(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l)\cdot(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j)\\\forall i,j\qquad t_{ij}&=t^{kl}g_{ki}g_{lj}\end{aligned}\tag{21.8}$$

Les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes du tenseur d'ordre deux T.

4.3 Produit scalaire de deux tenseurs contravariants d'ordre deux

Soient U et V deux tenseurs de composantes deux fois contravariantes, de l'espace vectoriel euclidien $E_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{U}\cdot\mathsf{V} &= \left[u^{ij}\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\right)\right]\cdot\left[v^{kl}(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l)\right]\\ &= u^{ij}v^{kl}\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\right)\cdot\left(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\right)\\ &= u^{ij}v^{kl}g_{ik}g_{jl}\\ &= u^{ij}v_{ij}\end{aligned}$$

5 Base

5.1 Base duale d'un espace produit tensoriel

Soit $(\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\ldots,\mathbf{e}^n)$ la base duale de la base $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ de l'espace vectoriel E_n. D'après le § 3.4 p. 393 les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}_{ij}=\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ constituent une base de $E_n^{(2)}$. D'après le § 6 p. 335, les vecteurs $\mathbf{e}^j$ forment une base de E_n. Par conséquent, les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}_i{}^j=\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j$, les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}^i{}_j=\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_j$, et les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}^{ij}=\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j$, sont trois bases de $E_n^{(2)}$.

Remarque 5.1

L'écriture $\boldsymbol{\epsilon}_i^j$ avec les indices l'un sous l'autre est à éviter, elle ne permet pas de distinguer $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j$ de $\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_i$. Or d'après le § 3.5 p. 394 le produit tensoriel n'est pas commutatif,

$$\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j\neq\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_i$$

autrement dit

$$\boldsymbol{\epsilon}_i{}^j\neq\boldsymbol{\epsilon}^j{}_i$$

5.2 Composantes mixtes

Soit $(\mathbf{e}^j)$ la base duale de la base $(\mathbf{e}_i)$. La décomposition du tenseur T sur la base mixte $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j$ s'écrit :

$$\mathsf{T}=t^i{}_j\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j$$

Les $t^i{}_j$ sont les composantes mixtes du tenseur T, une fois contravariante et une fois covariante.

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= t^i{}_j\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j\\ t^{ik}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k &= t^i{}_jg^{jk}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_k\\ \forall i,k\qquad t^{ik} &= t^i{}_jg^{jk}\end{aligned}$$

Notation 5.1

L'ordre des indices est important. Par conséquent, en indices mixtes il faut garder l'ordre des indices en conservant une espace typographique, $t^i{}_j$ ou $t_j{}^i$, mais pas t^i_j. En abaissant puis en élevant un indice on obtiendrait

$$t^{ij} \to t^i_j \to t^{ji}$$

Si le tenseur de départ t^{ij} est symétrique cela n'a pas d'importance. En revanche, s'il est antisymétrique on commet ici une erreur de signe puisque

$$t^{ij} = -t^{ji}$$

Pour un tenseur non symétrique, on retiendra que :

$$t^i{}_j \neq t_j{}^i$$
$$t^i{}_j \neq t^j{}_i$$

car en remontant les indices on aurait

$$t^{ij} = t^{ji}$$

Exemple 5.1: Tenseur métrique en composantes mixtes

D'après (12.13) p. 209 :

$$\forall i,j \qquad \begin{aligned} g^i_j &= g^{ik} g_{kj} \\ &= \delta^i_j \end{aligned}$$

Les composantes mixtes g^i_j sont donc identiques dans tous les systèmes de coordonnées. Quel que soit le tenseur A :

$$a_i g^i_j = a_j$$
$$a^i g^j_i = a^j$$

g^i_j est un opérateur de substitution d'indice. Les trois ensembles de composantes g^i_j, g^{ik}, g_{kj} forment un groupe. Ils définissent le tenseur fondamental d'ordre deux G.

Exemple 5.2: Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker, déf. 3.1 p. 18, en composantes mixtes

$$\delta^i_j \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

est-il un tenseur comme le suggère l'exemple précédent ? On note que le symbole de Kronecker mixte est symétrique :

$$\delta^i_j = \delta^j_i$$

Supposons que dans la base $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ on ait

$$t^i_j = \delta^i_j$$

et effectuons un changement de base. Avec les matrices changement de base A et B, (5.7) p. 70 et (5.8) p. 71, telles que $A = B^{-1}$ (5.9) p. 71 :

$$\begin{aligned} t^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j &= \delta^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \\ t^i_j A^k_i \mathbf{e}_k \otimes B^j_m \mathbf{e}^m &= \delta^i_j A^k_i \mathbf{e}_k \otimes B^j_m \mathbf{e}^m \\ t^i_j A^k_i B^j_m \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m &= A^k_i B^i_m \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \\ t^k_m \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m &= \delta^k_m \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \\ t^k_m &= \delta^k_m \end{aligned}$$

Le symbole de Kronecker mixte est donc bien un tenseur, appelé *tenseur unitaire*. En relativité restreinte c'est donc le 4-vecteur unitaire dont la trace, appelée norme pour un vecteur, vaut 4.
Le symbole de Kronecker δ_{ij} est-il un tenseur ? Supposons que dans la base $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ on ait $t_{ij} = \delta_{ij}$ et effectuons un changement de base :

$$\begin{aligned} t_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j &= \delta_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \\ t_{ij} A^i_k A^j_m \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} A^i_k A^j_m \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m \\ t_{km} &= \sum_i A^i_k A^i_m \end{aligned}$$

δ_{ij} n'est donc pas un tenseur, de même on montre que δ^{ij} n'est pas un tenseur.

5.3 Changement de base

Soient $(\boldsymbol{e}_i)$ et $(\boldsymbol{e}_{p'})$ deux bases naturelles d'un espace vectoriel E_n. Prenons le cas d'un espace tensoriel $E_n^{(3)}$ dont la base associée à $(\boldsymbol{e}_i)$ est $(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)$, et celle associée à $(\boldsymbol{e}_{p'})$ est $(\boldsymbol{e}_{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'} \otimes \boldsymbol{e}_{s'})$. D'après (21.2) p. 388 :

$$\begin{cases} \forall j,k,l & \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l = \dfrac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \dfrac{\partial x^{s'}}{\partial x^l} (\boldsymbol{e}_{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'} \otimes \boldsymbol{e}_{s'}) \\ \forall q,r,s & \boldsymbol{e}_{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'} \otimes \boldsymbol{e}_{s'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{r'}} \dfrac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} (\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \end{cases}$$

Soit $(\boldsymbol{e}^j)$ la base naturelle duale de $(\boldsymbol{e}_i)$, et soit $(\boldsymbol{e}^{q'})$ la base naturelle duale de $(\boldsymbol{e}_{p'})$. Utilisons le changement de base naturelle duale (15.8) et (15.9) p. 342 :

$$\begin{cases} \forall j & \boldsymbol{e}^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \boldsymbol{e}^{q'} \\ \forall q & \boldsymbol{e}^{q'} = \dfrac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \boldsymbol{e}^j \end{cases}$$

Soient $(\boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)$ et $\left(\boldsymbol{e}^{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'} \otimes \boldsymbol{e}_{s'}\right)$ deux bases naturelles de $E_n^{(3)}$. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall j,k,l & \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \dfrac{\partial x^{s'}}{\partial x^l} \left(\boldsymbol{e}^{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'} \otimes \boldsymbol{e}_{s'}\right) \\ \forall q,r,s & \boldsymbol{e}^{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'} \otimes \boldsymbol{e}_{s'} = \dfrac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{r'}} \dfrac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} \left(\boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right) \end{cases}$$

6 Transformation des composantes d'un tenseur

6.1 Transformation des composantes contravariantes

Soit T un tenseur de l'espace tensoriel $E_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} t^{i'j'}\,(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}) &= t^{pq}\,(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)\\ &= t^{pq}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\,(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'})\\ \forall i,j\qquad t^{i'j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\,t^{pq} \end{aligned} \tag{21.9}$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets p puis q donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \forall i,j\qquad t^{i'j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,t^{pq}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\\ \mathsf{T}'_{\text{con}} &= J\mathsf{T}_{\text{con}}J^T \end{aligned} \tag{21.10}$$

Les $t^{i'j'}$ sont appelées composantes contravariantes du tenseur T.

Remarque 6.1

Les tenseurs de composantes deux fois contravariantes généralisent à l'ordre deux les vecteurs ordinaires (donnés en composantes contravariantes).

Généralisons à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit T un tenseur de l'espace tensoriel $E_n\otimes E_n\otimes E_n\otimes\dots$ tel que

$$\begin{aligned} t^{i'j'k'\dots}\,(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\otimes\boldsymbol{e}_{k'}\otimes\dots) &= t^{pqr\dots}\,(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_r\otimes\dots)\\ &= t^{pqr\dots}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r}\dots(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\otimes\boldsymbol{e}_{k'}\otimes\dots)\\ \forall i,j,k,\dots\qquad t^{i'j'k'\dots} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r}\dots t^{pqr\dots} \end{aligned}$$

Inversement,

$$\begin{aligned} t^{pq}\,(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q) &= t^{i'j'}\,(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'})\\ &= t^{i'j'}\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\,(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)\\ \forall p,q\qquad t^{pq} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\,t^{i'j'}\\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,t^{i'j'}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\\ \mathsf{T}_{\text{con}} &= J^{-1}\mathsf{T}'_{\text{con}}\left(J^{-1}\right)^T \end{aligned}$$

On trouve cette relation directement à partir de (21.10) p 401 :

$$\begin{aligned} J^{-1}\mathsf{T}' &= J^{-1}J\mathsf{T}J^T \\ J^{-1}\mathsf{T}'\left(J^T\right)^{-1} &= \mathsf{T}J^T\left(J^T\right)^{-1} \\ &= \mathsf{T} \end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p,q,r,\ldots \qquad t^{pqr\ldots} = \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\ldots t^{i'j'k'\ldots}$$

Exemple 6.1: Transformation des composantes contravariantes d'un tenseur

Dans la base naturelle du système de coordonnées (x^1,x^2), soit le tenseur de composantes deux fois contravariantes $\mathsf{T}\,(t^{11},t^{12},t^{21},t^{22}) = (1,1,-1,2)$. Quelles sont ses composantes deux fois contravariantes $t^{i'j'}$ lors du changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x^{1'} = (x^2)^2 \\ x^{2'} = x^1x^2 \end{cases}$$

- en notation indicielle

$$\begin{aligned} t^{1'1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}t^{11} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}t^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}t^{21} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}t^{22} \\ &= 2x^2\times 2x^2\times t^{22} \\ &= 8(x^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'2'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}t^{11} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}t^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}t^{21} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}t^{22} \\ &= 2x^2\times x^2\times t^{21} + 2x^2\times x^1\times t^{22} \\ &= -2(x^2)^2 + 4x^1x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'1'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}t^{11} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}t^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}t^{21} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}t^{22} \\ &= x^2\times 2x^2\times t^{12} + x^1\times 2x^2\times t^{22} \\ &= 2(x^2)^2 + 4x^1x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}t^{11} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}t^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}t^{21} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}t^{22} \\ &= x^2x^2\times t^{11} + x^2x^1\times t^{12} + x^1x^2\times t^{21} + x^1x^1\times t^{22} \\ &= (x^2)^2 + 2(x^1)^2 \end{aligned}$$

- en notation matricielle

(21.10) p. 401, $\mathsf{T}'_{\text{con}} = J\mathsf{T}_{\text{con}}J^T$, donne :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} t^{1'1'} & t^{1'2'} \\ t^{2'1'} & t^{2'2'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 2x^2 & x^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x^2 & 4x^2 \\ x^2 - x^1 & x^2 + 2x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 2x^2 & x^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8(x^2)^2 & -2(x^2)^2 + 4x^1x^2 \\ 2(x^2)^2 + 4x^1x^2 & (x^2)^2 + 2(x^1)^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Par exemple au point de coordonnées $x^1 = 1$, $x^2 = -2$, le tenseur a pour composantes :

$$\mathsf{T}' \begin{bmatrix} 32 & -16 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6.2 Transformation des composantes covariantes

Soit T un tenseur de l'espace tensoriel $E_n^{(2)}$ tel que

$$\begin{aligned}\mathsf{T} \cdot (\boldsymbol{e}_{i'} \otimes \boldsymbol{e}_{j'}) &= \mathsf{T} \cdot \left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} (\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q) \right] \\ \forall i, j \qquad t_{i'j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \mathsf{T} \cdot (\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q) \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t_{pq} \end{aligned} \tag{21.11}$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets p puis q donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned}\forall i, j \qquad t_{i'j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t_{pq} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ \mathsf{T}'_{\text{cov}} &= \left(J^{-1}\right)^T \mathsf{T}_{\text{cov}} J^{-1} \end{aligned} \tag{21.12}$$

Les $t_{i'j'}$ sont appelées composantes covariantes du tenseur T.

Remarque 6.2

Les tenseurs d'ordre deux de composantes deux fois covariantes généralisent à l'ordre deux les vecteurs de type gradient (qui sont exprimés en composantes covariantes).

Généralisons à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit T un tenseur de l'espace tensoriel $E_n \otimes E_n \otimes E_n \otimes \dots$ tel que,

$$\forall i, j, k, \dots \qquad t_{i'j'k'\dots} = \mathsf{T} \cdot (\boldsymbol{e}_{i'} \otimes \boldsymbol{e}_{j'} \otimes \boldsymbol{e}_{k'} \otimes \dots)$$

$$\begin{aligned}\forall i,j,k,\dots \qquad t_{i'j'k'\dots} &= \mathsf{T}\cdot\left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\dots(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_r\otimes\dots)\right]\\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\dots\mathsf{T}\cdot(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_r\otimes\dots)\\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\dots t_{pqr\dots}\end{aligned}$$

Inversement :

$$\begin{aligned}\forall p,q \qquad t_{pq} &= \mathsf{T}\cdot(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)\\ &= \mathsf{T}\cdot\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'})\right]\\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}t_{i'j'}\\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}t_{i'j'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\\ \mathsf{T}_{\text{cov}} &= J^T\mathsf{T}'_{\text{cov}}J\end{aligned}$$

On trouve cette relation directement à partir de (21.12) p. 403 :

$$\begin{aligned}\mathsf{T}'_{\text{cov}}J &= \left(J^{-1}\right)^T\mathsf{T}_{\text{cov}}J^{-1}J\\ J^T\mathsf{T}'_{\text{cov}}J &= J^T\left(J^{-1}\right)^T\mathsf{T}_{\text{cov}}\\ &= \mathsf{T}_{\text{cov}}\end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p,q,r,\dots \qquad t_{pqr\dots} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r}\dots t_{i'j'k'\dots}$$

Pour le tenseur métrique habituellement donné en composantes covariantes :

$$G = J^TG'J$$

En particulier si le nouveau système de coordonnées (primé) est rectangulaire, la base naturelle est orthonormée et $G' = I$, dans l'ancien système de coordonnées le tenseur métrique s'écrit alors :

$$G = J^TJ \tag{21.13}$$

Exemple 6.2: Transformation des composantes covariantes d'un tenseur

Dans la base naturelle du système de coordonnées (x^1, x^2), soit le tenseur de composantes deux fois covariantes $\mathsf{T}\,(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) = (1, 1, -1, 2)$. Quelles sont ses composantes deux fois covariantes $t_{i'j'}$ lors du changement de coordonnées :

$$\begin{cases}x^1 = (x^{2'})^2\\ x^2 = x^{1'}x^{2'}\end{cases}$$

- en notation indicielle

$$\begin{aligned} t_{1'1'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_{22} \\ &= x^{2'} \times x^{2'} \times t_{22} \\ &= 2(x^{2'})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{1'2'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_{22} \\ &= x^{2'} \times 2x^{2'} \times t_{21} + x^{2'} \times x^{1'} \times t_{22} \\ &= -2(x^{2'})^2 + 2x^{1'}x^{2'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2'1'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}t_{22} \\ &= 2x^{2'} \times x^{2'} \times t_{12} + x^{1'} \times x^{2'} \times t_{22} \\ &= 2(x^{2'})^2 + 2x^{1'}x^{2'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2'2'} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}t_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}t_{22} \\ &= 2x^{2'} \times 2x^{2'} \times t_{11} + 2x^{2'}x^{1'} \times t_{12} + 2x^{1'}x^{2'} \times t_{21} + x^{1'}x^{1'} \times t_{22} \\ &= 4(x^{2'})^2 + 2x^{2'}x^{1'} - 2x^{1'}x^{2'} + 2(x^{1'})^2 \\ &= 4(x^{2'})^2 + 2(x^{1'})^2 \end{aligned}$$

- en notation matricielle

  (21.12) p. 403, $\mathsf{T}'_{\text{cov}} = (J^{-1})^T \mathsf{T}_{\text{cov}} J^{-1}$, donne :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_{1'1'} & t_{1'2'} \\ t_{2'1'} & t_{2'2'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & x^{2'} \\ 2x^{2'} & x^{1'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2x^{2'} \\ x^{2'} & x^{1'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x^{2'} & 2x^{2'} \\ 2x^{2'} - x^{1'} & 2x^{2'} + 2x^{1'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2x^{2'} \\ x^{2'} & x^{1'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(x^{2'})^2 & -2(x^{2'})^2 + 2x^{1'}x^{2'} \\ 2(x^{2'})^2 + 2x^{1'}x^{2'} & 4(x^{2'})^2 + 2(x^{1'})^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple au point de coordonnées $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, le tenseur a pour composantes :

$$\mathsf{T}' \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$$

6.3 Transformation des composantes mixtes

Soit T un tenseur de l'espace tensoriel $E_n^{(2)}$ tel que,

$$\begin{aligned} t_{i'}{}^{j'}\left(\boldsymbol{e}^{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\right) &= t_p{}^q\left(\boldsymbol{e}^p\otimes\boldsymbol{e}_q\right) \\ &= t_p{}^q\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\left(\boldsymbol{e}^{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\right) \\ \forall i,j \qquad t_{i'}{}^{j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\,t_p{}^q \end{aligned} \tag{21.14}$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets p puis q donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad t_{i'}{}^{j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,t_p{}^q\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ \mathsf{T}'_{\text{mix}} &= \left(J^{-1}\right)^T\mathsf{T}_{\text{mix}}J^T \end{aligned} \tag{21.15}$$

Les $t_{i'}{}^{j'}$ sont appelées composantes mixtes covariante-contravariante du tenseur T. Nous avons également

$$\forall i,j \qquad t^{i'}{}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\,t^p{}_q$$

On change l'ordre des termes de sorte que les indices muets p puis q donne un produit de matrices :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad t^{i'}{}_{j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\,t^p{}_q\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ \mathsf{T}'_{\text{mix}} &= J\mathsf{T}_{\text{mix}}J^{-1} \end{aligned} \tag{21.16}$$

Les $t^{i'}{}_{j'}$ sont appelées composantes mixtes contravariante-covariante du tenseur T.

On généralise à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit T un tenseur de l'espace tensoriel $E_n\otimes E_n\otimes E_n\otimes\dots$ tel que,

$$\begin{aligned} t_{i'_1i'_2\dots}{}^{j'_1j'_2\dots}\left(\boldsymbol{e}^{i'_1}\otimes\boldsymbol{e}^{i'_2}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j'_1}\otimes\boldsymbol{e}_{j'_2}\otimes\dots\right) &= t_{p_1p_2\dots}{}^{q_1q_2\dots}\left(\boldsymbol{e}^{p_1}\otimes\boldsymbol{e}^{p_2}\otimes\dots\boldsymbol{e}_{q_1}\otimes\boldsymbol{e}_{q_2}\dots\right) \\ &= t_{p_1p_2\dots}{}^{q_1q_2\dots}\,\frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i'_1}}\,\frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i'_2}}\dots\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{q_1}}\,\frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{q_2}}\dots\left(\boldsymbol{e}^{i'_1}\otimes\boldsymbol{e}^{i'_2}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j'_1}\otimes\boldsymbol{e}_{j'_2}\otimes\dots\right) \\ &= \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i'_1}}\,\frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i'_2}}\dots\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{q_1}}\,\frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{q_2}}\dots t_{p_1p_2\dots}{}^{q_1q_2\dots} \end{aligned}$$

Les indices i' et j' étant muets :

$$t_{i'}{}^{j'}\left(\boldsymbol{e}^{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\right) = t_{j'}{}^{i'}\left(\boldsymbol{e}^{j'}\otimes\boldsymbol{e}_{i'}\right)$$

En revanche, la matrice représentative du tenseur d'ordre deux $t^{i'}{}_{j'}\left(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}^{j'}\right)$ est la transposée de la matrice représentative du tenseur $t_{i'}{}^{j'}\left(\boldsymbol{e}^{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\right)$ (la notion de transposée n'a pas de sens

pour les tenseurs d'ordre supérieur à deux) :

$$
\begin{aligned}
t^{i'}{}_{j'}\left(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}^{j'}\right) &= t^{p}{}_{q}\left(\boldsymbol{e}_{p}\otimes\boldsymbol{e}^{q}\right)\\
&= t^{p}{}_{q}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{p}}\,\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{j'}}\left(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}^{j'}\right)\\
\forall i,j \qquad t^{i'}{}_{j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{p}}\,\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{j'}}\,t^{p}{}_{q}\\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{p}}\,t^{p}{}_{q}\,\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{j'}}\\
\mathsf{T}'^{T}_{\text{mix}} &= J\mathsf{T}^{T}_{\text{mix}}J^{-1}
\end{aligned}
$$

On obtient directement le résultat en prenant la transposé de (21.15) p. 406 :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{T}'^{T}_{\text{mix}} &= \left[\left(J^{-1}\right)^{T}\mathsf{T}_{\text{mix}}J^{T}\right]^{T}\\
&= \left(\mathsf{T}_{\text{mix}}J^{T}\right)^{T}J^{-1}\\
&= J\mathsf{T}^{T}_{\text{mix}}J^{-1}
\end{aligned}
$$

Inversement,

$$
\begin{aligned}
t_{p}{}^{q}\left(\boldsymbol{e}^{p}\otimes\boldsymbol{e}_{q}\right) &= t_{i'}{}^{j'}\left(\boldsymbol{e}^{i'}\otimes\boldsymbol{e}_{j'}\right)\\
&= t_{i'}{}^{j'}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{p}}\,\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{j'}}\left(\boldsymbol{e}^{p}\otimes\boldsymbol{e}_{q}\right)\\
\forall p,q \qquad t_{p}{}^{q} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{p}}\,t_{i'}{}^{j'}\,\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{j'}}\\
\mathsf{T}_{\text{mix}} &= J^{T}\mathsf{T}'_{\text{mix}}\left(J^{-1}\right)^{T}
\end{aligned}
$$

La transposée s'écrit,

$$
\begin{aligned}
t^{p}{}_{q}\left(\boldsymbol{e}_{p}\otimes\boldsymbol{e}^{q}\right) &= t^{i'}{}_{j'}\left(\boldsymbol{e}_{i'}\otimes\boldsymbol{e}^{j'}\right)\\
&= t^{i'}{}_{j'}\,\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{q}}\left(\boldsymbol{e}_{p}\otimes\boldsymbol{e}^{q}\right)\\
\forall p,q \qquad t^{p}{}_{q} &= \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{q}}\,t^{i'}{}_{j'}\\
&= \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{i'}}\,t^{i'}{}_{j'}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{q}}\\
\mathsf{T}^{T}_{\text{mix}} &= J^{-1}(\mathsf{T}'_{\text{mix}})^{T}J
\end{aligned}
$$

En généralisant :

$$
\forall p_1,p_2,\ldots,q_1,q_2,\ldots \qquad t_{p_1p_2\ldots}{}^{q_1q_2\ldots} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{p_1}}\,\frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{p_2}}\cdots\frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j'_1}}\,\frac{\partial x^{q_2}}{\partial x^{j'_2}}\cdots t_{i'_1i'_2\ldots}{}^{j'_1j'_2\cdots}
$$

Exemple 6.3: Changement des coordonnées sphériques en rectangulaires

À partir du changement de coordonnées sphériques en rectangulaires, cherchons l'expression du tenseur métrique euclidien en coordonnées sphériques.

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < \pi, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

D'après (21.13) p. 404,

$$\begin{aligned} G &= J^T J \\ &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 6.4: Tenseur métrique par changement de système de coordonnées

Soit le système de coordonnées (u, v), défini à partir des coordonnées rectangulaires (x, y) :

$$\begin{cases} u = x \\ v = \exp(y - x) \end{cases}$$

Cherchons les composantes du tenseur métrique euclidien dans ce système de coordonnées. Nous devons inverser le système d'équations pour avoir la matrice jacobienne de la transformation $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$:

$$\begin{cases} x = u \\ y = u + \ln v \end{cases} \tag{21.17}$$

D'après (21.13) p. 404,

$$\begin{aligned} G &= J^T J \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (v)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (v)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & (v)^{-1} \\ (v)^{-1} & (v)^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculons la longueur de la courbe suivante :

$$\mathscr{C}(p) \quad : \quad \begin{cases} u = 3p \\ v = e^p \end{cases} \qquad 2 \geqslant p \geqslant 0$$

Le carré de la dérivée de la distance élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 &= g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}\\ &= 2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\right)^2 + 2\,(v)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} + (v)^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}\right)^2\\ &= 2\times 9 + 2e^{-p}\times 3e^{p} + e^{-2p}e^{2p}\\ &= 25\end{aligned}$$

$$\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2}\,\mathrm{d}p = 5\int_0^2 \mathrm{d}p$$

$$\Gamma = 10$$

Nous pouvons effectuer le même calcul en coordonnées rectangulaires. En nous servant du changement de variable (21.17) p. 408, l'équation de $\mathscr{C}$ devient en coordonnées rectangulaires (x, y) :

$$\mathscr{C}(p) \quad : \quad \begin{cases} x = 3p \\ y = 3p + p = 4p \end{cases} \qquad 2 \geqslant p \geqslant 0$$

C'est l'équation de la droite

$$y = \tfrac{4}{3}\,x$$

qui passe au point $(0, 0)$ en $p = 0$, et au point $(6, 8)$ en $p = 2$. La distance entre ces points vaut $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

7 Définition d'un tenseur

Au § 5.3 p. 400, nous avons vu comment se transforment les composantes d'un tenseur lors d'un changement de base.

Réciproquement, donnons nous n^3 quantités que nous rattachons à une base naturelle $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$. Si, lors d'un changement de base naturelle, vers une nouvelle base naturelle $\boldsymbol{e}_{p'} \otimes \boldsymbol{e}_{q'} \otimes \boldsymbol{e}_{r'}$, les n^3 quantités se transforment selon les formules (21.9) p. 401, alors on peut faire correspondre un tenseur à ces n^3 quantités, dont elles constituent les composantes contravariantes. De même, si les n^3 quantités se transforment par changement de base naturelle selon les formules (21.11) p. 403 ou (21.14) p. 406 alors elles constituent respectivement les composantes covariantes ou mixtes d'un tenseur. Ce résultat se généralise à n^p quantités. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 7.1

Pour que n^p quantités rapportées à une base naturelle d'un espace vectoriel $E_n^{(p)}$ soient les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que ces quantités se transforment par changement de base naturelle selon les formules du § 5.3 p. 400.

Ce théorème est en fait aussi une définition des tenseurs. Ce n'est un théorème que si l'on définit d'abord les tenseurs comme un ensemble non vide d'éléments muni de deux lois de composition, l'addition tensorielle et la multiplication par un scalaire.

Exemple 7.1: Caractère tensoriel des invariants

Soit E un invariant par changement de base.

$$\begin{aligned} & E' = E \\ \forall i \qquad & \frac{\partial E'}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial E}{\partial x^{i'}} \\ & = \frac{\partial E}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \end{aligned}$$

Les invariants sont des tenseur.

Exemple 7.2: Dérivée d'un champ de scalaires

Soit $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ une fonction dérivable par rapport aux n coordonnées x^i. Montrons que les dérivées partielles de f sont les composantes d'un tenseur d'ordre un.
Soit la transformation de coordonnées $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ et soit $x^j = x^j(x^{i'})$ la transformation inverse. La dérivation partielle de f s'écrit :

$$\forall i \qquad \frac{\partial f}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

D'après (5.11) p. 73, les dérivées partielles se transforment comme les vecteurs de la base naturelle. Ce sont donc les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un, justifiant la notation $\partial_i f$ et $f_{,i}$ avec l'indice en bas.

Exemple 7.3: Différentielles de composantes covariantes

Montrons que les différentielles des composantes covariantes $\mathrm{d}u_i$ ne sont pas les composantes d'un tenseur :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad u_i &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, u_{k'} \\ \mathrm{d}u_i &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}u_{k'} \end{aligned}$$

Le premier terme est nul si les coordonnées $x^{k'}$ sont des fonctions affines des coordonnées x^j. En effet, les a_i et b étant des constantes :

$$\begin{aligned} \forall k' \qquad & x^{k'} = a_i x^i + b \\ \forall k', i \qquad & \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) = da_i \\ & = 0 \end{aligned}$$

Il faut donc que les coordonnées x^j et $x^{k'}$ soient rectilignes. Pour autant, pour être un tenseur la loi de transformation des composantes doit être valable quelle que soit la transformation de coordonnées.

Exemple 7.4: Dérivée partielle de composantes covariantes

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes covariantes u_i. Montrons que les dérivées partielles $\partial_j u_i$ des composantes covariantes ne sont pas les composantes deux fois covariantes d'un tenseur. Dans la base naturelle, les composantes covariantes d'un vecteur se transforment selon (5.19) p. 82,

$$\forall i \qquad u_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, u_{k'}$$

La dérivation partielle de cette expression nous donne :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \partial_j u_i &= \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \partial_j u_{k'} \\ &= \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'} \end{aligned} \tag{21.18}$$

Le premier terme est nul si les coordonnées $x^{k'}$ sont des fonctions affines des coordonnées x^j, c.-à-d. si x^j et $x^{k'}$ sont des coordonnées cartésiennes (rectilignes). Les a_i et b étant des constantes :

$$\begin{aligned} \forall k' \qquad & x^{k'} = a_i x^i + b \\ \forall k', i \qquad & \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) = a_i \\ \forall k', i, j \qquad & \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\right) = 0 \end{aligned}$$

Pour autant, pour être un tenseur la loi de transformation des composantes doit être valable quelle que soit la transformation de coordonnées.

Exemple 7.5: Transformation du rotationnel par changement de coordonnées

Déterminons les formules de transformation du rotationnel d'un vecteur lors d'un changement de coordonnées curvilignes. Avec (21.18) valables lors d'un changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}_{ij}(\mathbf{u}) &= \partial_j u_i - \partial_i u_j \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'}\right) - \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}\, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^j \partial x^i}\, \partial_{l'} u_{k'}\right) \end{aligned}$$

où les indices k et l sont muets. Or

$$\forall i,j,k \qquad \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$$

donc :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'} - \frac{\partial x^{m'} \partial x^{n'}}{\partial x^j \partial x^i}\, \partial_{n'} u_{m'} \\ &= \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'} - \frac{\partial x^{l'} \partial x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\, \partial_{k'} u_{l'} \\ \partial_j u_i - \partial_i u_j &= \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, (\partial_{l'} u_{k'} - \partial_{k'} u_{l'}) \end{aligned}$$

C'est la formule de transformation des composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux lors d'un changement de base naturelle.

Examinons l'autre possibilité pour l'expression du rotationnel. Supposons $\mathbf{u}$ de composantes contravariantes u^i. Par changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment selon :

$$\forall i \qquad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, u^{k'}$$

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad \partial_j u^i &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, \partial_j u^{k'} \\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^i \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^j}\, \partial_{l'} u^{k'}\end{aligned}$$

$$\forall i,j \qquad \partial_j u^i - \partial_i u^j = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^i \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^j}\, \partial_{l'} u^{k'}\right) - \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^j \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^i}\, \partial_{l'} u^{k'}\right)$$

Ce ne sont pas les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux car en général

$$\forall i \neq j \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \neq \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \qquad \Rightarrow \qquad \forall i \neq j \qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}} \neq \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{k'}}$$

8 Le tenseur métrique

À partir de la définition du tenseur métrique 1.1 p. 201, dans une base naturelle :

$$\forall i,j \qquad g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

Lors d'un changement de base naturelle :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad g_{ij} &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \boldsymbol{e}_{k'} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}\, \boldsymbol{e}_{l'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}\, \boldsymbol{e}_{k'} \cdot \boldsymbol{e}_{l'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}\, g_{k'l'}\end{aligned} \tag{21.19}$$

Les g_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique associée à la matrice G soit invariante par changement de coordonnées. En effet :

$$\forall i,j \qquad g_{i'j'} = g_{pq}\, \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\, \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}g_{i'j'}\, \mathrm{d}x^{i'} \mathrm{d}x^{j'} &= g_{pq}\, \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\, \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\, \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}\, \mathrm{d}x^r\, \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^s}\, \mathrm{d}x^s \\ &= g_{pq}\, \delta^p_r \delta^q_s\, \mathrm{d}x^r \mathrm{d}x^s \\ &= g_{pq}\, \mathrm{d}x^p \mathrm{d}x^q\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad g^{ij} &= \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\boldsymbol{e}^{k'} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\,\boldsymbol{e}^{l'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\,\boldsymbol{e}^{k'} \cdot \boldsymbol{e}^{l'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\,g^{k'l'}\end{aligned}$$

Les g^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur d'ordre deux. Formons le déterminant des matrices figurant de part et d'autre de cette égalité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{g} &= J^2\frac{1}{g'} \\ g' &= J^2 g\end{aligned} \tag{21.20}$$

Exemple 8.1: Tenseur métrique par changement de base

Soit le changement de base quelconque d'un espace vectoriel E_2 :

$$\begin{cases}\mathbf{e}_{1'} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\end{cases}$$

Déterminons les nouvelles composantes du tenseur métrique $g_{k'l'}$ en fonction de ses anciennes composantes g_{ij}.

- en partant de la définition du tenseur métrique dans une base quelconque :

$$g_{k'l'} = \mathbf{e}_{k'} \cdot \mathbf{e}_{l'}$$

$$\begin{cases}g_{1'1'} = (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\cdot(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ g_{1'2'} = (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\cdot(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \\ g_{2'1'} = (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)\cdot(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ g_{2'2'} = (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)\cdot(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}g_{1'1'} = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22} \\ g_{1'2'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'1'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'2'} = g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22}\end{cases}$$

- en utilisant la formule de changement de base quelconque d'un tenseur d'ordre deux :

$$\forall k,l \quad g_{k'l'} = A^i_{k'}A^j_{k'}\,g_{ij}$$

Pour déterminer les $A^i_{k'}$ on utilise (5.7) p. 70 :

$$\forall k \qquad \mathbf{e}_{k'} = A^i_{k'}\,\mathbf{e}_i$$

$$\begin{cases}\mathbf{e}_{1'} = A^1_{1'}\mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = A^1_{2'}\mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\mathbf{e}_2\end{cases} \Rightarrow \quad A^1_{1'} = 3\ ;\ A^2_{1'} = 1\ ;\ A^1_{2'} = -1\ ;\ A^2_{2'} = 2$$

$$\begin{cases}g_{1'1'} = A^1_{1'}A^1_{1'}g_{11} + A^2_{1'}A^1_{1'}g_{21} + A^1_{1'}A^2_{1'}g_{12} + A^2_{1'}A^2_{1'}g_{22} \\ g_{1'2'} = A^1_{1'}A^1_{2'}g_{11} + A^2_{1'}A^1_{2'}g_{21} + A^1_{1'}A^2_{2'}g_{12} + A^2_{1'}A^2_{2'}g_{22} \\ g_{2'1'} = A^1_{2'}A^1_{1'}g_{11} + A^2_{2'}A^1_{1'}g_{21} + A^1_{2'}A^2_{1'}g_{12} + A^2_{2'}A^2_{1'}g_{22} \\ g_{2'2'} = A^1_{2'}A^1_{2'}g_{11} + A^2_{2'}A^1_{2'}g_{21} + A^1_{2'}A^2_{2'}g_{12} + A^2_{2'}A^2_{2'}g_{22}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{1'1'} = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22} \\ g_{1'2'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'1'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'2'} = g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22} \end{cases}$$

9 Symétrie et antisymétrie des tenseurs

9.1 Tenseurs deux fois contravariant ou deux fois covariant

Un tenseur est symétrique pour deux indices de même variance (soit covariants soit contravariants) si l'on peut échanger ces deux indices. La symétrie d'un tenseur ou son antisymétrie sont des propriétés intrinsèques, indépendantes de la base dans laquelle on exprime le tenseur.

Exemple 9.1

Si le tenseur $t^{i\ k}_{j\ l}$ est symétrique en i et k, alors :

$$t^{i\ k}_{j\ l} = t^{k\ i}_{j\ l}$$

Par changement de base :

$$t^{p'\ r'}_{q'\ s'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}}\, t^{i\ k}_{j\ l} \qquad \text{et} \qquad t^{r'\ p'}_{q'\ s'} = \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}}\, t^{k\ i}_{j\ l}$$

$$t^{p'\ r'}_{q'\ s'} = t^{r'\ p'}_{q'\ s'}$$

9.2 Symétrie des tenseurs mixtes

En revanche, la symétrie d'un tenseur mixte pour deux indices de variance différente est fortuite, elle ne se produit que dans une base particulière.

Exemple 9.2

Soit la matrice changement de base suivante :

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminons les nouvelles composantes mixtes du tenseur contravariant-covariant *a priori* symétrique $t^i{}_j(1,2,2,3)$. Avec (21.16) p. 406 et la remarque 4.2 p. 73 :

$$\begin{aligned}\mathsf{t}' &= \left(A^{-1}\right)^T \mathsf{t} A^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{-1}{2} & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le tenseur mixte n'est plus symétrique dans la nouvelle base.

9.3 Décomposition d'un tenseur

Théorème 9.1

Tout tenseur ayant deux indices de même variance peut se décomposer en une somme de deux tenseurs, l'un symétrique, l'autre antisymétrique.

Démonstration. Soit le tenseur $t^{ij}{}_k$. Supposons la décomposition possible, alors

$$t^{ij}{}_k = s^{ij}{}_k + a^{ij}{}_k$$

avec $s^{ij}{}_k = s^{ji}{}_k$ et $a^{ij}{}_k = -a^{ji}{}_k$. Alors :

$$\begin{aligned} t^{ij}{}_k + t^{ji}{}_k &= s^{ij}{}_k + a^{ij}{}_k + s^{ji}{}_k + a^{ji}{}_k \\ t^{ij}{}_k + t^{ji}{}_k &= 2s^{ij}{}_k \end{aligned}$$

De même nous avons :

$$\begin{aligned} t^{ij}{}_k - t^{ji}{}_k &= s^{ij}{}_k + a^{ij}{}_k - s^{ji}{}_k - a^{ji}{}_k \\ t^{ij}{}_k - t^{ji}{}_k &= 2a^{ij}{}_k \end{aligned}$$

Si la décomposition est possible nous avons nécessairement

$$s^{ij}{}_k = \tfrac{1}{2}(t^{ij}{}_k + t^{ji}{}_k) \qquad \text{et} \qquad a^{ij}{}_k = \tfrac{1}{2}(t^{ij}{}_k - t^{ji}{}_k)$$

Réciproquement, si l'on pose le tenseur symétrique par construction $s^{ij}{}_k = \frac{1}{2}(t^{ij}{}_k + t^{ji}{}_k)$ et le tenseur antisymétrique par construction $a^{ij}{}_k = \frac{1}{2}(t^{ij}{}_k - t^{ji}{}_k)$, alors on a bien

$$t^{ij}{}_k = s^{ij}{}_k + a^{ij}{}_k$$

La décomposition étant toujours possible. □

10 Opérations sur les tenseurs

Les opérations sur les tenseurs généralisent celles sur les vecteurs définies au § 2.8 p. 43. Leurs propriétés permettent de définir les tenseurs.

1) Pour être additionnés, les tenseurs doivent être du même ordre et être rapportés à une même base (leurs composantes ont alors même variance). Dans un espace vectoriel $E_n^{(2)}$, soient $\mathsf{U} = u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ et $\mathsf{V} = v^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ deux tenseurs « contravariants » d'ordre deux. L'addition tensorielle consiste à additionner les composantes respectives des tenseurs :

$$\begin{aligned}\mathsf{U} \oplus \mathsf{V} &= u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + v^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \left(u^{ij} + v^{ij}\right)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= w^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \mathsf{W}\end{aligned}$$

   L'addition tensorielle fait correspondre aux deux tenseurs initiaux un tenseur de même ordre et du même espace vectoriel.

2) La multiplication d'un tenseur par un scalaire α consiste à multiplier chaque composante du tenseur par ce scalaire. Dans un espace vectoriel $E_n^{(2)}$, soit α un scalaire et soit $\mathsf{U} = u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ un tenseur « contravariant » d'ordre deux.

$$\begin{aligned}\alpha\mathsf{U} &= \alpha(u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= (\alpha u^{ij})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= v^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \mathsf{V}\end{aligned}$$

   La multiplication d'un tenseur par un scalaire lui fait correspondre un tenseur de même ordre et du même espace vectoriel.

10.1 Propriétés des lois de composition tensorielles

- L'addition tensorielle a les propriétés suivantes :
  1) commutativité : $\forall i,j \quad u^{ij} + v^{ij} = v^{ij} + u^{ij}$
  2) associativité : $\forall i,j \quad u^{ij} + (v^{ij} + w^{ij}) = (u^{ij} + v^{ij}) + w^{ij} = u^{ij} + v^{ij} + w^{ij}$
  3) existence d'un élément neutre noté $\mathbf{0}$, de composantes nulles $\forall i,j \; n^{ij} = 0$, et tel que $\forall \mathsf{T}, \; \mathsf{T} + \mathbf{0} = \mathsf{T}$
  4) pour tout tenseur U il existe le tenseur *opposé* noté $-\mathsf{U}$, tel que :

$$\mathsf{U} + (-\mathsf{U}) = \mathbf{0}$$
$$\forall i,j \qquad u^{ij} + (-u^{ij}) = 0$$

- La multiplicaton par un scalaire a les propriétés suivantes :
  1) associativité : $\forall i,j \; \lambda\,(\mu\,u^{ij}) = (\lambda\,\mu)\,u^{ij}$
  2) distributivité par rapport à l'addition des scalaires : $\forall i,j \; (\lambda+\mu)\,u^{ij} = \lambda\,u^{ij} + \mu\,u^{ij}$
  3) distributivité par rapport à l'addition tensorielle : $\forall i,j \; \lambda\,(u^{ij} + v^{ij}) = \lambda\,u^{ij} + \lambda\,v^{ij}$
  4) il existe un élément neutre, le réel 1, tel que : $\forall i,j \quad 1 \times u^{ij} = u^{ij}$

10.2 Combinaison linéaire de tenseurs

Soient u^{ij} et v^{ij} les composantes deux fois contravariantes de deux tenseurs d'ordre deux. Soit t^{ij} leur combinaison linéaire :

$$\boxed{\forall i,j \qquad t^{ij} = u^{ij} + \lambda v^{ij}}$$

Par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad t^{ij} &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}u^{k'l'}\right) + \lambda\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}v^{k'l'}\right)\\ &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\right)\left(u^{k'l'} + \lambda v^{k'l'}\right)\\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}t^{k'l'}\end{aligned}$$

D'après le th. 7.1 p. 409, les quantités t^{ij} constituent les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur d'ordre deux. La combinaison linéaire de deux tenseurs du même ordre donne un tenseur du même ordre.

Exemple 10.1: Caractère tensorielle d'opérations sur les composantes

Soient t^{ij} les composantes d'un tenseur, montrer que les $t^{ij} - t^{ji}$ sont également les composantes d'un tenseur. Commençons par montrer que si les t^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur alors les composantes transposées t^{ji} sont aussi deux fois contravariantes :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad t^{i'j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l}t^{kl}\\ t^{j'i'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}t^{kl}\end{aligned}$$

Par conséquent les t^{ji} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur, ainsi que les $t^{ij} - t^{ji}$ d'après le § 1) p. 416.

Exemple 10.2

Soit T un tenseur de composantes mixtes, contravariante-covariante, montrons que sa transposée est un tenseur. Les composantes mixtes de T se transforment par changement de base selon :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad t^{i'}{}_{j'} &= t^i{}_j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\\ t^{j'}{}_{i'} &= t^j{}_i\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\end{aligned}$$

Par conséquent T^T est un tenseur.

10.3 Classification des tenseurs

L'addition tensorielle et la multiplication par un scalaire sont des lois de composition de $E_n^{(2)}$ dans $E_n^{(2)}$. Les tenseurs suivent donc la déf. 1.11 p. 27 d'un espace vectoriel, et sont par conséquent des vecteurs d'un espace vectoriel $H_{n,p,q,\ldots}$ muni d'une structure de produit tensoriel. Les espaces produits tensoriels deviennent pré-euclidiens lorsqu'on les munit d'un produit scalaire.

Afin d'unifier la classification, les espaces élémentaires E_1 non munis d'une structure de produit tensoriel ont pour éléments des tenseurs d'ordre un, que l'on appellera vecteurs. Comme vu précédemment, les tenseurs d'ordre zéro sont appelés des scalaires.

10.4 Multiplication tensorielle

Les produits tensoriels d'espaces vectoriels sont des espaces vectoriels. Ils peuvent à leur tour former de nouveaux espaces vectoriels par multiplication tensorielle.

Soit $\mathsf{U} = u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ un tenseur de $E_n^{(2)}$, et soit $\mathsf{V} = v^i{}_j{}^k\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$ un tenseur de $E_n^{(3)}$. La multiplication tensorielle leur fait correspondre le tenseur T d'ordre cinq, de l'espace $E_n^{(5)} = E_n^{(2)} \otimes E_n^{(3)}$, tel que :

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= \mathsf{U} \otimes \mathsf{V} \\ t^{ijk}{}_l{}^m\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}_m &= (u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (v^k{}_l{}^m\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}_m) \\ &= u^{ij}\, v^k{}_l{}^m(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l \otimes \mathbf{e}_m) \\ \forall i,j,k,l,m \quad t^{ijk}{}_l{}^m &= u^{ij}v^k{}_l{}^m \end{aligned}$$

Notation 10.1

Le produit tensoriel est aussi noté :

$$\mathsf{T} = [\mathsf{UV}]$$

10.5 Contraction des composantes

La contraction des composantes d'un tenseur consiste à égaler l'un des indices contravariants avec l'un des indices covariants. À partir d'un tenseur d'ordre q de composantes mixtes, elle permet d'obtenir de nouveaux tenseurs d'ordre $q-2$, le tenseur initial étant amputé d'une composante covariante et d'une composante contravariante.

Soit un tenseur d'ordre deux de composantes contravariantes t^{ij}. Nous pouvons toujours l'écrire en composantes mixtes, l'un des systèmes de composantes mixtes étant $t^i{}_j$, l'autre étant $t_i{}^j$. La contraction de ce tenseur, appelé sa *trace* est un scalaire. En effet

$$\begin{aligned} t^i{}_i &= A_i^{k'}A^j_{l'}t^{l'}{}_{k'} \\ &= \delta^{k'}_{l'}t^{l'}{}_{k'} \\ &= t^{k'}{}_{k'} \\ &= t^1_1 + t^2_2 + \cdots + t^n_n \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat en partant de $t_i{}^i$, nous avons $t^i{}_i = t_i{}^i = t^i_i$

Exemple 10.3: Contraction des composantes d'un tenseur d'ordre deux

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de E_n de composantes respectives contravariantes u^i et covariantes v_j, et soit T leur produit tensoriel :

$$\mathsf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$$
$$t^i_j(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = u^i \mathbf{e}_i \otimes v_j \mathbf{e}^j$$
$$\forall i, j \qquad t^i_j = u^i v_j$$

En posant $i = j$ nous additionnons les composantes et formons le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \forall i \qquad t^i_i &= u^i v_i \\ &= u^1 v_1 + u^2 v_2 + u^3 v_3 + \dots \\ &= t^1_1 + t^2_2 + t^3_3 + \dots \end{aligned}$$

L'opération de contraction des composantes fait passer un tenseur d'ordre deux de composantes mixtes à un scalaire ou tenseur d'ordre zéro. Par contraction répétée des composantes d'un tenseur d'ordre pair on déduit donc un invariant.

Exemple 10.4: Contraction des composantes d'un tenseur d'ordre trois

Soit U un tenseur d'ordre trois de composantes mixtes ${u^{ij}}_k$, deux fois contravariantes et une fois covariantes. La contraction des composantes d'indices j et k donne les quantités suivantes :

$$\forall i \qquad {u^{ij}}_j = v^i$$

Par exemple $v^1 = {u^{11}}_1 + {u^{12}}_2 + {u^{13}}_3$. Montrons qu'elles constituent les composantes d'un vecteur. Par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad {u^{ij}}_j &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^j} {u^{k'm'}}_{n'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \delta^{n'}_{m'} {u^{k'm'}}_{n'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} {u^{k'm'}}_{m'} \\ \forall i \qquad v^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} v^{k'} \end{aligned}$$

Les v^i se transforment par changement de base naturelle comme les composantes contravariantes d'un tenseur. L'opération de contraction des composantes fait passer un « tenseur mixte » d'ordre trois à un tenseur d'ordre un (vecteur).

10.6 Multiplication contractée

Définition 10.1: Multiplication contractée

La multiplication tensorielle suivie de la contraction des composantes s'appelle la multiplication contractée, ou multiplication mixte, ou produit tensoriel contracté.

En particulier, appliquée à deux tenseurs du premier ordre de variances différentes, elle donne un invariant $u_i v^i$ appelé *produit intérieur* de U par V, analogue du produit scalaire du calcul vectoriel (cf. ex. 2.3 p. 378).

Notation 10.2

La multiplication contractée de U par V est notée :

$$\mathsf{T} = \mathsf{UV}$$

Elle donne un critère de tensorialité.

— Si pour tout vecteur de composantes contravariantes v^i

$$u_i v^i = E$$

est un invariant, alors les u_i sont les composantes covariantes d'un vecteur (tenseur d'ordre un). En effet, E est par hypothèse invariant par changement de base :

$$E = E'$$
$$u_i v^i = u_{j'} v^{j'}$$

Les v^i sont par hypothèse les composantes contravariantes d'un vecteur, par changement de base naturelle,

$$\begin{aligned} u_i v^i &= u_{j'} v^k \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \\ &= u_{j'} v^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \end{aligned}$$

relation vraie quelles que soient les v^i, donc par changement de base naturelle :

$$\forall i \qquad u_i = u_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

et les u_i sont les composantes covariantes d'un vecteur.

— Si pour tout vecteur de composantes contravariantes u^i

$$\forall j \qquad t_{ij} u^i = v_j$$

sont les composantes covariantes d'un vecteur, alors les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, les v_j sont par hypothèse les composantes covariantes d'un vecteur. Par changement de base naturelle :

$$\forall j \qquad v_{j'} = v_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}$$
$$\forall j \qquad t'_{ij} u^{i'} = t_{lk} u^l \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}$$

Les u^i sont par hypothèse les composantes contravariantes d'un vecteur,

$$\begin{aligned} \forall j \qquad t'_{ij}u^{i'} &= t_{lk}u^{m'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\ &= t_{lk}u^{i'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\ \forall i,j \qquad t'_{ij} &= t_{lk}\frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

et les t'_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur. Dans la suite, nous les noterons $t_{i'j'}$.

— Si pour tous vecteurs de composantes contravariantes u^i et v^i

$$t_{ij}u^iv^j = E$$

est un invariant par changement de base, alors les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, d'après (10.6), les $t_{ij}u^i$ sont les composantes covariantes d'un vecteur, et par conséquent d'après (10.6) les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

— Si les t_{ij} sont symétriques et si pour tout vecteur de composantes contravariantes v^i

$$t_{ij}v^iv^j = E$$

est un invariant par changement de base, alors les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, soit u^i les composantes contravariantes d'un autre vecteur, alors $w^i = u^i + v^i$ est aussi un vecteur contravariant. Alors,

$$\begin{aligned} t_{ij}w^iw^j &= t_{ij}\left(u^i+v^i\right)\left(u^j+v^j\right) \\ &= t_{ij}u^iu^j + t_{ij}v^iu^j + t_{ij}u^iv^j + t_{ij}v^iv^j \\ &= t_{ij}u^iu^j + t_{ij}v^iv^j + 2t_{ij}u^iv^j \end{aligned}$$

où le terme de gauche et les deux premiers termes de droite sont des invariants par hypothèse. Par conséquent $t_{ij}u^iv^j$ doit aussi être un invariant, et d'après (10.6), les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

La généralisation des exemples (10.6), (10.6) et (10.6) permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 10.1: Critère général de tensorialité - Théorème du quotient

Pour qu'une suite ordonnée de quantité constitue les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que le produit contracté de cette suite ordonnée de quantités avec un tenseur donne un tenseur.

Exemple 10.5: Différentielle d'un champ de scalaires

Reprenons l'ex. 7.2 p. 410. Soit $f\left(v^1, v^2, \ldots, v^n\right)$ une fonction dérivable par rapport à ses n variables v^i. Montrons que les dérivées partielles de f sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un.
La différentielle de f s'écrit :

$$\mathrm{d}f = f_{,i}\,\mathrm{d}u^i$$

C'est le produit contracté du vecteur gradient de f avec le vecteur différentiel $\mathrm{d}\mathbf{M}$ dont les composantes sont contravariantes d'après (3.8) p. 49. Or df est un scalaire donc les dérivées partielles sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un.

Exemple 10.6: Tenseur métrique

Montrons que les n^2 quantités g_{ij} sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Le produit tensoriel des g_{ij} avec les composantes contravariantes d'un vecteur quelconque $\mathbf{v}$ donne $g_{ij}v^k$. La contraction sur les indices j et k donne les composantes covariantes du vecteur $\mathbf{v}$:

$$\forall i \qquad g_{ij}v^j = v_i$$

Selon le critère général de tensorialité, les n^2 quantités g_{ij} sont donc les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

10.7 Produit complètement contracté

Soit une suite ordonnée de n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ attachées à une base quelconque $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k$:

$$u^{11}{}_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + u^{11}{}_2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \cdots + u^{11}{}_n\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^n + u^{12}{}_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1 + \ldots$$

Ces quantités sont-elles les composantes d'un tenseur ? Si le produit complètement contracté avec trois vecteurs quelconques $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j$ et $\mathbf{z} = z^k\mathbf{e}_k$ donne un tenseur (un scalaire puisque complètement contracté),

$${u^{ij}}_k x_i y_j z^k = \alpha$$

(où l'on a pris les composantes covariantes des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$) alors d'après le critère général de tensorialité appliqué trois fois, la suite des n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ constitue les composantes d'un tenseur.

Réciproquement, si la suite des n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ constitue les composantes d'un tenseur, alors par définition de la multiplication tensorielle et de la contraction des composantes, le produit complètement contracté ${u^{ij}}_k x_i y_j z^k$ donne un tenseur (un scalaire). Les n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre trois.

Théorème 10.2: Critère de tensorialité

Pour qu'un ensemble de n^{p+q} quantités ayant p indices supérieurs et q indices inférieurs soit un tenseur, il faut et il suffit que leur produit complètement contracté par les composantes contravariantes de p vecteurs quelconques et par les composantes covariantes de q vecteurs quelconques donne un scalaire.

Ce théorème est équivalent au critère général de tensorialité 10.1 p. 421 lorsque le produit est complètement contracté.

Exemple 10.7: Produit contracté et produit scalaire

Démontrons que le produit contracté des tenseurs U et V est invariant par changement de base. Effectuons un changement de base naturelle :

$$\forall j \qquad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\, u^i \qquad ; \qquad \forall l \quad v_{l'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\, v_k$$

Le produit des composantes donne :

$$\forall j, l \qquad u^{j'} v_{l'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\, u^i v_k$$

Contractons des indices j et l :

$$\begin{aligned} u^{j'} v_{j'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} u^i v_k \\ &= \delta_i^k u^i v_k \\ &= u^k v_k \end{aligned}$$

$u^k v_k$ est invariant par changement de base naturelle. C'est le produit scalaire des vecteurs U et V.

11 Équations tensorielles

11.1 Changement de système de coordonnées

Une équation tensorielle vraie dans un système de coordonnées est vraie dans tout système de coordonnées.

Exemple 11.1: Tenseur zéro d'ordre deux

Soit T un tenseur dont les composantes deux fois covariantes sont nulles dans la base naturelle d'un certain système de coordonnées :

$$\forall i, j \qquad t_{ij} = 0$$

Alors, par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned} \forall k, l \qquad t_{k'l'} &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} t_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et les composantes du tenseur T, appelé tenseur zéro, sont nulles dans toute base naturelle.

Exemple 11.2: Validité d'une équation tensorielle

Dans une base quelconque, soit l'équation suivante,

$$\forall i, j \qquad r_{ijk} s^k = 3 t_i^{\ kl} u_{jk} v_l + w_{ij}$$

qui peut toujours s'écrire :

$$\forall i, j \qquad r_{ijk} s^k - 3 t_i^{\ kl} u_{jk} v_l - w_{ij} = 0$$

Si l'on peut montrer que les composantes

$$z_{ij} = r_{ijk} s^k - 3 t_i^{\ kl} u_{jk} v_l - w_{ij}$$

sont les composantes (covariantes) d'un tenseur (d'ordre deux), alors d'après l'exemple précédent cette équation tensorielle est vraie dans toute base naturelle, autrement dit dans tout système de coordonnées.

11.2 Règles sur les indices

- indice muet

  Dans tout monome tensoriel, on peut inverser les positions haut et bas de tout indice muet. Soient A et B deux tenseurs :

$$\begin{aligned} A^i{}_j B_i &= g^{ik} A_{kj} g_{il} B^l \\ &= g^{ik} g_{il} A_{kj} B^l \\ &= \delta^k_l A_{kj} B^l \\ &= A_{lj} B^l \\ &= A_{ij} B^i \end{aligned}$$

- indice libre

  Si dans *tous* les termes d'une équation tensorielle figure un même indice libre, on a une équation équivalente en élevant ou en abaissant partout cet indice. Soient S et Q deux tenseurs, et soit χ un scalaire :

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \quad & \mathsf{S}_{\lambda\mu} = \chi \mathsf{Q}_{\lambda\mu} \\ \forall \nu, \mu \quad & g^{\lambda\nu} \mathsf{S}_{\lambda\mu} = g^{\lambda\nu} \chi \mathsf{Q}_{\lambda\mu} \\ \forall \nu, \mu \quad & \mathsf{S}^\nu{}_\mu = \chi \mathsf{Q}^\nu{}_\mu \\ \forall \lambda, \mu \quad & \mathsf{S}^\lambda{}_\mu = \chi \mathsf{Q}^\lambda{}_\mu \end{aligned}$$

  Si nous appliquons cette règle une seconde fois :

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \xi \quad & g^{\mu\xi} \mathsf{S}^\lambda{}_\mu = g^{\mu\xi} \chi \mathsf{Q}^\lambda{}_\mu \\ \forall \lambda, \xi \quad & \mathsf{S}^{\lambda\xi} = \chi \mathsf{Q}^{\lambda\xi} \\ \forall \lambda, \mu \quad & \mathsf{S}^{\lambda\mu} = \chi \mathsf{Q}^{\lambda\mu} \end{aligned}$$

Chapitre 22

ESPACE EUCLIDIEN EN COORDONNÉES CURVILIGNES

Sommaire

1 Élément linéaire de l'espace euclidien 425
2 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes 428
3 Volume élémentaire de l'espace euclidien 434
4 Les symboles de Christoffel 436
5 Transport parallèle en espace euclidien 446
6 Dérivée absolue - Dérivée covariante 448
7 Différentielle absolue d'un tenseur 456
8 Dérivée covariante d'un tenseur 458
9 Théorème et identités de Ricci 458
10 Opérateurs différentiels 459
11 Dérivée covariante seconde d'un vecteur 463
12 Règles de dérivation des tenseurs 464

1 Élément linéaire de l'espace euclidien

Définition 1.1: Élément linéaire de l'espace euclidien

Soit ${}_E n$ un espace ponctuel euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes. Le carré de la distance entre deux points infiniment voisins est égal au carré de la norme euclidienne du vecteur infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}$ de l'espace vectoriel euclidien associé :

$$\mathrm{d}s^2 \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}$$

$\mathrm{d}s$ est appelé élément linéaire d'espace, ou distance élémentaire ou encore métrique de l'espace.

Dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$ du système de coordonnées curvilignes (x^i), les composantes contravariantes infinitésimales sont confondues avec les différentielles des coordonnées (remarque 2.12 p. 49). Nous retrouvons (19.3) p. 367 :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$$

où les composantes g_{ij} du tenseur métrique sont les produits scalaires des vecteurs de base de la base naturelle.

Remarque 1.1

$\mathrm{d}s = \|\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}\|$ est aussi l'abscisse curviligne du point M exprimée dans la base de centre infiniment proche de M.

D'après le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 8.1 p. 212, tout espace pré-euclidien admet une base (pseudo-) orthonormée, donc un système de coordonnées rectangulaire dont c'est la base naturelle, donc aussi un système de coordonnées cartésiennes. Dans la base (pseudo-) orthonormée le tenseur métrique est représentable par une matrice diagonale. Réciproquement, si dans un espace il existe un système de coordonnées rectangulaires, donc aussi un système de coordonnées cartésiennes, alors on peut lui associer une base naturelle (pseudo-) orthonormée, et l'espace est pré-euclidien. C'est le seul cas ou tenseur métrique et système de coordonnées (cartésiennes) sont liés. Dans le cas d'espaces non euclidiens, tenseur métrique et système de coordonnées obligatoirement curvilignes sont complètement indépendants.

L'élément linéaire le long d'une courbe paramétrée de paramètre p, est une fonction de ce paramètre : $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s(p)$. Il est souvent avantageux de faire apparaitre explicitement le paramètre p dans sa définition :

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p}\right)^2 = g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p} \tag{22.1}$$

Exemple 1.1: Carré de l'élément linéaire d'espace en coordonnées sphériques

Déterminons l'expression du carré de l'élément linéaire d'espace en coordonnées sphériques de trois façons différentes.

a) Cherchons l'expression de $\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$ en coordonnées sphériques, dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Le vecteur position s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\\ &= r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} + r\cos(\theta)\,\vec{k}\end{aligned}$$

Or nous avons

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}(r,\theta,\phi) = \partial_r\vec{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}r + \partial_\theta\vec{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}\theta + \partial_\phi\vec{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}\phi$$

Ces deux relations donnent :

$$\begin{cases}\partial_r\vec{\mathrm{M}} = \sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} + \cos(\theta)\,\vec{k}\\ \partial_\theta\vec{\mathrm{M}} = r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} - r\sin(\theta)\,\vec{k}\\ \partial_\phi\vec{\mathrm{M}} = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\imath} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\jmath}\end{cases}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}} &= \left[\sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} + \cos(\theta)\,\vec{k}\right] dr \\
&\quad + \left[r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} - r\sin(\theta)\,\vec{k}\right]\mathrm{d}\theta \\
&\quad + \left[-r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\imath} + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\jmath}\right]\mathrm{d}\phi \\
&= \left[\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\mathrm{d}\theta - r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\phi\right]\vec{\imath} \\
&\quad + \left[\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\mathrm{d}\theta + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathrm{d}\phi\right]\vec{\jmath} \\
&\quad + \left[\cos(\theta)\,\mathrm{d}r - r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]\vec{k}
\end{aligned}$$

dont le produit scalaire avec lui-même donne l'expression cherchée :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}} &= \left[\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)\right]\mathrm{d}r^2 \\
&\quad + r^2\left[\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta^2 \\
&\quad + r^2\left[\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\phi)\right]\mathrm{d}\phi^2 \\
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2
\end{aligned}$$

b) Cherchons l'expression de $\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$ en coordonnées sphériques, dans la base naturelle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e}_r$$

Sa différentielle vaut :

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vec{e}_r$$

Or d'après (3.6) p. 42 :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r(\theta,\phi) &= \sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} + \cos(\theta)\,\vec{k} \\
\mathrm{d}\vec{e}_r &= \partial_\theta\vec{e}_r\mathrm{d}\theta + \partial_\phi\vec{e}_r\mathrm{d}\phi \\
&= \left[\cos(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\imath} + \cos(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\jmath} - \sin(\theta)\,\vec{k}\right]\mathrm{d}\theta \\
&\quad + \left[-\sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{\jmath}\right]\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\mathrm{d}\vec{e}_r$ étant perpendiculaires, et le vecteur $\vec{e}_r$ étant de norme unité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}} &= \mathrm{d}r^2\|\vec{e}_r\|^2 + r^2\|\mathrm{d}\vec{e}_r\|^2 \\
&= \mathrm{d}r^2 + r^2\Big\{\left[\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta^2 \\
&\qquad + \left[\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\phi)\right]\mathrm{d}\phi^2\Big\} \\
&= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2
\end{aligned}$$

c) En utilisant le tenseur métrique en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \\
&= g_{11}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^1 + g_{12}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + g_{13}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3 \\
&\qquad + g_{21}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^1 + g_{22}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^2 + g_{23}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \\
&\qquad\qquad + g_{31}\,\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 + g_{32}\,\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^2 + g_{33}\,\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^3 \\
&= g_{11}\,(\mathrm{d}u^1)^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + 2g_{13}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3 \\
&\qquad + g_{22}\,(\mathrm{d}u^2)^2 + 2g_{23}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 + g_{33}\,(\mathrm{d}u^3)^2
\end{aligned}$$

Pour un système de coordonnées orthogonales le tenseur métrique est diagonal :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\,(\mathrm{d}u^1)^2 + g_{22}\,(\mathrm{d}u^2)^2 + g_{33}\,(\mathrm{d}u^3)^2$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta^2 + g_{\phi\phi}\,\mathrm{d}\phi^2 \\
&= \vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\,\mathrm{d}r^2 + \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}\theta^2 + \vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\phi^2 \\
&= \|\vec{e}_r\|^2\mathrm{d}r^2 + \|\vec{e}_\theta\|^2\mathrm{d}\theta^2 + \|\vec{e}_\phi\|^2\phi^2
\end{aligned}$$

Les relations (3.7) p. 43 donne les normes des vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques,

$$\begin{cases}
\|\vec{e}_r\| = 1 \\
\|\vec{e}_\theta\| = r \\
\|\vec{e}_\phi\| = r\sin(\theta)
\end{cases}$$

et l'on a :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2$$

2 Géodésiques de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes

Reprenons en coordonnées curvilignes la déf. 3.1 p. 9 d'une géodésique.

Définition 2.1: Géodésique

Une trajectoire joignant deux points a et b de $\mathcal{E}_n$ est une géodésique ssi sa longueur est extrémale :

$$\delta\int_{p_a}^{p_b}\sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}}\,\mathrm{d}p = 0$$

Théorème 2.1: Géodésique

Un mobile dans un espace euclidien $\mathcal{E}_n$ décrit une géodésique si son accélération est nulle :

$$\forall i = 1,\ldots,n \qquad \ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{jk}\,\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{22.2}$$

Remarque 2.1

La notation avec un point indique que l'on a pris le temps coordonnée pour paramètre, mais une fois que la trajectoire est tracée dans l'espace-temps, n'importe quel paramètre peut être utilisé.

DÉMONSTRATION. Dans la déf. (2.1) p. 428, posons le lagrangien $\mathcal{L} = g_{ij}\, x'^i x'^j$,

$$\delta \int_{p_a}^{p_b} \sqrt{\mathcal{L}}\, \mathrm{d}p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta \int_{p_a}^{p_b} \mathcal{L}\, \mathrm{d}p = 0$$

en conservant la condition $\mathcal{L} \geqslant 0$. Nous obtenons le système des n équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(2 g_{ij}\, x'^j\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{kj}\, x'^k x'^j\right) = 0$$

$$2 g_{ij}\, x''^j + 2\, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}p}\, x'^j - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\, x'^k x'^j = 0$$

$$g_{ij}\, x''^j + \partial_k g_{ij}\, x'^k x'^j - \tfrac{1}{2}\, \partial_i g_{kj}\, x'^k x'^j = 0$$

$$g_{ij}\, x''^j + \left(\partial_k g_{ij} - \tfrac{1}{2}\, \partial_i g_{kj}\right) x'^k x'^j = 0$$

En remarquant que $g_{ij,k} x'^k x'^j = g_{ki,j} x'^k x'^j$:

$$\forall i \qquad g_{ij}\, x''^j + \tfrac{1}{2}\left(\, g_{ki,j} + g_{ij,k} - \partial_i g_{kj}\right) x'^k x'^j = 0$$

En se servant des relations (22.21) p. 442 qui donnent l'expression des symboles de Christoffel de 1re espèce en fonction des dérivées du tenseur métrique :

$$\forall i \qquad g_{ij}\, x''^j + \Gamma_{jik}\, x'^k x'^j = 0$$

Par multiplication contractée par g^{ih}, nous trouvons le système des n équations différentielles d'une géodésique en coordonnées curvilignes :

$$\forall h \qquad x''^h + \Gamma^h{}_{jk}\, x'^j x'^k = 0$$

avec $g_{ij}\, x'^i x'^j \geqslant 0$. □

Ce système de n équations différentielles ordinaires du second ordre, pour les n fonctions $x^i(\lambda)$ du paramètre quelconque λ, donne une géodésique. La trajectoire à accélération nulle est invariante par changement de coordonnées. Les géodésiques sont donc indépendantes du choix du système de coordonnées, que ce soit dans les espaces euclidiens ou non euclidiens. D'après (22.33) et (22.34) p. 454, les coordonnées $x^i(t)$ d'une géodésique de ${}_E n$ sont solutions du système d'équations différentielles :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j = 0 \tag{22.3}$$

Les géodésiques ne sont pas fonction du temps, n'importe quel paramètre permet de les définir. Prenons par exemple λ :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \lambda^2} + \Gamma^i{}_{kj}\, \frac{\partial x^k}{\partial \lambda}\, \frac{\partial x^j}{\partial \lambda} = 0$$

Une géodésique en particulier est complètement déterminée si l'on se donne un point et la tangente en ce point. Le vecteur $\vec{t}$ tangent à la trajectoire géodésique suivie par un point M a pour expression :

$$\vec{t} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}\lambda}$$

Lorsque l'on paramètre avec le temps le vecteur tangent est le vecteur vitesse. Lorsque l'on paramètre avec l'abscisse curviligne de la géodésique comptée à partir d'une origine fixe, d'après (22.32) p. 453, le vecteur $\vec{u}$ tangent à la géodésique a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{u} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} \\ u^i\vec{e}_i &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,\vec{e}_i \\ \forall i \qquad u^i &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

Le système d'équations différentielles (22.3) devient

$$\boxed{\forall i = 1,\ldots,n \qquad \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} + \Gamma^i{}_{kj}\,u^k u^j = 0} \tag{22.4}$$

Exemple 2.1: Géodésiques du plan en coordonnées rectilignes

En coordonnées rectilignes d'un espace pré-euclidien, les g_{ij} étant constants les symboles de Christoffel sont nuls. Le système d'équations différentielles (22.3) s'écrit :

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall i \quad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = a_i \qquad \Rightarrow \qquad \forall i \quad x^i = a_i t + b_i$$

En particulier dans l'espace ponctuel euclidien ${}_E2$ (le plan) associé au système de coordonnées rectilignes (x, y) :

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (x - b_1)/a_1 \\ y = \dfrac{a_2}{a_1}\,x + b_2 - \dfrac{a_2}{a_1}\,b_1 \end{cases} \Rightarrow \qquad y = ax + b$$

Les géodésiques du plan sont des droites, on note qu'elles ne sont pas fonction du paramètre.

Exemple 2.2: Géodésique du plan en coordonnées polaires

La droite verticale d'équation $x = a$ dans un système rectangulaire a pour équation polaire $\rho = a/\cos(\theta)$. Montrons que cette équation vérifie l'équation (22.4). Paramétrons l'équation de la droite :

$$\begin{cases} \rho = a/\cos(\lambda) \\ \theta = \lambda \end{cases}$$

Avec (22.1) p. 426 :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} &= \sqrt{g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2} \end{aligned}$$

Le long de la droite verticale :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} &= \sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{a}{\cos(\lambda)}\right)\right]^2 + \left(\frac{a}{\cos(\lambda)}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2} \\ &= |a|\sqrt{\frac{\sin^2\lambda}{\cos^4\lambda} + \frac{1}{\cos^2(\lambda)}} \\ &= \frac{|a|}{\cos^2(\lambda)} \\ \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} &= \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction $x(\lambda)$ le long de la droite :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(\lambda)}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x(\lambda)}{\mathrm{d}s^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} \\ &= \left(\frac{-2\cos(\lambda)\sin(\lambda)}{|a|}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\lambda^2}\right)\frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\lambda^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\end{aligned}$$

L'équation de droite pour $\rho(\lambda)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\rho}{}_{\theta\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}(\lambda)^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\lambda} + (-\rho)\frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\rho'' - 2\rho'\tan(\lambda) - \rho\theta'^2\right) \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\frac{a\cos^3(\lambda) + 2a\sin^2(\lambda)\cos(\lambda)}{\cos^4(\lambda)} - \frac{2a\sin(\lambda)}{\cos^2(\lambda)}\tan(\lambda) - \frac{a}{\cos(\lambda)}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

De même, l'équation de droite pour $\theta(\lambda)$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\theta}{}_{\rho\theta}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}(\lambda)^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{2}{\rho}\frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\theta}{}_{\rho\theta}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\theta'' - 2\theta'\tan(\lambda) + \frac{2\rho'\theta'}{\rho}\right) \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(-2\tan(\lambda) + \frac{2a\sin(\lambda)\cos(\lambda)}{a\cos^2(\lambda)}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Soit ${}_En$ un espace ponctuel rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i). D'après la déf. (3.1) p. 9 et l'élément différentiel (19.3) p. 367, une courbe de coordonnées curvilignes $x^i = x^i(p)$ de paramètre p quelconque est une géodésique ssi :

$$\begin{aligned} \delta \int_A^B \sqrt{g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j} &= 0 \\ \delta \int_{P_A}^{P_B} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}} \, \mathrm{d}p &= 0 \end{aligned} \tag{22.5}$$

où, puisque l'on prend pour composantes contravariantes les coordonnées curvilignes, les éléments du tenseur métrique sont les produits scalaires des vecteurs de base de la base naturelle.

$$\delta \int_{P_A}^{P_B} g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p} \, \mathrm{d}p = 0$$

Le point désignant la dérivation par rapport à p :

$$\delta \int_{P_A}^{P_B} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \mathrm{d}p = 0$$

En posant le lagrangien

$$\mathcal{L} = g_{ij} \, \dot{x}^i \dot{x}^j$$

nous avons :

$$\delta \int_{P_A}^{P_B} \mathcal{L}\left(\dot{x}^i\right) \mathrm{d}p = 0$$

D'après le principe de Hamilton cette relation donne le système des n équations d'Euler-Lagrange pour le paramètre p :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(2 g_{ij} \, \dot{x}^j\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{jk} \, \dot{x}^j \dot{x}^k\right) &= 0 \\ g_{ij} \, \ddot{x}^j + \dot{x}^j \frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}p} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \dot{x}^j \dot{x}^k &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.2

La longueur d'une courbe est indépendante du choix du paramètre.

Démonstration. Soit le nouveau paramètre q fonction de l'ancien paramètre p :

$$\begin{aligned} q &= f(p) \\ \mathrm{d}q &= \frac{\partial f(p)}{\partial p} \mathrm{d}p \\ \forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}q} \frac{\partial f(p)}{\partial p} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}q}\,\frac{\partial f(p)}{\partial p}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}q}\,\frac{\partial f(p)}{\partial p}}\,\mathrm{d}p \\ &= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}q}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}q}\,\frac{\partial f(p)}{\partial p}}\,\mathrm{d}p \\ &= \int_{f(p_0)}^{f(p_1)} \sqrt{g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}q}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}q}}\,\mathrm{d}q\end{aligned}$$

□

Exemple 2.3: Équations paramétriques d'une droite en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(\rho,\theta) = \rho^2 + \rho^2\,\theta^2$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 = 0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\rho^2\dot\theta\right) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 = 0\\ 2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta = 0\end{cases}$$

Lorsque le paramètre est le temps, ce système d'équations différentielles paramétriques impliquent la nullité des composantes de l'accélération du point décrivant la courbe (cf. éq. (3.9) p. 50).

Nous verrons au § 2 p. 477 qu'une droite peut aussi être définie comme la trajectoire d'un point ayant une accélération nulle.

Montrons que ce système d'équations différentielles donne bien une droite. En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite $y = ax + b$ peut aussi s'écrire :

$$ax + by = c$$

En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}a\rho\cos(\theta) + b\rho\sin(\theta) &= c\\ \rho\left[a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right] &= c\end{aligned}$$

En dérivant par rapport au paramètre :

$$\dot\rho\left[a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right] + \rho\dot\theta[-a\sin(\theta) + b\cos(\theta)] = 0$$

En dérivant une seconde fois par rapport au paramètre :

$$\begin{aligned}\ddot\rho\left[a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right] + \dot\rho\dot\theta[-a\sin(\theta) + b\cos(\theta)] + \dot\rho\dot\theta[-a\sin(\theta) + b\cos(\theta)]&\\ +\rho\ddot\theta[-a\sin(\theta) + b\cos(\theta)] + \rho\dot\theta^2\left[-a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right] = 0&\\ \left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2\right)\left[a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right] + \left(2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta\right)\left[-a\sin(\theta) - b\cos(\theta)\right] = 0&\\ \left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2\right)\left[a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\rho^2\dot\theta\right)\left[-a\sin(\theta) - b\cos(\theta)\right] = 0&\end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\begin{cases}\ddot\rho - \rho\dot\theta^2 = 0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\rho^2\dot\theta\right) = 0\end{cases}$$

3 Volume élémentaire de l'espace euclidien

Nous allons avoir besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant :

Théorème 3.1

Soient trois vecteurs $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}=\det\begin{bmatrix}\vec{u}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{v} & \vec{u}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{v} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{bmatrix}$$

Démonstration.

$$\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\times\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_2w_3-v_3w_2\\v_3w_1-v_1w_3\\v_1w_2-v_2w_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}&=u_1(v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w_1-v_1w_3)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\\&=\det\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le déterminant de toute matrice est égal au déterminant de sa transposée :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w})^2=\det\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}\times\det\begin{bmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{bmatrix}$$

Quelles que soient A et B deux matrices compatibles, $\det(A) \times \det(B) = \det[(A)(B)]$:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w})^2 &= \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \begin{bmatrix} u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 & u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 & u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 \\ v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 & v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 & v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 \\ w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 & w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 & w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w} \cdot \vec{w} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien de dimension trois. Pour construire un parallélépipède de volume élémentaire, prenons une variation le long de chaque coordonnée d'un système de coordonnées quelconque (x^1, x^2, x^3). Construisons d'abord une surface élémentaire orientée $\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$. Dans la base naturelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ associée à ce système de coordonnées :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} &= \partial_2\vec{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}x^2 \times \partial_3\vec{\mathrm{M}}\,\mathrm{d}x^3 \\
&= \vec{e}_2\mathrm{d}x^2 \times \vec{e}_3\mathrm{d}x^3 \\
&= \vec{e}_2 \times \vec{e}_3\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

où l'opérateur $\times$ est le produit vectoriel. Construisons un élément de volume :

$$
\begin{aligned}
dV &= \vec{e}_1\mathrm{d}x^1 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \\
&= \vec{e}_1\mathrm{d}x^1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3) \\
&= \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

Avec le th. 3.1 p. 434 :

$$
\begin{aligned}
dV &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\
&= \sqrt{|g|} \prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}x^i
\end{aligned}
$$

Soit ${}_En$ un espace ponctuel pré-euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i) de base naturelle $(\vec{e}_i)$. Avec la notation 1.3 p. 66, le volume élémentaire de l'espace s'écrit :

$$
dV = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega \tag{22.6}
$$

On déduit par intégration la mesure d'un volume fini de l'espace :

$$
\boxed{V = \int \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega}
$$

Exemple 3.1: Volume élémentaire en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, dans la base naturelle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, avec (3.6) p. 42 :

$$\mathrm{d}v = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2\sin^2(\theta)\cos(\phi) \\ r^2\sin^2(\theta)\sin(\phi) \\ r^2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \left[r^2\sin^3(\theta)\cos^2(\phi) + r^2\sin^3(\theta)\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right] dr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \left[r^2\sin^3(\theta) + r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right] dr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

On peut exprimer le volume élémentaire grâce au tenseur métrique. En coordonnées sphériques le tenseur métrique est donné par (12.1) p. 202. Son déterminant vaut :

$$\begin{aligned}
g &= 1 \times r^2 \times r^2\sin^2(\theta) \\
&= r^4\sin^2(\theta) \\
\sqrt{g} &= r^2\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Si bien que :

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

4 Les symboles de Christoffel

Nous avons vu au chapitre 5 p. 65 que lorsque le système de coordonnées est curviligne, qu'il soit orthogonal ou non, nous ne pouvons pas lui associer de base globale. Nous avons alors définit une base naturelle locale, dont les vecteurs de base sont fonction des coordonnées du point où l'on se trouve. Nous avons effectuer des changements de base en restant au même point, par changement de système de coordonnées.

Nous nous intéressons maintenant au changement de base lorsque l'on passe d'un point à un autre infiniment proche, en restant dans le même système de coordonnées. Cela va nous permettre de définir la dérivée d'un vecteur ou d'un tenseur. Les vecteurs de la nouvelle base naturelle locale tournent et changent de norme en passant d'un point à un autre. Ils sont bien entendu exprimés dans l'ancienne base naturelle locale, seule base connue *a priori*. Pour rester dans l'ancienne base naturelle locale, nous utiliserons le calcul différentiel au voisinage de l'origine de cette ancienne base.

4.1 Le problème fondamental de l'analyse tensorielle

Supposons qu'en tout point M d'un espace ponctuel euclidien ${}_E n$, nous attachions un tenseur défini par ses composantes relatives au repère naturel en M du système de coordonnées curvilignes (x^i). Nous dirons que nous nous sommes donné un champ de tenseurs dans le système (x^i). Le tenseur métrique $g_{ij}(x^k)$ fournit un tel exemple de champ de tenseurs. Pour pouvoir comparer ces tenseurs, il convient d'étudier comment le repère naturel varie quand on passe d'un point M à un point infiniment voisin.

Problème 1: Le problème fondamental de l'analyse tensorielle

L'espace ponctuel euclidien ${}_E n$ étant rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^j), pour lequel l'élément linéaire de l'espace est

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

déterminer, par rapport au repère naturel $(M, \vec{e}_j)$, le repère naturel infiniment voisin $(M + \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}, \vec{e}_j + \mathrm{d}\vec{e}_j)$.

Autrement dit, cherchons l'expression des vecteurs infinitésimaux $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{d}\vec{e}_j$. Le premier est donné par (3.8) p. 49. Dans la base naturelle :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}} = \mathrm{d}x^j\vec{e}_j$$

Pour le second, appelons ω^i les composantes contravariantes (cherchées) du vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_j$ dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$:

$$\boxed{\forall j \qquad \mathrm{d}\vec{e}_j = \omega^i{}_j\vec{e}_i} \tag{22.7}$$

Remarque 4.1

Nous avons par exemple

$$\begin{cases} \mathrm{d}\vec{e}_1 = \omega^1{}_1\vec{e}_1 + \omega^2{}_1\vec{e}_2 \\ \mathrm{d}\vec{e}_2 = \omega^1{}_2\vec{e}_1 + \omega^2{}_2\vec{e}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega^1{}_2 \neq \omega^2{}_1$$

Les $\omega^i{}_j$ n'étant pas symétriques, on ne doit pas les écrire avec les indices alignés verticalement.

Notation 4.1

Un choix de notation entre

$$\mathrm{d}\vec{e}_j = \omega^i{}_j\vec{e}_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\vec{e}_j = \omega_j{}^i\vec{e}_i$$

est affaire de convention. Un choix étant fait, nous nous y tenons.

Remarque 4.2

Dans la notation $\omega^i{}_j$, l'indice j n'est pas un indice de composante mais désigne un vecteur. Par conséquent les $\omega^i{}_j$ ne sont pas les composantes d'un tenseur.

Tout vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_j$ est fonction du vecteur déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}$. Les $\omega^i{}_j$ sont donc des infiniment petits du même ordre que les $\mathrm{d}x^j$, et ils doivent s'annuler en même temps qu'eux. Par conséquent ils sont une combinaison linéaires des différentielles $\mathrm{d}x^k$ (cf. ex. 4.1 p. 439)

$$\boxed{\forall i, j \qquad \omega^i{}_j = \Gamma^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k} \tag{22.8}$$

où les $\Gamma^i{}_{jk}$ désignent n^3 (chacun des trois indices i, j, k varie de 1 à n) fonctions des coordonnées (x^k) du point M.

Notation 4.2

Un choix de notation entre

$$\omega^i{}_j = \Gamma^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k \qquad \text{et} \qquad \omega^i{}_j = \Gamma_k{}^i{}_j\,\mathrm{d}x^k$$

est affaire de convention. Un choix étant fait, nous nous y tenons.

Remarque 4.3

Dans la notation $\Gamma^i{}_{jk}$, l'indice j n'est pas un indice de composante mais désigne un vecteur. Par conséquent les $\Gamma^i{}_{jk}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur.

Notre problème se trouve ainsi ramené à la détermination des n^3 fonctions $\Gamma^i{}_{jk}$ à partir des $n(n+1)/2$ fonctions g_{ij} (cf. éq. (14.1) p. 323).

Avec (22.7) et (22.8) précédentes :

$$\forall i \qquad \mathrm{d}\vec{e}_j = \Gamma^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k\vec{e}_i \tag{22.9}$$

Définition 4.1: Symboles de Christoffel de 2e espèce

Les n^3 quantités $\Gamma^i{}_{jk}(x^k)$ sont appelées symboles de Christoffel de 2e espèce.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall j \qquad & \mathrm{d}\vec{e}_j = \Gamma^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k\vec{e}_i \\ & \partial_k\vec{e}_j\,\mathrm{d}x^k = \Gamma^i{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k\vec{e}_i \\ \forall j,k \qquad & \partial_k\vec{e}_j = \Gamma^i{}_{jk}\,\vec{e}_i \end{aligned} \tag{22.10}$$

$\partial_k\vec{e}_j$ est un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\vec{e}_i$. Le terme $\Gamma^i{}_{jk}$ est sa $i^{\text{ème}}$ composante.

Appelons ω_{ij} les composantes covariantes du vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_j$:

$$\forall i,j \qquad \omega_{ij} = \mathrm{d}\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$$

Remarque 4.4

On vérifie à nouveau que les ω_{ij} ne sont pas symétriques. Nous avons par exemple

$$\begin{cases} \omega_{12} = \mathrm{d}\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \\ \omega_{21} = \mathrm{d}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{12} \neq \omega_{21}$$

Les ω_{ij} sont aussi des combinaisons linéaires des différentielles $\mathrm{d}x^k$:

$$\forall i,j \qquad \omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\,\mathrm{d}x^k$$

Notation 4.3

La notation des indices de gamma dans l'ordre ijk est arbitraire mais un choix est nécessaire. Nous avons choisi d'écrire en premier l'indice de la composante, en deuxième l'indice du vecteur et en dernier l'indice de la différentielle.

Définition 4.2: Symboles de Christoffel de 1re espèce

Les n^3 quantités $\Gamma_{ijk}(x^k)$ sont appelées symboles de Christoffel de 1re espèce.

Exemple 4.1: Symboles de Christoffel de la base naturelle polaire

Étudions le problème de la variation du repère naturel des coordonnées polaires. En dérivant (3.3) p. 40 par rapport aux coordonnées :

$$\begin{cases}\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\,\vec{\jmath}\\ \vec{e}_\theta = -\rho\sin(\theta)\,\vec{\imath} + \rho\cos(\theta)\,\vec{\jmath}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial_\rho\vec{e}_\rho = 0\\ \partial_\theta\vec{e}_\rho = -\sin(\theta)\,\vec{\imath} + \cos(\theta)\,\vec{\jmath}\\ \partial_\rho\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{\imath} + \cos(\theta)\,\vec{\jmath}\\ \partial_\theta\vec{e}_\theta = -\rho\cos(\theta)\,\vec{\imath} - \rho\sin(\theta)\,\vec{\jmath}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial_\rho\vec{e}_\rho = 0\\ \partial_\theta\vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta/\rho\\ \partial_\rho\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta/\rho\\ \partial_\theta\vec{e}_\theta = -\rho\,\vec{e}_\rho\end{cases}$$

Les différentielles des vecteurs de la base naturelle polaire s'écrivent :

$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{e}_\rho = \partial_\rho\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \partial_\theta\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}\vec{e}_\theta = \partial_\rho\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}\rho + \partial_\theta\vec{e}_\theta\,\mathrm{d}\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}\vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta\,\mathrm{d}\theta/\rho\\ \mathrm{d}\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta\,\mathrm{d}\rho/\rho - \rho\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\theta\end{cases} \tag{22.11}$$

Nous retrouvons (3.5) p. 41. Avec (22.7) p. 437 :

$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{e}_\rho = \omega^\rho{}_\rho\vec{e}_\rho + \omega^\theta{}_\rho\vec{e}_\theta\\ \mathrm{d}\vec{e}_\theta = \omega^\rho{}_\theta\vec{e}_\rho + \omega^\theta{}_\theta\vec{e}_\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega^\rho{}_\rho = 0\\ \omega^\theta{}_\rho = \mathrm{d}\theta/\rho\\ \omega^\rho{}_\theta = -\rho\mathrm{d}\theta\\ \omega^\theta{}_\theta = \mathrm{d}\rho/\rho\end{cases}$$

Avec (22.9) p. 438,

$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{e}_\rho = \Gamma^\rho{}_{\rho\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \Gamma^\rho{}_{\rho\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\rho + \Gamma^\theta{}_{\rho\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\theta + \Gamma^\theta{}_{\rho\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta\\ \mathrm{d}\vec{e}_\theta = \Gamma^\rho{}_{\theta\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \Gamma^\rho{}_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\rho + \Gamma^\theta{}_{\theta\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\theta + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta\end{cases}$$

nous trouvons les symboles de Christoffel de 2e espèce de la base naturelle polaire :

$$\begin{array}{llll}\Gamma^\rho{}_{\rho\rho} = 0 & \Gamma^\rho{}_{\rho\theta} = 0 & \Gamma^\theta{}_{\rho\rho} = 0 & \Gamma^\theta{}_{\rho\theta} = 1/\rho\\ \Gamma^\rho{}_{\theta\rho} = 0 & \Gamma^\rho{}_{\theta\theta} = -\rho & \Gamma^\theta{}_{\theta\rho} = 1/\rho & \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0\end{array}$$

4.2 Relations entre symboles de Christoffel de 1re et 2e espèce

Les composantes covariantes ω_{ij} et contravariantes $\omega^i{}_j$ du vecteur $\mathrm{d}\vec{e}_j$ sont liées par la relation :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad \omega_{ij} &= g_{ih}\omega^h{}_j\\ \Gamma_{ijk}\,\mathrm{d}x^k &= g_{ih}\Gamma^h{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k\\ \forall i,j,k \qquad \Gamma_{ijk} &= g_{ih}\Gamma^h{}_{jk}\end{aligned} \tag{22.12}$$

Le tenseur métrique abaisse l'indice haut, celui de la composante, qui passe de contravariante à covariante. C'est pourquoi nous laissons une espace libre pour que l'indice puisse descendre et rester un indice de composante.

Réciproquement, nous écrirons :

$$\forall i,j,k \qquad \Gamma^i{}_{jk} = g^{ih}\Gamma_{hjk} \tag{22.13}$$

La connaissance des n^3 fonctions $\Gamma^i{}_{jk}$ est donc équivalente à celle des n^3 fonctions Γ_{ijk}.

4.3 Symétrie des symboles de Christoffel par rapport aux indices

Écrivons les conditions d'intégrabilité de l'(3.8) p. 49. Pour que $\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$ soit intégrable, autrement dit pour que $\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$ soit une différentielle totale exacte, les dérivées secondes de $\vec{\mathrm{M}}$ doivent être symétriques par rapport à leurs indices de dérivation (condition de Schwarz). En utilisant la déf. 2.10 p. 38 puis (22.10) p. 438 :

$$\begin{aligned} \forall j,k \qquad \frac{\partial^2 \vec{\mathrm{M}}}{\partial x^k \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial x^j}\right) \\ &= \partial_k \vec{e}_j \\ &= \Gamma^i{}_{jk}\,\vec{e}_i \end{aligned} \tag{22.14}$$

Inversons l'ordre de dérivation :

$$\begin{aligned} \forall j,k \qquad \vec{\mathrm{M}}_{,kj} &= \vec{\mathrm{M}}_{,jk} \\ \Gamma^i{}_{jk}\,\vec{e}_i &= \Gamma^i{}_{kj}\,\vec{e}_i \end{aligned} \tag{22.15}$$

Avec la notation 4.3 p. 438 choisie, les symboles de Christoffel de 2$^{\mathrm{e}}$ espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\boxed{\forall i,j,k \qquad \Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}} \tag{22.16}$$

De même :

$$\begin{aligned} \forall h,j,k \qquad \Gamma^h{}_{jk} &= \Gamma^h{}_{kj} \\ g^{hi}\Gamma_{ijk} &= g^{hi}\Gamma_{ikj} \end{aligned}$$

Avec la notation 4.3 p. 438 choisie, les symboles de Christoffel de 1$^{\mathrm{re}}$ espèce sont symétriques par rapport à leurs derniers indices :

$$\boxed{\forall i,j,k \qquad \Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}} \tag{22.17}$$

Reprenons (22.16) ou (22.17). Pour chacune des n valeurs de l'indice i de Γ, les indices j et k varient de 1 à n.

Parmi les n^2 équations fournies en faisant varier les indices j et k, on compte n égalités du type $\Gamma^i{}_{jj} = \Gamma^i{}_{jj}$ (ou $\Gamma_{ijj} = \Gamma_{ijj}$) qui n'apportent rien.

Parmi les $n^2 - n$ égalités restantes, se trouve l'égalité $\Gamma^i{}_{12} = \Gamma^i{}_{21}$, et plus loin, $\Gamma^i{}_{21} = \Gamma^i{}_{12}$ (ou $\Gamma_{i12} = \Gamma_{i21}$ et $\Gamma_{i21} = \Gamma_{i12}$). Les égalités apparaissent donc deux fois et l'on a par conséquent $(n^2 - n)/2$ égalités distinctes.

En prenant en compte les n valeurs de l'indice i, (22.16) ou (22.17) permettent d'établir le nombre suivant d'équations :

$$n \times \tfrac{1}{2}(n^2 - n) = \tfrac{1}{2}n^2(n-1)$$

Notation 4.4

Les symboles de Christoffel sont aussi notés comme suit :

$$\Gamma^i{}_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{ijk} = [jk, i]$$
$$= \{jk, i\}$$

4.4 Symboles de Christoffel en fonction du tenseur métrique

À partir de la déf. 1.1 p. 201 du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad g_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ \mathrm{d}g_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \mathrm{d}\vec{e}_j + \vec{e}_j \cdot \mathrm{d}\vec{e}_i \\ &= \vec{e}_i \cdot \omega^k{}_j \vec{e}_k + \vec{e}_j \cdot \omega^k{}_i \vec{e}_k \\ &= g_{ik}\omega^k{}_j + g_{jk}\omega^k{}_i \end{aligned} \tag{22.18}$$

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \partial_k g_{ij}\,\mathrm{d}x^k &= g_{ih}\Gamma^h{}_{jk}\,\mathrm{d}x^k + g_{jh}\Gamma^h{}_{ik}\,\mathrm{d}x^k \\ \forall i,j,k \qquad \partial_k g_{ij} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \end{aligned} \tag{22.19}$$

D'après (14.1) p. 323, les g_{ij} étant au nombre de $n(n+1)/2$, le système (22.19) comprend $n^2(n+1)/2$ équations. Avec les équations (22.16) de symétries des symboles de Christoffel sur les indices bas, nous avons :

$$\tfrac{1}{2}n^2(n+1) + \tfrac{1}{2}n^2(n-1) = n^3$$

équations, pour les n^3 inconnues Γ_{ijk}. Ce système sera soluble si les conditions d'intégrabilité des vecteurs $\vec{e}_i$ sont satisfaites. Pour trouver les conditions d'intégrabilité des équations (3.8) p. 49, nous avons implicitement supposé que les équations (22.7) p. 437 l'étaient, puisque nous les avons utilisées pour écrire (22.15) p. 440. L'intégrabilité des équations (22.7) est donc nécessaire à celle de (3.8). Pour que $\mathrm{d}\vec{e}_i$ soit intégrable, les dérivées secondes de $\vec{e}_i$ doivent être symétriques par rapport à leurs indices de dérivation. Avec (22.10) p. 438, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall i,k,l \qquad & \partial_l(\partial_k \vec{e}_i) = \partial_k(\partial_l \vec{e}_i) \\ & \partial_l\left(\Gamma^j{}_{ik}\,\vec{e}_j\right) = \partial_k\left(\Gamma^j{}_{il}\,\vec{e}_j\right) \\ & \partial_l\Gamma^j{}_{ik}\,\vec{e}_j + \Gamma^j{}_{ik}\,\partial_l\vec{e}_j = \partial_k\Gamma^j{}_{il}\,\vec{e}_j + \Gamma^j{}_{il}\,\partial_k\vec{e}_j \\ & \partial_l\Gamma^j{}_{ik}\,\vec{e}_j + \Gamma^j{}_{ik}\,\Gamma^m{}_{jl}\,\vec{e}_m = \partial_k\Gamma^j{}_{il}\,\vec{e}_j + \Gamma^j{}_{il}\,\Gamma^m{}_{jk}\,\vec{e}_m \\ & \partial_l\Gamma^j{}_{ik}\,\vec{e}_j + \Gamma^m{}_{ik}\,\Gamma^j{}_{ml}\,\vec{e}_j = \partial_k\Gamma^j{}_{il}\,\vec{e}_j + \Gamma^m{}_{il}\,\Gamma^j{}_{mk}\,\vec{e}_j \\ & \left(\partial_l\Gamma^j{}_{ik} - \partial_k\Gamma^j{}_{il}\right) + \left(\Gamma^m{}_{ik}\,\Gamma^j{}_{ml} - \Gamma^m{}_{il}\,\Gamma^j{}_{mk}\right) = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant les symboles de Christoffel par leurs expressions en fonction du tenseur métrique, (voir plus loin (22.22) p. 442), on obtient les conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions g_{ij} pour résoudre notre problème.

En appliquant deux fois la permutation circulaire des indices $i \to j,\ j \to k,\ k \to i$ aux relations (22.19) p. 441, nous obtenons deux autres ensembles de relations :

$$\begin{aligned} \forall i,j,k \qquad & \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = \partial_k g_{ij} \\ & \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} = \partial_i g_{jk} \\ & \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} = \partial_j g_{ki} \end{aligned}$$

En additionnant la première et la dernière relation et en soustrayant la deuxième, nous obtenons l'expression des symboles de Christoffel de 1re espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\forall i,j,k \qquad 2\Gamma_{ijk} = \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk} \tag{22.20}$$

$$\boxed{\forall i,j,k \qquad \Gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk})} \tag{22.21}$$

Avec (22.13) p. 439, les symboles de 2e espèce ont pour expression :

$$\boxed{\forall i,j,k \qquad \Gamma^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2}\, g^{ih}(\partial_k g_{hj} + \partial_j g_{kh} - \partial_h g_{jk})} \tag{22.22}$$

4.5 Symboles de Christoffel de 2e espèce contractés

Dans le cas particulier où $k = i$, (22.22) devient :

$$\forall i,j \qquad \Gamma^i{}_{ij} = \tfrac{1}{2}\, g^{ih}(\partial_i g_{hj} + \partial_j g_{ih} - \partial_h g_{ji})$$

Or,

$$\begin{aligned} g^{ih}\partial_i g_{hj} &= g^{hi}\partial_i g_{hj} \\ &= g^{ih}\partial_h g_{ij} \\ &= g^{ih}\partial_h g_{ji} \end{aligned}$$

Il reste

$$\Gamma^i{}_{ij} = \tfrac{1}{2}\, g^{ih}\partial_j g_{ih} \tag{22.23}$$

Avec (12.18) p. 210, $\partial_k g = g g^{ij}\partial_k g_{ij}$:

$$\forall j \qquad \Gamma^i{}_{ij} = \frac{\partial_j g}{2g} \tag{22.24}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_j \sqrt{|g|} \tag{22.25}$$

$$= \partial_j \ln \sqrt{|g|}$$

4.6 Symboles de Christoffel en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes (rectilignes) les symboles de Christoffel sont tous nuls car les vecteurs de base ne tournent pas :

$$\forall i,j \quad g_{ij}=c^{ste} \qquad \Rightarrow \qquad \forall i,j,k \quad \partial_k g_{ij}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \forall i,j,k & \Gamma_{ijk}=0 \\ \forall i,j,k & \Gamma^{i}{}_{jk}=0 \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes (rectilignes) ne sont possibles que dans les espaces plats, pré-euclidiens. Si les symboles de Christoffel sont nuls alors les coordonnées sont rectilignes, et l'espace est plat.

Remarque 4.5

Si les symboles de Christoffel étaient des tenseurs ils auraient même valeur dans tous les systèmes de coordonnées. Or ils sont nuls dans les systèmes de coordonnées cartésiennes (rectilignes) et non nuls dans les systèmes de coordonnées curvilignes. Par conséquent, ce ne sont pas des tenseurs. Pour les mêmes raisons les $\omega^{i}{}_{j}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur.

4.7 Symboles de Christoffel en coordonnées orthogonales

En coordonnées orthogonales le tenseur métrique est diagonal, (12.19) p. 211, $\forall i\neq j \; g_{ij}=0$, permettent de simplifier les symboles de Christoffel de 1re et 2e espèce (22.21) et (22.22) p. 442.

- pour les symboles de 1re espèce

$$\begin{cases} \forall i=j=k, & \Gamma_{iii}=\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{ii}+\partial_i g_{ii}-\partial_i g_{ii}\right) \\ \forall i=j\neq k, & \Gamma_{iik}=\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ii}+\partial_i g_{ki}-\partial_i g_{ik}\right) \\ \forall i\neq j=k, & \Gamma_{ijj}=\frac{1}{2}\left(\partial_j g_{ij}+\partial_j g_{ji}-\partial_i g_{jj}\right) \\ \forall i=k\neq j, & \Gamma_{iji}=\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{ij}+\partial_j g_{ii}-\partial_i g_{ji}\right) \\ i,j,k\neq, & \Gamma_{ijk}=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \Gamma_{iii}=\frac{1}{2}\,\partial_i g_{ii} \\ \Gamma_{iij}=\frac{1}{2}\,\partial_j g_{ii} \\ \Gamma_{ijj}=-\frac{1}{2}\,\partial_i g_{jj} \\ \Gamma_{iji}=\frac{1}{2}\,\partial_j g_{ii} \\ \Gamma_{ijk}=0 \end{cases}$$

Avec la symétrie des symboles :

$$\begin{cases} \Gamma_{iii}=\frac{1}{2}\,\partial_i g_{ii} \\ \Gamma_{iij}=\frac{1}{2}\,\partial_j g_{ii} \\ \Gamma_{ijj}=-\frac{1}{2}\,\partial_i g_{jj} \end{cases} \tag{22.26}$$

- pour les symboles de 2e espèce, à partir des relations (22.13) p. 439 :

$$\begin{cases} \Gamma^{i}{}_{ii}=g^{ij}\Gamma_{jii} \\ \Gamma^{i}{}_{ij}=g^{ik}\Gamma_{kij} \\ \Gamma^{i}{}_{jj}=g^{ik}\Gamma_{kjj} \\ \Gamma^{i}{}_{ji}=g^{ik}\Gamma_{kji} \\ \Gamma^{i}{}_{jk}=g^{ih}\Gamma_{hjk} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \Gamma^{i}{}_{ii}=g^{ii}\Gamma_{iii} & \text{sans sommer sur i} \\ \Gamma^{i}{}_{ij}=g^{ii}\Gamma_{iij} & \text{sans sommer sur i} \\ \Gamma^{i}{}_{jj}=g^{ii}\Gamma_{ijj} & \text{sans sommer sur i} \\ \Gamma^{i}{}_{ji}=g^{ii}\Gamma_{iji} & \text{sans sommer sur i} \\ \Gamma^{i}{}_{jk}=0 \end{cases}$$

Avec (12.20) p. 211, $\forall i\ g^{ii} = (g_{ii})^{-1}$, et avec (22.26) :

$$\begin{cases} \Gamma^i_{\ ii} = \Gamma_{iii}/g_{ii} \\ \Gamma^i_{\ ij} = \Gamma_{iij}/g_{ii} \\ \Gamma^i_{\ jj} = \Gamma_{ijj}/g_{ii} \\ \Gamma^i_{\ ji} = \Gamma_{iji}/g_{ii} \\ \Gamma^i_{\ jk} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^i_{\ ii} = \partial_i g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma^i_{\ ij} = \partial_j g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma^i_{\ jj} = -\partial_i g_{jj}/(2g_{ii}) \\ \Gamma^i_{\ ji} = \partial_j g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma^i_{\ jk} = 0 \end{cases}$$

Avec la symétrie des symboles :

$$\begin{cases} \Gamma^i_{\ ii} = \partial_i g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma^i_{\ ij} = \partial_j g_{ii}/(2g_{ii}) \\ \Gamma^i_{\ jj} = -\partial_i g_{jj}/(2g_{ii}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^i_{\ ii} = \frac{1}{2}\,\partial_i \ln g_{ii} \\ \Gamma^i_{\ ij} = \frac{1}{2}\,\partial_j \ln g_{ii} \\ \Gamma^i_{\ jj} = -\partial_i g_{jj}/(2g_{ii}) \end{cases} \tag{22.27}$$

Exemple 4.2: Symboles de Christoffel en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

Dans la base naturelle associée au coordonnées cylindriques de l'espace euclidien, le tenseur métrique a pour composantes (cf. éq. (8.3) p. 114)

$$g_{\rho\rho} = 1, \qquad g_{\phi\phi} = \rho^2, \qquad g_{zz} = 1$$

Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $\partial_\rho g_{\phi\phi} = 2\rho$.

- pour les symboles de 1re espèce, à partir des relations (22.26) p. 443 :

$$\begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\rho} = \Gamma_{\phi\rho\phi} = \frac{1}{2}\,\partial_\rho g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\rho\phi\phi} = -\frac{1}{2}\,\partial_\rho g_{\phi\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\phi\phi\rho} = \Gamma_{\phi\rho\phi} = \rho \\ \Gamma_{\rho\phi\phi} = -\rho \end{cases}$$

- pour les symboles de 2e espèce, à partir des relations (22.27) p. 444 :

$$\begin{cases} \Gamma^\phi_{\ \phi\rho} = \Gamma^\phi_{\ \rho\phi} = \Gamma_{\phi\phi\rho}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^\rho_{\ \phi\phi} = \Gamma_{\rho\phi\phi}/g_{\rho\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^\phi_{\ \phi\rho} = \Gamma^\phi_{\ \rho\phi} = 1/\rho \\ \Gamma^\rho_{\ \phi\phi} = -\rho \end{cases}$$

Avec (22.9) p. 438 :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{e}_1 &= \Gamma^1_{\ 11}\,\vec{e}_1\,\mathrm{d}x^1 + \Gamma^2_{\ 11}\,\vec{e}_2\,\mathrm{d}x^1 + \Gamma^3_{\ 11}\,\vec{e}_3\,\mathrm{d}x^1 \\ &\quad + \Gamma^1_{\ 12}\,\vec{e}_1\,\mathrm{d}x^2 + \Gamma^2_{\ 12}\,\vec{e}_2\,\mathrm{d}x^2 + \Gamma^3_{\ 12}\,\vec{e}_3\,\mathrm{d}x^2 \\ &\quad + \Gamma^1_{\ 13}\,\vec{e}_1\,\mathrm{d}x^3 + \Gamma^2_{\ 13}\,\vec{e}_2\,\mathrm{d}x^3 + \Gamma^3_{\ 13}\,\vec{e}_3\,\mathrm{d}x^3 \\ \mathrm{d}\vec{e}_\rho &= \Gamma^\rho_{\ \rho\rho}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \Gamma^\phi_{\ \rho\rho}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\rho + \Gamma^z_{\ \rho\rho}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}\rho \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\ \rho\phi}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\phi + \Gamma^\phi_{\ \rho\phi}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\phi + \Gamma^z_{\ \rho\phi}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}\phi \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\ \rho z}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}z + \Gamma^\phi_{\ \rho z}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}z + \Gamma^z_{\ \rho z}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}z \\ &= \rho^{-1}\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{e}_\phi &= \Gamma^\rho_{\ \phi\rho}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \Gamma^\phi_{\ \phi\rho}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\rho + \Gamma^z_{\ \phi\rho}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}\rho \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\ \phi\phi}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\phi + \Gamma^\phi_{\ \phi\phi}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\phi + \Gamma^z_{\ \phi\phi}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}\phi \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\ \phi z}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}z + \Gamma^\phi_{\ \phi z}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}z + \Gamma^z_{\ \phi z}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}z \\ &= \rho^{-1}\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\rho - \rho\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{e}_z &= \Gamma^{\rho}{}_{z\rho}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho + \Gamma^{\phi}{}_{z\rho}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\rho + \Gamma^{z}{}_{z\rho}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}\rho \\ &\quad + \Gamma^{\rho}{}_{z\phi}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\phi + \Gamma^{\phi}{}_{z\phi}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}\phi + \Gamma^{z}{}_{z\phi}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}\phi \\ &\quad + \Gamma^{\rho}{}_{zz}\,\vec{e}_\rho\,\mathrm{d}z + \Gamma^{\phi}{}_{zz}\,\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}z + \Gamma^{z}{}_{zz}\,\vec{e}_z\,\mathrm{d}z \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Exemple 4.3: Symboles de Christoffel en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Dans la base naturelle associée aux coordonnées sphériques, le tenseur métrique de l'espace euclidien à pour composantes (cf. éq. (12.1) p. 202)

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2(\theta)$$

Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $\partial_r g_{\theta\theta} = 2r$, $\partial_r g_{\phi\phi} = 2r\sin^2(\theta)$ et $\partial_\theta g_{\phi\phi} = 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

- pour les symboles de 1re espèce, à partir des relations (22.26) p. 443 :

$$\begin{cases}\Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2}\,\partial_r g_{\theta\theta} \\ \Gamma_{\phi\phi r} = \Gamma_{313} = \frac{1}{2}\,\partial_r g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{323} = \frac{1}{2}\,\partial_\theta g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{r\theta\theta} = -\frac{1}{2}\,\partial_r g_{\theta\theta} \\ \Gamma_{r\phi\phi} = -\frac{1}{2}\,\partial_r g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -\frac{1}{2}\,\partial_\theta g_{\phi\phi}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Gamma_{\theta\theta r} = \Gamma_{212} = r \\ \Gamma_{\phi\phi r} = \Gamma_{313} = r\sin^2(\theta) \\ \Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{323} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{r\theta\theta} = -r \\ \Gamma_{r\phi\phi} = -r\sin^2(\theta) \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$$

- pour les symboles de 2e espèce, à partir des relations (22.27) p. 444 :

$$\begin{cases}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma_{\theta\theta r}/g_{\theta\theta} \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi r} = \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \Gamma_{\phi\phi r}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma_{\phi\phi\theta}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = \Gamma_{r\theta\theta}/g_{rr} \\ \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = \Gamma_{r\phi\phi}/g_{rr} \\ \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = \Gamma_{\theta\phi\phi}/g_{\theta\theta}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = 1/r \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi r} = \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = 1/r \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot(\theta) \\ \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = -r \\ \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = -r\sin^2(\theta) \\ \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$$

Exemple 4.4: Symboles de Christoffel à la surface d'une sphère

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), à la surface d'une sphère de rayon r, en se servant de l'exemple précédent :

- pour les symboles de 1re espèce, à partir des relations (22.26) p. 443 :

$$\begin{cases}\Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\phi\theta\phi} = \frac{1}{2}\,\partial_\theta g_{\phi\phi} \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -\frac{1}{2}\,\partial_\theta g_{\phi\phi}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\phi\theta\phi} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$$

- pour les symboles de 2e espèce, à partir des relations (22.27) p. 444 :

$$\begin{cases}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma_{\phi\phi\theta}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = \Gamma_{\theta\phi\phi}/g_{\theta\theta}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot(\theta) \\ \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$$

4.8 Formules de Christoffel

Partons d'un changement de base naturelle :

$$\begin{aligned}\forall i \qquad \vec{e}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\vec{e}_j \\ \mathrm{d}\vec{e}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\mathrm{d}\vec{e}_j + \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\vec{e}_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall i \qquad \omega^{k'}{}_{i'}\vec{e}_{k'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\omega^{l}{}_{j}\,\vec{e}_l + \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\vec{e}_j \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\omega^{l}{}_{j}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\vec{e}_{k'} + \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\vec{e}_{k'}\end{aligned}$$

On simplifie et on réarrange les termes :

$$\begin{aligned}\forall i,k \qquad \omega^{k'}{}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\omega^{l}{}_{j} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right) \\ \Gamma^{k'}{}_{i'm'}\,\mathrm{d}x^{m'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\Gamma^{l}{}_{jn}\,\mathrm{d}x^n + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}\,\mathrm{d}x^{m'} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\Gamma^{l}{}_{jn}\,\frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}}\,\mathrm{d}x^{m'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}\,\mathrm{d}x^{m'}\end{aligned}$$

$$\forall i,k,m \quad \Gamma^{k'}{}_{i'm'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}}\,\Gamma^{l}{}_{jn} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}$$

Ce sont les formules de Christoffel. Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs à cause de la présence du second terme du membre de droite. En inversant le rôle des variables :

$$\forall i,k,m \qquad \Gamma^{k}{}_{im} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\,\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^m}\,\Gamma^{l'}{}_{j'n'} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^m\partial x^i} \tag{22.28}$$

5 Transport parallèle en espace euclidien

Définition 5.1: Vecteurs parallèles

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un espace euclidien sont parallèles s'ils font le même angle avec une droite $\mathcal{D}$ donnée.

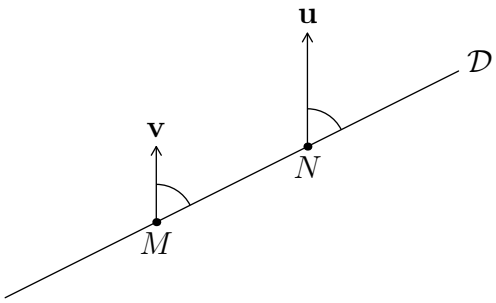


FIG. 22.1 – Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles

Le transport parallèle d'un vecteur consiste à transporter ce vecteur d'un point à un autre le long de la droite joignant ces deux points, en maintenant l'angle que fait le vecteur avec cette droite.

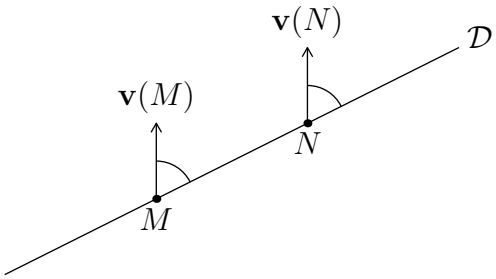


FIG. 22.2 – Transport parallèle du vecteur $\vec{v}$ de M en N selon la droite $(\mathcal{D})$

En espace euclidien le transport parallèle est indépendant du chemin suivi.

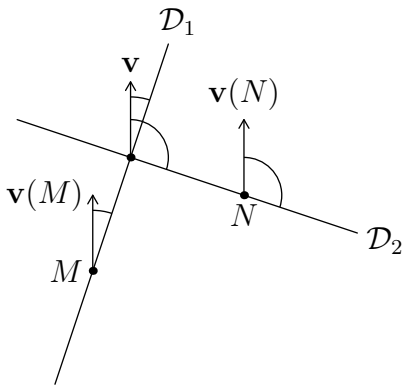


FIG. 22.3 – Deux transports parallèles successifs du vecteur $\vec{v}$

En coordonnées cartésiennes, la base naturelle locale en N est la même que celle en M, c'est pour cette raison que l'on utilise une base globale. Les composantes du vecteur $\vec{v}$ sont les mêmes en chacune de ces bases locales.

Ce n'est plus le cas lorsque l'on utilise le champ de bases naturelles des coordonnées curvilignes. Le transport parallèle a toujours lieu selon une droite, mais les bases locales tournent et les vecteurs de base changent de norme, les composantes du vecteur $\vec{v}$ ne sont plus les mêmes après transport parallèle.

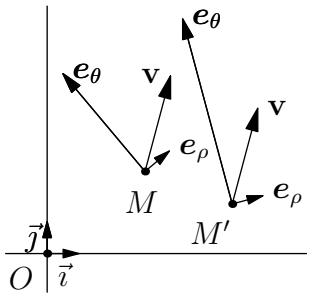


FIG. 22.4 – Transport parallèle du vecteur $\vec{v}$ en coordonnées polaires de l'espace euclidien

6 Dérivée absolue - Dérivée covariante

6.1 Différentielle absolue d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs $\vec{v}$ dans un espace ponctuel euclidien ${}_E n$ rapporté à un système de coordonnées (x^i). Lorsque l'on passe d'un point à un point infiniment proche, le repère naturel $(\vec{e}_i)$ varie ce qui entraine le changement des composantes du vecteur

Lorsque le vecteur $\vec{v}$ est exprimé en composantes :

1) contravariantes, avec (22.7) p. 437, et (22.8) p. 437, dans la base naturelle :

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$
$$\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}v^i \vec{e}_i + v^i \mathrm{d}\vec{e}_i$$

Le second terme du membre de droite est la variation des composantes du vecteur due au changement de base par transport parallèle infinitésimal, voir fig. 22.4 p. 448. Le premier terme est la variation infinitésimale des composantes d'un vecteur non constant dans l'espace.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{v} &= \mathrm{d}v^i \vec{e}_i + v^i \omega^j{}_i \vec{e}_j \\
&= \left(\mathrm{d}v^i + v^j \omega^i{}_j\right) \vec{e}_i \\
&= \left(\partial_j v^i \mathrm{d}x^j + v^k \Gamma^i{}_{kj}\, \mathrm{d}x^j\right) \vec{e}_i \\
&= \left(\partial_j v^i + v^k \Gamma^i{}_{kj}\right) \mathrm{d}x^j \vec{e}_i \\
&= Dv^i \vec{e}_i
\end{aligned}$$

Définition 6.1: Différentielle absolue d'un vecteur

Le vecteur $\mathrm{d}\vec{v}$ de composantes contravariantes Dv^i, est appelé vecteur différentielle absolue du vecteur $\vec{v}$.

Définition 6.2: Composantes du vecteur différentielle absolue

Les composantes contravariantes du vecteur différentielle absolue $\mathrm{d}\vec{v}$ ont pour expression :

$$Dv^i \overset{\text{def}}{=} \left(\partial_j v^i + v^k \Gamma^i{}_{kj}\right) \mathrm{d}x^j$$

Remarque 6.1

Les différentielles $\mathrm{d}v^i$ des composantes contravariantes d'un vecteur ne sont pas les composantes contravariantes d'un vecteur.

Remarque 6.2

Il existe deux façons d'écrire le vecteur final $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v} &= v^i \vec{e}_i + \mathrm{d}v^i \vec{e}_i + v^i \mathrm{d}\vec{e}_i \\ &= v^i \left(\vec{e}_i + \mathrm{d}\vec{e}_i\right) + \mathrm{d}v^i \vec{e}_i\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v} &= \left(v^i + \mathrm{d}v^i\right) \vec{e}_i + v^i \mathrm{d}\vec{e}_i \\ &= \left(v^i + \mathrm{d}v^i + v^j \omega^i{}_j\right) \vec{e}_i\end{aligned}$$

2) covariantes, on commence par considérer un champ de vecteurs $\vec{w}$ *uniforme* et arbitraire. Avec (22.7) p. 437, dans la base naturelle :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{c}^{ste} \\ \mathrm{d}\left(w^i \vec{e}_i\right) &= 0 \\ \mathrm{d}w^j \vec{e}_j + w^j \mathrm{d}\vec{e}_j &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}w^j + w^i \omega^j{}_i\right) \vec{e}_j &= 0 \\ \forall j \qquad \mathrm{d}w^j &= -w^i \omega^j{}_i\end{aligned}$$

Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs exprimés en composantes covariantes v_i. Avec (22.8) p. 437, le produit scalaire avec $\vec{w}$ donne :

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w^i \\ \mathrm{d}\left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right) &= \mathrm{d}\left(v_i w^i\right) \\ \mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{w} &= w^i \mathrm{d}v_i + v_j \mathrm{d}w^j \\ \mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{w} &= w^i \mathrm{d}v_i + v_j \mathrm{d}w^j \\ \mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{e}_i w^i &= \left(\mathrm{d}v_i - v_j \omega^j{}_i\right) w^i \\ \forall i \qquad \mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{e}_i &= \mathrm{d}v_i - v_j \omega^j{}_i \\ &= \left(\partial_j v^i - v_k \Gamma^k{}_{ij}\right) \mathrm{d}x^j \\ &= Dv_i\end{aligned}$$

Définition 6.3: Composantes du vecteur différentielle absolue

Les composantes covariantes du vecteur différentielle absolue $\mathrm{d}\vec{v}$ ont pour expression :

$$Dv_i \overset{\text{def}}{=} \left(\partial_j v^i - u_k \Gamma^k{}_{ij}\right) \mathrm{d}x^j$$

Remarque 6.3

Les différentielles $\mathrm{d}v_i$ des composantes covariantes d'un vecteur ne sont pas les composantes covariantes d'un vecteur.

Soit le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que :

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{u}$$
$$\vec{v} = v\vec{u}$$

La norme v d'un vecteur est indépendante de tout système de coordonnées, c'est un scalaire.

$$\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(v\vec{u})$$
$$Dv^i\vec{e}_i = \vec{u}\mathrm{d}v + v\mathrm{d}\vec{u}$$
$$D(vu^i)\vec{e}_i = u^i\vec{e}_i\mathrm{d}v + vDu^i\vec{e}_i \tag{22.29}$$

6.2 Dérivée absolue d'un champ de vecteurs par rapport à son paramètre

Remarque 6.4

Pour dériver un vecteur $\vec{v}$ par rapport à un paramètre p quelconque, nous devons bien sûr supposer que ce vecteur est fonction de p. Dans le cas général nous considérons un champ de vecteurs $\vec{v}(p)$, par exemple la vitesse du vent en tout point de l'espace en fonction du temps. Chaque coordonnée v^i de $\vec{v}$ est alors une fonction de p, dans le système de coordonnées (x^i) on note $\vec{v}[v^i(x^j, p)]$. Lorsque $\vec{v}$ suit une courbe $\mathscr{C}$ d'équations paramétriques $\forall i = 1, \ldots, n,\ x^i = x^i(p)$ dans un espace à n dimensions, par exemple la vitesse d'un mobile sur sa trajectoire dans l'espace, on note au choix $\vec{v}[v^i(p)]$, $\vec{v}[v^i(x^j)]$, ou $\vec{v}[v^i(x^j(p))]$.

Dans un espace ponctuel euclidien ${}_En$ rapporté à un système de coordonnées (x^i), soit $\mathscr{C}$ une courbe d'équations paramétriques $\forall i = 1, \ldots, n,\ x^i = x^i(p)$. Soit un champ de vecteurs $\vec{v}[v^i(x^j(p))]$ défini le long de $\mathscr{C}$. Une variation infinitésimale $\mathrm{d}p$ du paramètre fait passer d'un point de $\mathscr{C}$ à un autre point de $\mathscr{C}$ infiniment proche. À partir de la déf. 6.2 p. 449 de la différentielle absolue d'un vecteur, on définit la dérivée absolue, ou *dérivée intrinsèque*, par rapport au paramètre p du champ de vecteurs $\vec{v}(p)$ le long de la courbe $\mathscr{C}$, par :

$$\forall i \qquad \frac{Dv^i}{\mathrm{d}p} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}p} + v^k\Gamma^i{}_{kj}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p} \tag{22.30}$$

C'est la dérivée covariante du vecteur dans la direction du vecteur tangent, c.-à-d. la multiplication contractée du tenseur dérivée covariante de composantes mixte $\nabla_j v^i$ et du vecteur de composantes contravariantes $\mathrm{d}x^j/\mathrm{d}p$ tangent à $\mathscr{C}$:

$$\forall i \qquad \nabla_j v^i \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma^i{}_{kj}\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}$$
$$= \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}p} + v^k\Gamma^i{}_{kj}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}$$

Remarque 6.5

Dérivons par rapport à p la loi de transformation ((5.14) p. 77) par changement de base naturelle des composantes contravariantes du champ de vecteurs $\vec{v}(p)$:

$$\begin{aligned}\forall i \qquad v^{i'} &= v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \\ \mathrm{d}v^{i'} &= \mathrm{d}v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + v^j \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) \\ &= \mathrm{d}v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j} \mathrm{d}x^k \\ \frac{\mathrm{d}v^{i'}}{\mathrm{d}p} &= \frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}p} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + v^j \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}p}\end{aligned}$$

Ce n'est pas la loi de transformation des composantes d'un vecteur à cause de la présence du second terme du membre de droite. La dérivée « ordinaire » d'un vecteur n'est pas un vecteur.

6.3 Dérivée absolue d'un champ de scalaire par rapport à son paramètre

Soit $\phi(p)$ une fonction scalaire le long de la courbe paramétrée, $\mathscr{C} : \forall i \; x^i = x^i(p)$, par exemple la norme du vecteur vitesse d'un mobile parcourant $\mathscr{C}$ (ou la norme de son vecteur accélération, son énergie cinétique, sa température, etc.). La dérivée absolue de $\phi(p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{D\phi}{\mathrm{d}p} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}p} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}p$ sont les composantes du vecteur tangent à $\mathscr{C}$, les composantes du vecteur vitesse de ce mobile lorsque p est le temps.

6.4 Dérivée covariante d'un vecteur

La dérivée covariante d'un vecteur est la dérivée partielle de ses composantes et des vecteurs de base, par rapport aux coordonnées. Lorsque le vecteur $\vec{v}$ est exprimé :

1) en composantes contravariantes, avec (22.10) p. 438, dans la base naturelle :

$$\begin{aligned}\forall j \qquad \partial_j \vec{v} &= \partial_j \left(v^i \vec{e}_i\right) \\ &= \vec{e}_i \partial_j v^i + v^k \partial_j \vec{e}_k \\ &= \left(\partial_j v^i + v^k \Gamma^i{}_{kj}\right) \vec{e}_i \\ &= \nabla_j v^i \vec{e}_i\end{aligned}$$

Définition 6.4: Composantes mixtes du vecteur dérivée covariante

Les composantes mixtes du vecteur dérivée covariante $\partial_j \vec{v}$ ont pour expression :

$$\nabla_j v^i \overset{\text{def}}{=} \left(\partial_j v^i + v^k \Gamma^i{}_{kj}\right)$$

Notation 6.1

La dérivée covariante $\nabla_j v^i$ se note également $v^i_{\,;j}$ ou $D_j v^i$.

Avec la déf. 6.2 p. 449 des Dv^i :

$$\forall i \qquad Dv^i \overset{\text{def}}{=} \nabla_j v^i \, \mathrm{d}x^j \tag{22.31}$$

Les $\nabla_j v^i \, \mathrm{d}x^j$ sont donc les composantes contravariantes du vecteur différentielle absolue $\mathrm{d}\vec{v}$. D'après (3.8) p. 49, les $\mathrm{d}x^j$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur. Par conséquent les $\nabla_j v^i$ sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

2) en composantes covariantes, on commence par considérer un champ de vecteurs $\vec{w}$ *uniforme* et arbitraire. Dans la base naturelle :

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{c}^{ste} \\
\forall j \qquad \partial_j \left(w^i \vec{e}_i \right) &= 0 \\
\vec{e}_i \partial_j w^i + w^k \partial_j \vec{e}_k &= 0 \\
\left(\partial_j w^i + w^k \Gamma^i_{\,kj} \right) \vec{e}_i &= 0 \\
\forall i, j \qquad \partial_j w^i &= -w^k \Gamma^i_{\,kj}
\end{aligned}$$

Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs exprimés en composantes covariantes v_i. Le produit scalaire avec $\vec{w}$ donne :

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w^i \\
\forall j \qquad \partial_j \left(\vec{v} \cdot \vec{w} \right) &= \partial_j \left(v_i w^i \right) \\
\partial_j \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \partial_j \vec{w} &= w^i \partial_j v_i + v_i \partial_j w^i \\
\partial_j \vec{v} \cdot \vec{w} &= w^i \partial_j v_i - v_i w^k \Gamma^i_{\,kj} \\
\partial_j \vec{v} \cdot w^i \vec{e}_i &= \left(\partial_j v_i - v_k \Gamma^k_{\,ij} \right) w^i \\
\forall i, j \qquad \partial_j \vec{v} \cdot \vec{e}_i &= \partial_j v_i - v_k \Gamma^k_{\,ij} \\
&= \nabla_j v_i
\end{aligned}$$

Définition 6.5: Composantes du vecteur dérivée covariante

Les composantes covariantes du vecteur dérivée covariante $\partial_j \vec{v}$ ont pour expression :

$$\nabla_j v_i \overset{\text{def}}{=} \partial_j v_i - v_k \Gamma^k_{\,ij}$$

Notation 6.2

La dérivée covariante $\nabla_j v_i$ du covecteur $\underline{v}$ est aussi notée $v_{i\,;j}$.

Avec la déf. 6.3 p. 450 :

$$\forall i \qquad Dv_i \overset{\text{def}}{=} \nabla_j v_i \, \mathrm{d}x^j$$

Les $\nabla_j v_i \, \mathrm{d}x^j$ sont donc les composantes covariantes du vecteur différentielle absolue $\mathrm{d}\vec{v}$. D'après (3.8) p. 49, les $\mathrm{d}x^j$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur. Par conséquent, les quantités $\nabla_j v_i$ sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

Remarque 6.6

Effectuons la dérivée partielle par rapport aux coordonnées, de la loi de transformation ((5.14) p. 77) des composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{v}(v^i)$:

$$\begin{aligned}
\forall i \qquad v^{i'} &= v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \\
\mathrm{d}v^{i'} &= \mathrm{d}v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} + v^k \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right) \\
\frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} \mathrm{d}x^{j'} &= \frac{\partial v^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \mathrm{d}x^l + v^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^l \partial x^k} \mathrm{d}x^l \\
&= \frac{\partial v^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \mathrm{d}x^{j'} + v^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \mathrm{d}x^{j'} \\
\forall i,j \qquad \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial v^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} + v^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^l \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}
\end{aligned}$$

La dérivée partielle « ordinaire » d'un vecteur n'est pas un tenseur à cause de la présence du second terme du membre de droite.

Exemple 6.1: Courbure d'une courbe

Pour étudier la courbure d'une courbe on considère celle-ci comme une trajectoire parcourue par un point au cours du temps. La courbure de la trajectoire est alors la norme de l'accélération subie par ce point qui décrirait la courbe avec un vecteur vitesse de norme unité constante.
Soit donc $\overrightarrow{\mathrm{M}}(t)$ le vecteur position d'un point décrivant la courbe $\mathscr{C}$. La vitesse de ce point au cours du temps est la dérivée absolue suivante :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}$$

En prenant pour paramètre l'abscisse curviligne $s(t)$ plutôt que le temps, nous obtenons un champ de vecteurs $\vec{u}$ unitaires tangents à la courbe :

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\
\frac{\vec{v}(t)}{\|\mathrm{v}\|} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} \\
\vec{u}(s) &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s}
\end{aligned} \tag{22.32}$$

La courbure κ de $\mathscr{C}(s)$ est le taux de variation du vecteur tangent unitaire en fonction de la distance parcourue sur la courbe (abscisse curviligne) :

$$\kappa = \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}s} \right\|$$

$\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}s$ est un vecteur, la courbure κ est bien invariante par changement de coordonnées.

6.5 Vecteur accélération d'un point mobile

Dans l'espace ponctuel euclidien ${}_E n$, considérons un point mobile M dont les coordonnées curvilignes (x^i) sont fonction du temps, $M[x^i(t)]$. Le vecteur position est particulier, il s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x^i(t)\vec{e}_i$$

où les $\vec{e}_i$ ne sont pas fonction du temps. Il relie l'origine de l'ancien repère à l'origine du nouveau repère, et n'est exprimé que dans l'ancienne base. Par conséquent, dans la base naturelle locale $(\vec{e}_i)$, sa différentielle est donnée par (3.8) p. 49

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}} &= \mathrm{d}x^i\vec{e}_i + x^i\mathrm{d}\vec{e}_i\\ &= \mathrm{d}x^i\vec{e}_i\end{aligned}$$

et non par la déf. 6.2 p. 449 des Du^i. Le vecteur vitesse a alors pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{v} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\\ v^i\vec{e}_i &= \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_i\\ \forall i \qquad v^i &= \dot{x}^i\end{aligned} \tag{22.33}$$

Avec la déf. 6.2 p. 449, le vecteur accélération a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &\overset{\text{def}}{=} \dot{\vec{v}}\\ \gamma^i\,\vec{e}_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^i\vec{e}_i\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_i + v^i\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_i + v^i\,\frac{\omega^j{}_i\vec{e}_j}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_i + v^j\,\frac{\omega^i{}_j\vec{e}_i}{\mathrm{d}t}\\ \forall i \qquad \gamma^i &= \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + v^j\Gamma^i{}_{jk}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\\ &= \dot{v}^i + \Gamma^i{}_{jk}v^jv^k\\ &= \frac{Dv^i}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_i\end{aligned} \tag{22.34}$$

Remarque 6.7

Le vecteur dérivée absolue d'un vecteur le long d'une courbe est unique. En effet, supposons qu'il y en ait deux, alors en coordonnées cartésiennes (rectilignes) où les symboles de Christoffel sont nuls, nous aurions :

$$\begin{cases}\dfrac{D\vec{u}}{\mathrm{d}\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\lambda}\\[2ex] \dfrac{\delta\vec{u}}{\delta\lambda} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\lambda}\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{D\vec{u}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\delta\vec{u}}{\delta\lambda}$$

Or d'après le § 11 p. 423, une équation tensorielle valable dans un système de coordonnées est valable dans tout système de coordonnées.

Exemple 6.2: Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Dans un système de coordonnées cartésiennes (rectilignes) les symboles de Christoffel sont nuls (4.6 p. 443), l'accélération (22.34) p. 454 s'écrit simplement :

$$\forall i \qquad \gamma^i = \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}$$

Exemple 6.3: Vecteur accélération dans un mouvement circulaire uniforme

Un mobile se déplace d'un mouvement circulaire uniforme ayant pour équations en coordonnées polaires $\rho = c^{ste}$, $\theta = \omega t$. Cherchons les composantes de son vecteur accélération. En se servant des symboles de Christoffel calculés dans l'ex. 4.2 p. 444 :

$$\begin{cases} \gamma^\rho = \ddot{\rho} + \Gamma^\rho{}_{\theta\theta}\dot{\theta}\dot{\theta} \\ \gamma^\theta = \ddot{\theta} + \Gamma^\theta{}_{\theta\rho}\dot{\theta}\dot{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^\rho = -\rho\dot{\theta}^2 \\ \gamma^\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma^\rho = -\rho\omega^2 \\ \gamma^\theta = 0 \end{cases}$$

Avec la déf. 7.1 p. 127 de la norme d'un vecteur, on en déduit :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \gamma^i\vec{e}_i \cdot \gamma^j\vec{e}_j \\ \gamma &= \sqrt{g_{ij}\gamma^i\gamma^j} \\ &= \sqrt{g_{\rho\rho}\gamma^\rho\gamma^\rho} \\ &= \rho\omega^2 \end{aligned}$$

6.6 Équations de Lagrange

La relation fondamentale de la dynamique classique s'écrit en coordonnées rectangulaires :

$$\sum \vec{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

En coordonnées curvilignes nous avons :

$$\sum \vec{\mathrm{F}} = \frac{D(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

Notons $\vec{\mathrm{F}}$ la somme des forces, et supposons la masse m du système constante. Avec l'expression des composantes contravariantes de l'accélération (22.34) p. 454, cette relation s'écrit en composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} \forall i \quad F^i &= m\gamma^i \\ &= m\left(\dot{v}^i + \Gamma^i{}_{jk}v^jv^k\right) \end{aligned}$$

En composantes covariantes, avec l'expression des symboles de Christoffel de 1re espèce en fonction du tenseur métrique (22.21) p. 442 :

$$\begin{aligned}
\forall i \quad g_{il}F^l &= m g_{il}\left(\dot{v}^l + \Gamma^l{}_{jk} v^j v^k\right) \\
\forall i \quad F_i &= m\left(g_{ij}\dot{v}^j + \Gamma_{ijk} v^j v^k\right) \\
&= m g_{ij}\dot{v}^j + \tfrac{m}{2}\left(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk}\right) v^j v^k \\
&= m g_{ij}\dot{v}^j + m\,\partial_k g_{ij} v^j v^k - \tfrac{m}{2}\,\partial_i g_{jk} v^j v^k \\
&= m g_{ij}\dot{v}^j + m\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\,v^j - \tfrac{m}{2}\,\partial_i(g_{jk}) v^j v^k \\
&= m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}v^j\right) - \tfrac{m}{2}\,\partial_i g_{jk} v^j v^k \\
&= \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g_{ij} v^i v^j}{\partial v^i}\right) - \frac{m}{2}\frac{\partial g_{jk} v^j v^k}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

En introduisant l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}
T &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} m v^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m g_{ij} v^i v^j
\end{aligned}$$

on trouve les équations de Lagrange :

$$\forall i \quad F_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i}$$

7 Différentielle absolue d'un tenseur

Les considérations du § 6.1 p. 448 sur la différentielle absolue d'un champ de vecteurs s'étendent à un champ de tenseurs. Soit ${}_E n$ un espace ponctuel euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i). Soit un champ de tenseurs T d'ordre trois de composantes mixtes, deux fois covariantes et une fois contravariantes :

$$\mathsf{T} = t_{ij}{}^k\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k$$

Lorsque l'on passe d'un point à un point infiniment proche, les composantes du tenseur changent, ainsi que le repère naturel :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathsf{T} &= \mathrm{d}\left(t_{ij}{}^k\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k\right) \\
&= \mathrm{d}t_{ij}{}^k \left(\vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k\right) + t_{ij}{}^k \mathrm{d}\left(\vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k\right)
\end{aligned}$$

Définition 7.1: Tenseur différentielle absolue d'un tenseur

$\mathrm{d}\mathsf{T}$ est le tenseur différentielle absolue du tenseur T.

Définition 7.2: Différentielles absolues des composantes d'un tenseur

Les $Dt_{ij}{}^k$ sont les composantes du tenseur différentielle absolue $\mathrm{d}\mathsf{T}$, telles que :

$$\mathrm{d}\mathsf{T} \overset{\text{def}}{=} Dt_{ij}{}^k\, \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k$$

Pour trouver l'expression des $Dt_{ij}{}^{k}$ nous utilisons la commutativité de la contraction et de la différentiation.

- la multiplication tensorielle de T avec trois champs de vecteurs *uniformes* donne :
$$\mathsf{T}\otimes\vec{u}\otimes\vec{v}\otimes\vec{w}=t_{ij}{}^{k}u^{h}v^{m}w_{n}\,\vec{e}^{\,i}\otimes\vec{e}^{\,j}\otimes\vec{e}_{k}\otimes\vec{e}_{h}\otimes\vec{e}_{m}\otimes\vec{e}^{\,n}$$
où le champ de vecteurs $\vec{w}$ est exprimé en composantes covariantes. La contraction complète de ce produit tensoriel en posant $i=h$, $j=m$ et $k=n$ donne le scalaire :
$$t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k}$$
Différentions ce scalaire pour un déplacement infiniment petit :
$$\mathrm{d}(t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k})=\mathrm{d}t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k}+t_{ij}{}^{k}\mathrm{d}u^{i}v^{j}w_{k}+t_{ij}{}^{k}u^{i}\mathrm{d}v^{j}w_{k}+t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}\mathrm{d}w_{k}$$
Les champs de vecteurs étant uniformes par hypothèse, leurs différentielles absolues sont nulles et les définitions 6.2 p. 449 et 6.3 p. 450 des Du^{i} donnent,
$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{u}=0\\ \mathrm{d}\vec{v}=0\\ \mathrm{d}\vec{w}=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\forall i,\ \mathrm{d}u^{i}=-u^{h}\omega^{i}{}_{h}\\ \forall j,\ \mathrm{d}v^{j}=-v^{h}\omega^{j}{}_{h}\\ \forall k,\ \mathrm{d}w_{k}=w_{h}\omega^{h}{}_{k}\end{cases}$$
si bien que :
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k})&=\mathrm{d}t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k}-t_{ij}{}^{k}u^{h}\omega^{i}{}_{h}v^{j}w_{k}-t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{h}\omega^{j}{}_{h}w_{k}+t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{h}\omega^{h}{}_{k}\\&=\mathrm{d}t_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k}-t_{hj}{}^{k}u^{i}\omega^{h}{}_{i}v^{j}w_{k}-t_{ih}{}^{k}u^{i}v^{j}\omega^{h}{}_{j}w_{k}+t_{ij}{}^{h}u^{i}v^{j}w_{k}\omega^{k}{}_{h}\\&=\left(\mathrm{d}t_{ij}{}^{k}-t_{hj}{}^{k}\omega^{h}{}_{i}-t_{ih}{}^{k}\omega^{h}{}_{j}+t_{ij}{}^{h}\omega^{k}{}_{h}\right)u^{i}v^{j}w_{k}\end{aligned}$$
- les champs de vecteurs étant uniformes, différentions le produit tensoriel :

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\mathsf{T}\otimes\vec{u}\otimes\vec{v}\otimes\vec{w})=\mathrm{d}\left(t_{ij}{}^{k}u^{l}v^{m}w_{n}\,\vec{e}^{\,i}\otimes\vec{e}^{\,j}\otimes\vec{e}_{k}\otimes\vec{e}_{l}\otimes\vec{e}_{m}\otimes\vec{e}^{\,n}\right)\\&=\left(Dt_{ij}{}^{k}u^{l}v^{m}w_{n}+t_{ij}{}^{k}Du^{l}v^{m}w_{n}+t_{ij}{}^{k}u^{l}Dv^{m}w_{n}+t_{ij}{}^{k}u^{l}v^{m}Dw_{n}\right)\vec{e}^{\,i}\otimes\vec{e}^{\,j}\otimes\vec{e}_{k}\otimes\vec{e}_{l}\otimes\vec{e}_{m}\otimes\vec{e}^{\,n}\\&=Dt_{ij}{}^{k}u^{l}v^{m}w_{n}\,\vec{e}^{\,i}\otimes\vec{e}^{\,j}\otimes\vec{e}_{k}\otimes\vec{e}_{l}\otimes\vec{e}_{m}\otimes\vec{e}^{\,n}\end{aligned}$$

Si nous contractons complètement ce produit tensoriel nous avons :
$$Dt_{ij}{}^{k}u^{i}v^{j}w_{k}=\left(\mathrm{d}t_{ij}{}^{k}-t_{pj}{}^{k}\omega^{p}{}_{i}-t_{ip}{}^{k}\omega^{p}{}_{j}+t_{ij}{}^{p}\omega^{k}{}_{p}\right)u^{i}v^{j}w_{k}$$

$$\boxed{\forall i,j,k\qquad Dt_{ij}{}^{k}=\mathrm{d}t_{ij}{}^{k}-t_{pj}{}^{k}\omega^{p}{}_{i}-t_{ip}{}^{k}\omega^{p}{}_{j}+t_{ij}{}^{p}\omega^{k}{}_{p}}\tag{22.35}$$

8 Dérivée covariante d'un tenseur

À partir des relations (22.35) :

$$\begin{aligned}\forall i,j,k \qquad Dt_{ij}{}^{k} &= \partial_h t_{ij}{}^{k}\,\mathrm{d}x^h - t_{pj}{}^{k}\,\Gamma^p{}_{ih}\,\mathrm{d}x^h - t_{ip}{}^{k}\,\Gamma^p{}_{jh}\,\mathrm{d}x^h + t_{ij}{}^{p}\,\Gamma^k{}_{ph}\,\mathrm{d}x^h\\ &= \left(\partial_h t_{ij}{}^{k} - t_{pj}{}^{k}\,\Gamma^p{}_{ih} - t_{ip}{}^{k}\,\Gamma^p{}_{jh} + t_{ij}{}^{p}\,\Gamma^k{}_{ph}\right)\mathrm{d}x^h\\ &= \nabla_h t_{ij}{}^{k}\,\mathrm{d}x^h\end{aligned}$$

Définition 8.1: Dérivée covariante d'un tenseur

Les composantes du tenseur dérivée covariante du tenseur T s'écrivent

$$\nabla_h t_{ij}{}^{k} = \partial_h t_{ij}{}^{k} - t_{pj}{}^{k}\,\Gamma^p{}_{ih} - t_{ip}{}^{k}\,\Gamma^p{}_{jh} + t_{ij}{}^{p}\,\Gamma^k{}_{ph}$$

9 Théorème et identités de Ricci

Théorème 9.1: Théorème de Ricci

La différentielle absolue du tenseur fondamental est nulle :

$$\forall i,j \qquad Dg_{ij} = 0$$

Démonstration. Appliquons (22.35) p. 457 à un tenseur de composantes deux fois covariantes, et utilisons (22.18) p. 441 :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad Dg_{ij} &= \mathrm{d}g_{ij} - \omega^k{}_j g_{ik} - \omega^k{}_i g_{jk}\\ &= \omega^k{}_j g_{ik} + \omega^k{}_i g_{jk} - \omega^k{}_j g_{ik} - \omega^k{}_i g_{jk}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

Par conséquent la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad Dg_{ij} &= 0\\ \nabla_k g_{ij}\mathrm{d}x^k &= 0\\ \forall i,j,k \qquad \nabla_k g_{ij} &= 0\end{aligned} \tag{22.36}$$

Le tenseur métrique se comporte comme une constante vis à vis de la dérivation covariante.

La dérivation covariante des symboles de Kronecker est nulle. En effet :

$$\begin{aligned}\forall j \qquad t^i\delta^j_i &= t^j\\ \forall j,k \quad \nabla_k t^i\delta^j_i + t^i\nabla_k\delta^j_i &= \nabla_k t^j\\ \nabla_k t^j + t^i\nabla_k\delta^j_i &= \nabla_k t^j\\ \forall i,j,k \qquad \nabla_k\delta^j_i &= 0\end{aligned}$$

Avec (12.13) p. 209, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall i,j \quad & g^{ki}g_{jk} = \delta^i_j \\ \forall i,j,h \quad & g^{ki}\nabla_h g_{jk} + g_{jk}\nabla_h g^{ki} = \nabla_h \delta^i_j \end{aligned}$$

Avec (22.36) :

$$\begin{aligned} \forall i,k,h \qquad & \nabla_h g^{ki} = 0 \\ \forall i,k \qquad & Dg^{ki} = 0 \end{aligned} \tag{22.37}$$

Par conséquent la dérivée covariante et la montée-descente des indices commutent :

$$\begin{aligned} \forall i,j,k \qquad \nabla_k t^i_j &= \nabla_k \left(g^{ih} t_{hj} \right) \\ &= g^{ih}\nabla_k t_{hj} + t_{hj}\nabla_k g^{ih} \\ &= g^{ih}\nabla_k t_{hj} \end{aligned}$$

À partir des relations (22.18) p. 441, nous trouvons les identités de Ricci :

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \mathrm{d}g_{ij} &= \omega^k{}_j g_{ik} + \omega^k{}_i g_{jk} \\ \partial_h g_{ij}\,\mathrm{d}x^h &= \Gamma^k{}_{jh}\, g_{ik}\mathrm{d}x^h + \Gamma^k{}_{ih}\, g_{jk}\mathrm{d}x^h \\ \forall h,i,j \qquad \partial_h g_{ij} &= g_{ik}\,\Gamma^k{}_{jh} + g_{jk}\,\Gamma^k{}_{ih} \end{aligned} \tag{22.38}$$

10 Opérateurs différentiels

10.1 Gradient d'un champ de scalaires

Définition 10.1: Covecteur gradient

Dans la base naturelle $(\vec{e}_i)$, le covecteur gradient a pour composantes covariantes (cf. 2.1 p. 374) :

$$\forall i \qquad \partial_i \phi \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \cdot \vec{e}_i$$

10.2 Divergence d'un champ de vecteurs

Définition 10.2: Opérateur divergence d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\vec{u}$ de composantes contravariantes u^i. Par contraction des composantes mixtes $\nabla_j u^i$ du tenseur dérivée covariante on obtient le scalaire

$$\text{div}\,\vec{u} \overset{\text{def}}{=} \nabla_i u^i \tag{22.39}$$

appelé divergence du champ de vecteurs $\vec{u}$.

En se servant de la déf. 6.4 p. 451 de la dérivée covariante puis des symboles de Christoffel contractés, relations (22.25) p. 442 :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{u} &\overset{\text{def}}{=} \partial_i u^i + u^j\,\Gamma^i{}_{ji}\\ &= \partial_i u^i + \frac{u^j}{\sqrt{|g|}}\,\partial_j\sqrt{|g|}\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\left(u^i\sqrt{|g|}\right)} \tag{22.40}$$

Dans un système de coordonnées rectilignes les symboles de Christoffel sont nuls :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{u} = \partial_i u^i} \tag{22.41}$$

L'équation de conservation locale (9.30) p. 183 s'écrit en notation indicielle, avec l'opérateur divergence en coordonnées rectilignes (22.41) p. 460 :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} = 0 \tag{22.42}$$

En coordonnées curvilignes (22.39) p. 459 elle s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0} \tag{22.43}$$

10.3 Divergence d'un champ de tenseurs

- dans le cas d'un champ de tenseurs de composantes deux fois contravariantes, d'après la définition de la dérivée covariante 8.1 p. 458 d'un tenseur :

$$\begin{aligned}\nabla_k t^{ij} &= \partial_k t^{ij} + t^{hj}\,\Gamma^i{}_{hk} + t^{ih}\,\Gamma^j{}_{kh}\\ \nabla_i t^{ij} &= \partial_i t^{ij} + t^{hj}\,\Gamma^i{}_{hi} + t^{ih}\,\Gamma^j{}_{ih}\end{aligned}$$

  Si le tenseur est antisymétrique $t^{ih} = -t^{hi}$, alors le dernier terme est nul car :

$$\begin{aligned}t^{ih}\,\Gamma^j{}_{ih} &= t^{hi}\,\Gamma^j{}_{hi}\\ &= -t^{ih}\,\Gamma^j{}_{ih}\\ &= 0\end{aligned}$$

  Il reste :

$$\begin{aligned}\nabla_i t^{ij} &= \partial_i t^{ij} + t^{hj}\,\Gamma^i{}_{hi}\\ &= \partial_i t^{ij} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_l\sqrt{|g|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\left(t^{ij}\sqrt{|g|}\right)\end{aligned}$$

- dans le cas d'un champ de tenseurs d'ordre deux de composantes mixtes contravariante-covariante :

$$\begin{aligned}
\nabla_k t^i{}_j &= \partial_k t^i{}_j + t^h{}_j\,\Gamma^i{}_{hk} - t^i{}_h\,\Gamma^h{}_{kj} \\
\nabla_i t^i{}_j &= \partial_i t^i{}_j + t^h{}_j\,\Gamma^i{}_{hi} - t^i{}_h\,\Gamma^h{}_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_h\left(t^h{}_j\sqrt{|g|}\right) - t^i{}_h\,\Gamma^h{}_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_h\left(t^h{}_j\sqrt{|g|}\right) - \tfrac{1}{2}\,t^i{}_h\,g^{hk}\left(g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_h\left(t^h{}_j\sqrt{|g|}\right) - \tfrac{1}{2}\,t^{ik}\left(g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}\right)
\end{aligned}$$

Si le tenseur est symétrique $t^{ik} = t^{ki}$ alors, en échangeant les indices i et k :

$$\begin{aligned}
t^{ik} g_{jk,i} &= t^{ki} g_{ji,k} \\
&= t^{ik} g_{ij,k}
\end{aligned}$$

$$\nabla_i t^i_j = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\left(t^i_j\sqrt{|g|}\right) - \tfrac{1}{2}\,t^{ik}\,g_{ki,j}$$

10.4 Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\vec{u}$ de composantes covariantes u_i. D'après la déf. 6.5 p. 452, les composantes $\nabla_j u_i$ du tenseur dérivée covariante s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\forall i,j \qquad \nabla_j u_i &= \partial_j u_i - u_k\,\Gamma^k{}_{ij} \\
\nabla_i u_j &= \partial_i u_j - u_k\,\Gamma^k{}_{ji}
\end{aligned}$$

Par symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\forall i,j \qquad \nabla_j u_i - \nabla_i u_j = \partial_j u_i - \partial_i u_j$$

D'après le § 1) p. 416, la soustraction de deux tenseurs est un tenseur.

Définition 10.3: Opérateur rotationnel d'un champ de vecteurs

Les quantités,

$$\forall i,j \qquad \mathrm{rot}_{ij}\vec{u} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_j u_i - \partial_i u_j$$

sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{u}) = \left(\partial_j u_i - \partial_i u_j\right)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

appelé rotationnel du champ de vecteurs $\vec{u}$.

Le tenseur rotationnel est antisymétrique

$$\mathrm{rot}_{ij}\vec{u} = -\mathrm{rot}_{ji}\vec{u}$$

Un tenseur antisymétrique d'ordre n possède n^2 composantes, dont $n(n-1)/2$ sont différentes. Dans le cas d'un espace à trois dimensions, et seulement dans ce cas, $3(3-1)/2 = 3$, le nombres

de composantes « strictes » du tenseur est égal à la dimension de l'espace :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \begin{pmatrix} 0 & u_{1,2}-u_{2,1} & u_{1,3}-u_{3,1} \\ -(u_{1,2}-u_{2,1}) & 0 & u_{2,3}-u_{3,2} \\ -(u_{1,3}-u_{3,1}) & -(u_{2,3}-u_{3,2}) & 0 \end{pmatrix}$$

À tout tenseur antisymétrique on peut adjoindre un vecteur ayant pour composantes les composantes strictes du tenseur.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \begin{pmatrix} u_{3,2}-u_{2,3} \\ u_{1,3}-u_{3,1} \\ u_{2,1}-u_{1,2} \end{pmatrix}$$

est appelé *vecteur rotationnel*.

Exemple 10.1: Vecteur rotationnel en coordonnées rectangulaires en trois dimensions

Dans le système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de l'espace euclidien E_3 :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix}$$

10.5 Laplacien d'un champ de scalaires

Définition 10.4: Laplacien d'un champ de scalaires

Soit ϕ une fonction scalaire des coordonnées curvilignes. On appelle laplacien de ϕ le scalaire :

$$\triangle\phi \overset{\text{def}}{=} \text{div}\,\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$$

La divergence étant définie avec les composantes contravariantes du vecteur, nous avons :

$$\begin{aligned} \triangle\phi &= \nabla_i \left(g^{ij} \partial_j \phi \right) \\ &= g^{ij} \nabla_i (\partial_j \phi) \end{aligned}$$

Avec la déf. 6.5 p. 452 :

$$\boxed{\triangle\phi = g^{ij} \left(\partial_{ij}\phi - \Gamma^k{}_{ij}\, \partial_k \phi \right)}$$

Avec (22.40) p. 460 nous avons aussi :

$$\triangle\phi = \nabla_i \left(g^{ij} \partial_j \phi \right)$$

$$\boxed{\triangle\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \phi \right)}$$

Pour un système de coordonnées rectangulaires, $g = 1$ et $g^{ij} = \delta^{ij}$:

$$\boxed{\triangle\phi = \sum_i \partial_{ii}\phi}$$

Exemple 10.2: Laplacien en coordonnées rectangulaires

Dans le système de coordonnées rectangulaire (x, y, z) de l'espace euclidien E_3 :

$$\triangle\phi = \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi$$

11 Dérivée covariante seconde d'un vecteur

- vecteur en composantes contravariantes

  Soit $\vec{v}$ un vecteur de composantes contravariantes v^i, d'après la déf. 6.4 p. 451 sa dérivée covariante est le tenseur de composantes mixtes :

  $$\forall i,j \qquad \nabla_j v^i \overset{\text{def}}{=} \partial_j v^i + v^k \, \Gamma^i{}_{kj}$$

  La déf. 8.1 p. 458 de la dérivée covariante d'un tenseur de composantes mixtes,

  $$\forall i,j,k \qquad \nabla_k t_j{}^i = \partial_k t_j{}^i - t_p{}^i \, \Gamma^p{}_{jk} + t_j{}^p \, \Gamma^i{}_{ex:pk}$$

  nous donne :

$$\begin{aligned}
&\nabla_k(\nabla_j v^i) \\
&= \partial_k \nabla_j v^i - \nabla_p v^i \, \Gamma^p{}_{jk} + \nabla_j v^p \, \Gamma^i{}_{ex:pk} \\
&= \partial_k \left(\partial_j v^i + v^q \Gamma^i{}_{qj}\right) - \left(\partial_p v^i + v^q \Gamma^i{}_{qp}\right) \Gamma^p{}_{jk} + \left(\partial_j v^p + v^q \Gamma^p{}_{qj}\right) \Gamma^i{}_{ex:pk} \\
&= \partial_{kj} v^i + v^q \partial_k \Gamma^i{}_{qj} + \Gamma^i{}_{qj} \, \partial_k v^q - \Gamma^p{}_{jk} \, \partial_p v^i - v^q \, \Gamma^i{}_{qp} \, \Gamma^p{}_{jk} + \Gamma^i{}_{ex:pk} \, \partial_j v^p + v^q \, \Gamma^p{}_{qj} \, \Gamma^i{}_{ex:pk}
\end{aligned} \tag{22.44}$$

- vecteur en composantes covariantes

  Soit $\vec{v}$ un vecteur de composantes covariantes v_i, d'après la déf. 6.5 p. 452, sa dérivée covariante est le tenseur de composantes deux fois covariantes :

  $$\forall i,j \qquad \nabla_j v_i \overset{\text{def}}{=} \partial_j v_i - v_k \Gamma^k{}_{ij}$$

  La déf. 8.1 p. 458 de la dérivation covariante d'un tenseur de composantes deux fois covariantes,

  $$\forall i,j,k \quad \nabla_k t_{ij} = \partial_k t_{ij} - t_{pj} \, \Gamma^p{}_{ik} - t_{ip} \, \Gamma^p{}_{jk}$$

  nous donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_k(\nabla_j v_i) &= \partial_k \nabla_j v_i - \nabla_j v_p \, \Gamma^p{}_{ik} - \nabla_p v_i \, \Gamma^p{}_{jk} \\
&= \partial_k \left(\partial_j v_i - v_q \Gamma^i{}_{qj}\right) - \left(\partial_j v_p - v_q \Gamma^q{}_{pj}\right) \Gamma^p{}_{ik} - \left(\partial_p v_i - v_q \Gamma^q{}_{ip}\right) \Gamma^p{}_{jk} \\
&= \partial_{kj} v_i - v_q \partial_k \Gamma^i{}_{qj} - \Gamma^i{}_{qj} \, \partial_k v_q - \Gamma^p{}_{ik} \, \partial_j v_p + v_q \, \Gamma^q{}_{pj} \, \Gamma^p{}_{ik} - \Gamma^p{}_{jk} \, \partial_p v_i + v_q \, \Gamma^q{}_{ip} \, \Gamma^p{}_{jk}
\end{aligned}$$

12 Règles de dérivation des tenseurs

12.1 Dérivée covariante

- de la somme : $\nabla_k(\mathsf{T}+\mathsf{S}) = \nabla_k\mathsf{T} + \nabla_k\mathsf{S}$
- de la multiplication tensorielle : $\nabla_k[\mathsf{TS}] = [\mathsf{S}\nabla_k\mathsf{T}] + [\mathsf{T}\nabla_k\mathsf{S}]$
- de la multiplication tensorielle contractée : $\nabla_k(\mathsf{TS}) = \mathsf{S}\nabla_k\mathsf{T} + \mathsf{T}\nabla_k\mathsf{S}$

12.2 Différentielle absolue

- de la somme : $D(\mathsf{T}+\mathsf{S}) = D\mathsf{T} + D\mathsf{S}$
- de la multiplication tensorielle : $D[\mathsf{TS}] = [\mathsf{S}D\mathsf{T}] + [\mathsf{T}\,D\mathsf{S}]$
- de la multiplication contractée : $D(\mathsf{TS}) = \mathsf{S}D\mathsf{T} + \mathsf{T}D\mathsf{S}$

Exemple 12.1: Dérivée covariante d'une somme de deux vecteurs

$$\begin{aligned}\forall i,k \qquad \nabla_k t^i + \nabla_k s^i &= \partial_k t^i + t^j \Gamma^i{}_{jk} + \partial_k s^i + s^j \Gamma^i{}_{jk} \\ &= \partial_k(t^i + s^i) + (t^j + s^j)\Gamma^i{}_{jk} \\ &= \nabla_k(t^i + s^i)\end{aligned}$$

On généralise directement à la somme de deux tenseurs d'ordre supérieur à un.

Exemple 12.2: Dérivée covariante de la multiplication tensorielle de deux tenseurs

Soient u^i_j et v^i_j les composantes de deux tenseurs symétriques d'ordre deux de composantes mixtes, de produit tensoriel

$$t^{pq}_{rs} = u^p_r v^q_s$$

En effectuant la dérivée covariante :

$$\begin{aligned}\forall k,p,q,r,s \qquad \mathrm{d}t^{pq}_{rs\,;k} &= t^{pq}_{rs,k} + \Gamma^p{}_{tk} t^{tq}_{rs} + \Gamma^q{}_{tk} t^{pt}_{rs} - \Gamma^t{}_{rk} t^{pq}_{ts} - \Gamma^t{}_{sk} t^{pq}_{rt} \\ &= \left(v^q_s u^p_{r,k} + u^p_r v^q_{s,k}\right) + \Gamma^p{}_{nk} t^{nq}_{rs} + \Gamma^q{}_{nk} t^{pn}_{rs} - \Gamma^n{}_{rk} t^{pq}_{ns} - \Gamma^n{}_{sk} t^{pq}_{rn} \\ &= v^q_s \left(u^p_{r,k} + \Gamma^p{}_{nk} u^n_r - \Gamma^n{}_{rk} u^p_n\right) + u^p_r \left(v^q_{s,k} + \Gamma^q{}_{nk} v^n_s - \Gamma^n{}_{sk} v^q_n\right) \\ &= v^q_s u^p_{r\,;k} + u^p_r v^q_{s\,;k}\end{aligned}$$

Exemple 12.3: Commutation de la contraction et de la dérivée covariante

La contraction des composantes et la dérivée covariante commutent :

$$\begin{aligned}\forall h,i,j \qquad r^{ij}_{k\,;\,h}\,\delta^k_j &= \left(r^{ij}_{k,h} + \Gamma^i{}_{theo} r^{tj}_k + \Gamma^j{}_{theo} r^{it}_k - \Gamma^t{}_{kh} r^{ij}_t\right)\delta^k_j \\ &= r^{ij}_{j,h} + \Gamma^i{}_{theo} r^{tj}_j + \Gamma^j{}_{theo} r^{it}_j - \Gamma^t{}_{jh} r^{ij}_t \\ &= r^{ij}_{j,h} + \Gamma^i{}_{theo} r^{tj}_j \\ &= r^{ij}_{j\,;\,h}\end{aligned}$$

Nous en déduisons la loi de dérivation covariante de la multiplication contractée, la contraction étant effectuée à la fin.

Exemple 12.4: Dérivée absolue de la multiplication tensorielle de deux tenseurs

Soit une courbe d'équations paramétriques $x^i = x^i(\lambda)$ notées $\vec{x} = \vec{x}(\lambda)$, et soient $\mathsf{T}[\vec{x}(\lambda)]$ et $\mathsf{S}[\vec{x}(\lambda)]$ deux tenseurs définis sur cette courbe :

$$\begin{aligned}\frac{D}{\mathrm{d}\lambda}[\mathsf{TS}] &= \nabla_k[\mathsf{TS}]\frac{\mathrm{d}\vec{x}^k}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= [\mathsf{S}\nabla_k\mathsf{T} + \mathsf{T}\nabla_k\mathsf{S}]\frac{\mathrm{d}\vec{x}^k}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= \left[\mathsf{S}\nabla_k\mathsf{T}\frac{\mathrm{d}\vec{x}^k}{\mathrm{d}\lambda}\right] + \left[\mathsf{T}\nabla_k\mathsf{S}\frac{\mathrm{d}\vec{x}^k}{\mathrm{d}\lambda}\right] \\ &= \left[\mathsf{S}\frac{D\mathsf{T}}{\mathrm{d}\lambda}\right] + \left[\mathsf{T}\frac{D\mathsf{S}}{\mathrm{d}\lambda}\right]\end{aligned}$$

Chapitre 23

GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Sommaire

1	**Métrique euclidienne tangente en un point**	**468**
2	**Trajectoires dans un espace riemannien**	**477**
3	**Métrique euclidienne de raccordement**	**487**
4	**Tenseur de courbure d'un espace riemannien**	**491**

Nous avons vu, déf. 1.1 p. 355, qu'un espace vectoriel est pré-euclidien s'il admet une base orthonormée globale ou pseudo-orthonormée globale, autrement dit si le tenseur fondamental G peut être ramené par un changement de coordonnées à la forme :

$$\forall i,j \qquad g_{ij} = \pm\delta_{ij}$$

Cela n'est pas toujours possible car dans un espace à n dimensions, un changement de variables fournit n fonctions $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ alors que d'après (14.1) p. 323 il en faudrait $n(n+1)/2$ pour changer chaque élément d'une métrique riemannienne quelconque. Les espaces pré-euclidiens sont donc des cas particuliers d'espace riemannien.

Pour une dimension donnée il existe une infinité d'espaces riemanniens, quelques espace pré-euclidiens, et un seul espace euclidien. Si nous ne pouvons pas toujours ramener globalement un espace riemannien à un espace pré-euclidien par changement de coordonnées, il est toujours possible de le faire localement en un point, que nous noterons M_0. Cela revient à considérer l'espace pré-euclidien tangent à l'espace riemannien en M_0. Les métriques de deux espaces tangents en un point sont par définition égales, et par conséquent la dimension de l'espace et celle de son espace tangent sont égales.

De plus, nous cherchons un espace tangent pré-euclidien dont les composantes du tenseur métrique $\bar{g}_{ij}$ sont des constantes (ne sont pas fonction des coordonnées)

$$\forall i,j,k \qquad \partial_k \bar{g}_{ij} = 0$$

donc exprimées dans un système de coordonnées rectilignes (cartésiennes).

1 Métrique euclidienne tangente en un point

1.1 Espace pré-euclidien tangent à un espace riemannien en un point

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x^i)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{23.1}$$

Pour douer cet espace de propriétés géométriques, nous allons l'identifier localement en un point, puis au voisinage de ce point, à un espace ponctuel pré-euclidien de même signature (déf. 2.1 p. 356), donc de même dimension. Soit $M_0(x_0^i)$ un point de $\mathcal{R}_n$, la métrique en ce point s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x_0^i)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

Soit ${}_E n$ un espace ponctuel pré-euclidien. Prenons pour cet espace de même dimension que $\mathcal{R}_n$, les mêmes variables que pour l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$, c.-à-d. le système de coordonnées curvilignes (x^i). La métrique de ${}_E n$ s'écrit

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^i)\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

Au point $M_0(x_0^i)$ faisons correspondre le point $m_0(x_0^i)$ de ${}_E n$, tel qu'en ces deux points les valeurs des composantes des métriques pré-euclidienne et riemannienne soient égales :

$$\forall i,j \qquad (\bar{g}_{ij})_{m_0} = (g_{ij})_{M_0} \tag{23.2}$$

Nous dirons que ces deux métriques sont *tangentes* au point M_0 (ou m_0).

Nous avons fixé la métrique de ${}_E n$ en un seul point, le point m_0. Prenons une métrique constante (dont les composantes ne sont pas des fonctions explicites ou implicites des coordonnées) pour l'espace ${}_E n$ tout entier, qui soit en tout point égale à $(\bar{g}_{ij})_{m_0}$. C'est le plus simple et cela nous assure que l'espace que nous avons contruit est bien pré-euclidien.

$$\begin{aligned} \forall i,j \qquad \bar{g}_{ij} &= (\bar{g}_{ij})_{m_0} \\ &= (g_{ij})_{M_0} \end{aligned} \tag{23.3}$$

Notons $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ la base naturelle de l'espace vectoriel pré-euclidien E_n associé à ${}_E n$:

$$\forall i,j \qquad \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j = (g_{ij})_{M_0}$$

Exemple 1.1

Comme espace riemannien $\mathcal{R}_2$, prenons la surface d'une sphère de rayon r, de métrique (11.2) p. 196

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + r^2\sin^2(\rho/r)\,\mathrm{d}\phi^2$$

et de tenseur métrique :

$$G\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\rho/r) \end{bmatrix}$$

Au point de coordonnées $M_0(\rho_0, \phi_0)$ de cette sphère, la métrique et le tenseur métrique vallent

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho_0^2 + r^2 \sin^2(\rho_0/r)\, \mathrm{d}\phi_0^2$$

et

$$(G)_{M_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix}$$

L'espace ponctuel euclidien ${}_E2$ tangent à $\mathcal{R}_2$ a pour tenseur métrique au point m_0 :

$$(\bar{G})_{m_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix} = (G)_{M_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix}$$

Prenons un tenseur métrique constant :

$$\bar{G} = (\bar{G})_{M_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\rho_0/r) \end{bmatrix}$$

1.2 Caractère intrinsèque

Effectuons la transformation de coordonnées $(x^i) \to (x^{i'})$. Pour que la notion de métrique euclidienne tangente présente un caractère intrinsèque (soit indépendante du système de coordonnées), l'égalité (23.3) p. 468 doit être vérifiée dans le nouveau système de coordonnées $(x^{i'})$. Nous cherchons les conditions pour avoir :

$$\forall k, l \quad \bar{g}_{k'l'} = (g_{k'l'})_{M_0}$$

D'après (21.19) p. 412, par changement de coordonnées, le tenseur métrique de l'espace ponctuel euclidien tangent ${}_En$ se transforme en tout point selon la loi :

$$\forall i, j \qquad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \bar{g}_{k'l'}$$

Par conséquent, il faut aussi que dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ nous ayons en tout point

$$\forall i, j \qquad g_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} g_{k'l'}$$

et c'est ce que nous *poserons*. En effet, en partant de (23.3) p. 468

$$\begin{gathered} \forall i, j \qquad \bar{g}_{ij} = (g_{ij})_{M_0} \\ \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \bar{g}_{k'l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} (g_{k'l'})_{M_0} \\ \forall k, l \quad \bar{g}_{k'l'} = (g_{k'l'})_{M_0} \end{gathered}$$

et l'égalité (23.3) p. 468 est conservée par changement de coordonnées. Nous pouvons alors, grâce au caractère *instrinsèque* de la représentation du premier ordre et de la métrique euclidienne tangente, étendre aux espaces riemanniens des notions géométriques d'origine euclidienne.

1.3 Représentation du premier ordre

Montrons que l'on peut trouver une infinité de métriques euclidiennes tangentes à un espace riemannien. Soit (x^i) un système de coordonnées curviligne d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$. Au point $M_0(x_0^i)$ de $\mathcal{R}_n$, faisons correspondre le point m_0 de l'espace ponctuel euclidien ${}_En$, et un repère $(m_0, \bar{\boldsymbol{e}}_i)$ tels que

$$\forall i,j \qquad \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j = (g_{ij})_{M_0} \tag{23.4}$$

sans plus d'hypothèses sur les vecteurs de base $\bar{\boldsymbol{e}}_i$, ni sur le système de coordonnées de ${}_En$. Supposons qu'à tout point $M(x^i)$ du voisinage de $M_0(x_0^i)$ dans $\mathcal{R}_n$, nous fassions correspondre un point m du voisinage de m_0 dans ${}_En$, tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{m_0m} &\overset{\text{def}}{=} \left[\left(x_M^i - x_{M_0}^i\right) + \Psi_2^i\left(x^r - x_0^r\right)\right]\bar{\boldsymbol{e}}_i \\ \mathrm{d}\mathbf{m} &\overset{\text{def}}{=} \left[\mathrm{d}x^i + \Psi_2^i\left(\mathrm{d}x^r\right)\right]\bar{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned} \tag{23.5}$$

où les fonctions Ψ_2^i sont du deuxième ordre par rapport aux variables $(x^r - x_0^r)$, pour $x^r - x_0^r$ voisins de zéro, et où l'on utilise le $\mathrm{d}x^i$ entre M et M_0 de l'espace $\mathcal{R}_n$ alors que l'on est dans ${}_En$. Localement donc, le point m se trouve défini par les coordonnées (x^i). Par conséquent, avec cet correspondance, les (x^i) sont un système de coordonnées curvilignes pour l'espace euclidien au voisinage de m_0. Cette correspondance définit *une représentation du premier ordre* pour le voisinage de M_0. Le point m est l'image de M dans cette représentation, m_0 est l'image de M_0.

Avec (23.5), nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{m} &\overset{\text{def}}{=} \bar{\boldsymbol{e}}_i \mathrm{d}x^i + \Psi_2^i\left(\mathrm{d}x^r\right)\bar{\boldsymbol{e}}_i \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^i}\right)_{m_0} \mathrm{d}x^i + \Psi_2^i\left(\mathrm{d}x^r\right)\bar{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall i \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^i}\right)_{m_0} = \bar{\boldsymbol{e}}_i \tag{23.6}$$

La correspondance (23.5) impose donc que $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ soit la base naturelle du système de coordonnées local (x^i) dans E_n, et que $(m, \bar{\boldsymbol{e}}_i)$ soit un repère naturel en m. Par conséquent :

$$\forall i,j \qquad \bar{\boldsymbol{e}}_i \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_j = (\bar{g}_{ij})_{m_0}$$

Avec (23.4) :

$$\forall i,j \qquad (\bar{g}_{ij})_{m_0} = (g_{ij})_{M_0}$$

Les deux métriques admettent même coefficients en x_0^i, elles sont tangentes en ce point.

La représentation du premier ordre est-elle indépendante du système de coordonnées ? Lors du changement de coordonnées $(x^i) \to (x^{i'})$, elle prend la forme suivante

$$\mathbf{m_0m} = \left[\left(x^{i'} - x_0^{i'}\right) + \Theta_2^i\left(x^{r'} - x_0^{r'}\right)\right]\bar{\mathbf{e}}_i$$

où les fonctions Θ_2^i sont du deuxième ordre par rapport aux variables $x^{r'} - x_0^{r'}$, pour $x^{r'} - x_0^{r'}$ voisins de zéro. Sa forme étant indépendante du système de coordonnées utilisé, elle présente un caractère intrinsèque.

1.4 Propriétés déduites des métriques euclidiennes tangentes

Certaines propriétés de l'espace euclidien vont pouvoir être transposées dans les espaces riemanniens en utilisant la métrique euclidienne tangente en chaque point M de $\mathcal{R}_n$.

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

Soit M un point de $\mathcal{R}_n$ et soit ${}_En$ l'espace ponctuel euclidien tangent en M à $\mathcal{R}_n$, de même système de coordonnées curvilignes (x^i) et de métrique constante :

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \bar{g}_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &= (g_{ij})_M\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \end{aligned}$$

Définition 1.1: Tenseur de $\mathcal{R}_n$

Nous définissons un tenseur au point M d'un espace riemannien par ses composantes relatives aux coordonnées (x^i), en définissant un tenseur au point m de l'espace euclidien tangent en M, par ses composantes dans le repère $(m, \bar{\mathbf{e}}_i)$.

1.4.1 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs attachés au même point M d'un espace riemannien de tenseur métrique G, est donné par :

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (g_{ij})_M\,v^i w^j$$

1.4.2 Métrique de $\mathcal{R}_n$

Le carré de la « distance » élémentaire entre deux points M_0 et M infiniment proches dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ est égal au carré de la « distance » élémentaire euclidienne des deux points images m_0 et m :

$$\begin{aligned} \overline{m_0m}^2 &= \bar{g}_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &= (g_{ij})_{M_0}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &= \overline{M_0M}^2 \end{aligned}$$

On déduit la longueur d'un arc de courbe en intégrant la distance élémentaire dans l'espace riemannien. La fonction indicatrice ε (déf. 16.1 p. 247) rend le carré de la distance positif dans les espaces pseudo-riemanniens :

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

De façon équivalente

$$\varepsilon\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

Par intégration on en déduit la longueur d'un arc de courbe (et l'on retrouve (22.5) p. 432) :

$$\Gamma = \int_a^b \sqrt{\varepsilon g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$$

Exemple 1.2: Longueur d'une courbe dans un espace hyperbolique

Soit la courbe paramétrée :

$$\mathscr{C} \quad : \quad \begin{cases} x^1 = 1 \\ x^2 = \lambda \end{cases} \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant 2)$$

Dans un espace de métrique hyperbolique

$$g_{11} = g_{22} = {}^1\!/_{(x^2)^2} \quad : \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

calculons sa longueur :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\right)^T G \left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\lambda}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\!/_{\lambda^2} & 0 \\ 0 & {}^1\!/_{\lambda^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

donc $\varepsilon = 1$.

$$\Gamma = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \ln 2$$

1.4.3 Hypervolume dans $\mathcal{R}_n$

L'hypervolume élémentaire d'origine M_0 dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ est égal à celui d'origine m_0 dans l'espace euclidien tangent en ce point. Il est donné par (22.6) p. 435 :

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= \sqrt{|\bar{g}|}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

où le déterminant g est fonction des coordonnées du point M_0. Par intégration on en déduit l'hypervolume d'un domaine de dimension n :

$$\mathcal{V} = \int \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega$$

Par changement de coordonnées, (5.3) p. 66 et (21.20) p. 413 donnent :

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega &= J\sqrt{|g'|}\,\frac{\mathrm{d}\Omega'}{J} \\ &= \sqrt{|g'|}\,\mathrm{d}\Omega' \end{aligned} \tag{23.7}$$

L'élément d'hypervolume et par suite l'hypervolume sont donc invariants par changement de coordonnées, ce sont des scalaires. Une arrête de l'hypervolume pouvant être prise de longueur nulle, un hypervolume de dimension quelconque d'un domaine de l'espace est un scalaire.

1.5 Représentation du second ordre

Pour étendre aux espaces riemanniens les notions d'analyse tensorielle de la géométrie euclidienne, nous définissons la notion de champ de tenseurs sur un espace riemannien.

Définition 1.2: Champ de tenseurs

Attachons à chaque point M d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ un tenseur T de la façon suivante : au point M faisons correspondre dans l'espace euclidien tangent un repère $(m, \mathbf{e}_i)$ compatible avec la métrique riemannienne en ce point. La donnée des composantes du tenseur dans ce repère en fonction des coordonnées (x^i) communes aux deux espaces dans le voisinage de M, constitue un champ de tenseurs dans $\mathcal{R}_n$.

Exemple 1.3: Tenseur fondamental

Les composantes g_{ij} du tenseur fondamental données en tout point M sont un exemple de composantes covariantes d'un champ de tenseurs d'ordre deux.

Définition 1.3: Différentielle absolue d'un tenseur

Soient T_0 et T deux tenseurs de $\mathcal{R}_n$, attachés aux points infiniment voisins M_0 et M. Dans une représentation du premier ordre, leur différence est définie à des infiniment petits du premier ordre. La partie principale de cette différence est appelée différentielle absolue du tenseur T.

La notion de métrique euclidienne tangente ne nous permet pas de comparer entre eux des tenseurs attachés à deux points, même infiniment proches, de l'espace riemannien.

En effet, dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$, donnons-nous un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ par leurs composantes contravariantes v^i. Soient deux vecteurs de ce champ, attachés en deux points infiniment proches M_0 et M. Leur différentielle absolue est la différence géométrique de leurs vecteurs images dans l'espace euclidien tangent ${}_En$. D'après la déf. 6.2 p. 449, les composantes contravariantes des Dv^i dans le repère naturel en un point m_0 de ${}_En$ s'écrivent :

$$\forall i \qquad \left(Dv^i\right)_{m_0} = \left(\mathrm{d}v^i\right)_{m_0} + \left(v^j\right)_{m_0} \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0} \mathrm{d}u^k$$

Pour étendre la notion de différentielle absolue aux espaces riemanniens, et écrire

$$\forall i \qquad \left(Dv^i\right)_{M_0} = \left(Dv^i\right)_{m_0}$$

il faudrait avoir

$$\forall i, j, k \qquad \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_{M_0} = \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0}$$

c.-à-d. d'après (22.22) p. 442 :

$$\forall i, j, k \qquad (\partial_k g_{ij})_{M_0} = (\partial_k \bar{g}_{ij})_{m_0} \tag{23.8}$$

Deux telles métriques sont dites *osculatrices*. Pour cela, remplaçons la représentation du premier ordre (23.5) p. 470 par une représentation du second ordre, c.-à-d. remplaçons l'espace euclidien

tangent par un espace euclidien osculateur. La formule de Taylor à l'ordre deux s'écrit

$$f(x,y) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{a,b}(x-a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b}(y-b) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{a,b}(x-a)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{a,b}(x-b)^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{a,b}(x-a)(y-b) + R_3[(x-a),(y-b)]$$

où les fonctions R_3 sont du 3^e ordre par rapport aux variables $(x-a)$ et $(y-b)$. En prenant deux points infiniment proches :

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R_3(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

En particulier pour le vecteur position, en utilisant (22.14) p. 440 :

$$\begin{aligned}\mathbf{om}(x^i + \mathrm{d}x^i) - \mathbf{om}_0(x^i) &= \partial_i \mathbf{m}\mathrm{d}x^i + \tfrac{1}{2}\partial_{jk}\mathbf{m}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k + \Phi_3^i(\mathrm{d}x^r)\bar{\mathbf{e}}_i \\ &= \mathrm{d}x^i\bar{\mathbf{e}}_i + \tfrac{1}{2}\bar{\Gamma}^i{}_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k\bar{\mathbf{e}}_i + \Phi_3^i(\mathrm{d}x^r)\bar{\mathbf{e}}_i \\ &= \left[\mathrm{d}x^i + \tfrac{1}{2}\bar{\Gamma}^i{}_{jk}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k + \Phi_3^i(\mathrm{d}x^r)\right]\bar{\mathbf{e}}_i\end{aligned}$$

où les fonctions Φ_3^i sont du 3^e ordre par rapport aux variables $\mathrm{d}x^r$ au voisinage du point m_0. Posons :

$$\mathrm{d}\mathbf{m} \overset{\text{def}}{=} \left[\mathrm{d}x^i + \tfrac{1}{2}\Gamma^i{}_{kj}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k + \Phi_3^i(\mathrm{d}x^r)\right]\bar{\mathbf{e}}_i \tag{23.9}$$

où les symboles de Christoffel sont évalués dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ alors que l'on est dans ${}_E n$. Cette représentation étant déjà du premier ordre car elle peut s'écrire sous la forme de (23.5) p. 470 avec $\Psi_2^i(\mathrm{d}x^r) = \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{kj}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k + \Phi_3^i(\mathrm{d}x^r)$, (23.6) p. 470 restent valables :

$$\forall i \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^i}\right)_{m_0} = \bar{\mathbf{e}}_i$$

Dérivons à nouveau :

$$\begin{aligned}\forall i,k \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^k \partial x^i}\right)_{m_0} &= \partial_k \bar{\mathbf{e}}_i \\ &= \left(\bar{\Gamma}^j{}_{ki}\right)_{m_0}\bar{\mathbf{e}}_j \\ \forall j,k \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^k \partial x^j}\right)_{m_0} &= \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0}\bar{\mathbf{e}}_i\end{aligned}$$

D'autre part, avec (23.9) :

$$\forall j,k \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^k \partial x^j}\right)_{m_0} = \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_{M_0}\bar{\mathbf{e}}_i$$

On en déduit :

$$\forall i,j,k \qquad \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_{M_0} = \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0}$$

Les notions de représentation du second ordre et de métrique euclidienne osculatrice permettent d'étendre aux espaces riemanniens les notions d'analyse tensorielle euclidienne relative aux tenseurs attachés à deux points infiniment voisins. Il en est ainsi en particulier pour tous les opérateurs différentiels que nous avons étudiés au § 10 p. 459.

Nous pouvons étendre la notion de différentielle absolue (déf. 6.2 p. 449) aux espaces riemanniens. Quel que soit le point m_0, nous avons :

$$\forall i \qquad Dv^i = \mathrm{d}v^i + v^j\omega^i{}_j$$

Si le champ de vecteurs est défini par ses composantes covariantes v_i, sa différentielle absolue (déf. 6.3 p. 450) a pour composantes covariantes :

$$\forall i \qquad Dv_i = \mathrm{d}v_i - v_j \omega^j{}_i$$

De même, on généralise aux espaces riemanniens la déf. 6.4 p. 451 de la dérivée covariante d'un vecteur. Les quantités,

$$\forall i,k \qquad \nabla_k v^i = \partial_k v^i + v^j \Gamma^i{}_{jk}$$

sont les composantes mixtes du tenseur d'ordre deux *dérivée covariante* du vecteur $\mathbf{v}$.

Si le champ de vecteurs est défini par ses composantes covariantes, les quantités,

$$\forall i,k \qquad \nabla_k v_i = \partial_k v_i - v_j \Gamma^i{}_{jk}$$

sont les composantes covariantes du tenseur (d'ordre deux) dérivée covariante du covecteur $\underline{v}$. Ces formules sont généralisées aux dérivées covariantes de tenseurs riemanniens.

Exemple 1.4: Espace osculateur en un point d'une surface quelconque

Soit une surface S quelconque (un espace proprement riemannien de dimension deux) plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions, et soit P un plan tangent à S au point M. Soit (x,y,z) un système de coordonnées rectangulaire de centre M, tel que (x,y) soit le système de coordonnées du plan. Le carré de l'élément linéaire du plan est donné par :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

Dans le système de coordonnées rectangulaire (x,y,z) la surface a pour équation $z = z(x,y)$, le carré de son élément linéaire est :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

Or

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}y^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Au point M la coordonnée z de la surface est un minimum local et l'on a :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 0 \\ \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

Par conséquent, au point M les coefficients des métriques sont égaux (et valent l'unité), la représentation est du premier ordre (relations (23.2) p. 468). Les dérivées partielles du premier ordre de ces coefficients par rapport aux coordonnées sont aussi égales (et sont

nulles puisque l'on dérive des constantes), la représentation est du second ordre (relations (23.8) p. 473). L'espace osculateur à la surface est donc ici l'espace tangent à la surface.

1.6 Transport parallèle en espace courbe

Généralisons la déf. 5.1 p. 446 des vecteurs parallèles aux espaces riemanniens :

Définition 1.4: Vecteurs parallèles

Deux vecteurs d'un espace riemannien sont parallèles s'ils font le même angle avec une géodésique donnée (plus précisément avec le vecteur tangent à la géodésique).

Soient $M(x^i)$ et $M'(x^i + \Delta x^i)$ deux points d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$. Par ces deux points passe au moins une géodésique. Soit $\mathbf{u}(u^i)$ le vecteur d'origine M, appartenant à l'hyperplan T_x tangent en M à $\mathcal{R}_n$, et soit $\mathbf{v}(v^i)$ le vecteur d'origine M', appartenant à l'hyperplan $T_{x+\Delta x}$ tangent en M' à $\mathcal{R}_n$. Si l'on souhaite comparer les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, nous devons effectuer un transport parallèle du vecteur $\mathbf{v}$ vers le vecteur $\mathbf{u}$. Dans le cas général les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas tangents à la géodésique qui permet le transport parallèle.

Exemple 1.5: Transport parallèle d'un vecteur sur une sphère

Sur une sphère, le transport parallèle d'un vecteur s'effectue le long d'un grand cercle. Transportons parallèlement le vecteur $\mathbf{v}$ dans son plan tangent, de M' en M :

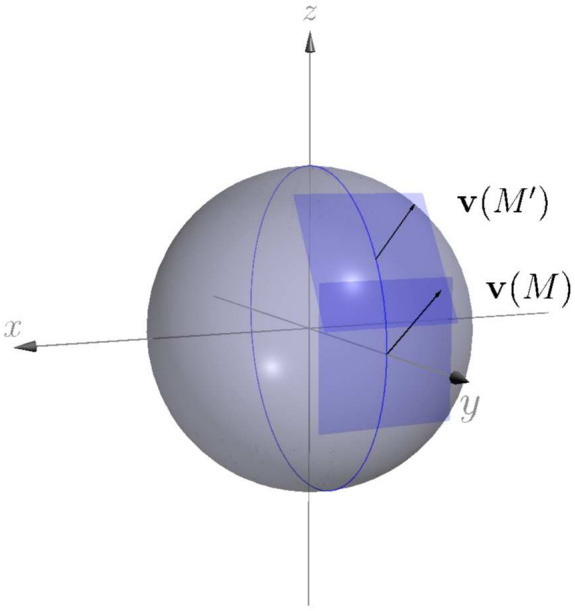


Fig. 23.1 – Transport parallèle du vecteur $\mathbf{v}$

Les vecteurs $\mathbf{v}(M)$ et $\mathbf{v}(M')$ sont *parallèles sur la sphère.*

Remarque 1.1

Le changement de bases naturelles infiniment proches donnant les symboles de Christoffel, relations (22.9) p. 438, n'a rien à voir avec un quelconque transport parallèle des vecteurs de base, qui lui aurait lieu uniquement selon les géodésiques. Au contraire, chaque vecteur de base varie en suivant sa ligne de coordonnée qui n'est pas toujours une géodésique de l'espace.

1.7 Équipollence

Deux vecteurs d'un espace euclidien sont équipollents s'ils ont même longueur (même norme), même direction (ils sont parallèles) et même sens : leur différence géométrique est nulle. Dans un espace riemannien, deux vecteurs d'origines infiniment voisines M et M' sont équipollents s'ils sont équipollents dans l'espace euclidien tangent en M.

Définition 1.5: Équipollence

Soient deux vecteurs d'origines infiniment voisines. Ils sont équipollents ssi la différentielle absolue $\mathrm{d}\mathbf{v}$ (déf. 6.1 p. 448) de composantes contravariantes Dv^i correspondant au transport du premier vecteur au second est nulle :

$$\forall i \qquad Dv^i = 0$$

Définition 1.6: Transport parallèle ou transport par équipollence

Le transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{v}$ d'origine M en un point infiniment voisin M', consiste à construire le vecteur $\mathbf{v}'$ d'origine M', équipollent à $\mathbf{v}$.

2 Trajectoires dans un espace riemannien

2.1 Vecteur accélération dans un espace riemannien

Dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$, considérons un point mobile M dont les coordonnées curvilignes (x^i) sont fonction du temps, $M(x^i(t))$. Comme dans l'ex. 6.5 p. 454 pour un espace euclidien, les composantes contravariantes du n-vecteur vitesse ont pour expression

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

et le n-vecteur accélération a pour composantes contravariantes :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \gamma^i = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{\ jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

2.2 Principe de Mach

Reprenons le principe de Mach 2.7 p. 140. Un mobile inertiel tourne en général sur lui-même par rapport aux étoiles lointaines, car même dans l'espace profond loin des masses et des sources d'énergie, l'espace-temps n'est jamais parfaitement plat, il existe toujours un champ gravitationnel et le mobile n'est jamais parfaitement sur une ligne de champ. Un mouvement inertiel implique donc quasi toujours une rotation par rapport aux étoiles lointaines.

Les forces d'inertie axifuges qui s'exercent sur un mobile sont dues à la sortie de son centre d'inertie de sa trajectoire inertielle (sortie de son centre d'inertie de sa trajectoire géodésique dans l'espace-temps local) et/ou à sa sortie du mouvement inertiel de rotation dans l'espace-temps local (sortie de chacun des éléments constitutifs du mobile de leur trajectoire géodésique dans l'espace-temps local). Le déplacement d'un mobile est donc relatif à l'espace-temps local, donc à la répartition de la matière-énergie principalement à proximité du mobile. De même, le mouvement de rotation d'un mobile est aussi relatif à l'espace-temps local, donc à la répartition de la matière-énergie principalement à proximité du mobile. Les forces d'inertie axifuges qui s'exercent sur un mobile sont bien dues à sa rotation par rapport au reste de l'univers (plus précisément à la répartition de la matière-énergie du reste de l'univers) comme le pensait Mach, avec une importance décroissant approximativement en $1/r^2$ pour les masses pas trop lointaines du mobile, et quasi nulle pour les étoiles lointaines. La rotation de l'observateur par rapport aux étoiles lointaines n'est pas ce qui provoque la force axifuge, c'est la rotation de l'observateur par rapport à l'espace-temps local qui en est responsable. La conclusion de Mach est donc valide mais imprécise, et les prémisses sont fausses.

Exemple 2.1

Dans sa révolution autour du Soleil, la Terre a une trajectoire inertielle, son centre de gravité suit une géodésique de l'espace-temps courbe. La Terre est en chute libre dans le champ de gravitation local, dû en grande partie au Soleil et aux planètes Jupiter et Saturne. Pour un observateur non terrestre, le 3-vecteur accélération de la Terre est non nul, son 3-vecteur vitesse varie en norme et en direction dans sa révolution autour du Soleil.

Définition 2.1: Mouvement inertiel

Un mobile a un mouvement inertiel ssi son centre d'inertie et chacune de ses parties suivent une trajectoire géodésique.

Exemple 2.2

La Terre aura un mouvement inertiel lorsque elle montrera toujours la même face au Soleil, dans quelques centaines de millions d'années, de la même façon que la Lune montre toujours la même face à la Terre. La Terre tourne sur elle-même par conservation du moment cinétique, elle a effectué environ 4 milliards de révolutions avec disons 400 rotations par révolution. Elle est déformée par la force de gravitation exercée par le Soleil car cette force approximativement en $1/r^2$ est plus importante sur la face orientée vers le Soleil. Elle est en permanence ovalisée selon l'axe Terre-Soleil, mais comme elle tourne sur elle-même elle est continuellement déformée, ce qui provoque les marées terrestres

et océaniques. La Terre chauffe par frottement, et libère cette énergie de rotation par rayonnement, principalement dans les infrarouges.

2.3 Masse inerte et masse grave

Revenons sur l'observation de l'égalité entre masse inerte et masse grave (9.17) p. 157. La masse inerte est le coefficient associé à un corps qui mesure sa résistance à sa mise en mouvement, autrement dit sa résistance à sa sortie de sa trajectoire géodésique. Lorsque l'on pèse un corps, la balance sort en permanence le corps de sa trajectoire géodésique en l'empêchant de tomber vers le centre la Terre. On mesure donc le même coefficient et la masse grave d'un corps est aussi sa masse inerte, si l'on admet comme modèle de la réalité que les masses librent suivent les géodésiques de l'espace-temps, autrement dit si l'on admet la relativité générale. Cette dernière serait remise en question si une expérience montrait une différence entre masse inerte et masse grave. La relativité générale explique donc le « principe d'équivalence », qui de fait n'est plus un principe (s'en était un en mécanique classique) et ne peut donc servir pour construire la relativité générale.

En l'absence de champ gravitationnel, ou dans un champ gravitationnel homogène (partout le même en tout point de l'espace), les centres de gravité et d'inertie d'un corps sont confondus. Si le corps a un centre de symétrie, il se confond avec les centres de gravité et d'inertie. En revanche, dans un champ gravitationnel inhomogène, seul le centre de gravité actif (le centre de gravité des masses graves dans leur rôle actif, déf. 3.11 p. 156) est confondu avec le centre d'inertie. Le centre de gravité passif, qui lui dépend du champ gravitationnel extérieur, n'est pas confondu avec le centre d'inertie.

Exemple 2.3

Considérons un système formé de deux masses identiques reliées par une tige de masse négligeable, plongé dans un champ gravitationnel inhomogène (fig. 23.2). Les centres de gravité G_{actif} et G_{passif} ne sont pas confondus.

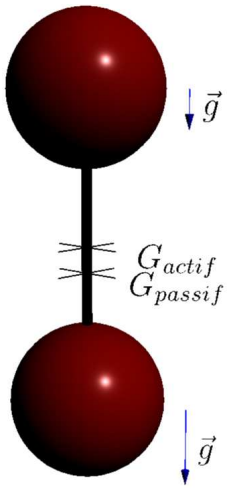


Fig. 23.2 – Champ gravitationnel inhomogène

2.4 Forces de marée

Dans le cas purement théorique d'absence de champ de gravitation, les géodésiques sont des droites de l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte. Un référentiel inertiel qui suit l'une de ces droites est appelé référentiel galiléen. Un observateur qui ne suit pas une géodésique de cet espace-temps plat ressent un champ gravitationnel alors même qu'il n'y a pas de masse. Ainsi, un référentiel en accélération rectiligne est équivalent à un référentiel galiléen en présence d'un champ de gravitation homogène. Un tel champ gravitationnel homogène n'existe qu'en première approximation car un champ gravitationnel tend toujours vers zéro à l'infini de la masse qui crée le champ. De plus, les lignes de champ convergent vers le centre de gravité de la masse qui crée le champ, alors que dans un référentiel accéléré le champ ressenti est de divergence nulle (il ne converge ni ne diverge). Pour ces deux raisons cette équivalence ne peut être que locale dans l'espace et dans le temps (dans un quadri-volume d'espace-temps suffisamment petit). En l'absence de masse, un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe qui passe ou non par le centre du référentiel, est équivalent à un référentiel galiléen en présence d'un champ gravitationnel divergent et tendant vers l'infini à l'infini. Ici aussi, l'équivalence ne peut être que locale.

Notez également qu'un référentiel en accélération rectiligne non uniforme et un référentiel en rotation non uniforme sont localement équivalents à un référentiel galiléen dans un champ gravitationnel homogène et non constant (variable dans le temps).

Utilisons le principe d'équivalence en rotation pour guider notre réflexion. Un champ gravitationnel est équivalent à un référentiel en rotation. Dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ de système de coordonnées galiléennes (t, x, y, z), l'intervalle ds est donné par :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

L'intervalle conserve sa forme lorsque l'on passe à un autre référentiel inertiel. Voyons comment il se transforme lorsque nous passons dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}'$ de coordonnées (t', x', y', z') en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$:

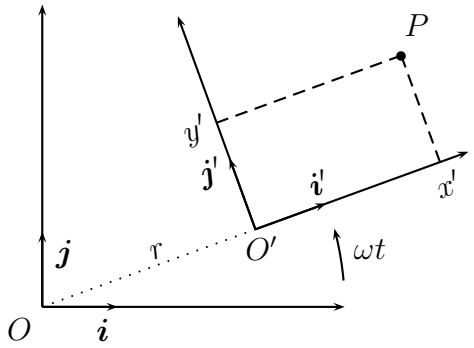


FIG. 23.3 – Référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$

Écrivons l'expression des vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction des vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}$, dans le référentiel $\mathcal{R}'$. A priori nous ne connaissons pas la transformation du temps, nous supposons $t' = t$ et envisagerons une transformation du temps un peu plus loin :

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}' = -\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos(\omega t)\boldsymbol{j} \end{cases}$$

Soit P un point quelconque fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} &= \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}\\ x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} &= r\boldsymbol{i}' + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'\\ &= (r+x')[\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\omega t)\boldsymbol{j}] + y'[-\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos(\omega t)\boldsymbol{j}]\end{aligned}$$

r et ω sont ici des paramètres :

$$\begin{cases} x = (r+x')\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)\\ y = (r+x')\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t)\\ z = z'\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = g(t,x',y')\\ y = h(t,x',y')\\ z = z'\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{\partial x}{\partial x'}\mathrm{d}x' + \dfrac{\partial x}{\partial y'}\mathrm{d}y' + \dfrac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y = \dfrac{\partial y}{\partial x'}\mathrm{d}x' + \dfrac{\partial y}{\partial y'}\mathrm{d}y' + \dfrac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z'\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}x = \cos(\omega t)\mathrm{d}x' - \sin(\omega t)\mathrm{d}y' - \omega[(r+x')\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t)]\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y = \sin(\omega t)\mathrm{d}x' + \cos(\omega t)\mathrm{d}y' + \omega[(r+x')\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)]\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z'\end{cases}$$

On suppose r nul :

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{d}x^2 = \cos^2(\omega t)\mathrm{d}x'^2 + \sin^2(\omega t)\mathrm{d}y'^2 - 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\ \qquad +\omega^2[(r+x')^2\sin^2(\omega t) + y'^2\cos^2(\omega t) + 2x'y'\sin(\omega t)\cos(\omega t)]\mathrm{d}t^2\\ \qquad -2\omega[\cos(\omega t)\mathrm{d}x' - \sin(\omega t)\mathrm{d}y'][x'\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t)]\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y^2 = \sin^2(\omega t)\mathrm{d}x'^2 + \cos^2(\omega t)\mathrm{d}y'^2 + 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\ \qquad +\omega^2[(r+x')^2\cos^2(\omega t) + y'^2\sin^2(\omega t) - 2x'y'\cos(\omega t)\sin(\omega t)]\mathrm{d}t^2\\ \qquad +2\omega[\sin(\omega t)\mathrm{d}x' + \cos(\omega t)\mathrm{d}y'][x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)]\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}z'^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 &= \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t^2\\ &\quad + 2\omega[\sin^2(\omega t)x'\mathrm{d}y' - \cos^2(\omega t)y'\mathrm{d}x' + \cos^2(\omega t)x'\mathrm{d}y' - \sin^2(\omega t)y'\mathrm{d}x']\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2)\mathrm{d}t^2 - 2\omega(y'\mathrm{d}x' - x'\mathrm{d}y')\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Dans le référentiel tournant, l'intervalle s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\\ &= [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 - 2\omega(y'\mathrm{d}x' + x'\mathrm{d}y')\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Quelle que soit la transformation du temps on ne peut faire disparaitre le dernier terme et cette expression ne peut se réduire à une somme de carrés de différentielles des coordonnées t', x', y', z'. Ce système de coordonnées est donc curviligne est le carré de l'intervalle élémentaire $\mathrm{d}s$ s'écrit sous la forme quadratique générale

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

où les $g_{\mu\nu}$ sont fonction des coordonnées spatiales et temporelle. Les référentiels non galiléens étant équivalents à un champ gravitationnel, on en déduit que les masses et donc l'énergie déterminent les propriétés géométriques de l'espace-temps.

2.5 Géodésiques d'un espace riemannien

Appliquons la déf. 3.1 p. 9 à un espace de riemann.

Définition 2.2: Géodésique

Une trajectoire joignant deux points a et b de $\mathcal{R}_n$ est une géodésique ssi sa longueur est extrémale :

$$\delta \int_{p_a}^{p_b} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}}\, \mathrm{d}p = 0$$

Théorème 2.1: Géodésique

Un mobile dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ décrit une géodésique ssi sa n-accélération est nulle :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{jk}\, \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

Voir la remarque 2.1 p. 429 sur la notation avec un point. La démonstration du théorème est identique à celle donnée au § 2 p. 428. Avec (22.31) p. 452 :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \ldots, n \qquad \gamma^i &= 0 \\ \frac{Dv^i}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{\nabla_k v^i\, \mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ v^k \nabla_k v^i &= 0 \end{aligned} \tag{23.10}$$

Les relations (23.10) montrent que sur une géodésique le vecteur vitesse reste équipollent à lui-même (déf. 1.5 p. 477). Cela permet d'étendre la notion de transport parallèle à un voisinage quelconque. Deux vecteurs formant un même angle avec une géodésique seront dits parallèles. Les géodésiques constituent l'extension en géométrie riemannienne des droites de l'espace euclidien. Les systèmes de coordonnées construits avec les géodésiques d'un espace courbe sont appelés *systèmes de coordonnées géodésiques* (cf. § 4.6 p. 498). Un système de coordonnées rectilignes (cartésien), est un système de coordonnées géodésiques de l'espace euclidien, construit avec des droites qui sont des géodésiques de l'espace euclidien.

Si nous adoptons pour paramètre indépendant l'abscisse curviligne s le long de la géodésique, le vecteur $\mathbf{u}$ de composantes $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\mathrm{d}\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= u_i u^i \\ &= \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x^i/(\mathrm{d}s^2) \\ &= g_{ij} \mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^i/(\mathrm{d}s^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il est tangent à la courbe, comme l'est la vitesse (relations (22.32) p. 453). Avec ce vecteur, les équations des géodésiques (22.2) p. 428 s'écrivent :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} + \Gamma^i{}_{jk}\, u^j u^k = 0$$

En relativité générale, la présence de matière et/ou d'énergie (d'agitation thermique, électromagnétique, etc.) définit le tenseur énergie-impulsion qui détermine la métrique de l'espace-temps. $\mathrm{d}^2x^\lambda/\mathrm{d}s^2$ est la 4-accélération de l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,u^\mu u^\nu$ est la courbure de l'espace-temps. Pour une masse m dans un champ gravitationnel :

$$\forall\lambda = 0,\ldots,3 \qquad m\,\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2} = -m\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,u^\mu u^\nu \tag{23.11}$$

La force gravitationnelle de Newton est remplacée par le terme $-m\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,u^\mu u^\nu$ de courbure du quadri-espace riemannien R_4, dont les mobiles libres suivent une géodésique. Le tenseur métrique G est le *potentiel du champ gravitationnel* car sa dérivée première donne l'intensité du champ gravitationnel $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ (relations (22.22) p. 442).

Remarque 2.1

Dans un champ gravitationnel, les géodésiques sont courbées vers la masse créant le champ (voir la déviation d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil § 11 p. 594). Trois géodésiques formeraient ainsi un triangle sphérique autour d'un l'objet massique. La courbure est donc positive.

Dans les espaces euclidiens et pseudo-euclidiens toute droite est à la fois une trajectoire à accélération nulle (donc une géodésique) et un extremum de longueur entre deux points de cette droite. Il en va de même en géométrie riemannienne, comme nous allons le voir. Reprenons (22.5) p. 432 pour énoncer la définition suivante :

La déf. 3.1 p. 9 d'une géodésique est indépendante du système de coordonnées puisque la notion de distance en est elle-même indépendante. Dans l'espace-temps de la relativité générale, la distance spatio-temporelle entre deux évènements quelconques sur la trajectoire inertielle de la Terre est extrémale. Dans un espace riemannien, le carré de l'intervalle élémentaire d'univers a pour expression

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\\ &= g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + 2g_{0i}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i + g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2\end{aligned}$$

où l'on a séparé les coordonnées spatiales et temporelles, et où l'on utilise la notation indicielle pour les coordonnées galiléennes réduite (1.2) p. 219. Or, les évènements sur la trajectoire terrestre ont lieu au même endroit dans le référentiel terrestre et seul le temps propre varie :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2\\ \mathrm{d}s &= c\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

relation qui généralise (13.22) p. 241 et l'on a

$$\Delta\tau = \int_{E_1}^{E_2}\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}t$$

qui généralise (13.24) p. 242. Pour être sur une géodésique, il s'agit alors de chercher la condition pour avoir $\mathrm{d}s^2$ extrémal lorsque la partie spatiale est nulle. C'est le cas lorsque l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x^0/c$ est *maximal* et rend le $\mathrm{d}s^2$ maximal (si $\mathrm{d}\tau$ était minimal, une partie spatiale non nulle rendrait le $\mathrm{d}s^2$ plus petit encore à cause des signes négatifs).

Si la forme quadratique fondamentale n'est pas définie, la détermination de la longueur de la géodésique d'un espace riemannien,

$$s = \int_{p_a}^{p_b}\sqrt{g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}p}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}p}}\,\mathrm{d}p$$

devra se faire dans une région de l'espace où elle conserve un signe constant.

Exemple 2.4: Équation des géodésiques à la surface d'une sphère

1) première méthode

L'ex. 1.3 p. 203 donne les composantes du tenseur métrique sur une sphère de rayon r en coordonnées (θ, ϕ) : $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$. Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$. Les relations (22.27) p. 444 donnent les symboles de Christoffel de 2$^{\text{e}}$ espèce en coordonnées orthogonales :

$$\begin{cases} \Gamma^i{}_{ii} = \dfrac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \\ \Gamma^i{}_{ij} = \dfrac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} \\ \Gamma^j{}_{ii} = -\dfrac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} \\ \Gamma^i{}_{jk} = 0 \quad i,j,k \neq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = \Gamma^\phi{}_{\phi\phi} = 0 \\ \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} = 0 \\ \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \cot(\theta) \\ \Gamma^\phi{}_{\theta\theta} = 0 \\ \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

Les géodésiques ont alors pour équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\left(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}s^2} + \dfrac{2}{\tan(\theta)}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = 0 \end{cases}$$

La seconde relation s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\sin^2(\theta)\right] = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\sin^2(\theta) = c^{ste}$$

Une solution (parmi d'autres) évidente est :

$$\phi = c^{ste}$$

La première relation donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = a$$

$$\theta = as + \theta_0$$

où a est une constante. En prenant $\theta = 0$ en $s = 0$ on a :

$$\theta = as$$

ϕ étant constante

$$s = r\theta$$

d'où

$$a = \frac{1}{r}$$

L'équation d'une géodésique est donc :

$$\begin{cases} \theta = s/r \\ \phi = c^{ste} \end{cases} \tag{23.12}$$

Comme θ varie de 0 à π, la géodésique est un demi-arc de grand cercle allant d'un pôle à l'autre. Par symétrie sphérique, tous les arcs de grands cercles sont des géodésiques.

2) seconde méthode

À partir du carré de l'élément linéaire sur une sphère de rayon r :

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2$$

où $g_{\theta\theta} = r^2$ et $g_{\phi\phi} = r^2\sin^2(\theta)$. Plutôt que de calculer les symboles de Christoffel, résolvons le problème de variation,

$$\begin{aligned}
\delta\int \mathrm{d}s &= 0\\
\delta\int r\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2\right]^{1/2} &= 0\\
\delta\int \left[\dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2\right]^{1/2}\mathrm{d}p &= 0\\
\delta\int \left[\dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2\right]\mathrm{d}p &= 0 \qquad (23.13)
\end{aligned}$$

où le point désigne une dérivation par rapport au paramètre quelconque p. Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(\dot\theta,\dot\phi,\theta,\phi,p) = \dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2$$

et les équations de Lagrange :

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}
2\dfrac{\mathrm{d}\dot\theta}{\mathrm{d}p} - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 = 0 & (23.14a)\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\sin^2(\theta)\dot\phi\right] = 0 & (23.14b)
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases}
\ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 = 0\\
2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\theta\dot\phi + \sin^2(\theta)\ddot\phi = 0
\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}
\ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 = 0\\
\ddot\phi + 2\cot(\theta)\dot\theta\dot\phi = 0
\end{cases}$$

On retrouve les deux équations différentielles (22.2) p. 428 d'une géodésique, qui nous donne les symboles de Christoffel :

$$\begin{cases}
\ddot\theta + \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\,\dot\phi^2 = 0\\
\ddot\phi + \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\,\dot\theta\dot\phi + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}\,\dot\phi\dot\theta = 0
\end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases}
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot(\theta)
\end{cases}$$

(23.14b) donne une *intégrale première* du mouvement (une constante par rapport au paramètre) :

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\dot\phi &= c_1\\
\dot\phi &= c_1/\sin^2(\theta)\\
\dot\phi^2 &= c_1^2/\sin^4\theta
\end{aligned}$$

Une seconde intégrale première est obtenue en posant simplement un lagrangien constant $\mathcal{L} = c_2$ (dans (23.13), la variation d'une constante est nulle) :

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\,\dot{\phi}^2 = c_2$$

À partir des deux intégrales premières :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2(\theta)} &= c_2 \\
\frac{\dot{\theta}^2}{c_1^2} &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
\frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\phi}^2 \sin^4\theta} &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
\frac{1}{\sin^4\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cot(\theta) \\
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\phi} &= \frac{-\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi} \\
\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 &= \frac{1}{\sin^4\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 \\
&= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - \alpha^2
\end{aligned}$$

Donc α est une fonction sinusoïdale de ϕ (la dérivée seconde est la fonction de départ avec un signe opposé) :

$$\begin{aligned}
\alpha(\phi) &= a\sin(\phi + b) \\
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\phi} &= a\cos(\phi + b) \\
\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 &= a^2\cos^2(\phi + b)
\end{aligned}$$

On trouve l'expression de la nouvelle constante :

$$\begin{aligned}
a^2\cos^2(\phi + b) &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - a^2\sin^2(\phi + b) \\
a^2 &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1
\end{aligned}$$

Revenons à l'ancienne variable θ :

$$\begin{aligned}\cot(\theta) &= a\sin(\phi+b)\\ \cos(\theta) &= \sin(\theta)\left[A\cos(\phi)+B\sin(\phi)\right]\\ r\cos(\theta) &= Ar\sin(\theta)\cos(\phi)+Br\sin(\theta)\sin(\phi)\\ z &= Ax+By\end{aligned}$$

Les géodésiques sont donc les sections de la sphère par des plans passant par son centre, c.-à-d. des grands cercles.

3 Métrique euclidienne de raccordement

3.1 Développement d'une courbe de $\mathcal{R}_n$ sur l'espace ponctuel euclidien

Dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de système de coordonnées curvilignes (x^i), soit C une courbe d'équations paramétriques $x^i = x^i(t)$ où t est un paramètre quelconque. À chaque point M de C faisons correspondre un point m et un repère naturel $(m, \boldsymbol{e}_i)$ de l'espace vectoriel euclidien E_n associé à l'espace ponctuel euclidien ${}_En$.

Au point M_0 de C pour $t = 0$, faisons correspondre un point m_0 arbitrairement choisi dans ${}_En$, et un repère naturel $(m_0, \boldsymbol{e}_{i_0})$ indéterminé en orientation mais défini en forme (angles entre les vecteurs) et grandeur par :

$$\forall i,j \qquad \boldsymbol{e}_{i_0}\cdot\boldsymbol{e}_{j_0} = (g_{ij})_{M_0} \tag{23.15}$$

Soit (y^i) le système de coordonnées de l'espace ponctuel euclidien ${}_En$. La base $(\boldsymbol{e}_i)$ étant une base naturelle, (3.8) p. 49 sont vérifiées :

$$\mathrm{d}\mathbf{m} = \mathrm{d}y^i\boldsymbol{e}_i$$

Les vecteurs des bases naturelles en m dans E_n vérifient également (22.9) p. 438 :

$$\forall i \quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_m \mathrm{d}y^k\boldsymbol{e}_h$$

Le choix des bases en chaque point m étant libre, on pose

$$\left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_m = \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_M$$

Les symboles de Christoffel sont donc calculés à partir de la métrique riemannienne g_{ij} au point M. Ils ne dépendent donc que du paramètre t, de même que $\mathrm{d}\mathbf{m}$ par l'intermédiaire de M. Nous obtenons :

$$\begin{cases}\mathrm{d}\mathbf{m} = \mathrm{d}y^i\boldsymbol{e}_i\\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_M \mathrm{d}y^k\boldsymbol{e}_h \qquad \forall i\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_i\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_M \dfrac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_h \qquad \forall i\end{cases} \tag{23.16}$$

$\mathbf{m}(t)$ et les $\boldsymbol{e}_i(t)$ sont obtenus par intégration de ce système d'équations différentielles en se servant des conditions initiales que nous nous sommes données pour $t = 0$, relation (23.15).

À la courbe C de $\mathcal{R}_n$ correspond la courbe $m(t)$ notée $\bar{C}$ de l'espace ponctuel euclidient ${}_En$, appelée *développement de la courbe C* sur l'espace euclidien.

La modification des conditions initiales, c.-à-d. la modification du repère naturel $(m_0, \boldsymbol{e}_{i_0})$, revient à effectuer un déplacement quelconque de la courbe $\bar{C}$ dans l'espace euclidien. Par suite, $\bar{C}$ se trouve définie à un déplacement près dans ${}_En$, et est indéterminée en orientation. En effet, dans l'espace euclidien, le lieu et l'orientation d'une figure n'ont que peu d'importance.

3.2 Métrique euclidienne de raccordement le long d'une courbe

Établissons le théorème suivant au sujet du développement de la courbe C :

Théorème 3.1: Métrique euclidienne de raccordement

On peut trouver dans l'espace ponctuel euclidien ${}_En$ une métrique telle que les valeurs numériques que prennent ses coefficients et leurs dérivées premières le long de la courbe $\bar{C}$ de ${}_En$, coïncident avec les valeurs numériques que prennent les coefficients de la métrique riemannienne et leurs dérivées premières aux points homologues de la courbe C de $\mathcal{R}_n$.

Autrement dit d'après (23.8) p. 473, on peut construire une métrique euclidienne qui soit osculatrice à la métrique riemannienne en tous points d'une courbe C de $\mathcal{R}_n$.

Démonstration. Choisissons le système de coordonnées curvilignes (x^i) de $\mathcal{R}_n$ de sorte que la première coordonnée soit précisément la courbe C, les autres coordonnées étant nulles le long de la courbe :

$$\forall M \in C \ : \quad \begin{cases} x^1_M = t \\ x^2_M = \cdots = x^n_M = 0 \end{cases} \tag{23.17}$$

Prenons la convention que les indices grecs varient de 2 à n, la courbe C s'écrit :

$$C \ : \quad \begin{cases} x^1 = t \\ x^\mu = 0 \end{cases}$$

Faisons de même dans l'espace ponctuel euclidien ${}_En$. À la courbe C de $\mathcal{R}_n$ faisons correspondre la courbe $\bar{C}$ de ${}_En$ telle qu'elle soit l'ensemble des points m de coordonnées :

$$\forall m \in \bar{C} \quad \begin{cases} y^1_m = t \\ y^\mu_m = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{C} \ : \quad \begin{cases} y^1 = t \\ y^\mu = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles (23.16) p. 487 qui par intégration donne le développement de la courbe C de $\mathcal{R}_n$ s'écrit :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathbf{m} = \mathrm{d}y^1 \boldsymbol{e}_1 \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_{x^\mu=0} \mathrm{d}y^1 \boldsymbol{e}_h \end{cases} \quad \forall i, \mu \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}y^1} = \boldsymbol{e}_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}y^1} = \left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_{x^\mu=0} \boldsymbol{e}_h \end{cases} \quad \forall i, \mu \tag{23.18}$$

où les symboles de Christoffel sont évalués sur la courbe C, c.-à-d. pour $x^\mu = 0 \quad \forall \mu = 2, \ldots, n$, et où seul $\mathrm{d}y^1$ est non nul le long de la courbe C.

À tout point P au voisinage d'un point M de C tel que $x^1_P = x^1_M$, faisons correspondre un point p au voisinage du point m de $\bar{C}$, tel que

$$\mathbf{mp} = \left[x^i_P - x^i_M + \tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_{x^\mu=0}(x^j_P - x^j_M)(x^k_P - x^k_M) + \Phi^i_3(x^r_P - x^r_M)\right]\boldsymbol{e}_i \tag{23.19}$$

où l'on utilise les valeurs du système de coordonnées (x^i) de $\mathcal{R}_n$, où les vecteurs de base $\boldsymbol{e}_i$ sont ceux de (23.18), donc ceux de (23.16) p. 487, et où les fonctions Φ_3^i sont du 3^e ordre par rapport aux variables $x_P^r - x_M^r$ pour $x_P^r - x_M^r$ voisins de zéro. Or,

$$\begin{cases} x_P^1 = x_M^1 \\ x_P^\mu \neq 0 \end{cases}$$

donne

$$\begin{aligned} \forall i, \mu \qquad x_P^j - x_M^j &= x_P^1 - x_M^1 + x_P^\mu - x_M^\mu \\ &= x_P^\mu - x_M^\mu \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall i, \mu \qquad (x_P^i - x_M^i)\,\boldsymbol{e}_i &= (x_P^1 - x_M^1)\,\boldsymbol{e}_1 + (x_P^\mu - x_M^\mu)\,\boldsymbol{e}_\mu \\ &= x_P^\mu \boldsymbol{e}_\mu \end{aligned}$$

(23.19) devient :

$$\mathbf{mp} = x_P^\nu \boldsymbol{e}_\nu + \left[\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_{\gamma\delta}\right)_{x^\mu=0} x_P^\gamma x_P^\delta + \Phi_3^i(x_P^\epsilon)\right]\boldsymbol{e}_i$$

Si m est le centre du système de coordonnées :

$$\mathbf{mp} = x^\nu \boldsymbol{e}_\nu + \left[\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_{\gamma\delta}\right)_{x^\mu=0} x^\gamma x^\delta + \Phi_3^i\left(x^\epsilon\right)\right]\boldsymbol{e}_i \tag{23.20}$$

Le point p est défini par les n variables scalaires x^i (avec $x^1 = t$), les coordonnées (x^i) de $\mathcal{R}_n$ forment donc aussi un système de coordonnées curvilignes pour ${}_En$ au voisinage de la courbe $\bar{C}$. Le repère naturel en $m(t, x^\mu = 0)$ est défini par

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1}\right)_{x^\mu=0} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}x^1} \\ &= \boldsymbol{e}_1 \end{aligned}$$

p étant dans le voisinage de m, (23.20) s'écrit :

$$\mathbf{p} = \mathrm{d}x^\nu \boldsymbol{e}_\nu + \left[\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_{\gamma\delta}\right)_{x^\mu=0} \mathrm{d}x^\gamma \mathrm{d}x^\delta + \Phi_3^i\left(x^\epsilon\right)\right]\boldsymbol{e}_i$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\alpha}\right)_{x^\mu=0} = \boldsymbol{e}_\alpha \tag{23.21}$$

Nous avons donc

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^1}\right)_{x^\mu=0} = \boldsymbol{e}_1 \\ \left(\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^\alpha}\right)_{x^\mu=0} = \boldsymbol{e}_\alpha \end{cases} \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i}\right)_{x^\mu=0} = \boldsymbol{e}_i$$

Le repère naturel du système de coordonnées (x^i) au voisinage du point m est le repère $(m, \boldsymbol{e}_i)$ posé en (23.16) p. 487. La métrique de ${}_En$ dans le système de coordonnées (x^i) au voisinage de la courbe $\bar{C}$, admet donc pour coefficients en m les produits scalaires $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ des vecteurs de base donnés en (23.16).

Montrons qu'en tout point de la courbe C, ces coefficients sont égaux à ceux de la métrique riemannienne. Avec les secondes relations de (23.18) p. 488 et avec (22.19) p. 441 nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) &= \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j \\
&= \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_M \boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_j \mathrm{d}x^k + \left(\Gamma^h{}_{kj}\right)_M \boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_i \mathrm{d}x^k \\
&= \left[\left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_M g_{hj} + \left(\Gamma^h{}_{kj}\right)_M g_{hi}\right] \mathrm{d}x^k \\
&= \left[(\Gamma_{jki})_M + (\Gamma_{ikj})_M\right] \mathrm{d}x^k \\
&= \mathrm{d}g_{ij}
\end{aligned}$$

Les quantités $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ et g_{ij} satisfont donc au même système différentiel. Or, d'après (23.15) p. 487, les conditions initiales sont les mêmes. Il en résulte

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}$$

identiquement quand M décrit C. Les métriques euclidienne et riemannienne sont donc tangentes en tous point de C.

Pour montrer qu'elles sont osculatrices (tangentes à l'ordre deux), en se servant des relations (22.14) p. 440, montrons que les symboles de Christoffel en m dans ${}_En$ sont égaux à ceux en M dans $\mathcal{R}_n$. Pour la première coordonnée x^1, d'après (23.18) p. 488 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^1 \partial x^i}\right)_{x^\mu=0} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^1}\right)_{x^\mu=0} \\
&= \left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_{x^\mu=0} \boldsymbol{e}_h
\end{aligned}$$

Pour les autres coordonnées, avec (23.21) p. 489 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right)_{x^\mu=0} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\beta}\right)_{x^\mu=0} \\
&= \left(\Gamma^h{}_{\alpha\beta}\right)_{x^\mu=0} \boldsymbol{e}_h
\end{aligned}$$

Au final :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{x^\mu=0} = \left(\Gamma^h{}_{ij}\right)_{x^\mu=0} \boldsymbol{e}_h$$

Les métriques sont donc osculatrices, et la métrique euclidienne obtenue est appelée *métrique euclidienne de raccordement le long de* C. □

Ainsi, grâce à un choix convenable de système de coordonnées, on peut rendre nuls tous les symboles de Christoffel, non seulement en un point donné mais le long d'une courbe de l'espace riemannien. En relativité générale, cela revient à dire qu'il est toujours possible de trouver localement et instantanément, un espace de Poincaré-Minkowski osculateur en tout point d'une ligne d'univers quelconque, géodésique ou non. On peut suivre une ligne d'univers non géodésique par changement continu de référentiel inertiel, autrement dit dans un référentiel accéléré.

3.3 Application géométrique à la métrique euclidienne de raccordement

Soit C une géodésique de l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$. En chaque point M de C on attache un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ tangent à la courbe. Lorsque l'on passe du point M à un point de C infiniment voisin, le vecteur $\mathbf{u}$ est transporté parallèlement (déf. 1.6 p. 477), sa différentielle absolue est nulle. Cette différentielle absolue est égale à celle du vecteur image dans l'espace ponctuel euclidien ${}_E n$, dans une représentation du second ordre du voisinage de M (par exemple celle d'une métrique euclidienne de raccordement). Le vecteur image n'est autre que le vecteur unnitaire tangent à la courbe $\bar{C}$ de ${}_E n$, développement de C. Par transport parallèle d'un vecteur dans un espace euclidien, on construit une droite. On en conclue que les géodésiques d'un espace riemannien sont les courbes qui se développent sur l'espace euclidien selon des droites.

4 Tenseur de courbure d'un espace riemannien

Dans un espace riemannien, effectuons le transport parallèle d'un vecteur en partant d'un point M et en revenant en ce point. Après ce cycle le vecteur n'a pas la même orientation, il a tourné d'un angle α.

Exemple 4.1

Un vecteur qui parcourt un triangle sphérique ne retrouve pas son orientation de départ à son retour au point initial M :

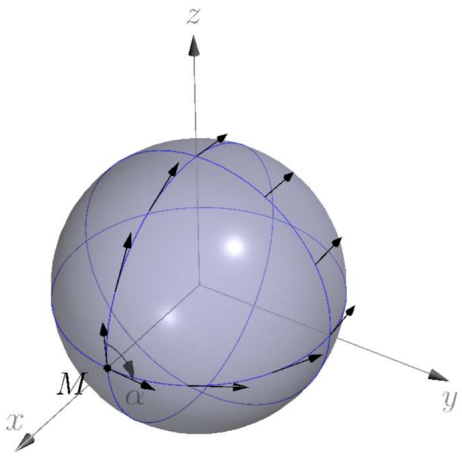
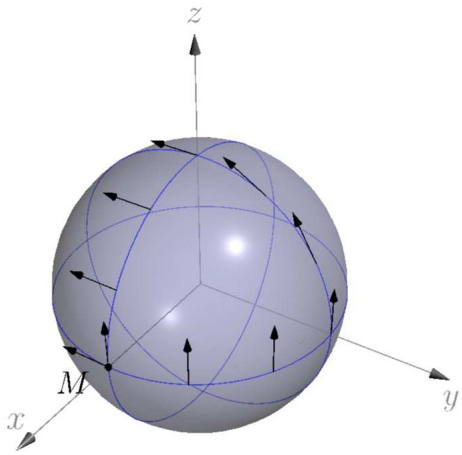


Fig. 23.4 – Courbure de la sphère

Sa nouvelle orientation dépend du sens de parcours, l'angle α change de signe :



Remarque 4.1

Le transport d'un vecteur n'est défini que selon une géodésique.

L'angle de rotation final d'un vecteur effectuant un cycle dans un espace riemannien donne une information sur la courbure de l'espace comprise dans le cycle. Plus le cycle est petit, plus l'angle de rotation du vecteur est petit.

4.1 Quasi-parallélogramme

Introduisons le tenseur de courbure d'un espace riemannien en suivant une méthode géométrique due à Élie Cartan. Soient deux symboles de différentiation, d et δ, que l'on supposera *échangeables*, c.-à-d. tels que :

$$\forall j \qquad \delta \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\delta x^j \tag{23.22}$$

Sous cette hypothèse, pour une fonction scalaire $f(x^j)$ deux fois continûment différentiable des x^j, nous avons :

$$\begin{aligned} d\delta f &= \mathrm{d}\left(\partial_j f \delta x^j\right) \\ &= \partial_{ji} f \delta x^j \mathrm{d}x^i + \partial_j f d\delta x^j \\ &= \partial_{ij} f \mathrm{d}x^i \delta x^j + \partial_i f \delta \mathrm{d}x^i \\ &= \delta\left(\partial_i f \mathrm{d}x^i\right) \\ &= \delta df \end{aligned}$$

La fonction f pouvant être par exemple un changement de variables, on en déduit que le caractère échangeable de deux symboles de différentiation subsiste par un changement arbitraire des variables x^j.

Soit $M(x^j)$ un point de $\mathcal{R}_n$:

— la différentiation d fait passer de $M(x^j)$ à $M_1(x^j + \mathrm{d}x^j) = M + \mathrm{d}\mathbf{M}$
— la différentiation δ fait passer de $M(x^j)$ à $M_2(x^j + \delta x^j) = M + \delta\mathbf{M}$

Nous supposerons que $\mathrm{d}\mathbf{M}$ et $\delta\mathbf{M}$ ne sont pas colinéaires, c.-à-d. que $\mathrm{d}x^j$ et δx^j ne sont pas proportionnels.

— de $M_1(x^j + \mathrm{d}x^j)$, la différentiation δ fait passer au point $M_3(x^j + \delta x^j + \mathrm{d}x^j + \delta \mathrm{d}x^j)$
— de $M_2(x^j + \delta x^j)$, la différentiation d fait passer au point $M_4(x^j + \mathrm{d}x^j + \delta x^j + d\delta x^j)$

D'après (23.22) p. 492, les points M_3 et M_4 sont confondus. Le circuit fermé formé des quatre points M, M_1, M_3, M_2 est appelé *quasi-parallélogramme* dans $\mathcal{R}_n$.

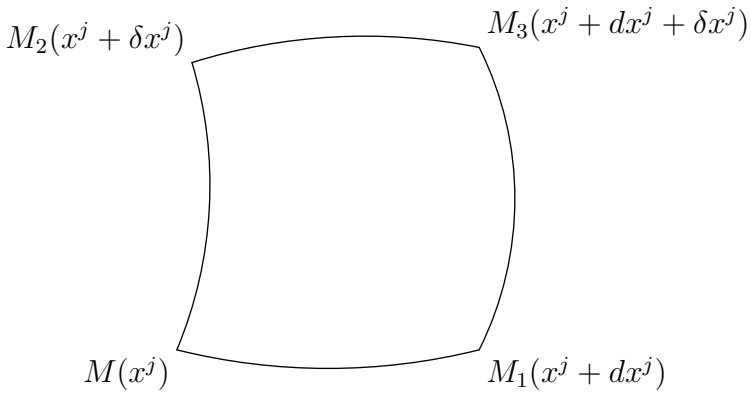


FIG. 23.5 – Quasi-parallélogramme

4.2 Développement du quasi-parallélogramme

Développons le quasi-parallélogramme dans l'espace ponctuel euclidien ${}_E n$ tangent à l'espace riemannien au point M. Pour rester dans cet espace nous nous maintenons au voisinage infinitésimal du point M en considérant un trajet fermé infiniment petit.

— lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M au point infiniment proche M_1, dans ${}_E n$ on passe du repère naturel $(m, \boldsymbol{e}_j)$ au repère naturel

$$(m + \mathrm{d}\mathbf{m}, \boldsymbol{e}_j + \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j)$$

et d'après (23.16) p. 487 :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathbf{m} = \mathrm{d}x^j \boldsymbol{e}_j \\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j = \omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i = \Gamma^i{}_{jk} \mathrm{d}x^k \boldsymbol{e}_i \qquad \forall j \end{cases}$$

Puis, lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M_1 au point M_3, dans ${}_E n$ on passe au repère naturel

$$(m + \mathrm{d}\mathbf{m} + \delta\mathbf{m} + \delta\mathrm{d}\mathbf{m}, \boldsymbol{e}_j + \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j + \delta\boldsymbol{e}_j + \delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j)$$

— lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M au point M_2, dans ${}_E n$ on passe du repère naturel $(m, \boldsymbol{e}_j)$ au repère naturel

$$(m + \delta\mathbf{m}, \boldsymbol{e}_j + \delta\boldsymbol{e}_j)$$

et avec (23.16) :

$$\begin{cases} \delta\mathbf{m} = \delta x^j \boldsymbol{e}_j \\ \delta\boldsymbol{e}_j = \tilde{\omega}^i{}_j \boldsymbol{e}_i = \Gamma^i{}_{jk} \delta x^k \boldsymbol{e}_i \qquad \forall j \end{cases}$$

où le tilde indique la forme différentielle prise par ω pour les δx^j. Puis, lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M_2 au point M_3, dans ${}_E n$ on passe au repère naturel

$$(m + \delta\mathbf{m} + \mathrm{d}\mathbf{m} + d\delta\mathbf{m}, \boldsymbol{e}_j + \delta\boldsymbol{e}_j + \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j + d\delta\boldsymbol{e}_j)$$

Comparons les positions des deux repères naturels finaux :

$$\begin{aligned} d\delta\mathbf{m} - \delta\mathrm{d}\mathbf{m} &= \mathrm{d}(\delta x^j \boldsymbol{e}_j) - \delta(\mathrm{d}x^j \boldsymbol{e}_j) \\ &= \delta x^j \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j - \mathrm{d}x^j \delta \boldsymbol{e}_j \\ &= \delta x^j \omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i - \mathrm{d}x^j \tilde{\omega}^i{}_j \boldsymbol{e}_i \\ &= \left(\delta x^j \Gamma^i{}_{jk}\, \mathrm{d}x^k - \mathrm{d}x^j \Gamma^i{}_{jk}\, \delta x^k\right) \boldsymbol{e}_i \\ &= \left(\delta x^j \Gamma^i{}_{jk}\, \mathrm{d}x^k - \mathrm{d}x^k \Gamma^i{}_{kj}\, \delta x^j\right) \boldsymbol{e}_i \\ &= \left(\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj}\right) \mathrm{d}x^k \delta x^j \boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

On suppose que les conditions d'intégrabilité des points sont satisfaites, et donc que les symboles de Christoffel de 2$^{\mathrm{e}}$ espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\boxed{d\delta\mathbf{m} - \delta\mathrm{d}\mathbf{m} = \vec{0}}$$

Les développements selon les deux trajets conduisent alors au même repère final, et le quasi-parallélogramme est fermé également dans l'espace ponctuel euclidien tangent ${}_E n$.

Comparons l'orientation des vecteurs des deux repères naturels finaux :

$$\begin{aligned} \forall j \qquad d\delta\boldsymbol{e}_j - \delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j &= \mathrm{d}\left(\tilde{\omega}^i{}_j \boldsymbol{e}_i\right) - \delta\left(\omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i\right) \\ &= \mathrm{d}\tilde{\omega}^i{}_j \boldsymbol{e}_i + \tilde{\omega}^i{}_j \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i - \delta\omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i - \omega^i{}_j \delta\boldsymbol{e}_i \\ &= \mathrm{d}\tilde{\omega}^i{}_j \boldsymbol{e}_i - \delta\omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i + \tilde{\omega}^k{}_j \mathrm{d}\boldsymbol{e}_k - \omega^k{}_j \delta\boldsymbol{e}_k \\ &= \left(\mathrm{d}\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j + \tilde{\omega}^k{}_j \omega^i{}_k - \omega^k{}_j \tilde{\omega}^i{}_k\right) \boldsymbol{e}_i \\ &= \Omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\boxed{\forall i,j \qquad \Omega^i{}_j \overset{\text{def}}{=} d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j + \tilde{\omega}^k{}_j \omega^i{}_k - \omega^k{}_j \tilde{\omega}^i{}_k} \tag{23.23}$$

Les bases finales ont même forme (même angle entre les vecteurs de base pris deux à deux) puisque les produits scalaires de ces vecteurs donnent les coefficients de la métrique en M_3, qui est unique. Par conséquent, les quantités $\Omega^i{}_j$ définissent la rotation permettant de passer d'un repère à l'autre au voisinage infinitésimal du point m_3 de ${}_E n$. La courbure d'un espace riemannien se manifeste ainsi par le fait qu'en développant sur l'espace euclidien, à partir d'un même repère initial, deux chemins ayant mêmes extrémités, les repères finaux sont différents en orientation.

Remarque 4.2

Nous aurions pu comparer les repères finaux par $\forall j\ \delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j - d\delta\boldsymbol{e}_j$. Ainsi le tenseur rotation $\Omega^i{}_j$ est défini au signe près.

4.3 Tenseur rotation

Théorème 4.1

Les quantités $\Omega^i{}_j$ sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

Démonstration. Cherchons comment se transforment les quantités en question par changement de base naturelle. Avec (5.11) p. 73 :

$$\begin{aligned}
\forall j \qquad \boldsymbol{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\boldsymbol{e}_{k'} \\
\delta\boldsymbol{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\delta\boldsymbol{e}_{k'} + \delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\boldsymbol{e}_{k'} \\
d\delta\boldsymbol{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,d\delta\boldsymbol{e}_{k'} + \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\delta\boldsymbol{e}_{k'} + \delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{k'} + d\delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\boldsymbol{e}_{k'}
\end{aligned}$$

De même :

$$\forall j \qquad \delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{k'} + \delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{k'} + \mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\delta\boldsymbol{e}_{k'} + \delta\mathrm{d}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\boldsymbol{e}_{k'}$$

d et δ étant échangeables devant les $\partial x^{k'}/\partial x^j$, ne restent que les variations des vecteurs :

$$\begin{aligned}
\forall j \qquad d\delta\boldsymbol{e}_j - \delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,d\delta\boldsymbol{e}_{k'} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{k'} \\
&= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\left(\mathrm{d}\delta\boldsymbol{e}_{k'} - \delta\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{k'}\right) \\
\forall j \qquad \Omega^i{}_j\boldsymbol{e}_i &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\Omega^{h'}{}_{k'}\boldsymbol{e}_{h'} \\
&= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\Omega^{h'}{}_{k'}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}}\,\boldsymbol{e}_i \\
\forall h,j \quad \Omega^i{}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}}\,\Omega^{h'}{}_{k'}
\end{aligned}$$

□

4.4 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2$^{\text{de}}$ espèce

Reprenons (23.23) p. 494 donnant les composantes du tenseur rotation :

$$\forall i,j \qquad \Omega^i{}_j = \mathrm{d}\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j + \tilde{\omega}^k{}_j\omega^i{}_k - \omega^k{}_j\tilde{\omega}^i{}_k$$

Avec (22.8) p. 437, nous avons

— d'une part

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j &= \mathrm{d}\left(\Gamma^i{}_{sj}\,\delta x^s\right) - \delta\left(\Gamma^i{}_{sj}\,\mathrm{d}x^s\right)\\ &= \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\mathrm{d}x^r\delta x^s + \Gamma^i{}_{sj}\,d\delta x^s - \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\delta x^r\mathrm{d}x^s - \Gamma^i{}_{sj}\,\delta\mathrm{d}x^s\\ &= \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\mathrm{d}x^r\delta x^s - \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\delta x^r\mathrm{d}x^s\\ &= \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\mathrm{d}x^r\delta x^s - \partial_s\Gamma^i{}_{rj}\,\delta x^s\mathrm{d}x^r\\ &= \left(\partial_r\Gamma^i{}_{sj} - \partial_s\Gamma^i{}_{rj}\right)\mathrm{d}x^r\delta x^s\end{aligned}$$

— et d'autre part

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad \tilde{\omega}^k{}_j\omega^i{}_k - \omega^k{}_j\tilde{\omega}^i{}_k &= \Gamma^k{}_{sj}\,\delta x^s\,\Gamma^i{}_{rk}\,\mathrm{d}x^r - \Gamma^k{}_{rj}\,\mathrm{d}x^r\,\Gamma^i{}_{sk}\,\delta x^s\\ &= \left(\Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^i{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^i{}_{sk}\right)\mathrm{d}x^r\delta x^s\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad \Omega^i{}_j &= \left(\partial_r\Gamma^i{}_{sj} - \partial_s\Gamma^i{}_{rj}\right)\mathrm{d}x^r\delta x^s + \left(\Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^i{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^i{}_{sk}\right)\mathrm{d}x^r\delta x^s\\ &= \left(\partial_r\Gamma^i{}_{sj} - \partial_s\Gamma^i{}_{rj} + \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^i{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^i{}_{sk}\right)\mathrm{d}x^r\delta x^s\end{aligned}$$

Les $\mathrm{d}x^r$ et les δx^s étant les composantes contravariantes de deux vecteurs différentiels arbitraires, relation (3.8) p. 49, et les $\Omega^i{}_j$ étant les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux, d'après le théorème du quotient (10.1) p. 421 les quantités entre parenthèses sont les composantes une fois contravariante et trois fois covariantes d'un tenseur d'ordre quatre. Tout comme le tenseur rotation, il est défini au signe près.

Définition 4.1: Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2$^{\text{de}}$ espèce

Le tenseur d'ordre quatre

$$\forall i,j,r,s \quad R^i{}_{jrs} \overset{\text{def}}{=} \partial_r\Gamma^i{}_{js} - \partial_s\Gamma^i{}_{jr} + \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma^i{}_{kr} - \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma^i{}_{ks}$$

de composantes une fois contravariantes et trois fois covariantes, est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2$^{\text{de}}$ espèce de l'espace riemannien R_n.

Étant donnée une forme différentielle quadratique arbitraire, pour qu'elle soit la métrique d'un espace euclidien, il est nécessaire que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\forall i,j,r,s \quad R^i{}_{jrs} = 0 \tag{23.24}$$

Dans ce cas, l'orientation du repère ne dépend pas du chemin suivi (par exemple le long d'un parallélogramme), et les conditions (22.7) p. 437 sont intégrables.

Lorsque la variété correspondante est topologiquement équivalente à l'espace euclidien, on démontre que ces conditions sont suffisantes. Lorsque la variété correspondante n'est pas topologiquement équivalente à l'espace euclidien, si les conditions (23.24) sont satisfaites, l'espace riemannien est dit *localement euclidien* : ses propriétés purement locales ne diffèrent pas de celles d'un espace euclidien.

4.5 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1re espèce

À partir de la déf. 4.1 p. 496 du tenseur de courbure

$$\forall i,j,r,s \quad R^i{}_{jrs} \overset{\text{def}}{=} \partial_r \Gamma^i{}_{js} - \partial_s \Gamma^i{}_{jr} + \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma^i{}_{kr} - \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma^i{}_{ks}$$

abaissons l'indice contravariant :

$$\begin{aligned}\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} &= g_{ih}\, R^h{}_{jrs}\\ &= g_{ih}\left(\partial_r \Gamma^h{}_{js} - \partial_s \Gamma^h{}_{jr} + \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma^h{}_{kr} - \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma^h{}_{ks}\right)\\ &= g_{ih}\,\partial_r \Gamma^h{}_{js} - g_{ih}\,\partial_s \Gamma^h{}_{jr} + \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{ikr} - \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{iks}\\ &= \partial_r\left(g_{ih}\,\Gamma^h{}_{js}\right) - \Gamma^h{}_{js}\,\partial_r g_{ih} - \partial_s\left(g_{ih}\,\Gamma^h{}_{jr}\right) + \Gamma^h{}_{jr}\,\partial_s g_{ih} + \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{ikr} - \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{iks}\\ &= \partial_r\,\Gamma_{ijs} - \partial_s\,\Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{js}\,(\Gamma_{ikr} - \partial_r g_{ik}) - \Gamma^k{}_{jr}\,(\Gamma_{iks} - \partial_s g_{ik})\end{aligned}$$

Les relations (22.19) p. 441 donnent

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij}\\ \Gamma_{ijk} - \partial_k g_{ij} &= -\Gamma_{jik}\\ \Gamma_{ikr} - \partial_r g_{ik} &= -\Gamma_{kir}\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij}\\ \Gamma_{ijk} - \partial_k g_{ij} &= -\Gamma_{jik}\\ \Gamma_{iks} - \partial_s g_{ik} &= -\Gamma_{kis}\end{aligned}$$

si bien que l'on a la définition suivante :

Définition 4.2: Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1re espèce

Le tenseur d'ordre quatre

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} \overset{\text{def}}{=} \partial_r\,\Gamma_{ijs} - \partial_s\,\Gamma_{ijr} - \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{kir} + \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{kis}$$

de composantes quatre fois covariantes, est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1re espèce de l'espace riemannien R_n.

En dérivant (22.21) p. 442,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk})\\ \Gamma_{ijs} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial_s g_{ij} + \partial_j g_{si} - \partial_i g_{js})\\ \partial_r \Gamma_{ijs} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js})\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\Gamma_{ijk} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk})\\ \Gamma_{ijr} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial_r g_{ij} + \partial_j g_{ri} - \partial_i g_{jr})\\ \partial_s \Gamma_{ijr} &= \tfrac{1}{2}\,(\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{js} g_{ir} - \partial_{is} g_{jr})\end{aligned}$$

le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1re espèce s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\,(\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js}) - \tfrac{1}{2}\,(\partial_{rs} g_{ij} + \partial_{js} g_{ir} - \partial_{is} g_{jr}) - \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{kir} + \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{kis}\\ &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\,(\partial_{jr} g_{is} - \partial_{ir} g_{js} - \partial_{js} g_{ir} + \partial_{is} g_{jr}) - \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{kir} + \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{kis} \qquad (23.25)\end{aligned}$$

4.6 Système de coordonnées localement géodésiques

En tout point d'un espace riemannien passent une infinité de géodésiques, une par direction. Par exemple une infinité de droites passent par un point du plan ou de l'espace euclidien, une infinité de grands cercles passent par un point de la sphère.

En tout point d'un espace riemannien il est toujours possible de définir un *système de coordonnées localement géodésiques*. Ce système de coordonnées utilise les géodésiques passant par un point donné comme système de coordonnées pour les points du voisinage. On peut toujours choisir ce système de coordonnées de sorte qu'il soit orthonormal, on parle alors de *système de coordonnées géodésiques normal*, ou *système de coordonnées riemanniennes normal*.

L'ensemble des géodésiques passant par un point ne se croisent pas ailleurs qu'en ce point si l'on prend un voisinage suffisamment petit. Les coordonnées géodésiques sont donc utilisées la plupart du temps localement. Cela revient à se placer dans l'espace plat tangent à l'espace riemannien au point considéré, et à utiliser un système de coordonnées rectilignes.

L'emploi de ce système de coordonnées facilite les calculs car les propriétés (intrinsèques) des tenseurs démontrées dans ce système de coordonnées sont valides dans tous les autres systèmes de coordonnées. Nous montrons que dans les systèmes de coordonnées localement géodésiques, les dérivées des composantes du tenseur métrique sont nulles et par conséquent les symboles de Christoffel également. En ce point, la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle ordinaire.

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien R_n. Soit un point $M(a^1, \dots, a^n)$ de R_n et soit P un point suffisamment voisin de M pour que deux géodésiques passant par M ne passent pas par P. Considérons l'unique géodésique MP passant par M et P, d'équations paramétriques de paramètre l'abscisse curviligne s :

$$\forall i \qquad x^i = x^i(s)$$

Prenons le point $M(a^i)$ pour origine de l'abscisse curviligne de cette géodésique :

$$\forall i \qquad x^i(0) = a^i$$

Les coordonnées des points de cette géodésique se développent en série de puissance de s au voisinage de M :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad x^i(s) = a^i + s \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)_M + \tfrac{1}{2}\, s^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_M + \dots$$

Les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{u}(u^i)$ tangent à la géodésique MP au point M s'écrivent :

$$\forall i \qquad u^i = \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)_M$$

Ce vecteur unitaire est dans l'hyperplan tangent à l'espace riemannien R_n.

Remarque 4.3

L'hyperplan en question est un espace pré-euclidien de même dimension n que l'espace riemannien, qui contient toutes les tangentes en M à toutes les courbes de R_n passant par M.

Les équations (22.2) p. 428 d'une géodésique nous donnent l'expression de la dérivée seconde des coordonnées de la géodésique $x^i(s)$ par rapport à s au point M :

$$\forall i \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_M = -\Gamma^i_{\ jk} \left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right)_M \left(\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\right)_M$$

Si bien que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad x^i = a^i + su^i - \tfrac{1}{2}\, s^2 \left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_M u^j u^k + \ldots$$

Plaçons-nous dans le système de coordonnées $(x^{i'})$ de centre M en effectuant la transformation de coordonnées (ou en posant $a^i = 0\ \forall i$)

$$\forall i \qquad x^{i'} = x^i - a^i \tag{23.26}$$

Alors

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad x^{i'} = su^i - \tfrac{1}{2}\, s^2 \left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_M u^j u^k + \ldots$$

Définition 4.3: Coordonnées localement géodésiques

Les coordonnées localement géodésiques y^i d'un point quelconque P suffisamment proche de $M(a^i = 0)$ sont définies par :

$$\forall i \qquad y^i \overset{\text{def}}{=} su^i \tag{23.27}$$

où s est la distance de M à P le long de la géodésique.

Les coordonnées localement géodésiques ne conservent que la partie linéaire en s des coordonnées curvilignes en prenant les tangentes aux géodésiques, et reviennent à effectuer la transformation de coordonnées :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad y^i = x^{i'} + \tfrac{1}{2}\, s^2 \left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_M u^j u^k$$

On a supprimé localement au point M la courbure du système de coordonnées géodésique $(x^{i'})$. Les termes de courbure d'ordre supérieur sont négligés.

Remarque 4.4

Parmi l'infinité de géodésiques passant par le point M de l'espace riemannien R_n, nous pouvons en choisir n dont les tangentes en M sont perpendiculaires entre elles, et construire ainsi un système de coordonnées géodésiques normal.

Théorème 4.2

Au point origine M des coordonnées localement géodésiques, les symboles de Christoffel de 1re et de 2e espèce sont nuls, ainsi que les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique.

Démonstration. Pour un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de direction fixée et d'origine M, la dérivée de (23.27) donne :

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}s} = u^i$$

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y^i}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

Les équations différentielles (22.2) p. 428 d'une géodésique donnent :

$$\forall i \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2 y^i}{\mathrm{d}s^2}\right)_M + \left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_M \left(\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}s}\right)_M \left(\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}\right)_M = 0$$

$$\left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_M u^j u^k = 0$$

Les symboles de Christoffel étant symétriques par rapport aux indices inférieurs, ils ne peuvent s'annuler par soustraction. Par exemple pour k et j variant de 1 à 2 :

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M u^1u^1 + \left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M u^1u^2 + \left(\Gamma^i{}_{21}\right)_M u^2u^1 + \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M u^2u^2 = 0 \\
\left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M u^1u^1 + \left[\left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M + \left(\Gamma^i{}_{21}\right)_M\right] u^1u^2 + \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M u^2u^2 = 0 \\
\left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M u^1u^1 + 2\left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M u^1u^2 + \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M u^2u^2 = 0 \\
\Rightarrow \qquad \left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M = \left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M = \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, dans le système de coordonnées localement géodésiques de centre M :

$$\forall i,j,k \qquad \left(\Gamma^i{}_{jk}\right)_M = 0$$

Les relations (22.12) p. 439 donnent les symboles de Christoffel de 1re espèce :

$$\forall i,j,k \qquad (\Gamma_{ijk})_M = g_{ih}\left(\Gamma^h{}_{jk}\right)_M = 0$$

Les relations (22.19) p. 441 donnent les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique :

$$\forall i,j,k \qquad (\partial_k g_{ij})_M = (\Gamma_{ijk})_M + (\Gamma_{jik})_M = 0 \qquad \square$$

D'après (23.11) p. 483, le champ gravitationnnel de la physique non relativiste devient la courbure de l'espace-temps en relativité générale. En un point arbitraire de l'espace-temps, le système de coordonnées localement géodésiques permet d'éliminer localement autour de ce point la courbure de l'espace-temps, donc le champ gravitationnel. En physique non relativiste, l'égalité observée entre masse grave et masse inerte entraine l'égalité locale entre forces d'inertie et force de gravitation : observation d'une équivalence locale entre ces deux forces. Le choix toujours possible d'un système de coordonnées localement géodésiques est l'expression du principe d'équivalence (entre masse grave et masse inerte, ou entre force d'inertie et force de gravitation) en relativité générale. En physique relativiste et non relativiste les systèmes de coordonnées localement géodésiques sont appelés système de référence *localement inertiel* et *système de coordonnées galiléennes*.

4.7 Propriétés du tenseur de courbure

À partir des relations (23.25) p. 497, dans le système de coordonnées localement géodésiques le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 1re espèce s'écrit :

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{jr}g_{is} - \partial_{ir}g_{js} - \partial_{js}g_{ir} + \partial_{is}g_{jr}\right) \tag{23.28}$$

où les g_{ij} sont les coefficients de l'élément linéaire en coordonnées localement géodésiques.

Remarque 4.5

Cette dernière relation n'est valable qu'en coordonnées géodésiques, par exemple en coordonnées cartésiennes dans le plan mais pas en coordonnées polaires dans le plan. De plus elle n'est valable qu'en un point, au centre du système de coordonnées géodésiques. En revanche, les propriétés de symétrie du tenseur de courbure sont valables dans tous les systèmes de coordonnées.

4.7.1 Antisymétries et symétrie par blocs

— antisymétrie par rapport aux deux premiers indices :

$$\forall i,j,r,s \quad R_{jirs} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{ir}g_{js} - \partial_{jr}g_{is} - \partial_{is}g_{jr} + \partial_{js}g_{ir}\right)$$

$$\boxed{\forall i,j,r,s \quad R_{jirs} = -R_{ijrs}} \tag{23.29}$$

— antisymétrie par rapport aux deux derniers indices :

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ijsr} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{js}g_{ir} - \partial_{is}g_{jr} - \partial_{jr}g_{is} + \partial_{ir}g_{js}\right)$$

$$\boxed{\forall i,j,r,s \quad R_{ijsr} = -R_{ijrs}} \tag{23.30}$$

— symétrique par blocs des deux premiers et des deux derniers indices :

$$\forall i,j,r,s \quad R_{rsij} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{is}g_{jr} - \partial_{js}g_{ir} - \partial_{ir}g_{js} + \partial_{jr}g_{is}\right)$$

$$\boxed{\forall i,j,r,s \quad R_{rsij} = R_{ijrs}}$$

4.7.2 Premières identités de Bianchi

Le tenseur de courbure est cyclique. Par permutation circulaire sur les indices j,r,s puis addition, nous obtenons les premières identités de Bianchi :

$$\begin{aligned}
\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} &= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{jr}g_{is} - \partial_{ir}g_{js} - \partial_{js}g_{ir} + \partial_{is}g_{jr}\right)\\
\forall i,j,r,s \quad R_{irsj} &= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{rs}g_{ij} - \partial_{is}g_{rj} - \partial_{rj}g_{is} + \partial_{ij}g_{rs}\right)\\
\forall i,j,r,s \quad R_{isjr} &= \tfrac{1}{2}\left(\partial_{sj}g_{ir} - \partial_{ij}g_{sr} - \partial_{sr}g_{ij} + \partial_{ir}g_{sj}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} + R_{irsj} + R_{isjr} = 0} \tag{23.31}$$

4.7.3 Composantes indépendantes

Dans un espace à n dimensions, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel a n^4 composantes. À l'aide des propriétés précédentes, calculons le nombre de composantes indépendantes. Par composante indépendante on entend une composante non nulle qui ne soit pas l'opposée d'une autre composante déjà comptabilisée comme indépendante, et qui ne soit pas la somme de deux autres composantes indépendantes.

1) Composantes ayant quatre indices identiques, du type R_{aaaa} où a est la valeur prise par tous les indices i,j,r,s. L'antisymétrie par rapport aux indices i et j donne :

$$\begin{aligned}
R_{aaaa} &= -R_{aaaa}\\
&= 0
\end{aligned}$$

2) Composantes ayant trois indices identiques :

$$\forall a \neq b \qquad R_{aaab}, R_{aaba}, R_{abaa}, R_{baaa}$$

La symétrie par blocs et l'antisymétrie par rapport aux indices i,j et r,s donnent :

$$R_{aaab} = -R_{aaba} = -R_{baaa} = -R_{abaa} = -R_{aaab} = 0$$

3) Composantes ayant exactement deux fois deux indices identiques :

$$\forall a \neq b \qquad R_{aabb}, R_{abab}, R_{baab}, R_{baba}, R_{bbaa}, R_{abba}$$

La condition $a \neq b$ est trop faible et l'on doit poser soit $a < b$ soit $a > b$ pour ne pas tout compter deux fois (si a prend l'ancienne valeur de b, et b l'ancienne valeur de a). Cette condition sert au dénombrement et n'a pas de rapport avec les propriétés de symétrie du tenseur de courbure. Plus simplement, supprimons les termes symétriques :

$$R_{aabb}, R_{abab}, R_{abba} \qquad \text{avec} \qquad a \neq b$$

La symétrie par blocs et l'antisymétrie par rapport aux indices i, j et r, s donnent :

$$\begin{aligned} R_{aabb} &= -R_{aabb} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad R_{abab} = -R_{abba}$$

Donc un type de composantes nulles et deux types de composantes non indépendantes. Il ne reste plus qu'à dénombrer les composantes du type R_{abab}, ce qui revient à dénombrer ab. Dans un espace de dimension n, l'un des indices prend n valeurs et l'autre $n-1$ valeurs car il est différent du premier ($a \neq b$). Il s'agit de choisir deux nombres différents parmi n où l'ordre des nombres choisis n'intervient pas. Ceci est équivalent à tirer sans remise deux boules parmi n boules numérotées de 1 à n sans tenir compte de l'ordre. C'est une combinaison :

$$C_n^2 = n(n-1)/2$$

4) Composantes ayant exactement deux indices identiques (autrement dit exactement trois indices différents) sont de douze types

$$R_{aabc}, R_{aacb}, R_{bcba}, R_{cbba}, R_{abca}, R_{acba}, R_{babc}, R_{cabb}, R_{baca}, R_{caba}, R_{abbc}, R_{acbb}$$

avec $a \neq b$ et $a \neq c$ sinon on serait dans le cas (2)). Ici aussi la condition $b \neq c$ est trop faible et l'on doit poser $b < c$ (ou $b > c$) pour ne pas tout compter deux fois. En revanche, a étant présent deux fois, les valeurs de a et de b, et celles de a et de c peuvent s'échanger sans redonner la même composante. Ainsi les conditions $a \neq b$, $a \neq c$ et $b < c$ donnent les trois cas : $a < b < c$, $b < a < c$ et $b < c < a$. On peut aussi écrire que les composantes sont des six types suivants

$$\forall a \neq b, a \neq c, b \neq c \qquad R_{aabc}, R_{bcaa}, R_{abca}, R_{baac}, R_{baca}, R_{abac}$$

La symétrie par blocs donne :

$$R_{aabc} = R_{bcaa} = 0$$

L'antisymétrie et la symétrie par blocs donnent :

$$R_{abac} = -R_{abca} = R_{baca} = -R_{baac}$$

Donc deux types de composantes nulles et quatre types de composantes non indépendantes. Reste à dénombrer les composantes du type R_{abac}. Par hypothèse $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, donc un indice prend n valeurs, l'autre prend $n-1$ valeurs et le dernier prend $n-2$ valeurs. On pose $c < b$ avec a quelconque, cela donne les trois cas $a < c < b$, $c < a < b$ et $c < b < a$, pour chaque cas C_n^3 combinaisons :

$$3C_n^3 = n(n-1)(n-2)/2$$

5) Les composantes ayant leurs quatre indices différents sont de 24 types :

$$R_{abcd} = -R_{abdc} = R_{badc} = -R_{bacd} = -R_{cdba} = R_{cdab} = -R_{dcab} = R_{dcba}$$
$$R_{acbd} = -R_{acdb} = R_{cadb} = -R_{cabd} = -R_{bdca} = R_{bdac} = -R_{dbac} = R_{dbac}$$
$$R_{adbc} = -R_{adcb} = R_{dacb} = -R_{dabc} = -R_{bcda} = R_{bcad} = -R_{cbad} = R_{cbda}$$

avec $a < b < c < d$ pour ne pas tout compter plusieurs fois. Nous avons trois ensembles de huit types de composantes non indépendantes. Les premières identités de Bianchi (23.31) p. 501 montrent que le dernier ensemble dépend des deux premiers car

$$R_{abcd} + R_{acbd} = -R_{adbc}$$

Il reste deux ensembles de huit types de composantes non indépendantes. Nous dénombrons C_n^4 combinaisons pour les composantes de type R_{abcd} et autant pour celles de type R_{acbd}, soit :

$$2C_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$$

Au total, dans un espace de dimension n, le nombre de composantes non nulles et indépendantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} &= \frac{n(n-1)}{2}\left[1 + (n-2)\left(1 + \frac{n-3}{6}\right)\right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\left[1 + \frac{(n-2)(n+3)}{6}\right] \\ &= \left(n^2 - n\right)\left(n^2 + n\right)/12 \\ &= n^2\left(n^2 - 1\right)/12\end{aligned}$$

Exemple 4.2: Tenseur de courbure d'un espace à une dimension

Dans un espace riemannien à une dimension le tenseur de courbure a $1^4 = 1$ composante, dont $1^2(1^2 - 1)/12 = 0$ indépendantes. Le tenseur de courbure d'une courbe est nul

$$R_{1111} = 0$$

car c'est bien la courbure intrinsèque qui est mesurée.

Exemple 4.3: Tenseur de courbure d'un espace à deux dimensions

Dans un espace riemannien à deux dimensions le tenseur de courbure a $2^4 = 16$ composantes, dont $2^2(2^2 - 1)/12 = 1$ seule indépendante :

$$R_{1212} = -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112}$$

Les composantes ont deux fois deux indices identiques, et l'on a bien $2(2-1)/2 = 1$.

— en coordonnées cartésiennes du plan, autrement dit pour l'élément différentiel

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2$$

le tenseur métrique est constant, tous les symboles de Christoffel sont nuls (§ 4.6 p. 443). D'après la déf. 4.2 p. 497 du tenseur de courbure de 1re espèce, toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles, l'espace est plat.

— en coordonnées polaires appliquées au plan, l'élément différentiel (cf. éq. (8.2) p. 113) s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + (x^1)^2\left(\mathrm{d}x^2\right)^2$$

avec $x^1 = \rho$ et $x^2 = \theta$, où $g_{11} = 1$ et $g_{22} = (x^1)^2$. Calculons la valeur de la seule composante indépendante potentiellement non nulle grâce aux symboles de Christoffel non nuls donnés dans l'ex. 4.2 p. 444 :

$$\begin{cases}\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = x^1\\ \Gamma_{122} = -x^1\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = 1/x^1\\ \Gamma^1{}_{22} = -x^1\end{cases}$$

Avec la déf. 4.2 p. 497 du tenseur de courbure de 1re espèce :

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} \overset{\text{def}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{kis} - \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{kir}$$

$$\begin{aligned}R_{1212} &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^k{}_{21}\,\Gamma_{k12} - \Gamma^k{}_{22}\,\Gamma_{k11}\\ &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^1{}_{21}\,\Gamma_{112} - \Gamma^1{}_{22}\,\Gamma_{111} + \Gamma^2{}_{21}\,\Gamma_{212} - \Gamma^2{}_{22}\,\Gamma_{211}\\ &= \partial_1 \Gamma_{122} + \Gamma^2{}_{21}\,\Gamma_{122}\\ &= -1 + x^1/x^1\\ &= 0\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est nul et l'espace est plat.

— en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ), à la surface d'une sphère de rayon r. Calculons la valeur de la seule composante indépendante potentiellement non nulle grâce aux symboles de Christoffel non nuls donnés dans l'ex. 4.4 p. 445 :

$$\begin{cases}\Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\phi\theta\phi} = r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot(\theta)\\ \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}$$

Avec la déf. 4.2 p. 497 du tenseur de courbure de 1re espèce :

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} \overset{\text{def}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{kis} - \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{kir}$$

$$\begin{aligned}R_{\theta\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma_{\theta\phi\theta} + \Gamma^k{}_{\phi\theta}\,\Gamma_{k\theta\phi} - \Gamma^k{}_{\phi\phi}\,\Gamma_{k\theta\theta}\\ &= \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma_{\theta\phi\theta} + \Gamma^\theta{}_{\phi\theta}\,\Gamma_{\theta\theta\phi} - \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma_{\theta\theta\theta} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\,\Gamma_{\phi\theta\phi} - \Gamma^\phi{}_{\phi\phi}\,\Gamma_{\phi\theta\theta}\\ &= \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi\phi} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\,\Gamma_{\phi\theta\phi}\\ &= r^2[sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)] + \cot(\theta) \times r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ &= r^2 sin^2(\theta)\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est non nul et l'espace est courbe.

Exemple 4.4: Tenseur de courbure d'un espace à trois dimensions

Dans un espace riemannien à trois dimensions le tenseur de courbure a $3^4 = 81$ composantes, dont $3^2(3^2-1)/12 = 6$ indépendantes.

$3(3-1)/2 = 3$ composantes ayant deux fois deux indices identiques :

$$R_{1212} = -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112}$$
$$R_{1313} = -R_{1331} = R_{3131} = -R_{3113}$$
$$R_{2323} = -R_{2332} = R_{3232} = -R_{3223}$$

$3(3-1)(3-2)/2 = 3$ composantes ayant exactement deux indices identiques :

$$R_{1213} = -R_{1231} = R_{2131} = -R_{2113} = -R_{1321} = R_{1312} = -R_{3112} = R_{3121}$$
$$R_{2123} = -R_{2132} = R_{1232} = -R_{1223} = -R_{2312} = R_{2321} = -R_{3221} = R_{3212}$$
$$R_{3132} = -R_{3123} = R_{1323} = -R_{1332} = -R_{3213} = R_{3231} = -R_{2331} = R_{2313}$$

En coordonnées sphériques dans l'espace euclidien, autrement dit pour l'élément différentiel (cf. éq. (8.4) p. 115)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}(x^1)^2 + \left(x^1 \mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(x^1 \sin x^2\right)^2 \left(\mathrm{d}x^3\right)^2$$

avec $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$ et $x^3 = \phi$, d'après l'ex. 4.3 p. 445 les symboles de Christoffel non nuls sont les suivants :

$$\begin{cases} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} = x^1 \\ \Gamma_{331} = \Gamma_{313} = x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ \Gamma_{122} = -x^1 \\ \Gamma_{133} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{233} = -(x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12} = 1/x^1 \\ \Gamma^3{}_{31} = \Gamma^3{}_{13} = 1/x^1 \\ \Gamma^3{}_{32} = \Gamma^3{}_{23} = \cot x^2 \\ \Gamma^1{}_{22} = -x^1 \\ \Gamma^1{}_{33} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin x^2 \cos x^2 \end{cases}$$

Avec la déf. 4.2 p. 497 du tenseur de courbure de 1re espèce :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^1{}_{21} \Gamma_{112} - \Gamma^1{}_{22} \Gamma_{111} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{212} - \Gamma^2{}_{22} \Gamma_{211} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{212} = -1 + x^1/x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{1313} &= \partial_1 \Gamma_{133} - \partial_3 \Gamma_{131} + \Gamma^1{}_{31} \Gamma_{113} - \Gamma^1{}_{33} \Gamma_{111} + \Gamma^3{}_{31} \Gamma_{313} - \Gamma^3{}_{33} \Gamma_{311} \\ &= \partial_1 \Gamma_{133} + \Gamma^3{}_{31} \Gamma_{313} = -\sin^2 x^2 + x^1 \sin^2 x^2 / x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2323} &= \partial_2 \Gamma_{233} - \partial_3 \Gamma_{232} + \Gamma^2{}_{32} \Gamma_{223} - \Gamma^2{}_{33} \Gamma_{222} + \Gamma^3{}_{32} \Gamma_{323} - \Gamma^3{}_{33} \Gamma_{322} \\ &= \partial_2 \Gamma_{233} + \Gamma^3{}_{32} \Gamma_{323} = -(x^1)^2 \cos^2 x^2 + \cot x^2 (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ijrs} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{jr} \Gamma_{kis} - \Gamma^k{}_{js} \Gamma_{kir}$$

$$\begin{aligned} R_{1213} &= \partial_1 \Gamma_{123} - \partial_3 \Gamma_{121} + \Gamma^k{}_{21} \Gamma_{k13} - \Gamma^k{}_{23} \Gamma_{k11} \\ &= \partial_1 \Gamma_{123} - \partial_3 \Gamma_{121} + \Gamma^1{}_{21} \Gamma_{113} - \Gamma^1{}_{23} \Gamma_{111} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{213} - \Gamma^2{}_{23} \Gamma_{211} \\ &\qquad + \Gamma^3{}_{21} \Gamma_{313} - \Gamma^3{}_{23} \Gamma_{311} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{2123} &= \partial_2 \Gamma_{213} - \partial_3 \Gamma_{212} + \Gamma^k{}_{12}\,\Gamma_{k23} - \Gamma^k{}_{13}\,\Gamma_{k22} \\
&= \partial_2 \Gamma_{213} - \partial_3 \Gamma_{212} + \Gamma^1{}_{12}\,\Gamma_{123} - \Gamma^1{}_{13}\,\Gamma_{122} + \Gamma^2{}_{12}\,\Gamma_{223} - \Gamma^2{}_{13}\,\Gamma_{222} \\
&\qquad + \Gamma^3{}_{12}\,\Gamma_{323} - \Gamma^3{}_{13}\,\Gamma_{322} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{3132} &= \partial_3 \Gamma_{312} - \partial_2 \Gamma_{313} + \Gamma^k{}_{13}\,\Gamma_{k32} - \Gamma^k{}_{12}\,\Gamma_{k33} \\
&= \partial_3 \Gamma_{312} - \partial_2 \Gamma_{313} + \Gamma^1{}_{13}\,\Gamma_{132} - \Gamma^1{}_{12}\,\Gamma_{133} + \Gamma^2{}_{13}\,\Gamma_{232} - \Gamma^2{}_{12}\,\Gamma_{233} \\
&\qquad + \Gamma^3{}_{13}\,\Gamma_{332} - \Gamma^3{}_{12}\,\Gamma_{333} \\
&= -\partial_2 \Gamma_{313} - \Gamma^2{}_{12}\,\Gamma_{233} + \Gamma^3{}_{13}\,\Gamma_{332} \\
&= -2x^1 \sin x^2 \cos x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Le tenseur de courbure est nul et l'espace est plat.

Exemple 4.5: Tenseur de courbure d'un espace à quatre dimensions

Dans un espace riemannien à quatre dimensions le tenseur de courbure a $4^4 = 256$ composantes, dont $4^2(4^2-1)/12 = 20$ indépendantes.
$4(4-1)/2 = 6$ composantes ayant deux fois deux indices identiques :

$$
\begin{aligned}
R_{1212} &= -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112} \\
R_{1313} &= -R_{1331} = R_{3131} = -R_{3113} \\
R_{1414} &= -R_{1441} = R_{4141} = -R_{4114} \\
R_{2323} &= -R_{2332} = R_{3232} = -R_{3223} \\
R_{2424} &= -R_{2442} = R_{4242} = -R_{4224} \\
R_{3434} &= -R_{3443} = R_{4343} = -R_{4334}
\end{aligned}
$$

$4(4-1)(4-2)/2 = 12$ composantes ayant exactement deux indices identiques :

$$
\begin{aligned}
R_{1213} &= -R_{1231} = R_{2131} = -R_{2113} = -R_{1321} = R_{1312} = -R_{3112} = R_{3121} \\
R_{1214} &= -R_{1241} = R_{2141} = -R_{2114} = -R_{1421} = R_{1412} = -R_{4112} = R_{4121} \\
R_{1314} &= -R_{1341} = R_{3141} = -R_{3114} = -R_{1431} = R_{1413} = -R_{4113} = R_{4131} \\
R_{2123} &= -R_{2132} = R_{1232} = -R_{1223} = -R_{2312} = R_{2321} = -R_{3221} = R_{3212} \\
R_{2124} &= -R_{2142} = R_{1242} = -R_{1224} = -R_{2412} = R_{2421} = -R_{4221} = R_{4212} \\
R_{2324} &= -R_{2342} = R_{3242} = -R_{3224} = -R_{2432} = R_{2423} = -R_{4223} = R_{4232} \\
R_{3132} &= -R_{3123} = R_{1323} = -R_{1332} = -R_{3213} = R_{3231} = -R_{2331} = R_{2313} \\
R_{3134} &= -R_{3143} = R_{1343} = -R_{1334} = -R_{3413} = R_{3431} = -R_{4331} = R_{4313} \\
R_{3234} &= -R_{3243} = R_{2343} = -R_{2334} = -R_{3423} = R_{3432} = -R_{4332} = R_{4332} \\
R_{4142} &= -R_{4124} = R_{1424} = -R_{1442} = -R_{4214} = R_{4241} = -R_{2441} = R_{2414} \\
R_{4143} &= -R_{4134} = R_{1434} = -R_{1443} = -R_{4314} = R_{4341} = -R_{3441} = R_{3414} \\
R_{4243} &= -R_{4234} = R_{2434} = -R_{2443} = -R_{4324} = R_{4342} = -R_{3442} = R_{3424}
\end{aligned}
$$

$4(4-1)(4-2)(4-3)/12 = 2$ composantes ayant quatre indices différents :

$$R_{1234} = -R_{1243} = R_{2143} = -R_{2134} = -R_{3421} = R_{3412} = -R_{4312} = R_{4321}$$
$$R_{1324} = -R_{1342} = R_{3142} = -R_{3124} = -R_{2431} = R_{2413} = -R_{4213} = R_{4213}$$

4.8 Dérivées covariantes secondes d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs de composantes contravariantes v^h, cherchons la différence entre $\nabla_r\left(\nabla_s v^h\right)$ et $\nabla_s\left(\nabla_r v^h\right)$. Reprenons (22.44) p. 463 :

$$\forall h,r,s$$
$$\nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) = \partial_{rs}v^h + v^i\partial_r\Gamma^h_{\ is} + \Gamma^h_{\ is}\,\partial_r v^i - \Gamma^k_{\ sr}\,\partial_k v^h - v^i\,\Gamma^h_{\ ik}\,\Gamma^k_{\ sr} + \Gamma^h_{\ kr}\,\partial_s v^k + v^i\,\Gamma^k_{\ is}\,\Gamma^h_{\ kr}$$
$$\nabla_s\left(\nabla_r v^h\right) = \partial_{sr}v^h + v^i\partial_s\Gamma^h_{\ ir} + \Gamma^h_{\ ir}\,\partial_s v^i - \Gamma^k_{\ rs}\,\partial_k v^h - v^i\,\Gamma^h_{\ ik}\,\Gamma^k_{\ rs} + \Gamma^h_{\ ks}\,\partial_r v^k + v^i\,\Gamma^k_{\ ir}\,\Gamma^h_{\ ks}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}\forall h,r,s \qquad & \nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) - \nabla_s\left(\nabla_r v^h\right)\\ &= v^i\partial_r\Gamma^h_{\ is} - v^i\partial_s\Gamma^h_{\ ir} + \Gamma^h_{\ is}\,\partial_r v^i - \Gamma^h_{\ ir}\,\partial_s v^i + \Gamma^h_{\ kr}\,\partial_s v^k - \Gamma^h_{\ ks}\,\partial_r v^k + v^i\,\Gamma^k_{\ is}\,\Gamma^h_{\ kr} - v^i\,\Gamma^k_{\ ir}\,\Gamma^h_{\ ks}\\ &= v^i\left(\partial_r\Gamma^h_{\ is} - \partial_s\Gamma^h_{\ ir}\right) + \Gamma^h_{\ is}\,\partial_r v^i - \Gamma^h_{\ ir}\,\partial_s v^i + \Gamma^h_{\ ir}\,\partial_s v^i - \Gamma^h_{\ is}\,\partial_r v^i + v^i\left(\Gamma^k_{\ is}\,\Gamma^h_{\ kr} - \Gamma^k_{\ ir}\,\Gamma^h_{\ ks}\right)\end{aligned}$$

On en déduit qu'en un point M :

$$\forall h,r,s \quad \nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) - \nabla_s\left(\nabla_r v^h\right) = v^i\left(\partial_r\Gamma^h_{\ is} - \partial_s\Gamma^h_{\ ir} + \Gamma^k_{\ is}\,\Gamma^h_{\ kr} - \Gamma^k_{\ ir}\,\Gamma^h_{\ ks}\right)$$

On reconnait la déf. 4.1 p. 496 du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de 2$^{\text{de}}$ espèce :

$$\boxed{\forall h,r,s \quad \nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) - \nabla_s\left(\nabla_r v^h\right) = v^i R^h_{\ irs}}$$

Dans un espace courbe, les dérivées covariantes secondes d'un vecteur, et plus généralement d'un tenseur, dépendent de l'ordre des dérivations (ce qui n'a pas lieu pour les dérivées ordinaires).

4.9 Tenseur de courbure de Ricci

Nous verrons au § 8 p. 569 que pour établir les équations de la relativité générale nous devons trouver un tenseur chronogéométrique (lié uniquement à la courbure de l'espace-temps) symétrique d'ordre deux.

Effectuons toutes les contractions possibles des composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. En utilisant les symétries du tenseur de courbure du § 4.7 p. 500 :

$$R_{ijrs} = -R_{jirs} = R_{jisr} = -R_{ijsr} = R_{rsij} = -R_{srij} = R_{srji} = R_{rsji}$$

$$g^{ij}R_{ijrs} = -g^{ij}R_{jirs} = g^{ij}R_{jisr} = -g^{ij}R_{ijsr} = g^{ij}R_{rsij} = -g^{ij}R_{srij} = g^{ij}R_{srji} = g^{ij}R_{rsji}$$
$$R^i_{\ irs} = -R^i_{\ irs} = R^i_{\ isr} = -R^i_{\ isr}$$
$$R_{rs} = -R_{rs} = R_{sr} = -R_{sr} = 0$$

$$\begin{aligned} g^{rs}R_{ijrs} &= g^{ij}R_{rsij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{ir}R_{ijrs} = -g^{ir}R_{jirs} = g^{ir}R_{jisr} = -g^{ir}R_{ijsr} = g^{ir}R_{rsij} = -g^{ir}R_{srij} = g^{ir}R_{srji} = g^{ir}R_{rsji} \\ R_{js} = -R_{js} = R_{sj} = -R_{sj} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{js}R_{ijrs} &= g^{ir}R_{jisr} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{is}R_{ijrs} = -g^{is}R_{jirs} = g^{is}R_{jisr} = -g^{is}R_{ijsr} = g^{is}R_{rsij} = -g^{is}R_{srij} = g^{is}R_{srji} = g^{is}R_{rsji} \\ R_{jr} = R_{rj} \\ g^{jr}R_{ijrs} = g^{is}R_{jisr} \\ R_i{}^r{}_{rs} = R_j{}^s{}_{sr} \\ R_{is} = R_{jr} \end{aligned}$$

Par contraction des composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, nous ne pouvons donc former qu'un seul tenseur, le tenseur symétrique d'ordre deux R_{is}, qui s'écrit également R_{jr}.

Définition 4.4: Tenseur de courbure de Ricci

Le tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned} \forall i,s \quad R_{is} &\overset{\text{def}}{=} g^{jr}R_{ijrs} \\ &= R_i{}^r{}_{rs} \\ &= \partial_r\Gamma^r{}_{si} - \partial_s\Gamma^r{}_{ri} + \Gamma^k{}_{si}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{ri}\,\Gamma^r{}_{sk} \end{aligned}$$

est appelé tenseur de courbure de Ricci de l'espace riemannien.

Montrons que ce tenseur est symétrique en montrant que chacun de ses termes est symétrique :

$$\begin{aligned} \partial_r\Gamma^r{}_{si} &= \partial_r\Gamma^r{}_{is} \\ \Gamma^k{}_{si}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^k{}_{is}\,\Gamma^r{}_{rk} \\ \Gamma^k{}_{ri}\,\Gamma^r{}_{sk} &= \Gamma^k{}_{rs}\,\Gamma^r{}_{ik} \end{aligned}$$

À partir des relations (22.24) p. 442 :

$$\begin{aligned} \partial_s\Gamma^r{}_{ri} &= \partial_s\left(\tfrac{1}{2g}\,\partial_i g\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\partial_s(\partial_i \ln|g|) \\ &= \tfrac{1}{2}\partial_i(\partial_s \ln|g|) \\ &= \partial_i\Gamma^r{}_{rs} \end{aligned}$$

Exemple 4.6: Tenseur de Ricci dans les espaces pré-euclidiens

D'après le § 4.6 p. 443, dans les espaces pré-euclidiens les symboles de Christoffel sont nuls. Par conséquent le tenseur de Ricci est également nul. Par exemple dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte :

$$\forall \mu,\nu \quad R_{\mu\nu} = 0$$

Exemple 4.7: Tenseur de Ricci d'une sphère

En se servant de l'ex. 4.4 p. 445 :

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^r{}_{r\theta} + \Gamma^k{}_{\theta\theta}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r\theta}\,\Gamma^r{}_{\theta k} \\ &= -\partial_\theta \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} - \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\,\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} \\ &= 1 + \cot^2(\theta) - \cot^2(\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= \partial_r \Gamma^r{}_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^r{}_{r\phi} + \Gamma^k{}_{\phi\phi}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\phi k} \\ &= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma^r{}_{r\theta} - \Gamma^\phi{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\phi\theta} \\ &= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\left(\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\right) - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} - \Gamma^\phi{}_{\phi\phi}\,\Gamma^\phi{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\theta} - \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} \\ &= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} \\ &= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} \\ &= \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) \\ &= \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi} &= \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^r{}_{r\phi} + \Gamma^k{}_{\theta\phi}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\theta k} \\ &= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} + \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^r{}_{r\phi} - \Gamma^\phi{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\theta\phi} \\ &= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.10 Courbure riemannienne scalaire

La contraction des composantes du tenseur de courbure de Ricci (déf. 4.4 p. 508), donne un invariant, le seul possible :

Définition 4.5: Courbure de Ricci

Le scalaire

$$\begin{aligned} R &\overset{\text{def}}{=} g^{is} g^{jr} R_{ijrs} \\ &= g^{is} R_i{}^r{}_{rs} \\ &= g^{is} R_{is} \\ &= R_i^i \end{aligned}$$

est appelé courbure de Ricci ou courbure riemannienne scalaire de l'espace.

Dans un espace riemannien à n dimensions :

$$R_i^i = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + \cdots + R_n^n$$

Réciproquement, avec (12.14) p. 209 dans un espace à n dimensions :

$$\begin{aligned} g_{ij}g^{ij}R_{ij} &= g_{ij}R \\ R_{ij} &= \tfrac{1}{n}\, g_{ij}R \end{aligned}$$

Exemple 4.8: Courbure de Ricci d'un espace de dimension 2

Dans un espace riemannien de dimension deux, d'après l'ex. 4.3 p. 503, les seules composantes du tenseur de Riemann-Christoffel non nulles sont les suivantes :

$$R_{12,12} = -R_{12,21} = R_{21,21} = -R_{21,12}$$

Avec (12.12) p. 209 donnant le déterminant du tenseur métrique dual, par définition la courbure de Ricci a pour expression :

$$\begin{aligned} R &= g^{is}R_{is} \\ &= g^{12}g^{21}R_{12,12} + g^{21}g^{12}R_{21,21} + g^{11}g^{22}R_{12,21} + g^{22}g^{11}R_{21,12} \\ &= \left(g^{12}g^{21} + g^{21}g^{12} - g^{11}g^{22} - g^{22}g^{11}\right) R_{12,12} \\ &= 2\left(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}\right) R_{12,12} \\ &= -2g^{-1}R_{12,12} \end{aligned}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} R_{12,12} &= -\tfrac{1}{2}gR \\ &= -\tfrac{1}{2}R\left(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}\right) \end{aligned}$$

Exemple 4.9: Courbure de Ricci d'une sphère

En utilisant l'inverse du tenseur métrique (12.16) p. 210 et l'ex. 4.7 p. 509, la courbure de Ricci d'une sphère de rayon r s'écrit :

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}R_{ij} \\ &= g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\sin^2(\theta) \\ &= \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

4.11 Secondes identités de Bianchi

Nous pouvons obtenir de nouvelles identités par dérivation du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Adoptons un système de coordonnées localement géodésiques en un point M de R_n, les symboles de Christoffel sont alors nuls et la déf. 4.1 p. 496 du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel s'écrit :

$$\forall h,i,r,s \quad R^h{}_{irs} = \partial_r\Gamma^h{}_{si} - \partial_s\Gamma^h{}_{ri}$$

Dans le système de coordonnées localement géodésiques, les symboles de Christoffel étant nuls, la déf. 6.4 p. 451 de la dérivation covariante se réduit à la dérivation partielle ordinaire :

$$\begin{aligned}\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_t R^h{}_{irs} &= \partial_t R^h{}_{irs} \\ &= \partial_{tr}\Gamma^h{}_{si} - \partial_{ts}\Gamma^h{}_{ri}\end{aligned}$$

Par permutation circulaire sur les indices r,s,t, nous avons :

$$\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_r R^h{}_{ist} = \partial_{rs}\Gamma^h{}_{ti} - \partial_{rt}\Gamma^h{}_{si}$$
$$\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_s R^h{}_{itr} = \partial_{st}\Gamma^h{}_{ri} - \partial_{sr}\Gamma^h{}_{ti}$$

Puis en additionnant les trois relations obtenues :

$$\boxed{\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_t R^h{}_{irs} + \nabla_r R^h{}_{ist} + \nabla_s R^h{}_{itr} = 0}$$

La dérivée covariante d'un tenseur étant un tenseur, chacun des membres de l'identité est un tenseur et cette relation est donc une relation tensorielle. Par conséquent, les identités de Bianchi sont valables dans tout système de coordonnées, en tout point de R_n. L'abaissement de l'indice conduit aux expressions :

$$\boxed{\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_t R_{hirs} + \nabla_r R_{hist} + \nabla_s R_{hitr} = 0}$$

4.12 Tenseur d'Einstein

Toujours au § 8 p. 569, nous verrons que pour établir les équations de la relativité générale, la divergence du tenseur symétrique d'ordre deux que nous cherchons doit être nulle. En effet, ce tenseur qui représente la courbure de l'espace-temps doit être égale au tenseur impulsion-énergie qui est conservatif, donc de divergence nulle (théorème de divergence 6.1 p. 177). Effectuons une double contraction des secondes identités de Bianchi :

1) Pour $t = h$:

$$\forall i,r,s \quad \nabla_h R^h{}_{irs} + \nabla_r R^h{}_{ish} + \nabla_s R^h{}_{ihr} = 0$$

La contraction doit avoir lieu sur le même indice (ici pour les deux derniers termes) :

$$\begin{aligned}\forall i,r,s \quad \nabla_h R^h{}_{irs} - \nabla_r R^h{}_{ihs} + \nabla_s R^h{}_{ihr} &= 0 \\ \nabla_h R^h{}_{irs} - \nabla_r R_{is} + \nabla_s R_{ir} &= 0 \\ \forall k,r,s \quad g^{ik}\nabla_h R^h{}_{irs} - g^{ik}\nabla_r R_{is} + g^{ik}\nabla_s R_{ir} &= 0\end{aligned}$$

La dérivée covariante du tenseur métrique étant nulle, (22.36) p. 458 :

$$\begin{aligned}\nabla_h\left(g^{ik}R^h{}_{irs}\right) - \nabla_r\left(g^{ik}R_{is}\right) + \nabla_s\left(g^{ik}R_{ir}\right) &= 0 \\ \nabla_h R^{hk}{}_{rs} - \nabla_r R^k_s + \nabla_s R^k_r &= 0\end{aligned}$$

2) Puis pour $s = k$:

$$\begin{aligned}\forall r \quad \nabla_h R^{hk}{}_{rk} - \nabla_r R^k_k &= 0 + \nabla_k R^k_r \\ \nabla_h R^h_r + \nabla_k R^k_r - \nabla_r R &= 0 \\ 2\nabla_k R^k_r - \nabla_r R &= 0 \\ \nabla_k R^k_r - \tfrac{1}{2}\,\delta^k_r\,(\nabla_k R) &= 0 \\ \nabla_k R^k_r - \tfrac{1}{2}\nabla_k\left(\delta^k_r R\right) &= 0 \\ \nabla_k\left(R^k_r - \tfrac{1}{2}\,\delta^k_r R\right) &= 0 \qquad (23.32)\end{aligned}$$

Définition 4.6: Tenseur d'Einstein

Le tenseur d'ordre deux

$$\forall k, r \quad S_r^k \overset{\text{def}}{=} R_r^k - \tfrac{1}{2}\,\delta_r^k R$$

est appelé tenseur d'Einstein.

Par symétrie du tenseur de courbure de Ricci, ce tenseur est symétrique. (23.32) p. 511 exprime que la divergence du tenseur d'Einstein est nulle ((22.39) p. 459). Les composantes covariantes de ce tenseur s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall k, r \quad g_{ik} S_r^i &= g_{ik} R_r^i - \tfrac{1}{2}\, g_{ik} \delta_r^i R \\ S_{kr} &= R_{kr} - \tfrac{1}{2}\, g_{kr} R \end{aligned} \tag{23.33}$$

Chapitre 24

DYNAMIQUE CLASSIQUE

Sommaire

1	Applications de la géométrie riemannienne	513
2	Systèmes holonomes à liaisons scléronomes	514
3	Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes	521
4	Dynamique classique des milieux continus	525

1 Applications de la géométrie riemannienne

La géométrie riemannienne trouve une application importante dans les problèmes de mécanique. Soit un système dynamique se déplaçant dans l'espace ordinaire, euclidien à trois dimensions. Prenons le cas d'un pendule sphérique. La tige du pendule exerce une force sur la masse l'obligeant à se déplacer sur une sphère. Nous pouvons ignorer cette force et considérer directement que la masse se déplace sur une sphère, sans jamais la quitter. Nous savons que l'espace accessible à la masse du pendule simple est une sphère. Dans le cas général, pour trouver la forme de l'espace accessible, la force doit pouvoir être remplacée par une fonction des coordonnées, de la forme

$$F\left(x^1, x^2, x^3\right) = 0$$

La liaison est alors dite *holonome*. Par exemple, pour le pendule sphèrique en coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) :

$$\rho = c^{ste}$$

Dans le cas présent la liaison est aussi *scléronome*, c.-à-d. indépendante du temps. Grâce à cette relation, pour décrire le mouvement de la masse nous passons de :

- trois coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ), une force, un espace euclidien

à :

- deux coordonnées (θ, ϕ), aucune force, un espace courbe (la sphère)

Lorsque l'on utilise un nombre minimal de coordonnées pour décrire l'évolution du système, on parle de *coordonnées généralisées*. Ici ce sont deux angles, et l'espace riemannien correspondant est une surface (deux dimensions).

En l'absence de champ gravitationnel, la masse ne peut décrire que des grands cercles de la sphère, c.-à-d. des géodésiques de cet espace riemannien. De plus la masse se déplace à vitesse constante en norme.

Lorsqu'il existe une force dérivant d'une énergie potentielle, par exemple un champ gravitationnel, nous verrons qu'il existe quand même un espace riemannien dans lequel les trajectoires de la masse sont encore toutes des géodésiques.

Enfin, lorsque la longueur de la tige varie dans le temps, par exemple un moteur allonge ou raccourcit la tige, la liaison est dite holonome *rhéonome*. Nous pouvons encore supprimer la force, mais l'espace riemannien évolue dans le temps. Le temps devient une nouvelle coordonnée, au même titre que les coordonnées spatiales, et nous considérons l'évolution du système dans un nouvel espace riemannien ayant une dimension supplémentaire. Dans le cas du pendule sphérique, l'espace riemannien a alors trois coordonnées, (θ, ϕ, t).

2 Systèmes holonomes à liaisons scléronomes

Considérons un système dynamique S à n degrés de liberté, c.-à-d. un système à n coordonnées généralisées (q^i). L'évolution temporelle de ce système est représentée par un point M se déplaçant dans un espace de dimension n ayant pour coordonnées les (q^i), appelé *espace de configuration*. Cet espace de configuration est l'ensemble des configurations possibles du système, il constitue une variété différentielle à n dimensions, autrement dit un espace riemannien V_n. Lorsque les liaisons sont holonomes, parfaites et indépendantes du temps, l'espace de configuration n'évolue pas dans le temps : les composantes g_{ij} du tenseur métrique de l'espace de configuration ne sont pas des fonctions explicites du temps. Soit $\mathrm{d}s$ l'élément linéaire de l'espace de configuration, d'après (19.3) p. 367

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j$$

où les indices latins varient de 1 à n, et où les g_{ij} sont fonction des q^i uniquement.

2.1 Cinématique

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour composantes contravariantes,

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad v^i = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i$$

et pour composantes covariantes :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad v_i = g_{ij}v^j = g_{ij}\dot{q}^j = \dot{q}_i$$

Exprimons l'énergie cinétique en fonction de l'élément linéaire :

$$\begin{aligned} T &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ \mathrm{d}s^2 &= \frac{2T}{m}\,\mathrm{d}t^2 \end{aligned} \tag{24.1}$$

Remarque 2.1

On peut toujours changer d'unité de masse et poser $m = 1$ pour avoir :

$$\mathrm{d}s^2 = 2T\,\mathrm{d}t^2$$

On peut également diviser l'unité de longueur des q^i par $\sqrt{m}$ et obtenir le même résultat.

Nous avons également :

$$\begin{aligned} T &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \tfrac{1}{2}mg_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \end{aligned} \tag{24.2}$$

Dérivons par rapport aux composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right) \\ &= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_i\sum_{j\neq i} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \sum_i\sum_{j=i} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right) \\ &= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_i\sum_{j\neq i} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right) + \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_i g_{ii}\dot{q}^i\dot{q}^i\right) \\ &= \tfrac{m}{2}\sum_i\sum_{j\neq i} g_{ij}\dot{q}^j + m\sum_i g_{ii}\dot{q}^i \\ &= mg_{ij}\dot{q}^j \\ &= mv_i \end{aligned} \tag{24.3}$$

Or, les composantes de l'impulsion généralisée s'écrivent :

$$\forall i \qquad p_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$$

où $\mathcal{L} = T - \mathcal{V}$ est le lagrangien. Lorsque l'énergie potentielle totale V ne dépend pas des vitesses généralisées :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad p_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \\ &= mv_i \end{aligned}$$

Les composantes de l'impulsion généralisée ne sont autres que le produit de la masse par les composantes covariantes de la vitesse du point représentatif M dans l'espace riemannien V_n des configurations.

Pour l'accélération, servons-nous de la déf. 22.32 p. 453 du vecteur unitaire $\vec{u}$ tangent à la trajectoire $\mathscr{C}$ au point M :

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{u} &= 1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right) &= 0 \\ 2\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{u} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}s$ est soit nul soit orthogonal à $\vec{u}$ partout sur la trajectoire $\mathscr{C}$. D'après (22.30) p. 450, il a pour composantes les dérivées absolues $Du^i/\mathrm{d}s$. Il n'est pas unitaire, appelons ρ sa norme. On définit un vecteur unitaire $\vec{n}$ qui lui est colinéaire :

$$\boxed{\forall i \qquad \frac{Du^i}{\mathrm{d}s} = \frac{n^i}{\rho}}$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}(n^i)$, colinéaire au vecteur orthogonal à la tangente à $\mathscr{C}$, est appelé *vecteur de la normale principale* à $\mathscr{C}$. La dérivation absolue de la vitesse par rapport au temps donne l'accélération :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad a^i &= \frac{Dv^i}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{D(vu^i)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Avec (22.29) p. 450 :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad a^i &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,u^i + v\,\frac{Du^i}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,u^i + \frac{v^2}{\rho}\,n^i \end{aligned} \tag{24.4}$$

Le vecteur accélération se décompose en une accélération tangentielle et une accélération normale. Le scalaire $\rho(s)$ appelé *rayon de courbure* de $\mathscr{C}$ au point considéré, a la dimension d'une longueur. ρ^{-1} est appelé *courbure* de $\mathscr{C}$ dans V_n au point considéré.

2.2 Les équations de la dynamique lagrangienne

En l'absence d'hypothèses sur le caractère conservatif ou non des forces généralisées Q_i s'exerçant sur le système, le mouvement du système est déterminé par les équations de Lagrange sous leur forme la plus générale :

$$\boxed{\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i} \tag{24.5}$$

Désignons par $Q_i \delta q^i$ le travail élémentaire des forces extérieures appliquées au système lors d'un déplacement virtuel arbitraire δq^i. C'est un scalaire qui ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel on l'exprime, car si c'était le cas le système gagnerait ou perdrait de l'énergie par changement de coordonnées. C'est donc un invariant par changement de coordonnées. Les δq^i étant les composantes contravariantes d'un vecteur, les Q_i sont les composantes covariantes du vecteur force généralisées de V_n. Servons-nous des relations (24.3) p. 515 et (24.2) p. 515 :

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m g_{ij}\dot{q}^j\right) - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\tfrac{1}{2}\, m g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right) = Q_i \tag{24.6}$$

Le calcul suivant est identique à celui de la démonstration du th. 2.1 p. 428 :

$$\begin{aligned}\forall i \qquad Q_i &= m\left(g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}\dot{q}^j}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}g_{ij}}{\mathrm{d}t}\,\dot{q}^j\right)-\frac{m}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\\ &= m\left(g_{ij}\,\ddot{q}^j+\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\,\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t}\,\dot{q}^j-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\,\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\\ &= m\left(g_{ij}\,\ddot{q}^j+\partial_k g_{ij}\dot{q}^j\dot{q}^k-\tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k\right)\\ &= m\left[g_{ij}\,\ddot{q}^j+\left(\partial_k g_{ij}-\tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{jk}\right)\dot{q}^j\dot{q}^k\right]\end{aligned}$$

En remarquant que $\partial_k g_{ij}\dot{q}^j\dot{q}^k=\partial_j g_{ik}\dot{q}^j\dot{q}^k$ et avec (22.21) p. 442 donnant les symboles de Christoffel de première espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\begin{aligned}\forall i \qquad Q_i &= m\left[g_{ij}\,\ddot{q}^j+\left(\tfrac{1}{2}\,\partial_j g_{ki}+\tfrac{1}{2}\,\partial_k g_{ij}-\tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{kj}\right)\dot{q}^k\dot{q}^j\right]\\ &= m\left[g_{ij}\,\ddot{q}^j+\tfrac{1}{2}\left(\partial_j g_{ki}+\partial_k g_{ij}-\partial_i g_{kj}\right)\dot{q}^k\dot{q}^j\right]\\ &= m\left(g_{ih}\,\ddot{q}^h+\Gamma_{ijk}\,\dot{q}^k\dot{q}^j\right)\end{aligned}$$

Avec (22.34) p. 454 donnant les composantes du vecteur accélération :

$$\begin{aligned}\forall i \qquad Q_i &= m g_{ih}\left(\ddot{q}^h+\Gamma^h{}_{jk}\,\dot{q}^k\dot{q}^j\right)\\ &= m g_{ih}a^h\\ &= m a_i\end{aligned}$$

Ainsi les membres de gauche des équations de Lagrange (24.5) p. 516 ne sont autres que les composantes covariantes du vecteur accélération de M dans l'espace riemannien de configuration. Les équations de Lagrange étendent la relation fondamentale de la dynamique aux espaces courbes. D'après (24.4) p. 516, on peut encore écrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\boxed{\forall i \qquad m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,u_i+m\,\frac{v^2}{\rho}\,n^i=Q_i} \tag{24.7}$$

Au cours du mouvement le vecteur force généralisée reste dans le plan défini par la tangente à la trajectoire et par la normale principale, nous dirons qu'il est *coplanaire* à celles-ci.

2.3 Absence de forces extérieures

En l'absence de forces extérieures exercées sur le système, c.-à-d. lorsque les Q_i sont nulles, l'énergie cinétique est constante puisqu'il n'y a pas d'énergie potentielle. Dans l'espace riemannien, le vecteur vitesse est donc constant et l'accélération nulle, le point M suit une géodésique de V_n :

$$\begin{aligned}\forall i \qquad & a_i=0\\ & m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,u_i+m\,\frac{v^2}{\rho}\,n^i=0\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\\ 1/\rho=0\end{cases}$$

La norme du vecteur vitesse est constante et la courbure est nulle dans l'espace riemannien. À partir des relations (24.6) p. 516 nous avons également :

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m g_{ij}\dot{q}^j\right) - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\tfrac{1}{2}\, m g_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j\right) = 0$$

$$\ddot{q}_i - \tfrac{1}{2}\partial_i g_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j = 0 \tag{24.8}$$

Ce sont les équations différentielles des coordonnées de la géodésique suivie par le système dans l'espace riemannien des configurations

2.4 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle

Supposons que le vecteur force généralisée dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps :

$$\forall i \qquad Q_i = -\partial_i \mathcal{V}(q^i)$$

En prenant le produit scalaire de (24.7) p. 517 par le vecteur vitesse,

$$v^i\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,u_i + m\frac{v^2}{\rho}\,n^i\right) = Q_i v^i$$

$$mvu^i\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,u_i + \frac{v^2}{\rho}\,n^i\right) = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}$$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int mv\mathrm{d}v = -\int \mathrm{d}\mathcal{V}$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \mathcal{V} = c^{ste}$$

C'est l'équation de conservation dans le temps de l'énergie mécanique E d'un système conservatif (système dont les forces dérivent toutes d'un potentiel) :

$$E = T + \mathcal{V}$$

Cette équation donne l'expression de la vitesse d'un système conservatif :

$$v = \sqrt{2\,(E - \mathcal{V})}$$

À partir des relations (24.6) p. 516, la loi du mouvement du système s'écrit :

$$\boxed{\forall i \qquad m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ij}\dot{q}^j\right) - \frac{m}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\,\dot{q}^k\dot{q}^j = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^i}} \tag{24.9}$$

Ce ne sont pas les équations des coordonnées d'une géodésique à cause du membre de droite non nul. Cependant, dans le § suivant nous montrons que nous pouvons quand même réduire le problème à la recherche d'une géodésique en faisant « disparaitre » ce terme.

2.5 Recherche d'une géodésique

Déterminons la trajectoire fictive du point représentatif d'un système en présence d'une énergie potentielle, sous la forme d'une géodésique. Il s'agit de supprimer le terme $\partial\mathcal{V}/\partial q^i$ dans les équations différentielles (24.9) en changeant de paramètre et en changeant d'espace de configuration. Gardons l'hypothèse de conservation de l'énergie mécanique du § précédent (système conservatif).

- Dans la loi du mouvement, remplaçons le temps par une fonction à déterminer, $\theta(t)$, c.-à-d., effectuons un changement de paramètre de la trajectoire (cf. remarque 6.1 p. 12). Les coordonnées sont maintenant des fonctions de la fonction $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \forall i \qquad q^i &= q^i\left[\theta(t)\right] \\ \frac{\mathrm{d}q^i\left[\theta(t)\right]}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial q^i}{\partial\theta(t)}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dot{q}^i &= \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\theta}\,\dot{\theta} \end{aligned}$$

  La loi horaire ne dépend plus explicitement du temps mais cela ne change pas la forme de la trajectoire suivie par le système :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad & m\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{m}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q^i} = 0 \\ & \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\,\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{m}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q^i} = 0 \end{aligned} \tag{24.10}$$

- Changeons d'espace de configuration en changeant de métrique mais pas de système de coordonnées (q^i) :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= F(q^i)\mathrm{d}s^2 \\ &= F(q^i)g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j \\ &= g'_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j \end{aligned}$$

Par la suite nous fixerons la nouvelle métrique par l'intermédiaire de la fonction inconnue $F(q^i)$ de sorte que la trajectoire soit une géodésique dans le nouvel espace de configuration. Cherchons la composante covariante de la vitesse dans cette nouvelle métrique en utilisant la fonction $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \forall i \qquad q_i &= g'_{ij}q^j \\ &= F(q^i)g_{ij}q^j \\ \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\theta} &= F(q^i)g_{ij}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta} \end{aligned}$$

Les équations différentielles d'une géodésique de ce nouvel espace de configuration sont données par (24.8) p. 518 :

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g'_{jk}}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{24.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(F g_{ij}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{1}{2}F\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q^i}g_{jk}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

Le paramètre $\theta(t)$ étant libre, prenons le égal à l'abscisse curviligne s'. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} F g_{jk} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} &= F g_{jk} \frac{\mathrm{d}q^j}{ds'} \frac{\mathrm{d}q^k}{ds'} \\ &= \frac{ds'^2}{ds'^2} \\ g_{jk} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{1}{F} \end{aligned}$$

Par conséquent (en gardant θ plutôt que s') :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(F g_{ij} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0 \\ & F \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(F g_{ij} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0 \end{aligned}$$

Cette relation s'identifie avec la loi du mouvement du système (24.10) p. 519, si l'on prend :

$$F(q^i) = \dot{\theta} \qquad \text{et} \qquad F(q^i) = c^{ste} - 2V/m$$

Pour la constante, prenons le double de l'énergie mécanique divisée par la masse :

$$F(q^i) = \tfrac{2}{m}\left[E - \mathcal{V}(q^i)\right]$$

Dans cette relation, il vaut mieux ne pas remplacer $E - \mathcal{V}$ par T, car T est une fonction explicite des vitesses.

La trajectoire d'un système dynamique conservatif, pour une valeur donnée de son énergie mécanique, est donc une géodésique (relations (24.11)) de l'espace de configuration de métrique riemannienne :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= F(q^i) g_{ij} \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^j \\ &= \tfrac{2}{m}\left[E - \mathcal{V}(q^i)\right] g_{ij} \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^j \end{aligned}$$

La loi horaire $s'(t)$ selon laquelle ces géodésiques sont décrites au cours du temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{2}{m}\left[E - \mathcal{V}(q^i)\right] \\ \theta(t) &= \tfrac{2}{m} \int \left[E - \mathcal{V}(q^i)\right] \mathrm{d}t \\ s' &= \tfrac{2}{m}\left[E - \mathcal{V}(q^i)\right] t + \theta(t=0) \end{aligned}$$

3 Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes

Considérons un système dynamique à n degrés de liberté. Lorsque les liaisons sont holonomes, parfaites et dépendantes du temps, les configurations possibles pour le système dépendent de l'instant considéré. Nous sommes amenés à substituer à l'espace de configuration, un *espace-temps de configuration*, c.-à-d. une variété à $n+1$ dimensions V_{n+1}, pour laquelle les q^i et le temps q^0 constituent un système de coordonnées. Le point représentatif du système dynamique se déplace en fonction du temps, sur une hypersurface qui se déforme dans le temps.

Remarque 3.1

Le passage à un système de coordonnées en mouvement est traité comme un cas particulier de liaisons holonomes dépendantes du temps. On utilise les mêmes formules mais le nombre de coordonnées ne change pas.

Soit $\mathrm{d}s$ l'élément linéaire de l'espace-temps de configuration,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}q^\alpha \mathrm{d}q^\beta$$

où les indices grecs varient de 0 à n, et où les $g_{\alpha\beta}$ sont fonction des q^λ.

Le vecteur vitesse a pour composantes contravariantes,

$$\forall \alpha = 0, \ldots, n \qquad v^\alpha = \frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^\alpha$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} & \forall i = 1, \ldots, n \\ \dot{q}^0 = 1 \end{cases} \tag{24.12}$$

Le vecteur vitesse a pour composantes covariantes :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, n \qquad v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta = g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta = \dot{q}_\alpha$$

Exprimons l'énergie cinétique à partir de la vitesse et de l'élément linéaire :

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2}\, m \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \end{aligned}$$

Comme pour le cas scléronome :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2T}{m}\,\mathrm{d}t^2$$

En dérivant l'énergie cinétique par rapport à la vitesse :

$$\begin{aligned}\forall\alpha \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right)\\ &= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha} g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + \sum_\alpha\sum_{\beta=\alpha} g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right)\\ &= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha} g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right) + \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\sum_\alpha g_{\alpha\alpha}\,\dot{q}^\alpha\dot{q}^\alpha\right)\\ &= \tfrac{m}{2}\sum_{\beta=\alpha} g_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta + m\sum_\alpha g_{\alpha\alpha}\,\dot{q}^\alpha\\ &= m g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta\\ &= m v_\alpha\end{aligned}$$

Les n composantes p_i de l'impulsion généralisée sont donc encore égales aux produits de la masse avec les n composantes covariantes v_i de la vitesse. La dérivation absolue de la vitesse par rapport au temps donne l'accélération :

$$\begin{aligned}\forall\alpha \qquad a^\alpha &= \frac{Dv^\alpha}{\mathrm{d}t}\\ &= \ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\,\dot{q}^\gamma\dot{q}^\beta\end{aligned}$$

L'accélération a pour composantes covariantes :

$$\begin{aligned}\forall\alpha \qquad a_\alpha &= g_{\alpha\beta}\frac{Dv^\beta}{\mathrm{d}t}\\ &= g_{\alpha\beta}\,\ddot{q}^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}\,\dot{q}^\gamma\dot{q}^\beta\end{aligned}$$

La composante temporelle s'écrit :

$$\begin{aligned}a_0 &= g_{0\beta}\,\ddot{q}^\beta + \Gamma_{0\gamma\beta}\,\dot{q}^\gamma\dot{q}^\beta\\ &= g_{00}\,\ddot{q}^0 + g_{0i}\,\ddot{q}^i + \Gamma_{0ik}\,\dot{q}^i\dot{q}^k + \Gamma_{0i0}\,\dot{q}^i\dot{q}^0 + \Gamma_{00k}\,\dot{q}^0\dot{q}^k + \Gamma_{000}\dot{q}^0\dot{q}^0\end{aligned}$$

Avec (24.12) p. 521,

$$\begin{aligned}\dot{q}^0 &= 1\\ \ddot{q}^0 &= 0\end{aligned}$$

nous avons

$$a_0 = g_{0i}\,\ddot{q}^i + \Gamma_{0ik}\,\dot{q}^i\dot{q}^k + \Gamma_{0i0}\,\dot{q}^i + \Gamma_{00k}\,\dot{q}^k + \Gamma_{000}$$

Avec (22.21) p. 442 donnant les symboles de Christoffel de première espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\begin{cases}\Gamma_{0i0} = \frac{1}{2}\,\partial_i g_{00}\\ \Gamma_{00k} = \frac{1}{2}\,\partial_k g_{00}\\ \Gamma_{000} = \frac{1}{2}\,\partial_0 g_{00}\end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad a_0 = g_{0i}\,\ddot{q}^i + \Gamma_{0ik}\,\dot{q}^i\dot{q}^k + \partial_i g_{00}\dot{q}^i + \tfrac{1}{2}\,\partial_0 g_{00}$$

3.1 Les équations de la dynamique

Quel que soit le type de liaison, scléronome ou rhéonome, le mouvement du système est déterminé par les équations de Lagrange :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i$$

dans lesquelles l'énergie cinétique est maintenant fonction de $\dot{q}^0$. Cherchons l'équation différentielle pour l'indice 0. Effectuons le produit scalaire par $\dot{q}^i$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i - \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\dot{q}^i &= Q_i\dot{q}^i \\
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i\right] - \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\dot{q}^i &= Q_i\dot{q}^i \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\dot{q}^i\right) &= Q_i\dot{q}^i
\end{aligned} \tag{24.13}$$

Réécrivons le premier terme du membre de gauche. L'énergie cinétique est une fonction homogène de degré deux des vitesses généralisées (si les variables, ici les vitesses généralisées, sont multipliées par un scalaire, le résultat est multiplié par ce scalaire au carré) :

$$\begin{aligned}
T\left(\lambda\dot{q}^0, \dots, \lambda\dot{q}^n\right) &= \lambda^2\, T\left(\dot{q}^0, \dots, \dot{q}^n\right) \\
dT(\lambda\dot{q}^\alpha) &= d[\lambda^2\, T(\dot{q}^\alpha)] \\
\frac{\partial T}{\partial(\lambda\dot{q}^\alpha)}\,\mathrm{d}(\lambda\dot{q}^\alpha) &= \mathrm{d}(\lambda^2 T) \\
\frac{\partial T}{\partial(\lambda\dot{q}^\alpha)}\,\frac{\mathrm{d}(\lambda\dot{q}^\alpha)}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}(\lambda^2 T)}{\mathrm{d}\lambda} \\
\frac{\partial T}{\partial(\lambda\dot{q}^\alpha)}\,\dot{q}^\alpha &= 2\lambda\, T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\,\dot{q}^0 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i &= 2T \qquad (\text{pour } \lambda = 1) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i &= 2T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\right) &= 2\,\frac{dT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right)
\end{aligned}$$

Réécrivons le second terme du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
dT\left(\dot{q}^i, \dot{q}^0, q^i, q^0\right) &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\,d\dot{q}^0 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,d\dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^0}\,\mathrm{d}q^0 + \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i \\
\frac{dT}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^0} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i \\
\frac{dT}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial T}{\partial q^0} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i
\end{aligned}$$

Injectons ces deux relations dans (24.13) p. 523 :

$$\begin{aligned} 2\frac{dT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right) - \left(\frac{dT}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial T}{\partial q^0}\right) &= Q_i \dot{q}^i \\ \frac{dT}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right) + \frac{\partial T}{\partial q^0} &= Q_i \dot{q}^i \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^0} &= \frac{dT}{\mathrm{d}t} - Q_i \dot{q}^i \end{aligned}$$

Cette relation remplace celle de conservation de l'énergie que nous avions pour le cas holonome scléronome. L'énergie mécanique ne se conserve plus car les liaisons, variables au cours du temps, effectuent des travaux que nous ne pouvons prévoir explicitement. Nous obtenons les mêmes équations que pour le cas holonome scléronome, ainsi qu'une équation pour la composante temporelle :

$$\begin{cases} ma_i = Q_i & \forall i \\ ma_0 = \dfrac{dT}{\mathrm{d}t} - Q_i \dot{q}^i \end{cases} \tag{24.14}$$

Ces deux équations sont les équations du mouvement de M dans V_{n+1}. Si le mouvement du système a lieu sans forces extérieures exercées sur le système, les n composantes a_i sont nulles, mais a_0 est en général différent de zéro et les trajectoires du point M dans V_{n+1} ne s'interprètent pas géométriquement d'une manière simple.

3.2 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle généralisée

Supposons que toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle généralisée $\mathcal{U}\left(q^0, q^1, \ldots, q^n\right)$ pouvant contenir explicitement le temps q^0. Si l'on introduit le lagrangien

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{U}$$

les équations du mouvement du système deviennent :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0$$

La métrique de la variété V_{n+1} s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}q^\alpha \mathrm{d}q^\beta \\ &= g_{ij} \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^j + 2\, g_{i0}\, \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^0 + g_{00}\, \mathrm{d}q^0 \mathrm{d}q^0 \end{aligned}$$

Choisissons des vecteurs de base orthogonaux entre l'espace et le temps, $\forall i\ g_{i0} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= g_{ij} \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^j + g_{00} \left(\mathrm{d}q^0\right)^2 \\ &= \mathrm{d}s^2 + g_{00} \left(\mathrm{d}q^0\right)^2 \end{aligned}$$

Avec (24.1) p. 514 et en faisant entrer la fonction U dans g_{00} :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^2 &= \frac{2T}{m}\, \mathrm{d}t^2 + g_{00} \left(\mathrm{d}q^0\right)^2 \\ &= \frac{2T}{m}\, \mathrm{d}t^2 - \frac{2U}{m}\, \mathrm{d}t^2 \\ &= \frac{2\mathcal{L}}{m}\, \mathrm{d}t^2 \end{aligned}$$

Les formules (24.14) subsistent avec cette métrique à condition de remplacer les forces par leurs énergies potentielles, c.-à-d., remplacer T par $\mathcal{L}$ et les Q_i par zéro. Les équations du mouvement du point représentatif M dans l'espace V_{n+1} doué de la nouvelle métrique s'écrivent :

$$\begin{cases} a_i = 0 & \forall i \\ ma_0 = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

4 Dynamique classique des milieux continus

4.1 Milieux continus

D'un point de vue microscopique tout milieu est composé de particules. Cependant, en prenant un volume de matière suffisamment grand, nous pouvons nous placer d'un point de vue macroscopique et supposer le milieu continu. Cette approximation est valable pour les fluides en hydrodynamique et pour les solides en théorie de l'élasticité. On utilise donc les mathématiques du continu pour modéliser un milieu physique qui ne l'est pas. Rien de nouveau en cela, en physique l'espace et le temps sont aussi supposés continus, et en mécanique classique les échanges de matière, d'énergie et de quantité de mouvement ou de moment cinétique sont supposés continus.

En relativité, on utilise les milieux continus car la notion de solide n'existe pas, puisqu'elle suppose un déplacement simultané des différentes parties d'un solide soumis à une force de surface. En faisant vibrer ce solide on pourrait transmettre un signal avec une vitesse infinie, en désaccord avec l'existence d'une vitesse limite.

Plaçons-nous dans un référentiel inertiel et étudions l'évolution dans le temps et dans l'espace d'une caractéristique ϕ quelconque d'un milieu continu, sa masse volumique, sa température, sa pression, sa vitesse, son accélération...

Plusieurs points de vue sont possibles :

- du point de vue d'Euler on imagine un volume infinitésimal en un point fixe de notre référentiel, au travers duquel circule le milieu continu. La caractéristique ϕ du milieu continu dans le volume infinitésimal varie dans le temps mais pas dans l'espace
- du point de vue de Lagrange on choisit un volume infinitésimal de matière du milieu continu et l'on suit son évolution dans le temps et dans l'espace. Le volume infinitésimal de matière se déforme au cours du temps. La caractéristique ϕ du milieu continu dans le volume infinitésimal varie dans le temps et dans l'espace. En général la vitesse de l'élément de matière que l'on suit est fonction du temps
- il existe un troisième point de vue qui consiste à se placer dans le référentiel inertiel de repos instantané du volume infinitésimal de matière. Dans ce référentiel la vitesse du volume infinitésimal de matière du milieu continu est nulle, mais son accélération est en général non nulle. La caractéristique ϕ du volume infinitésimal varie dans le temps mais pas dans l'espace. C'est en fait un cas particulier du point de vue d'Euler, dans lequel le référentiel inertiel de l'observateur est choisi de façon à ce que la vitesse instantanée du milieu continu soit nulle.

4.2 Dérivée particulaire

Rapportons l'espace à un système de coordonnées curvilignes quelconques (x^i). Prenons le point de vue de Lagrange, et soient $v^i(t)$ les composantes contravariantes de la vitesse du volume infinitésimal de matière du milieu continu par rapport à l'observateur inertiel :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi[t, x^i(t)] &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i(t) \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\,\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + v^i(t)\,\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v}(t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi) \end{aligned} \tag{24.15}$$

La dérivée particulaire de ϕ nous dit qu'en chaque point du référentiel d'un observateur inertiel, la variation dans le temps de la caractéristique ϕ du milieu continu est due à sa variation locale (en un point fixe) dans le temps et à la vitesse relative $\vec{v}(t)$ de l'observateur par rapport au milieu continu, dans le gradient de ϕ.

4.3 Tenseur des contraintes

Pour étudier l'équilibre des forces dans un milieu continu, considérons le volume à face planes ayant le nombre minimal de faces, le tétraèdre. Nous choisissons un tétraèdre trirectangle (dont trois des quatre faces sont des triangles rectangles), régulier : $a = b = c$ sur la fig. 24.1 ci-dessous.

Rapportons l'espace à un système de coordonnées rectangulaire (x^1, x^2, x^3) et à son repère naturel orthonormé $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dont le centre o est l'orthocentre du tétraèdre.

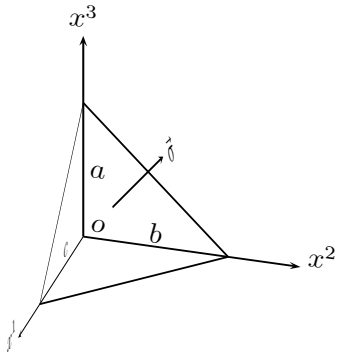


Fig. 24.1 – Tétraèdre trirectangle régulier

Soient $\vec{\mathrm{F}}^1, \vec{\mathrm{F}}^2, \vec{\mathrm{F}}^3$ les forces extérieures s'exerçant respectivement sur les faces appartenant aux plans coordonnées $(x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_2)$. Ces forces mettent le tétraèdre en mouvement accéléré de rotation et de translation. Dans le cas statique, une quatrième force extérieure $\vec{\mathrm{F}}$ exercée sur la base du tétraèdre (face « inclinée ») maintient le tétraèdre immobile :

$$\vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{F}}^1 + \vec{\mathrm{F}}^2 + \vec{\mathrm{F}}^3 = \vec{0}$$

Appelons s, s_1, s_2, s_3 à la fois les faces du tétraèdre et leurs surfaces correspondantes.

Remarque 4.1

Les projections de la base s sur les plans coordonnées $(x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_2)$ sont précisément les surfaces égales s_1, s_2, s_3. Par symétrie, la base fait un angle de 45° avec les autres surfaces :

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad s_i = s\cos(45)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\, s}{2}$$

Soient $\vec{f}, \vec{f}^1, \vec{f}^2, \vec{f}^3$ les vecteurs forces extérieures par unité de surface (elles sont homogènes à une pression) s'exerçant sur chaque faces du tétraèdre :

$$\vec{f}s + \vec{f}^1 s_1 + \vec{f}^2 s_2 + \vec{f}^3 s_3 = \vec{0} \tag{24.16}$$
$$\vec{f} + \frac{\vec{f}^i s_i}{s} = \vec{0}$$

Soit $\vec{\sigma}$ le vecteur unitaire normal à la base, sortant du tétraèdre, de composantes covariantes dans la base $(\vec{e}_i)$:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_i = \sigma_i$$
$$= \frac{s_i}{s}$$

Si bien que

$$\vec{f} + \vec{f}^i \sigma_i = \vec{0} \tag{24.17}$$

Dans la base $(\vec{e}_i)$, posons que le vecteur force par unité de surface $\vec{f}^1$ qui s'exerce sur la face s_1 a pour composantes contravariantes les t^{1i} :

$$\vec{f}^1 = t^{11}\vec{e}_1 + t^{12}\vec{e}_2 + t^{13}\vec{e}_3$$
$$= t^{1i}\vec{e}_i$$

$$\vec{f}^1 \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{12} \\ t^{13} \end{pmatrix}$$

où les t^{1j} sont homogènes à une pression.

Remarque 4.2

Nous aurions pu aussi choisir la convention « contraire » en prenant les trois vecteurs unitaires sortants, normaux aux surfaces s_i, qui forment la base $(\vec{n}_i)$ orthonormée, telle que :

$$\vec{n}_i = -\vec{e}_i$$

Avec cette convention nous aurions écrit

$$\vec{f}^1 = t^{11}\vec{n}_1 + t^{12}\vec{n}_2 + t^{13}\vec{n}_3$$
$$= t^{1j}\vec{n}_j$$

autement dit :

$$\vec{f}^1 = -t^{1j}\vec{e}_j$$

Pour chacune des trois forces :

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad \vec{f}^i = t^{ij}\vec{e}_j$$

De même pour le vecteur force par unité de surface qui s'exerce sur la base :

$$\vec{f} = f^j \vec{e}_j$$

Avec (24.17) p. 527

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -\vec{f}^{\,i}\sigma_i \\ f^j\vec{e}_j &= -t^{ij}\vec{e}_j\sigma_i \\ \forall j = 1,2,3 \qquad f^j &= -t^{ij}\sigma_i \end{aligned} \tag{24.18}$$

donc

$$\vec{f} = -t^{ij}\sigma_i\vec{e}_j$$

Dans la base naturelle $(\vec{e}_j)$, la force par unité de surface $\vec{f}$ a pour composantes contravariantes $-t^{ij}\sigma_i$.

Remarque 4.3

Dans la convention contraire, base $(\vec{n}_i)$, nous aurions :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -t^{ij}\sigma_i\vec{n}_j \\ &= t^{ij}\sigma_i\vec{e}_j \end{aligned}$$

Dans la relation (24.18) p. 528, les f^j sont des composantes contravariantes et les σ_i des composantes covariantes, d'après le critère général de tensorialité 10.1 p. 421, les t^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur, appelé *tenseur des contraintes*. Sous forme matricielle (24.18) p. 528 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Remarque 4.4

Vérifions le caractère tensoriel des t^{ij} en effectuant la transformation de coordonnées de x^i à $x^{i'}$, auquel correspond le changement de base naturelle :

$$\forall j = 1,2,3 \qquad \vec{e}_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\vec{e}_{k'}$$

Le vecteur force par unité de surface se transforme selon :

$$\begin{aligned} -\vec{f} &= t^{ij}\sigma_i\vec{e}_j \\ &= t^{ij}(\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_i)\vec{e}_j \\ &= t^{ij}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\,\vec{e}_{l'}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\vec{e}_{k'} \\ &= t^{ij}\,\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_{l'})\vec{e}_{k'} \end{aligned}$$

Or la force exercée sur la surface s ne dépend pas du système de coordonnées (la force est un vecteur) :

$$\vec{f} = \vec{f}'$$

$$t^{ij}\,\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_{l'})\vec{e}_{k'} = t^{k'l'}(\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_{l'})\vec{e}_{k'}$$

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,t^{ij} = t^{k'l'}$$

D'après le th. 7.1 p. 409, la matrice 3×3 des t^{ij} est un tenseur de composantes deux fois contravariantes.

Cherchons l'expression de la force infinitésimale :

$$\begin{aligned} f^j &= -t^{ij}\sigma_i \\ f^j s &= -t^{ij} s_i \\ \forall j = 1,2,3 \qquad f^j \mathrm{d}s &= -t^{ij}\mathrm{d}s_i \end{aligned} \tag{24.19}$$

Lorsque le fluide est parfait (ni transfert de chaleur, ni viscosité en cisaillement ou en traction-compression) les contraintes sont normales aux surfaces du tétraèdre. Le tenseur des contraintes devenu tenseur des pressions prend la forme suivante,

$$\forall i,j \qquad t^{ij} = \pm p g^{ij}$$

où le scalaire p est la pression du fluide (positive ou nulle) au point (au centre du tétraèdre) et à l'instant considéré, et où les g^{ij} sont les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées choisi. Lorsque ce dernier est orthogonal, le tenseur métrique est diagonal ainsi que celui des pressions. Sur la face s_1 :

$$\begin{aligned} \vec{f}^1 &= t^{1j}\vec{e}_j \\ &= \pm p g^{1j}\vec{e}_j \\ &= \pm p\vec{e}_1 \end{aligned}$$

La force exercée sur le tétraèdre par le fluide parfait extérieur au tétraèdre étant une force entrante, nous conservons le signe positif :

$$\vec{f}^1 = p\vec{e}_1$$

et dans la convention choisie,

$$\forall i,j \qquad t^{ij} = p g^{ij} \tag{24.20}$$

la contrainte normale t^{ii} est positive en compression.

Remarque 4.5

Dans la convention contraire, base $(\vec{n}_i)$:

$$\begin{aligned} \vec{f}^1 &= -t^{1j}\vec{e}_j \\ &= \mp p g^{1j}\vec{e}_j \\ &= \mp p\vec{e}_1 \end{aligned}$$

La force exercée sur le tétraèdre par le fluide parfait extérieur au tétraèdre étant une force entrante, nous conservons le signe positif pour avoir :

$$\vec{f}^1 = p\vec{e}_1$$

et

$$\forall i,j \qquad t^{ij} = -p g^{ij}$$

la contrainte normale t^{ii} est négative en compression.

Pour la force par unité de surface exercée sur la base :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -t^{ij}\sigma_i\vec{e}_j \\ &= -p g^{ij}\sigma_i\vec{e}_j \end{aligned}$$

4.4 Équations de la dynamique des milieux continus

On considère un volume élémentaire $\mathrm{d}v$ de matière du milieu continu, de surface fermée $\mathrm{d}s$, et de masse volumique ρ. On utilise un système de coordonnées rectangulaire et on se place dans le référentiel inertiel de repos instantané de ce volume élémentaire de matière. Notons $\vec{f_v}$ la somme des forces volumiques extérieures par unité de volume s'exerçant sur $\mathrm{d}v$ (force de gravitation et force électromagnétique), et $\vec{f_s}$ la somme des forces surfaciques extérieures par unité de surface s'exerçant également sur $\mathrm{d}v$.

Remarque 4.6

Pour le tétraèdre :

$$\vec{f_s} = \vec{f}s + \vec{f}^1 s_1 + \vec{f}^2 s_2 + \vec{f}^3 s_3$$

4.4.1 Mouvement en translation

Pour le mouvement en translation, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}\rho\mathrm{d}v &= \vec{f_v}\mathrm{d}v + \vec{f_s}\mathrm{d}s \\ \rho\gamma^i\vec{e}_i\mathrm{d}v &= f_v^i\vec{e}_i\mathrm{d}v - f_s^i\vec{e}_i\mathrm{d}s \\ \forall i = 1,2,3 \qquad \rho\gamma^i\mathrm{d}v &= f_v^i\mathrm{d}v - f_s^i ds \end{aligned}$$

(24.18) p. 528 est applicable à toute force de surface :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \rho\gamma^i\mathrm{d}v = f_v^i\mathrm{d}v - t^{ki}\mathrm{d}s_k$$

Intégrons sur un volume V quelconque, de surface S, puis utilisons le théorème de la divergence 6.1 p. 177 dans un système de coordonnées rectilignes :

$$\begin{aligned} \forall i \qquad \iiint_V \left(f_v^i - \rho\gamma^i\right)\mathrm{d}v - \iint_S t^{ki}\mathrm{d}s_k = 0 \\ \iiint_V \left(f_v^i - \rho\gamma^i - \partial_k t^{ki}\right)\mathrm{d}v = 0 \\ f_v^i - \partial_k t^{ki} = \rho\gamma^i \end{aligned} \tag{24.21}$$

Ce sont les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées rectilignes.

4.4.2 Mouvement en rotation - symétrie du tenseur des contraintes

Pour le mouvement en rotation, la somme des moments des forces extérieures par rapport à un point arbitraire de l'espace, est égale au moment des forces d'inertie par rapport à ce même point :

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_v^i\mathrm{d}v - \vec{r}_j \times \vec{f}_s^j\mathrm{d}s = \vec{r} \times \vec{\gamma}\rho\mathrm{d}v$$

Les rayons vecteurs des forces de volume sont tous égaux à $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \left(\vec{f}_v^i - \boldsymbol{\gamma}\rho\right)\mathrm{d}v - \vec{r}_j \times \vec{f}_s^j\mathrm{d}s = \vec{0}$$

En notation indicielle et en intégrant sur un volume quelconque V de surface S, puis en utilisant le théorème de la divergence 6.1 p. 177 :

$$\forall i,j \qquad \iiint_V \left[x^i\left(f_v^j-\rho\gamma^j\right)-x^j\left(f_v^i-\rho\gamma^i\right)\right]\mathrm{d}v-\iint_S\left(x^it^{kj}-x^jt^{ki}\right)ds_k=0$$

$$\iiint_V \left[x^i\left(f_v^j-\rho\gamma^j-\partial_kt^{kj}\right)-x^j\left(f_v^i-\rho\gamma^i-\partial_kt^{ki}\right)\right]\mathrm{d}v-\iiint_V\left(t^{ij}-t^{ji}\right)\mathrm{d}v=0$$

Les relations (24.21) p. 530 montrent que la première intégrale est nulle, il reste :

$$\forall i,j \qquad \iiint_V\left(t^{ij}-t^{ji}\right)\mathrm{d}v=0$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique par rapport à ses deux indices :

$$\boxed{t^{ij}=t^{ji}}$$

4.5 Écriture des équations en fonction de l'impulsion

Les relations (24.21) p. 530 peuvent s'écrire en fonction de la densité volumique d'impulsion. Écrivons l'accélération dans un système de coordonnées rectilignes, puis utilisons (24.15) p. 526 :

$$\begin{aligned}\forall i=1,2,3 \qquad \gamma^i&=\frac{\mathrm{d}\vec{v}^i}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^k\partial_kv^i\end{aligned}$$

La vitesse de l'élément de matière varie localement dans le temps, et il existe un gradient de vitesse dans le milieu continu.

En vue de passer au cas relativiste, plaçons-nous dans le référentiel inertiel instantané $\mathcal{R}_0$ au repos par rapport à l'élément de matière du milieu continu. La vitesse relative est nulle (mais pas sa variation dans le temps ou dans l'espace) :

$$\begin{aligned}\forall i=1,2,3 \qquad \gamma^i&=\frac{\partial v^i}{\partial t}\\\rho\gamma^i&=\frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial t}-v^i\frac{\partial\rho}{\partial t}\\&=\frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial t}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé une seconde fois la nullité des v^i dans le référentiel propre de l'élément de matière du milieu continu. Les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées rectilignes (24.21) p. 530 par unité de volume s'écrivent en fonction de l'impulsion :

$$\forall i=1,2,3 \qquad f_v^i-\partial_kt^{ki}=\partial_t(\rho v^i)$$

Soit $\vec{\bar{p}}$ le 3-vecteur impulsion par unité de volume non relativiste, de composantes contravariantes :

$$\forall i=1,2,3 \qquad \bar{p}^i\overset{\text{def}}{=}\rho v^i \tag{24.22}$$

Les équations de la dynamique et l'équation de continuité (22.42) p. 460 s'écrivent :

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\partial_i\bar{p}^i=0\\\partial_t\bar{p}^i+\partial_kt^{ki}=f_v^i \qquad \forall i=1,2,3\end{cases} \tag{24.23}$$

4.6 Forme générale des équations de la dynamique des milieux continus

Généralisons (24.21) p. 530 à un système de coordonnées curvilignes. Les équations tensorielles

$$\boxed{\forall i = 1,2,3 \qquad f_v^i - \nabla_k t^{ki} = \rho\gamma^i} \tag{24.24}$$

sont invariantes par changement de coordonnées et redonnent (24.21) pour un système de coordonnées rectilignes. Ce sont donc les équations de la dynamique des milieux continus dans un système de coordonnées curvilignes arbitraires.

4.7 Écriture des équations générales en fonction de l'impulsion

Dans (24.24) p. 532, écrivons les forces volumiques d'inertie ($\rho\gamma^i$) en fonction de l'impulsion. Les relations (22.34) p. 454 donnent l'accélération en fonction de la vitesse dans un système de coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned}\forall i = 1,2,3 \qquad \gamma^i &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i{}_{kj} v^k v^j \\ &= \partial_t v^i + v^k \partial_k v^i + \Gamma^i{}_{kj} v^k v^j \\ &= \partial_t v^i + v^k \left(\partial_k v^i + \Gamma^i{}_{kj} v^j\right)\end{aligned}$$

En multipliant par la masse volumique et avec la déf. 6.4 p. 451 de la dérivée covariante :

$$\begin{aligned}\forall i = 1,2,3 \qquad \rho\gamma^i &= \rho\partial_t v^i + \rho v^k \nabla_k v^i \\ &= \frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial t} - v^i \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_k\left(\rho v^k v^i\right) - v^i \nabla_k\left(\rho v^k\right) \\ &= \frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial t} + \nabla_k\left(\rho v^k v^i\right) - v^i\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_k\left(\rho v^k\right)\right]\end{aligned}$$

Avec l'équation de continuité (22.43) p. 460 le dernier terme est nul :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \rho\gamma^i = \partial_t\left(\rho v^i\right) + \nabla_k\left(\rho v^k v^i\right)$$

Remplaçons dans les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées curvilignes (24.24) p. 532 :

$$\boxed{\forall i = 1,2,3 \qquad \partial_t\left(\rho v^i\right) + \nabla_k\left(\rho v^k v^i + t^{ki}\right) = f_v^i} \tag{24.25}$$

Ces trois équations et celle de continuité déterminent la dynamique des milieux continus sous l'action de forces de volume et de surface. Il reste à remplacer les t^{ki} et les f^i par des modèles de forces.

Chapitre 25

COMPLÉMENTS DE RELATIVITÉ RESTREINTE

Sommaire

1 Quadritenseurs 533
2 Principe d'inertie 541
3 Dynamique relativiste des milieux continus 542
4 Forme tensorielle des équations du mouvement 544
5 Principe de moindre action en relativité restreinte 547

1 Quadritenseurs

Par rapport aux transformations purement spatiales, les neuf composantes spatiales d'un 4-tenseur forment un 3-tenseur. Les trois composantes spatio-temporelles A^{01}, A^{02}, A^{03} ainsi que A^{10}, A^{20}, A^{30} forment deux 3-vecteurs. La composante purement temporelle A^{00} est un scalaire tridimensionnel.

1.1 Poussière

On considère N éléments distincts répartis dans l'espace et immobiles les uns par rapport aux autres. Par exemple les atomes ou molécules d'un gaz à une température très proche du zéro absolu. Peu importe ici que l'on parle d'atomes, de molécules ou d'autre chose. En physique, ce modèle de réalité d'un ensemble d'éléments immobiles les uns par rapport aux autres est appelé *poussière*. Nous nous plaçons dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}^0$ comobile avec à la poussière, en un lieu et à un instant précis, au point d'univers appelé évènement E_0. Si l'on prend un petit volume parallélépipédique rectangle $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ de poussière alors, pour un observateur dans $\mathcal{R}^0$, le nombre volumique d'éléments déf. 6.2 p. 181 est donné par :

$$n = \frac{N}{V} \tag{25.1}$$

Remarque 1.1

Dans $\mathcal{R}^0$ le nombre volumique d'éléments de cette poussière dépend de l'endroit que l'on considère (espace), mais pas de l'instant de la mesure (temps) puisque par hypothèse nous sommes dans $\mathcal{R}^0$.

1.2 Densité d'énergie

Reprenons le § 23.13 p 305 sur le 4-vecteur densité numérique-flux. Dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}^0$ momentanément au repos par rapport à la poussière, d'après déf. 24.4 p. 309, l'énergie d'une particule de poussière de masse m vaut $E_0 = mc^2$. D'après (25.1) p. 533, la densité de particule vaut n. La densité volumique d'énergie est donc :

$$\begin{aligned}\rho &= nE_0\\ &= nmc^2\end{aligned}$$

Dans un autre référentiel inertiel $\mathcal{R}'$, d'après (13.65) p. 310 l'énergie d'une particule de poussière de masse m vaut $E = \gamma_v mc^2$, et la densité de particule vaut $n' = \gamma_v n$. La densité volumique d'énergie est donc :

$$\begin{aligned}\rho' &= n'E\\ &= \gamma_v n \gamma_v mc^2\\ &= nm\gamma_v c\gamma_v c\\ &= \frac{\rho}{c^2}\, u^0 u^0\end{aligned}$$

C'est la composante 00 d'un 4-tenseur symétrique appelé 4-tenseur énergie-impulsion.

1.3 Quadritenseur énergie-impulsion

Définition 1.1: Quadritenseur énergie-impulsion

On définit le 4-tenseur énergie-impulsion par :

$$\mathsf{P} = [{}_4\mathrm{p}] \otimes [{}_4\mathrm{N}]$$

On a également

$$\begin{aligned}\mathsf{P} &= m[{}_4\mathrm{u}] \otimes n[{}_4\mathrm{u}]\\ &= \frac{\rho}{c^2}\,[{}_4\mathrm{u}] \otimes [{}_4\mathrm{u}]\end{aligned}$$

En notation indicielle :

$$\forall \alpha, \beta = 0, \ldots, 3 \qquad P^{\alpha\beta} = mnu^\alpha u^\beta$$

P^{00} est la densité d'énergie dans n'importe quel référentiel. Pour les autres composantes :

$$\begin{aligned}\forall i = 1, 2, 3 \qquad P^{0i} &= n\gamma_v cmu^i\\ &= n'cp^i\end{aligned}$$

p^i est la composante selon x^i de la quantité de mouvement relativiste. P^{0i} est donc la densité de quantité de mouvement selon x^i. On peut également écrire

$$\forall i = 1,2,3 \qquad P^{0i} = n'c\frac{p^0 v^i}{\gamma_v c} = \frac{nAv^i \mathrm{d}t p^0}{A\mathrm{d}t}$$

$Av^i\mathrm{d}t$ est le volume de poussière qui traverse une surface d'aire A perpendiculaire à v^i pendant le temps $\mathrm{d}t$. Donc

$$\mathrm{d}n = nAv^i\mathrm{d}t$$

est le nombre infinitésimal de particules qui traversent cette surface, et $\mathrm{d}np^0$ est l'énergie infinitésimale qui traverse cette surface. P^{0i} est par conséquent une énergie par unité d'aire et de temps, c'est le flux d'énergie dans la direction v^i. De la même façon

$$\forall i = 1,2,3 \qquad P^{ji} = n'c\frac{p^j v^i}{\gamma_v c} = \frac{nAv^i \mathrm{d}t p^j}{A\mathrm{d}t}$$

P^{ij} est le flux de la composante j de la quantité de mouvement dans la direction i, ou vice-versa puisque le tenseur est symétrique. Or $\mathrm{d}np^j/\mathrm{d}t$ est la force qui s'exerce sur la surface. Pour P^{ii} la force est perpendiculaire à la surface, c'est une pression, pour P^{ij} $i \neq j$ la force est tangente à la surface c'est une contrainte. P^{ij} est le 3-tenseur des contraintes de la mécanique classique.

1.4 Produit extérieur

Définition 1.2: Produit extérieur

On définit le produit extérieur $\wedge$ du tenseur u par le tenseur v par :

$$\mathsf{u} \wedge \mathsf{v} = \mathsf{u} \otimes \mathsf{v} - \mathsf{v} \otimes \mathsf{u}$$

Le bivecteur obtenu $\mathsf{p} = \mathsf{u} \wedge \mathsf{v}$ est un tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned}\mathsf{v} \wedge \mathsf{u} &= \mathsf{v} \otimes \mathsf{u} - \mathsf{u} \otimes \mathsf{v} \\ &= -(\mathsf{u} \otimes \mathsf{v} - \mathsf{v} \otimes \mathsf{u}) \\ &= -\mathsf{u} \wedge \mathsf{v}\end{aligned}$$

Le produit extérieur généralise le produit vectoriel. Si $\vec{u}(u^i)$ et $\vec{v}(v^i)$ sont deux vecteurs de $\vec{e}_i$, le tenseur p d'ordre deux a pour composantes contravariantes dans $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ les quantités antisymétriques :

$$p^{ij} = u^i v^j - u^j v^i$$

Le produit extérieur de deux vecteurs a les propriétés suivantes :

- Linéarité :

$$\begin{cases}\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z} \\ \alpha\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge \alpha\vec{y} = \alpha(\vec{x} \wedge \vec{y})\end{cases}$$

- Anticommutativité :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$$

- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E_n, les C_n^2 éléments de $\Lambda_n^{(2)}$:

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \qquad i < j$$

constituent une base de $\Lambda_n^{(2)}$.

1.4.1 Quadritenseur antisymétrique

Par rapport aux transformations purement spatiales, les neuf composantes spatiales d'un 4-tenseur antisymétrique forment un 3-tenseur antisymétrique. Les composantes de ce 3-tenseur antisymétrique peuvent s'exprimer sous la forme d'un vecteur axial tridimensionnel. Les trois composantes spatio-temporelles non nulles restantes forment, par rapport aux transformations purement spatiales, un vecteur polaire tridimensionnel. On peut donc toujours écrire le 4-tenseur antisymétrique sous la forme

$$[{}_4\mathsf{A}] \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_x & a_y \\ -p_y & a_x & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

où, vis à vis des transformations spatiales, $\mathbf{p}$ est un vecteur polaire et $\mathbf{a}$ est un vecteur axial. En composantes contravariantes

$$[{}_4\mathsf{A}](\mathbf{p}, \mathbf{a})$$

et en composantes covariantes

$$[{}_4\mathsf{A}](-\mathbf{p}, \mathbf{a})$$

1.5 Quadritenseur moment cinétique

Définition 1.3: Quadritenseur moment cinétique

On définit le 4-tenseur moment cinétique d'un mobile dans un référentiel quelconque, comme le produit extérieur de la 4-position par la 4-impulsion :

$$[{}_4\mathsf{L}] \overset{\text{def}}{=} [{}_4\mathrm{r}] \wedge [{}_4\mathrm{p}]$$

$[{}_4\mathsf{L}]$ a pour composantes deux fois contravariantes :

$$L^{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \left(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha \right)$$

En notation matricielle :

$$L^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} 0 & ctp^x - x\gamma_v mc & ctp^y - y\gamma_v mc & ctp^z - z\gamma_v mc \\ -(ctp^x - x\gamma_v mc) & 0 & xp^y - yp^x & xp^z - zp^x \\ -(ctp^y - y\gamma_v mc) & -(xp^y - yp^x) & 0 & yp^z - zp^y \\ -(ctp^z - z\gamma_v mc) & -(xp^z - zp^x) & -(yp^z - zp^y) & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 1.2

En mécanique classique, le moment cinétique est un *pseudovecteur* (ou vecteur *axial*, par opposition aux « vrais » vecteurs dits *polaires*). Un pseudovecteur s'écrit comme produit vectoriel de deux vecteurs polaires. Contrairement aux vecteurs polaires, ils changent de signe par réflexion dans un miroir (symétrie par rapport à un plan), et ne changent pas de signe par réflexion du système de coordonnées (changement de signe de toutes les coordonnées).

Remarque 1.3

Une conséquence de ce changement de signe est que le produit scalaire d'un vecteur polaire par un vecteur axial donne un pseudo-scalaire, qui change de signe par réflexion dans un miroir.

$$\vec{L}\begin{pmatrix} yp^z - zp^y \\ zp^x - xp^z \\ xp^y - yp^x \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \vec{p}\begin{pmatrix} p^x \\ p^y \\ p^z \end{pmatrix}$$

En remplaçant le produit vectoriel par le produit extérieur,

$$\mathsf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \wedge \vec{p}$$

de composantes

$$L^{jk} = x^j p^k - x^k p^j$$

on voit que le pseudo-vecteur moment cinétique est le dual du tenseur antisymétrique d'ordre deux :

$$\mathsf{L}\begin{bmatrix} 0 & xp^y - yp^x & xp^z - zp^x \\ -(xp^y - yp^x) & 0 & yp^z - zp^y \\ -(xp^z - zp^x) & -(yp^z - zp^y) & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{L}\begin{bmatrix} 0 & L^z & -L^y \\ -L^z & 0 & L^x \\ L^y & -L^x & 0 \end{bmatrix}$$

On écrit alors les trois composantes indépendantes sous la forme d'un pseudovecteur L^i en posant :

$$L^i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk} L^{jk}$$

où ε_{ijk} est le symbole d'antisymétrie tridimensionnel (tenseur unitaire d'ordre trois parfaitement antisymétrique), déf. 4.2 p. 20.

1.5.1 Conservation du quadritenseur moment cinétique

La somme des 4-tenseurs moment cinétique se conserve lors d'une interaction, autrement dit le 4-tenseur moment cinétique d'un système isolé se conserve dans le temps et les 4-tenseurs moment cinétique sont additifs. Le 4-tenseur moment cinétique d'un système constitué de N sous-sytèmes s'écrit :

$$[{}_4\mathsf{L}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} [{}_4\mathrm{r}]_i \wedge [{}_4\mathrm{p}]_i$$

1.6 Transformation des composantes d'un quadritenseur

1.6.1 Transformation des composantes contravariantes

On utilise la loi de transformation des composantes contravariantes d'un tenseur (21.9) p. 401, où la matrice de transformation est la matrice de Lorentz Λ déf. 12.3 p. 237 :

$$t^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma}\,\Lambda^{\beta'}_{\delta}\,t^{\gamma\delta}$$

Les éléments non nuls de la matrice sont les suivants :

$$\begin{cases} \Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \gamma_e \\ \Lambda^0_1 = \Lambda^1_0 = -\gamma_e\beta_e \\ \Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = 1 \end{cases}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} t^{0'0'} &= \Lambda^{0'}_{\gamma}\Lambda^{0'}_{\delta}t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{0'}_{0}\Lambda^{0'}_{0}t^{00} + \Lambda^{0'}_{0}\Lambda^{0'}_{1}t^{01} + \Lambda^{0'}_{1}\Lambda^{0'}_{0}t^{10} + \Lambda^{0'}_{1}\Lambda^{0'}_{1}t^{11} \\ &= \gamma_e^2 t^{00} - \gamma_e^2\beta_e t^{01} - \gamma_e^2\beta_e t^{10} + (\gamma_e\beta_e)^2 t^{11} \\ &= \gamma_e^2\left[t^{00} - \beta_e(t^{01} + t^{10}) + \beta_e^2 t^{11}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'0'} &= \Lambda^{1'}_{\gamma}\Lambda^{0'}_{\delta}t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{1'}_{0}\Lambda^{0'}_{0}t^{00} + \Lambda^{1'}_{0}\Lambda^{0'}_{1}t^{01} + \Lambda^{1'}_{1}\Lambda^{0'}_{0}t^{10} + \Lambda^{1'}_{1}\Lambda^{0'}_{1}t^{11} \\ &= -\gamma_e^2\beta_e t^{00} + (\gamma_e\beta_e)^2 t^{01} + \gamma_e^2 t^{10} - \gamma_e^2\beta_e t^{11} \\ &= \gamma_e^2\left[\beta_e^2 t^{01} + t^{10} - \beta_e(t^{00} + t^{11})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'1'} &= \Lambda^{1'}_{\gamma}\Lambda^{1'}_{\delta}t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{1'}_{0}\Lambda^{1'}_{0}t^{00} + \Lambda^{1'}_{0}\Lambda^{1'}_{1}t^{01} + \Lambda^{1'}_{1}\Lambda^{1'}_{0}t^{10} + \Lambda^{1'}_{1}\Lambda^{1'}_{1}t^{11} \\ &= (\gamma_e\beta_e)^2 t^{00} - \gamma_e^2\beta_e t^{01} - \gamma_e^2\beta_e t^{10} + \gamma_e^2 t^{11} \\ &= \gamma_e^2\left[\beta_e^2 t^{00} - \beta_e(t^{01} + t^{10}) + t^{11}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'2'} &= \Lambda^{2'}_{\gamma}\Lambda^{2'}_{\delta}t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{2'}_{2}\Lambda^{2'}_{2}t^{22} \\ &= t^{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{3'3'} &= \Lambda^{3'}_{\gamma}\Lambda^{3'}_{\delta}t^{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{3'}_{3}\Lambda^{3'}_{3}t^{33} \\ &= t^{33} \end{aligned}$$

1.6.2 Transformation des composantes covariantes

On utilise la loi de transformation des composantes covariantes d'un tenseur (21.11) p. 403, où d'après le § 6.1 p. 76, la matrice de transformation est la transposée de la matrice de Lorentz inverse. La matrice de Lorentz étant symétrique, nous pouvons oublier la transposition et prendre la matrice de Lorentz inverse $\bar{\Lambda}$ (13.18) p. 238 :

$$t_{\alpha'\beta'} = \bar{\Lambda}^{\gamma}_{\alpha'}\bar{\Lambda}^{\delta}_{\beta'}t_{\gamma\delta}$$

Les éléments non nuls de la matrice inverse sont les suivants :

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}^0_0 = \bar{\Lambda}^1_1 = \gamma_e \\ \bar{\Lambda}^0_1 = \bar{\Lambda}^1_0 = \gamma_e\beta_e \\ \bar{\Lambda}^2_2 = \bar{\Lambda}^3_3 = 1 \end{cases}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}
t_{0'0'} &= \bar{\Lambda}^{\gamma}_{0'}\bar{\Lambda}^{\delta}_{0'}t_{\gamma\delta} \\
&= \bar{\Lambda}^{0}_{0'}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t_{00} + \bar{\Lambda}^{0}_{0'}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t_{01} + \bar{\Lambda}^{1}_{0'}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t_{10} + \bar{\Lambda}^{1}_{0'}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t_{11} \\
&= \gamma_e^2 t_{00} + \gamma_e^2\beta_e t_{01} + \gamma_e^2\beta_e t_{10} + (\gamma_e\beta_e)^2 t_{11} \\
&= \gamma_e^2\left[t_{00} + \beta_e(t_{01} + t_{10}) + \beta_e^2 t_{11}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{1'0'} &= \bar{\Lambda}^{\gamma}_{1'}\bar{\Lambda}^{\delta}_{0'}t_{\gamma\delta} \\
&= \bar{\Lambda}^{0}_{1'}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t_{00} + \bar{\Lambda}^{0}_{1'}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t_{01} + \bar{\Lambda}^{1}_{1'}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t_{10} + \bar{\Lambda}^{1}_{1'}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t_{11} \\
&= +\gamma_e^2\beta_e t_{00} + (\gamma_e\beta_e)^2 t_{01} + \gamma_e^2 t_{10} + \gamma_e^2\beta_e t_{11} \\
&= \gamma_e^2\left[\beta_e^2 t_{01} + t_{10} + \beta_e(t_{00} + t_{11})\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{1'1'} &= \bar{\Lambda}^{\gamma}_{1'}\bar{\Lambda}^{\delta}_{1'}t_{\gamma\delta} \\
&= \bar{\Lambda}^{0}_{1'}\bar{\Lambda}^{0}_{1'}t_{00} + \bar{\Lambda}^{0}_{1'}\bar{\Lambda}^{1}_{1'}t_{01} + \bar{\Lambda}^{1}_{1'}\bar{\Lambda}^{0}_{1'}t_{10} + \bar{\Lambda}^{1}_{1'}\bar{\Lambda}^{1}_{1'}t_{11} \\
&= (\gamma_e\beta_e)^2 t_{00} + \gamma_e^2\beta_e t_{01} + \gamma_e^2\beta_e t_{10} + \gamma_e^2 t_{11} \\
&= \gamma_e^2\left[\beta_e^2 t_{00} + \beta_e(t_{01} + t_{10}) + t_{11}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{2'2'} &= \bar{\Lambda}^{\gamma}_{2'}\bar{\Lambda}^{\delta}_{2'}t_{\gamma\delta} \\
&= \bar{\Lambda}^{2}_{2'}\bar{\Lambda}^{2}_{2'}t_{22} \\
&= t_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{3'3'} &= \bar{\Lambda}^{\gamma}_{3'}\bar{\Lambda}^{\delta}_{3'}t_{\gamma\delta} \\
&= \bar{\Lambda}^{3}_{3'}\bar{\Lambda}^{3}_{3'}t_{33} \\
&= t_{33}
\end{aligned}$$

Une seconde méthode consiste à trouver les composantes deux fois covariantes du 4-tenseur grâce à (21.8) p. 397, en prenant pour tenseur métrique le tenseur de Minkowski (13.8) p. 231 (en convention de genre temps) :

$$t_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}t^{\gamma\delta}$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{cases}
t_{00} = \eta_{00}\eta_{00}t^{00} \\
t_{01} = \eta_{00}\eta_{11}t^{01} \\
t_{11} = \eta_{11}\eta_{11}t^{11} \\
t_{02} = \eta_{00}\eta_{22}t^{02} \\
t_{22} = \eta_{22}\eta_{22}t^{22} \\
t_{03} = \eta_{00}\eta_{33}t^{03} \\
t_{33} = \eta_{33}\eta_{33}t^{33}
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
t_{00} = t^{00} \\
t_{01} = -t^{01} \\
t_{11} = t^{11} \\
t_{02} = -t^{02} \\
t_{22} = t^{22} \\
t_{03} = -t^{03} \\
t_{33} = t^{33}
\end{cases}$$

On remplace alors dans le § 1.6.1 précédent.

1.6.3 Transformation des composantes mixtes

$$t^{\alpha'}{}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\gamma}\bar{\Lambda}^{\delta}_{\beta'}t^{\gamma}{}_{\delta}$$

$$\begin{aligned}
t^{0'}{}_{0'} &= \Lambda^{0'}_{\gamma}\bar{\Lambda}^{\delta}_{0'}t^{\gamma}{}_{\delta} \\
&= \Lambda^{0'}_{0}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t^{0}{}_{0} + \Lambda^{0'}_{0}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t^{0}{}_{1} + \Lambda^{0'}_{1}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t^{1}{}_{0} + \Lambda^{0'}_{1}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t^{1}{}_{1} \\
&= \gamma_e^2 t^{0}{}_{0} + \gamma_e^2\beta_e t^{0}{}_{1} - \gamma_e^2\beta_e t^{1}{}_{0} + (\gamma_e\beta_e)^2 t^{1}{}_{1} \\
&= \gamma_e^2\left[t^{0}{}_{0} + \beta_e\left(t^{0}{}_{1} - t^{1}{}_{0}\right) + \beta_e^2 t^{1}{}_{1}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^{1'}{}_{0'} &= \Lambda^{1'}_{\gamma}\bar{\Lambda}^{\delta}_{0'}t^{\gamma}{}_{\delta} \\
&= \Lambda^{1'}_{0}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t^{0}{}_{0} + \Lambda^{1'}_{0}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t^{0}{}_{1} + \Lambda^{1'}_{1}\bar{\Lambda}^{0}_{0'}t^{1}{}_{0} + \Lambda^{1'}_{1}\bar{\Lambda}^{1}_{0'}t^{1}{}_{1} \\
&= -\gamma_e^2\beta_e t^{0}{}_{0} - (\gamma_e\beta_e)^2 t^{0}{}_{1} + \gamma_e^2 t^{1}{}_{0} + \gamma_e^2\beta_e t^{1}{}_{1} \\
&= \gamma_e^2\left[t^{1}{}_{0} - \beta_e^2 t^{0}{}_{1} + \beta_e(t^{1}{}_{1} - t^{0}{}_{0})\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^{1'}{}_{1'} &= \Lambda^{1'}_{\gamma}\bar{\Lambda}^{\delta}_{1'}t^{\gamma}{}_{\delta} \\
&= \Lambda^{1'}_{0}\bar{\Lambda}^{0}_{1'}t^{0}{}_{0} + \Lambda^{1'}_{0}\bar{\Lambda}^{1}_{1'}t^{0}{}_{1} + \Lambda^{1'}_{1}\bar{\Lambda}^{0}_{1'}t^{1}{}_{0} + \Lambda^{1'}_{1}\bar{\Lambda}^{1}_{1'}t^{1}{}_{1} \\
&= -(\gamma_e\beta_e)^2 t^{0}{}_{0} - \gamma_e^2\beta_e t^{0}{}_{1} + \gamma_e^2\beta_e t^{1}{}_{0} + \gamma_e^2 t^{1}{}_{1} \\
&= \gamma_e^2\left[-\beta_e^2 t^{0}{}_{0} + \beta_e(t^{1}{}_{0} - t^{0}{}_{1}) + t^{1}{}_{1}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^{2'}{}_{2'} &= \Lambda^{2'}_{\gamma}\bar{\Lambda}^{\delta}_{2'}t^{\gamma}{}_{\delta} \\
&= \Lambda^{2'}_{2}\bar{\Lambda}^{2}_{2'}t^{2}{}_{2} \\
&= t^{2}{}_{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^{3'}{}_{3'} &= \Lambda^{3'}_{\gamma}\bar{\Lambda}^{\delta}_{3'}t^{\gamma}{}_{\delta} \\
&= \Lambda^{3'}_{3}\bar{\Lambda}^{3}_{3'}t^{3}{}_{3} \\
&= t^{3}{}_{3}
\end{aligned}$$

1.6.4 Vecteur moment de masse relativiste

On définit le vecteur moment de masse relativiste $\mathbf{N}$ (cf. (3.7) p. 151) :

$$\mathbf{N}\begin{pmatrix}\frac{L^{01}}{c}\\ \frac{L^{02}}{c}\\ \frac{L^{03}}{c}\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N}(t\mathbf{p}_i - \gamma_v m_i\mathbf{r}_i)$$

On notera :

$$[{}_4\mathsf{L}] = (c\mathbf{N}, \mathsf{L})$$

La conservation du 4-moment cinétique total $[{}_4\mathrm{L}]$ d'un système isolé signifie que chacune de ses composantes ne varie pas dans le temps tant que le système reste isolé. En particulier le

3-vecteur $\mathbf{N}$ est constant dans le temps. En divisant par l'énergie totale relativiste du système (déf. 24.6 p. 310) $E = \sum_{i=1}^{N} E_i$, qui est également conservative, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} (t\mathbf{p}_i) - \sum_{i=1}^{N} (\gamma_v m_i \mathbf{r}_i) &= \vec{\mathrm{C}}^{\,ste} \\
\frac{\sum_{i=1}^{N} (c^2 t\mathbf{p}_i)}{E} - \frac{\sum_{i=1}^{N} (\gamma_v m_i c^2 \mathbf{r}_i)}{E} &= \vec{\mathrm{C}}^{\,ste} \\
\frac{c^2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{E}\, t - \frac{\sum_{i=1}^{N} (E_i \mathbf{r}_i)}{E} &= \vec{\mathrm{C}}^{\,ste} \\
\frac{\sum_{i=1}^{N} (E_i \mathbf{r}_i)}{E} &= \frac{c^2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{E}\, t - \vec{\mathrm{C}}^{\,ste}
\end{aligned}$$

Le centre d'inertie relativiste du système est le point de vecteur position :

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (E_i \mathbf{r}_i)}{E}$$

Il est animé d'un mouvement uniforme de 3-vecteur vitesse constant :

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{E}$$

Lorsque les vitesses des éléments constituants le système sont petites devant c, pour chaque élément i nous avons $E_i \approx m_i c^2$, si bien que l'on retrouve l'expression classique

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (m_i \mathbf{r}_i)}{M}$$

où $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ est la masse totale du système.

2 Principe d'inertie

Considérons un mobile en mouvement dans $\mathbb{M}$ avec une vitesse inférieure à c, donc pour lequel $\mathrm{d}s^2 > 0$ d'après (13.7) p. 229. L'équation de son mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est défini par la donnée de ses coordonnées galiléennes réduites x^α (déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219) en fonction d'un paramètre temporel (pour la trajectoire nous pouvons prendre un paramètre quelconque). Prenons pour paramètre le temps propre τ de ce mobile, c.-à-d. l'intervalle s au facteur c près. Nous avons alors :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad x^\alpha = x^\alpha(\tau)$$

Avec ce choix de paramètre, d'après la déf. 13.47 p. 281 sa 4-vitesse a pour composantes contravariantes :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad u^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}$$

Le 3-vecteur vitesse d'espace $\mathbf{v}$ de ce mobile libre dans $\mathcal{R}$, ou vélocité (déf. 23.3 p. 274), a pour composantes contravariantes

$$\forall i = 1, \ldots, 3 \qquad v^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

où t est le temps propre de $\mathcal{R}$. Séparons les parties temporelle et spatiale de la 4-vitesse $[{}_4\mathrm{u}]$ de ce mobile dans $\mathcal{R}$:

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \begin{cases} u^0 = \dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \\ u^i = \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^0 = c\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \\ u^i = v^i\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^0 = c\,\gamma(v) \\ u^i = v^i\,\gamma(v) \end{cases}$$

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la vélocité du mobile libre est constante dans le temps t de $\mathcal{R}$, la norme v de la vélocité étant constante, le facteur de dilatation temporelle $\gamma(v)$ est constant et la vélocité est constante dans le temps propre τ du mobile :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \begin{cases} v = c^{ste} \\ v^i = c^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^0 = c^{ste} \\ u^i = c^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = 0 \end{cases} \tag{25.2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall \alpha = 0,\ldots,3 \qquad \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{25.3}$$

Autrement dit, la 4-accélération du mobile libre dans $\mathcal{R}$ est nulle. Dans l'espace plat de la relativité restreinte (symboles de Christoffel nuls), d'après le th. 2.1 p. 428, un mobile d'accélération nulle décrit une géodésique de l'espace-temps de métrique donnée par la déf. 9.1 p. 229. Nous pouvons à présent écrire le principe d'inertie en relativité resteinte :

Un mobile libre admet pour trajectoire d'univers une géodésique de $\mathbb{M}$ *pour laquelle le* $\mathrm{d}s^2$ *est positif (dans la convention de genre temps* (13.5) *p. 227 choisie).*

Les géodésiques pour lesquelles $\mathrm{d}s^2 = 0$ sont parcourues à la vitesse c, elles correspondent aux rayons lumineux si l'on suppose que la lumière se propage à la vitesse limite. Elles sont dites *nulles* ou *isotropes*.

3 Dynamique relativiste des milieux continus

Nous nous plaçons dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}_0$ momentanément au repos par rapport au milieu continu (référentiel comobile), en un lieu et à un instant précis, c.-à-d. en un point d'univers donné appelé évènement P_0. En ce point les composantes de la 3-vélocité du milieu dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ sont nulles, en revanche les dérivées de ces composantes peuvent être non nulles. Nous choisissons un système de coordonnées rectangulaires.

En dynamique relativiste toutes les formes d'énergie apportent leur contribution au 4-vecteur 4-impulsion. Or les énergies s'additionnent, nous devons donc raisonner en termes d'énergie. Dans les équations de la dynamique classique des milieux continus (24.23) p. 531, le 3-vecteur impulsion volumique non relativiste $\bar{\mathbf{p}}$ ne contient que le terme de masse volumique ρ dans (24.22) p. 531, auquel correspond l'énergie de masse par unité de volume en relativité. Multiplions la définition du 3-vecteur impulsion volumique non relativiste (24.22) p. 531 par c^2 pour faire apparaitre l'énergie de masse (on utilise la déf. 24.4 p. 309 de l'énergie au repos, $E_0 = mc^2$) :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad c^2 \bar{p}^i = \rho c^2 v^i$$

où ρ est la masse volumique propre, celle mesurée dans le référentiel propre $\mathcal{R}_0$. Pour former la 4-impulsion relativiste nous devons aussi prendre en compte l'énergie des contraintes mécanique. En revanche, nous supposons l'absence de champ électromagnétique.

Le travail par unité de temps de la force de contrainte est son produit scalaire euclidien par la vitesse de l'élément de matière considéré. À partir de (24.19) p. 529 :

$$v_j F^j \mathrm{d}s = -v_j t^{ij} \mathrm{d}s_i$$

Remarque 3.1

Les composantes covariante v_j sont nulles mais la substitution se fera à la fin. De même que lorsque l'on écrit la relation fondamentale de la dynamique $\sum \mathbf{F} = \mathrm{d}(m\mathbf{v})/\mathrm{d}t$ la vitesse peut être nulle sans que l'accélération le soit.

Au terme $\rho c^2 v^i$ homogène à une énergie par unité de temps et de surface correspond le terme de mêmes dimensions $v_j t^{ij}$. La partie spatiale du 4-vecteur densité volumique d'impulsion relativiste $[{}_4\bar{\mathrm{p}}]$ a alors pour composantes contravariantes :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad p^i = \rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j$$

Exemple 3.1: Densité volumique d'impulsion relativiste

La pression p est homogène à une densité volumique d'énergie. En mécanique classique, l'énergie infinitésimale contenue dans un volume élémentaire dv (volume infinitésimal d'ordre un) de fluide parfait à la pression p a pour expression

$$\mathrm{d}E = -p\mathrm{d}v$$

Lorsque $\mathrm{d}v$ est positif le système fournit de l'énergie mécanique au milieu extérieur, il perd de l'énergie et $\mathrm{d}E$ est négatif, d'où le signe négatif. Cette relation donne

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{d}Ev^i &= -pv^i\mathrm{d}v \\ &= -pg^{ij}v_j\mathrm{d}v \\ &= -t^{ij}v_j\mathrm{d}v \end{aligned}$$

En relativité, avec $dm = \rho dv$:

$$\mathrm{d}E = \rho\mathrm{d}vc^2 - p\mathrm{d}v$$

Avec (24.20) p. 529 pour un fluide parfait, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,3 \qquad \mathrm{d}Ev^i &= (\rho c^2 v^i - pv^i)\mathrm{d}v \\ \frac{\mathrm{d}Ev^i}{c^2} &= \left(\rho v^i - \frac{1}{c^2} pg^{ij}v_j\right)\mathrm{d}v \\ p^i &= \rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j \end{aligned}$$

Les composantes spatiales de la 4-impulsion $[{}_4\mathrm{p}]$ sont nulles en P_0 mais il n'en est pas de même de leurs dérivées. Les équations de la dynamique classique des milieux continus (24.23) p. 531 deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i \left(\rho v^i - \dfrac{1}{c^2} t^{ij} v_j\right) = 0 \\ \partial_t \left(\rho v^i - \dfrac{1}{c^2} t^{ij} v_j\right) + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

En tenant compte de la nullité des v^i en P_0, $v^i \partial_t \rho = 0$ et $v_j \partial_t t^{ij} = 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_i v^i - \dfrac{1}{c^2} \partial_i t^{ij} v_j = 0 \\ \rho \partial_t v^i - \dfrac{1}{c^2} t^{ij} \partial_t v_j + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Introduisons la variable $x^0 = ct$ dont la différentielle est $dx^0 = cdt$:

$$\begin{cases} c\partial_0\rho + \rho\partial_i v^i - \dfrac{1}{c^2}\,\partial_i t^{ij} v_j = 0 \\ c\rho\partial_0 v^i - \dfrac{1}{c}\,t^{ij}\partial_0 v_j + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases} \tag{25.4}$$

4 Forme tensorielle des équations du mouvement

Il s'agit d'écrire les équations de la dynamique relativiste des milieux continus (25.4) dans l'espace-temps de la relativité, c.-à-d. sous forme de 4-vecteurs et de 4-tenseurs. Nous introduisons le 4-tenseur d'univers symétrique T de composantes deux fois contravariantes $T^{\alpha\beta}$ qui généralise le tenseur des contraintes du § 4.3 p. 526. Dans le référentiel inertiel de repos instantané $\mathcal{R}_0$ et au point d'univers P_0, ce tenseur a pour composantes :

$$\forall i,k = 1,2,3 \qquad T^{ik} = t^{ik} \qquad ; \qquad \forall i = 1,2,3 \qquad T^{i0} = T^{0i} = T^{00} = 0$$

$$\mathsf{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ 0 & t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ 0 & t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{bmatrix}$$

Les indices latins varient de un à trois, les indices grecs de zéro à trois, l'indice zéro désignant la composante temporelle. Nous introduisons également le 4-vecteur force d'univers par unité de volume, qui a pour composantes dans $\mathcal{R}_0$ en P_0 :

$$\forall i \qquad \phi^i = f^i \qquad ; \qquad \phi^0 = 0$$

$$[{}_4\phi] \begin{bmatrix} 0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}$$

ainsi que la 4-vitesse (13.47) p. 281

$$\forall i \qquad u^i = \gamma v^i \qquad ; \qquad u^0 = \gamma c$$

qui a pour composantes dans $\mathcal{R}_0$ en P_0 :

$$\forall i \qquad u^i = 0 \qquad ; \qquad u^0 = c$$

Montrons que (25.4) p. 544 s'écrivent

$$\boxed{\forall \alpha = 0,\ldots,3 \qquad \nabla_\beta \left(\rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}\right) = \phi^\alpha} \tag{25.5}$$

Détaillons ces quatres relations :

$$\forall i = 1,2,3 \quad \begin{cases} \nabla_\beta \left(\rho u^0 u^\beta + T^{0\beta}\right) = \phi^0 \\ \nabla_\beta \left(\rho u^i u^\beta + T^{i\beta}\right) = \phi^i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla_\beta \left(\rho u^0 u^\beta\right) + \nabla_k T^{0k} + \nabla_0 T^{00} = 0 \\ \nabla_\beta \left(\rho u^i u^\beta\right) + \nabla_0 T^{i0} + \nabla_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

En coordonnées rectilignes :

$$\begin{cases} \partial_\beta \left(\rho u^0 u^\beta\right) + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \partial_\beta \left(\rho u^i u^\beta\right) + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^0 u^\beta \partial_\beta \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^0 + \rho u^0 \partial_\beta u^\beta + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ u^i u^\beta \partial_\beta \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^i + \rho u^i \partial_\beta u^\beta + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Nous avons aussi les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\beta u^\beta = \partial_0 u^0 + \partial_k u^k \\ u^\beta \partial_\beta \rho = u^0 \partial_0 \rho + u^i \partial_i \rho \\ u^\beta \partial_\beta u^i = u^0 \partial_0 u^i + u^i \partial_i u^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Dans $\mathcal{R}_0$ avec (25.3) p. 542 ($\forall i \ u^i = 0, \ u^0 = c, \ \partial_0 u^0 = 0$), ces trois relations deviennent :

$$\begin{cases} \partial_\beta u^\beta = \partial_k u^k \\ u^\beta \partial_\beta \rho = c \partial_0 \rho \\ u^\beta \partial_\beta u^i = c \partial_0 u^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Remplaçons :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + \rho c \partial_k u^k + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ u^i c \partial_0 \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^i + \rho u^i \partial_\beta u^\beta + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

De nouveau avec (25.3) p. 542 ($\forall i \ u^i = 0, \ u^0 = c$) :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + \rho c \partial_i u^i + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \rho c \partial_0 u^i + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Par hypothèse $\forall \alpha \ T^{\alpha 0} = 0$:

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad T^{\alpha\beta} u_\beta &= T^{\alpha 0} u_0 + T^{\alpha j} u_j \\ &= 0 \end{aligned} \tag{25.6}$$

Les tenseurs et vecteurs ayant une existence propre indépendante de tout référentiel, cette relation vraie dans $\mathcal{R}_0$ est vraie dans tout référentiel. Cette relation donne :

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad T^{\alpha 0} c + T^{\alpha j} u_j &= 0 \\ T^{\alpha 0} c &= -T^{\alpha j} u_j \\ \forall \alpha, \beta = 0, \ldots, 3 \qquad c \partial_\beta T^{\alpha 0} &= -\partial_\beta T^{\alpha j} u_j \end{aligned}$$

Séparons les parties spatiale et temporelle :

$$\forall \alpha \quad \begin{cases} c \partial_k T^{\alpha 0} = -\partial_k T^{\alpha j} u_j \\ c \partial_0 T^{\alpha 0} = -\partial_0 T^{\alpha j} u_j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c \partial_k T^{k0} = -\partial_k T^{kj} u_j \quad \forall \alpha = k \\ c \partial_0 T^{i0} = -\partial_0 T^{ij} u_j \quad \forall i \\ c \partial_0 T^{00} = -\partial_0 T^{0j} u_j = -u_j \partial_0 T^{0j} - T^{0j} \partial_0 u_j = 0 \end{cases}$$

Avec ces relations (T est symétrique par hypothèse) :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + c \rho \partial_i u^i - \dfrac{1}{c} \partial_k T^{kj} u_j = 0 \\ c \rho \partial_0 u^i - \dfrac{1}{c} T^{ij} \partial_0 u_j + \partial_k T^{ik} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Or, nous avons également (dans $\mathcal{R}_0$, $\gamma = 1$) :

$$\begin{cases} \partial_i u^i = \gamma \partial_i v^i + v^i \partial_i \gamma \\ \partial_0 u^i = \gamma \partial_0 v^i + v^i \partial_0 \gamma \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_i u^i = \gamma \partial_i v^i \\ \partial_0 u^i = \gamma \partial_0 v^i \quad \forall i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_i u^i = \partial_i v^i \\ \partial_0 u^i = \partial_0 v^i \quad \forall i \end{cases}$$

Nous retrouvons (25.4) p. 544, ce qui achève la démonstration :

$$\begin{cases} c\partial_0 \rho + \rho \partial_i v^i - \dfrac{1}{c^2} \partial_i t^{ij} v_j = 0 \\ c\rho \partial_0 v^i - \dfrac{1}{c} t^{ij} \partial_0 v_j + \partial_k t^{ik} = f^i \qquad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Les relations (25.5) p. 544 s'écrivent :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad \nabla_\beta P^{\alpha\beta} = \phi^\alpha \tag{25.7}$$

où l'on a posé

$$\boxed{\forall \alpha, \beta = 0, \ldots, 3 \qquad P^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}} \tag{25.8}$$

Le tenseur symétrique $P^{\alpha\beta}$ est le 4-tenseur *énergie-impulsion* du milieu continu considéré. Le 4-produit scalaire avec la 4-vitesse s'écrit, en utilisant (25.6) p. 545 :

$$\begin{aligned} \forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad P^{\alpha\beta} u_\beta &= \left(\rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta} \right) u_\beta \\ &= \rho u^\alpha u^\beta u_\beta \\ &= c^2 \rho u^\alpha \end{aligned}$$

Le tenseur énergie-impulsion peut être vu comme une application linéaire ayant pour vecteur propre le 4-vecteur vitesse et pour valeur propre correspondante la masse volumique ρ.

D'après (24.20) p. 529, lorsque le milieu continu est un fluide parfait le tenseur énergie-impulsion admet pour composantes :

$$\forall i, k \qquad T^{ik} = t^{ik} = -p\eta^{ik} \qquad ; \qquad \forall i \qquad T^{i0} = T^{0i} = T^{00} = 0$$

Le signe négatif vient du choix de la métrique en convention de genre temps $\forall i, k \ \eta^{ik} = -1$. En tenant compte du fait que $\forall i \ u^i = 0 \Rightarrow \forall i, k \ u^i u^k = 0$ et $u^0 u^0 = c^2$, dans un système de coordonnées quelconque :

$$T^{\alpha\beta} = -p g^{\alpha\beta} + \frac{p}{c^2} u^\alpha u^\beta$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta = 0, \ldots, 3 \qquad P^{\alpha\beta} &= \rho u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} + \frac{p}{c^2} u^\alpha u^\beta \\ &= \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

5 Principe de moindre action en relativité restreinte

En mécanique classique, l'action de Hamilton d'un système de lagrangien $\mathcal{L}$ entre les évènements A (départ du point A à l'instant t_A) et B (arrivée au point B à l'instant t_B) a pour expression :

$$\mathcal{S} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) \mathrm{d}t$$

Le principe de moindre action

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

donne l'équation de la trajectoire du système. Cette trajectoire existe en elle-même et doit être indépendante du référentiel galiléen de l'observateur. Dans le cas d'un système libre, le principe de moindre action se réduit à un principe de moindre temps, l'action s'écrivant :

$$\mathcal{S} = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t$$

où ε est invariant sur la trajectoire, ayant la dimension d'une énergie et caractérisant le système. Par analogie, en relativité restreinte l'action doit être invariante par changement de référentiel galiléen pour que la trajectoire le soit aussi. L'action relativiste est donc de la forme :

$$\mathcal{S} = \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} \mathrm{d}\tau$$

où τ est le temps propre du système et ε un invariant relativiste ayant la dimension d'une énergie et caractérisant le système. L'action écrite dans un référentiel galiléen quelconque doit être invariante, donc de la forme que nous avons indiquée. Avec (13.25) p. 242 :

$$\begin{aligned}\int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) \mathrm{d}t &= \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} \mathrm{d}\tau \\ &= \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On en déduit l'expression du lagrangien dans le référentiel galiléen quelconque :

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon}{\gamma_v}$$

Prenons le développement limité de $1/\gamma_v$ pour $v \ll c$:

$$\mathcal{L} \approx \varepsilon \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

Le lagrangien est défini à une constante additive près donc :

$$\mathcal{L} \approx -\frac{\varepsilon v^2}{2c^2}$$

À faible vitesse devant c il doit redonner l'énergie cinétique du système libre :

$$\begin{aligned}-\frac{\varepsilon v^2}{2c^2} &= \frac{mv^2}{2} \\ \varepsilon &= -mc^2\end{aligned}$$

On a donc pour le lagrangien relativiste d'un système libre :

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma_v}} \tag{25.9}$$

Avec (13.23) p. 241, l'action du système libre s'écrit :

$$\mathcal{S} = \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} \mathrm{d}\tau \tag{25.10}$$

$$= -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} \mathrm{d}\tau$$

$$= -mc \int_A^B \mathrm{d}s \tag{25.11}$$

$$= -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v}\,\mathrm{d}t$$

Le principe de moindre action dans l'espace-temps de la relativité restreinte s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= 0 \\ -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} \mathrm{d}\tau &= 0 \\ -mc\delta \int_A^B \mathrm{d}s &= 0 \\ -mc^2\delta \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v}\,\mathrm{d}t &= 0 \end{aligned} \tag{25.12}$$

où A est l'évènement départ du point x_A^1, x_A^2, x_A^3 à l'instant x_A^0, et B l'évènement arrivée au point x_B^1, x_B^2, x_B^3 à l'instant x_B^0. L'action est inversement proportionnelle à la quadri-longueur de la ligne d'univers parcourue par le système entre les évènements A et B. D'après la déf. 9.1 p. 229, la distance est maximale pour $x = y = z = c^{ste}$ (objet immobile dans le référentiel galiléen) et la ligne d'univers est une droite, par conséquent l'action est minimale (signe opposé à celui de la distance) lorsque la ligne d'univers est une droite.

5.1 Trajectoire d'un système libre

Cherchons la trajectoire à partir du principe de moindre action sans utiliser les équations de Lagrange. Avec (25.12) :

$$\begin{aligned} -mc\delta \int_A^B \mathrm{d}s &= 0 \\ -m \int_A^B c\delta\mathrm{d}s &= 0 \end{aligned}$$

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219 :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x_\alpha \\ \delta(\mathrm{d}s^2) &= \delta(\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x_\alpha) \\ 2\mathrm{d}s\delta\mathrm{d}s &= \mathrm{d}x^\alpha \delta\mathrm{d}x_\alpha + \mathrm{d}x_\alpha \delta\mathrm{d}x^\alpha \end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire (12.7) p. 205

$$\mathrm{d}x^\alpha \delta \mathrm{d}x_\alpha = \mathrm{d}x_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha$$

Avec la déf. (13.45) p. 281 des composantes de la 4-vitesse

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}s\delta\mathrm{d}s &= 2\mathrm{d}x_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha \\ \delta\mathrm{d}s &= \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{c\,\mathrm{d}\tau}\,\delta\mathrm{d}x^\alpha \\ c\delta\mathrm{d}s &= \mathsf{u}_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha) &= \mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha + \mathsf{u}_\alpha \mathrm{d}\delta x^\alpha \\ &= \mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha + \mathsf{u}_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha \\ -\mathsf{u}_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha &= -\mathrm{d}(\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha) + \mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha \end{aligned}$$

Le principe de moindre action devient :

$$\begin{aligned} -m\int_A^B \mathsf{u}_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha &= 0 \\ -m\int_A^B \mathrm{d}(\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha) + m\int_A^B \mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha &= 0 \\ -m\left[\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha\right]_A^B + m\int_A^B \frac{\mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\alpha \mathrm{d}s &= 0 \end{aligned} \tag{25.13}$$

Or $\delta x^\alpha(A) = \delta x^\alpha(B) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{m}{c}\int_A^B \frac{\mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\,\delta x^\alpha \mathrm{d}s &= 0 \\ \forall \alpha = 0,\ldots,3 \qquad \frac{\mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \end{aligned} \tag{25.14}$$

Le 4-vecteur vitesse est constant pour un système libre.

Si nous voulons à présent obtenir l'expression de la variation de l'action en fonction des coordonnées, nous devons comparer des trajectoires réelles infiniment proches n'ayant pas le même point d'arrivée. Cela revient à considérer l'intégrale indéfinie :

$$\delta\mathcal{S} = -m\int_A^{x^\alpha} \mathsf{u}_\alpha \delta \mathrm{d}x^\alpha$$

Dans (25.13), posons $\delta x^\alpha(A) = 0$, et $\delta x^\alpha(B)$ variable que l'on notera simplement δx^α. Ces trajectoires étant réelles, l'intégrale dans (25.13) est nulle, et l'on trouve :

$$\delta\mathcal{S} = -m\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha$$

Avec la déf. 24.1 p. 307 des composantes de la 4-impulsion

$$\boxed{\delta\mathcal{S} = -p_\alpha \delta x^\alpha} \tag{25.15}$$

5.2 Impulsion relativiste

En notation vectorielle, en remplaçant le facteur relativiste par sa déf. 12.1 p. 236, l'impulsion relativiste d'un système libre de lagrangien (25.9) p. 548 s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \\ &= -mc^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sqrt{1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}/c^2} \\ &= -mc^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \frac{-2\mathbf{v}}{c^2} \\ &= \gamma_v m \mathbf{v}\end{aligned}$$

Cette relation définit le 3-vecteur quantité de mouvement relativiste.

Remarque 5.1

Pour un système libre ($\partial_{\mathbf{r}} \mathcal{L} = 0$), les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= 0\end{aligned}$$

5.3 Énergie relativiste

En notation vectorielle, la fonction énergie d'un système libre s'écrit :

$$\begin{aligned}H &= \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L} \\ &= \mathbf{v}\cdot\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2} \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} + \frac{mc^2(1-\mathrm{v}^2/c^2)}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \\ &= \gamma_v mc^2\end{aligned}$$

5.4 Quadritenseur moment cinétique

En mécanique classique, pour tout système isolé il y a conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie, mais aussi du moment cinétique (quantité de mouvement en rotation). En étendant ce raisonnement à l'espace-temps on obtient l'expression relativiste du moment cinétique. On considère un élément de matière du système, de coordonnées x^α. En effectuant une rotation infinitésimale, les coordonnées prennent les nouvelles valeurs x'^α, de sorte que l'on ait :

$$\begin{aligned}x'^\alpha - x^\alpha &= \delta x^\alpha \\ &= x_\beta \delta\Omega^{\alpha\beta} \\ x'^\alpha &= x_\beta \delta\Omega^{\alpha\beta} + x^\alpha\end{aligned}$$

où les $\delta\Omega^{\alpha\beta}$ sont les composantes infiniment petites du premier ordre du 4-tenseur $\Omega^{\alpha\beta}$. Un tenseur (et donc un vecteur) reste le même, qu'on l'exprime en composantes contravariantes ou covariantes. Dans la relation ci-dessus qui ne contient que des vecteurs et des tenseurs, nous pouvons donc passer tous les indices hauts en bas, et tous les indices bas en haut, ce qui permet de conserver la convention de sommation :

$$x'_\alpha = x^\gamma \delta\Omega_{\alpha\gamma} + x_\alpha$$

On considère une rotation du système sans déformation, la norme de la 4-position de l'élément de matière reste constante lors de la rotation :

$$\begin{aligned}
x'^\alpha x'_\alpha &= x^\alpha x_\alpha \\
\left(x_\beta \delta\Omega^{\alpha\beta} + x^\alpha\right)\left(x^\gamma \delta\Omega_{\alpha\gamma} + x_\alpha\right) &= x^\alpha x_\alpha \\
x_\alpha x_\beta \delta\Omega^{\alpha\beta} + x^\alpha x^\gamma \delta\Omega_{\alpha\gamma} + x_\beta \delta\Omega^{\alpha\beta} x^\gamma \delta\Omega_{\alpha\gamma} &= 0 \\
x_\alpha x_\beta \delta\Omega^{\alpha\beta} + x^\alpha x^\gamma \delta\Omega_{\alpha\gamma} &= 0 \\
x^\alpha x^\beta \delta\Omega_{\alpha\beta} + x^\alpha x^\gamma \delta\Omega_{\alpha\gamma} &= 0 \\
x^\alpha x^\beta \delta\Omega_{\alpha\beta} &= 0
\end{aligned} \tag{25.16}$$

où nous avons négligé les termes quadratiques en $\delta\Omega$ qui sont des infiniment petits du deuxième ordre. Le tenseur $x^\alpha x^\beta$ est symétrique par construction puisque $x^\alpha x^\beta = x^\beta x^\alpha$. En représentation matricielle :

$$x^\alpha x^\gamma \begin{bmatrix} x^0x^0 & x^0x^1 & x^0x^2 & x^0x^3 \\ x^1x^0 & x^1x^1 & x^1x^2 & x^1x^3 \\ x^2x^0 & x^2x^1 & x^2x^2 & x^2x^3 \\ x^3x^0 & x^3x^1 & x^3x^2 & x^3x^3 \end{bmatrix}$$

Or, le produit tensoriel complètement contracté d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique est nul.

Exemple 5.1

Produit tensoriel complètement contracté d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, en notation matricielle (ce n'est pas un produit matriciel) :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x^{11} & x^{12} \\ x^{21} & x^{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & y^{12} \\ -y^{12} & 0 \end{bmatrix} &= x^{11} \times y^{12} - x^{11} \times y^{21} + x^{12} \times y^{12} - x^{12} \times y^{21} + x^{21} \times y^{12} \\
&\quad - x^{21} \times y^{21} + x^{22} \times y^{12} - x^{22} \times y^{21} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il faut donc que $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ soit antisymétrique pour avoir (25.16) quels que soient les x^α :

$$\delta\Omega_{\alpha\beta} = -\delta\Omega_{\beta\alpha}$$

Remarque 5.2

Les tenseurs antisymétriques d'ordre deux sont aussi appelés des *bivecteurs*.

La variation de l'action d'un système qui passe d'une trajectoire à une autre trajectoire infiniment proche est donnée par (25.15) p. 549. En sommant sur les N éléments constitutifs du

système :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= -\sum_{i=1}^{N} p_\alpha \delta x^\alpha \Big|_a^b \\ &= -\sum_{i=1}^{N} p^\alpha \delta x_\alpha \Big|_a^b \\ &= -\delta\Omega_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{N} p^\alpha x^\beta \Big|_a^b\end{aligned}$$

Décomposons le tenseur $p^\alpha x^\beta$ en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$p^\alpha x^\beta = \tfrac{1}{2}\left(p^\alpha x^\beta + p^\beta x^\alpha\right) + \tfrac{1}{2}\left(p^\alpha x^\beta - p^\beta x^\alpha\right)$$

La multiplication contractée de la partie symétrique par le tenseur antisymétrique $\delta\Omega$ étant nulle, il ne reste que la partie antisymétrique :

$$\delta\mathcal{S} = \delta\Omega_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}\left(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha\right)\Big|_a^b$$

Puisque l'action ne varie pas nous avons :

$$\sum_{i=1}^{N}\left(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha\right)_a = \sum_{i=1}^{N}\left(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha\right)_b$$

Par conséquent on définit le 4-tenseur antisymétrique du second ordre $[{}_4\mathsf{L}]$ appelé 4-moment cinétique total du système, qui se conserve pour tout système isolé :

Définition 5.1: Quadritenseur moment cinétique

Le 4-tenseur moment cinétique $[{}_4\mathsf{L}]$ a pour composantes deux fois contravariantes :

$$L^{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N}\left(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha\right)$$

5.5 Équation de Hamilton-Jacobi relativiste pour un mobile libre

Nous avons obtenu précédemment la relation (25.13) p. 549 :

$$-m\left[\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha\right]_A^B + m\int_A^B \frac{\mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\alpha \mathrm{d}s = 0$$

D'après (25.14) p. 549, sur une trajectoire réelle la 4-vitesse d'un mobile libre est constante, $\mathrm{d}\mathsf{u}_\alpha/\mathrm{d}s = 0$:

$$-m\left[\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha\right]_A^B = 0$$

Si l'on considère deux trajectoires réelles ayant même point de départ $\delta x_A^\alpha = 0$ mais une arrivée différente $\delta x_B^\alpha \neq 0$, la différence d'action entre ces deux trajectoires s'écrit :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} &= -m\mathsf{u}_\alpha \delta x^\alpha \\
&= -p_\alpha \delta x^\alpha \\
\forall \alpha = 0,\dots,3 \qquad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\alpha} &= -p_\alpha \\
\forall \beta = 0,\dots,3 \qquad g^{\alpha\beta}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\alpha} &= -g^{\alpha\beta}p_\alpha \\
\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_\beta} &= -p^\beta
\end{aligned}$$

Avec la déf. 24.1 p. 307 de la 4-impulsion et (13.67) p. 310, nous obtenons l'équation de Hamilton-Jacobi relativiste :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^0} &= -p_0 \\
\frac{\partial \mathcal{S}}{c\partial t} &= -\frac{E}{c} \\
\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}\right)^2 &= \frac{E^2}{c^2} \\
\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}\right)^2 &= \frac{m^2c^4}{c^2} + p^2 \\
\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2 &= m^2c^2
\end{aligned}$$

Chapitre 26

GRAVITATION RELATIVISTE

Sommaire

1 Métrique de la relativité générale 555
2 Champ gravitationnel faible 556
3 Écoulement du temps dans un champ gravitationnel 560
4 Décalage gravitationnel vers le rouge 562
5 Métrique d'un champ gravitationnel 564
6 Lien potentiel gravitationnel et quadritenseur énergie-impulsion 567
7 Trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel 567
8 Les équations du champ gravitationnel 569
9 Principe de moindre action en relativité générale 572
10 Champ gravitationnel à symétrie sphérique 579
11 Déviation des rayons lumineux 594

1 Métrique de la relativité générale

En mécanique classique la gravitation est une force attractive entre les masses. Nous abandonnons ici la notion de force gravitationnelle pour un modèle où les masses et distributions énergétiques courbent l'espace-temps. Les systèmes libres ainsi que la lumière suivent les géodésiques de l'espace-temps.

L'univers est représenté par une variété riemannienne V_4 à quatre dimensions, de métrique

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{26.1}$$

de signature $(+---)$ ou $(-+++)$. En particulier l'équation

$$\mathrm{d}s^2 = 0$$

définit en chaque point de la variété V_4 un hypercône élémentaire de lumière (fig. 13.12 p. 257). Les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des coordonnées x^μ, dont les dérivées déterminent les symboles de Christoffel qui apparaissent dans les équations des géodésiques. Ils définissent donc complètement les géodésiques de ce système de coordonnées, donc la gravitation, c'est pourquoi on les

appelle *potentiels gravitationnels* de ce système. Par analogie avec la définition 1.3 p. 188 d'un potentiel scalaire, le tenseur métrique G est un « potentiel tenseur ». Dans l'espace-temps de dimension $n = 4$ les composantes $g_{\mu\nu}$ sont au nombre de seize (4×4), mais d'après (14.1) p. 323, seules dix composantes sont indépendantes :

$$n(n+1)/2 = 10$$

Le problème consiste en la détermination de ces dix potentiels gravitationnels.

L'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte est osculateur à l'espace-temps courbe pseudo-riemannien de la relativité générale. Quelle que soit l'intensité du champ gravitationnel, un observateur inertiel se déplace sur une géodésique de l'espace-temps de la relativité générale, dans l'espace pseudo-euclidien de raccordement de la relativité restreinte.

2 Champ gravitationnel faible

Une faible courbure de l'espace-temps doit redonner la théorie de la gravitation newtonienne pour des vitesses petites devant la vitesse limite. En coordonnées galiléennes, un champ gravitationnel faible s'écrit de la forme :

$$\forall \mu, \nu = 0, \ldots, 3 \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace plat pseudo-euclidienans $\mathbb{M}$ (relation (13.8) p. 231), et $h_{\mu\nu}$ est le tenseur symétrique

$$[h_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{02} & h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{03} & h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix}$$

tel que

$$\forall \mu, \nu \qquad h_{\mu\nu} \approx 0$$

On suppose également que la métrique est stationnaire (constante dans le temps) :

$$\forall \mu, \nu \qquad \partial_0 g_{\mu\nu} = 0$$

La ligne d'univers d'un mobile en chute libre dans ce champ gravitationnel est une géodésique dont l'équation est donnée par (22.2) p. 428,

$$\forall \lambda = 0, \ldots, 3 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Le paramètre est ici le temps propre τ du mobile. Le paramètre étant quelconque, nous pouvons également prendre le temps coordonnée $x^0 = ct$ (ou temps impropre) d'un référentiel quelconque. Habituellement on prend un référentiel dans l'espace profond, loin de toute masse-énergie. Le

mobile est supposé non relativiste, son 3-vecteur vitesse est petit devant la vitesse limite c :

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,3 \qquad & \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \ll c \\ & \mathrm{d}x^i \ll c\,\mathrm{d}t \\ & \mathrm{d}x^i \ll \mathrm{d}x^0 \\ & \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \ll \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \end{aligned}$$

En faisant cette approximation puis en remplaçant x^0 par ct :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \qquad & \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{00}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \approx 0 \\ & \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{00}c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \approx 0 \end{aligned} \tag{26.2}$$

Écrivons les symboles de Christoffel de 2$^{\mathrm{e}}$ espèce en fonction des potentiels gravitationnels selon (22.22) p. 442. Dans la relation qui suit, les deux premiers termes du membre de droite sont nuls car le système de coordonnées est stationnaire :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \qquad \Gamma^\lambda{}_{00} &= \tfrac{1}{2}\,g^{\lambda\kappa}\left(g_{\kappa 0,0} + g_{0\kappa,0} - g_{00,\kappa}\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}\,g^{\lambda\kappa}g_{00,\kappa} \end{aligned}$$

Faisons l'approximation du premier ordre

$$g^{\lambda\kappa} \approx \eta^{\lambda\kappa}$$

De plus

$$g_{00,\kappa} = h_{00,\kappa}$$

car les composantes du tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ de $\mathbb{M}$ sont des constantes :

$$\forall \lambda \qquad \Gamma^\lambda{}_{00} \approx -\tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}h_{00,\kappa}$$

(26.2) devient :

$$\forall \lambda \qquad \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\,\eta^{\lambda\kappa}h_{00,\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

- la première relation, pour $\lambda = 0$, donne pour la partie temporelle :

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\,\eta^{0\kappa}h_{00,\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

  Seule η^{00} est non nulle donc $\kappa = 0$, et le système de coordonnées étant stationnaire $h_{00,0} = g_{00,0} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}\tau^2} &\approx \frac{c^2}{2}\,\eta^{00}h_{00,0}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Soit α une constante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} \approx 0$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \approx \alpha$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \approx \alpha^2$$
$$\mathrm{d}\tau^2 \approx \frac{\mathrm{d}t^2}{\alpha^2}$$

- les trois relations suivantes donnent pour la partie spatiale :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\,\eta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

Pour une signature $(+---)$ de $\mathbb{M}$ (noté $\mathbb{R}^{1,3}$) nous avons $\eta^{ij} = -\delta^{ij}$:

$$\forall i \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} \approx -\frac{c^2}{2}\,\delta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau^2} \approx -\frac{c^2}{2} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \mathbf{grad}\,(h_{00})$$
$$\alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \approx -\frac{c^2}{2}\,\alpha^2\,\mathbf{grad}\,(h_{00})$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} \approx -\frac{c^2}{2}\,\mathbf{grad}\,(h_{00})$$

Comparons avec l'équation de Newton d'un mobile dans un champ gravitationnel. Soient m_g la masse grave et m_i la masse inerte de ce mobile :

$$\vec{f} = m_\mathrm{g}\vec{g}$$
$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -m_\mathrm{g}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\phi)$$

Nous avons alors :

$$-\frac{c^2}{2}\,\mathbf{grad}\,(h_{00}) \approx -\frac{m_\mathrm{g}}{m_i}\,\mathbf{grad}\,(\phi)$$

En posant l'égalité entre masse grave et masse inerte :

$$h_{00} \approx \frac{2\phi}{c^2}$$

Par conséquent, dans la limite des champs gravitationnels faibles :

$$\boxed{g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}} \tag{26.3}$$

où d'après (10.3) p. 189 ϕ est négatif.

Cette dernière relation peut être obtenue grâce au principe de moindre action. En mécanique classique, le lagrangien d'un système dans un champ gravitationnel de potentiel ϕ s'écrit

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m_i v^2 - m_g \phi$$

En relativité restreinte, (25.9) p. 548 donne

$$\mathcal{L} = -m_i c^2 \sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2} - m_g \phi$$

À faible vitesse nous avons :

$$\mathcal{L} \approx -m_i c^2 + \tfrac{1}{2} m_i v^2 - m_g \phi$$

On remarque que si l'on supprime le terme constant $m_i c^2$ du lagrangien (ce qui est toujours loisible de faire) on retrouve bien le lagrangien non relativiste. L'action s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \int \mathcal{L} \mathrm{d}t \\ &\approx -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

où l'on a posé l'égalité entre masse inerte et masse grave. En comparant avec (25.11) p. 548 :

$$\begin{aligned}ds &\approx \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}s^2 &\approx \left[c^2 + \left(\frac{v^2}{2c} \right)^2 - v^2 + \left(\frac{\phi}{c} \right)^2 + 2 \left(c - \frac{v^2}{2c} \right) \frac{\phi}{c} \right] \mathrm{d}t^2 \\ &\approx \left\{ c^2 + v^2 \left[\left(\frac{v^2}{4c^2} \right) - 1 \right] + 2\phi \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\phi}{2c^2} \right] \right\} \mathrm{d}t^2\end{aligned}$$

On approxime respectivement à moins un et un les termes entre crochets :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &\approx \left(c^2 + 2\phi - v^2 \right) \mathrm{d}t^2 \\ &\approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) (c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{d}r^2 \\ &= g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \\ &= g_{00} (\mathrm{d}x^0)^2 - g_{ii} (\mathrm{d}x^i)^2\end{aligned}$$

si bien que

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

Exemple 2.1: Écart à un espace plat, pour la Terre et pour le Soleil

Calculons quelques valeurs de la correction à apporter à la composante temporelle du tenseur métrique en présence d'un champ gravitationnel. (10.3) p. 189 donne l'expression du potentiel de champ gravitationnel ϕ :

$$\frac{2\phi}{c^2} = \frac{-2\mathcal{G}M}{rc^2}$$

où la vitesse limite vaut exactement $c = 299\,792\,458$ m/s, et la constante gravitationnelle a pour valeur $\mathcal{G} = 6{,}674\,30 \times 10^{-11}$ m^3/kg/s^2.
Prenons la Terre qui a pour masse $M_{\oplus} = 5{,}973\,6 \times 10^{24}$ kg et pour rayon moyen $r_{\oplus} = 6\,371$ km. À sa surface, la correction est de :

$$\begin{aligned}\frac{-2\mathcal{G}M_{\oplus}}{rc^2} &= \frac{-2 \times 6{,}674\,30 \times 10^{-11} \times 5{,}973\,6 \times 10^{24}}{6\,371 \times 10^3 \times 299\,792\,458^2} \\ &= -1{,}392\,59 \times 10^{-9}\end{aligned}$$

Prenons le Soleil qui a pour masse $M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg et pour rayon $r_\odot = 696\ 342$ km. À sa surface, la correction est de :

$$\begin{aligned}\frac{-2\mathcal{G}M_\odot}{rc^2} &= \frac{-2 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 1{,}989 \times 10^{30}}{696\ 342 \times 10^3 \times 299\ 792\ 458^2} \\ &= -4{,}242\ 35 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Ces valeurs petites devant l'unité n'invalident pas l'approximation d'un champ gravitationnel faible (elles ne le valident pas non plus).

Remarque 2.1

On ne peut démontrer ce que l'on a posé en hypothèse, par exemple que le champ gravitationnel est faible. Tout ce que l'on peut faire est de montrer que le raisonnement est cohérent, en vérifiant que les valeurs sont effectivement petites devant l'unité, après l'avoir supposé. Si ce n'était pas le cas l'hypothèse serait fausse, mais comme c'est le cas on ne peut pas conclure. Il se pourrait que le raisonnement en supposant que le champ gravitationnel est fort donne des valeurs grandes devant l'unité, et donc soit cohérent lui aussi.

3 Écoulement du temps dans un champ gravitationnel

Un horloger et son horloge sont fixes dans le champ gravitationnel terrestre. Cet horloger ne peut observer la dilatation du temps en comparant l'intervalle de temps de l'horloge avec celui donné par le constructeur de l'horloge, puisque le champ gravitationnel affecte le temps et non l'horloge elle-même. L'horloger n'a pas conscience de la dilatation du temps, son horloge fonctionne de manière nominale. Ainsi, le carré de l'intervalle entre les deux évènements que sont le tic et le tac de l'horloge marque le temps propre de l'horloger :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$$

Un observateur dans un champ gravitationnel de même intensité, et sans vitesse relative avec l'horloger, mesure le même écoulement du temps que l'horloger, leurs horloges sont synchrones.

En revanche, un observateur inertiel dans l'espace profond loin de toute masse-énergie créant un champ gravitationnel, ou en chute libre dans un champ gravitationnel, peut observer la déformation de l'espace-temps due à la présence de la Terre.

Dans son système de coordonnées (x^μ), le carré de l'intervalle entre le tic et le tac de l'horloge est donné par :

$$ds'^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

L'intervalle entre deux évènements est un invariant. Les carrés des intervalles dans les deux référentiels (dans les deux systèmes de coordonnées) sont égaux :

$$\begin{aligned}c^2\mathrm{d}\tau^2 &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \\ c^2\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x^0}\right)^2 &= g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}x^0}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}x^0}\end{aligned}$$

$t = x^0/c$ est le temps propre de l'observateur galiléen, et u^μ sa 4-vitesse dans le référentiel terrestre de l'horloger :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{c\,\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{c\,\mathrm{d}t}$$
$$c^2\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

Si le 3-vecteur vitesse spatiale u^i de l'observateur galiléen est nul dans le référentiel terrestre :

$$c^2\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{00}u^0u^0$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g_{00}$$
$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}t \tag{26.4}$$

où g_{00} est le coefficient temporel de la métrique au niveau de l'horloge. En utilisant (26.3) p. 558 comme approximation d'un champ gravitationnel faible, nous obtenons $\mathrm{d}\tau$ en fonction de $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\tau \approx \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}t$$
$$\approx \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)\mathrm{d}t \tag{26.5}$$

Remarque 3.1

Le potentiel gravitationnel ϕ étant négatif, on peut aussi écrire :

$$\mathrm{d}\tau \approx \left(1-\frac{|\phi|}{c^2}\right)\mathrm{d}t$$

Si l'horloge s'approche d'un objet massif, ϕ augmente en valeur absolue. On observe que le temps propre de l'horloge ralenti.

Remarque 3.2

On remarque que la masse même de l'horloge affecte son temps propre.

De même, nous obtenons $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}\tau$:

$$\mathrm{d}t \approx \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\tau$$
$$\approx \left(1-\frac{\phi}{c^2}\right)\mathrm{d}\tau$$

Remarque 3.3

Le potentiel gravitationnel ϕ étant négatif, on peut aussi écrire :

$$\mathrm{d}t \approx \left(1+\frac{|\phi|}{c^2}\right)\mathrm{d}\tau$$

Pour un intervalle de temps fini

$$\Delta\tau = \int \sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}t$$

D'après cette dernière relation, notre choix de signature de métrique implique

$$g_{00} > 0$$

Lorsque le champ gravitationnel est constant dans le temps

$$\Delta\tau = \sqrt{g_{00}}\,\Delta t$$

4 Décalage gravitationnel vers le rouge

Soit un atome en un point d'un champ gravitationnel, de fréquence propre

$$\nu_0 = \frac{dN}{\mathrm{d}t_0}$$

Grâce à (26.5) p. 561, nous avons :

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{dN}{\mathrm{d}t_0} \\ &= \frac{dN}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0} \\ &\approx \nu\left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right)\end{aligned}$$

En un point A où règne un champ gravitationnel de potentiel ϕ_A, la fréquence d'un atome vaut :

$$\nu_{0A} \approx \nu\left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right)$$

En un point B où règne un champ gravitationnel de potentiel ϕ_B, elle vaut :

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu\left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right) \\ &\approx \nu_{0A}\left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right) \\ &\approx \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right) \\ &\approx 1 + \frac{\phi_A}{c^2} - \frac{\phi_B}{c^2} - \frac{\phi_A\phi_B}{c^4} \\ &\approx \nu_{0A}\left(1 + \frac{\phi_A - \phi_B}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Exemple 4.1: Mesure terrestre de la fréquence de la lumière émise par le Soleil

Sur Terre on mesure la fréquence de la lumière émise par le Soleil :

$$\begin{aligned}\nu_{0\oplus} &\approx \nu_{0\odot}\left(1-\frac{\phi_\odot-\phi_{\oplus\!\!\!\!\!\!\;\odot}}{c^2}\right)\\ &\approx \nu_{0\odot}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{-GM_\odot}{R_\odot}+\frac{GM_{\oplus\!\!\!\!\!\!\;\odot}}{R_{\oplus\!\!\!\!\!\!\;\odot}}\right)\right]\\ &\approx \nu_{0\odot}\left(1-\frac{GM_\odot}{c^2R_\odot}\right)\\ \frac{\nu_{0\oplus}-\nu_{0\odot}}{\nu_{0\odot}} &\approx -\frac{GM_\odot}{c^2R_\odot}\end{aligned}$$

Constante gravitationnelle : $G \approx 6{,}674\ 28 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$
Masse du Soleil : $M_\odot \approx 1{,}988\ 5 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Rayon moyen du Soleil : $R_\odot \approx 696\ 342 \times 10^3\ \mathrm{m}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{0\odot}} \approx -2 \times 10^{-6}$$

Les raies spectrales d'émission des atomes venant du Soleil et observées depuis la Terre sont décalées vers les basses fréquences (vers le rouge) par rapport aux raies spectrales d'émission de mêmes atomes situés sur la Terre.

Exemple 4.2: Décalage gravitationnel de la fréquence de la lumière

On considère un photon émis verticalement vers le haut, depuis un point A de la surface terrestre, vers un point B à une hauteur H au-dessus du point A. On note M la masse de la Terre et R son rayon :

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu_{0A}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{GM}{R}-\frac{GM}{R+H}\right)\right]\\ &\approx \nu_{0A}\left[1-\frac{GM}{Rc^2}\left(\frac{H}{R+H}\right)\right]\end{aligned}$$

On fait la nouvelle approximation $R + H \approx R$:

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu_{0A}\left(1-\frac{GMH}{R^2c^2}\right)\\ \frac{\nu_{0B}-\nu_{0A}}{\nu_{0A}} &\approx \frac{-GMH}{R^2c^2}\\ &\approx \frac{-gH}{c^2}\end{aligned}$$

où est le champ de pesanteur à la surface de la Terre (supposé constant jusqu'à la hauteur H). En B la fréquence du photon est décalée vers le rouge.
Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre à Paris : $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$
Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$
Hauteur : $H = 20\ \mathrm{m}$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 2{,}18 \times 10^{-15}$$

5 Métrique d'un champ gravitationnel

Contrairement à la relativité restreinte, en relativité générale on ne peut définir l'élément de distance spatiale en posant $\mathrm{d}x^0 = 0$, car d'après (26.4), dans un champ gravitationnel le temps propre est fonction de x^0 par l'intermédiaire de g_{00} lui même fonction du lieu. On procède alors de la façon suivante : d'un point B de coordonnées spatiales $x^i + \mathrm{d}x^i$ on emet un rayon lumineux vers un point A de coordonnées spatiales x^i, qui réfléchit le rayon vers le point B. Le temps mesuré en B multiplié par c est égal au double de la distance AB. L'intervalle d'univers entre l'évènement émission du rayon en B et l'évènement réception du rayon en B s'écrit :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\lambda\mu}\mathrm{d}x^\lambda \mathrm{d}x^\mu$$

En séparant les coordonnées spatiales et temporelles :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + 2g_{0i}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i + g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2$$

En supposant que la lumière se propage à la vitesse limite, d'après (13.7) p. 229 l'intervalle est nul :

$$g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + 2g_{0i}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i + g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 = 0$$

Cherchons pour quelles valeurs de $\mathrm{d}x^0$ cette équation est vérifiée. Le discrimant réduit de cette équation du second degré en $\mathrm{d}x^0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac \\ &= g_{0i}^2(\mathrm{d}x^i)^2 - g_{00}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

Les deux racines de l'équations sont :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^0_\pm &= (-b' \pm \sqrt{\Delta'})/a \\ &= \left(-g_{0i}\mathrm{d}x^i \pm \sqrt{g_{0i}^2(\mathrm{d}x^i)^2 - g_{00}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right)/g_{00}\end{aligned}$$

En remplaçant $g_{0i}\mathrm{d}x^i$ par $g_{0j}\mathrm{d}x^j$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^0_\pm &= \left(-g_{0i}\mathrm{d}x^i \pm \sqrt{g_{0i}g_{0j}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - g_{00}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right)/g_{00} \\ &= \left[-g_{0i}\mathrm{d}x^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right]/g_{00}\end{aligned}$$

$x^0 + \mathrm{d}x^0_-$ est la coordonnées temporelle de l'évènement émission du signal, et $x^0 + \mathrm{d}x^0_+$ est la coordonnées temporelle de l'évènement réception du signal. « L'intervalle de temps » entre les deux évènements s'écrit :

$$\mathrm{d}x^0_+ - \mathrm{d}x^0_- = \tfrac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}$$

Avec (26.4) p. 561 nous avons l'intervalle de temps propre :

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{g_{00}}(\mathrm{d}x^0_+ - \mathrm{d}x^0_-)/c$$

que l'on multiplie par $c/2$ pour avoir la distance spatiale :

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{g_{00}}(\mathrm{d}x^0_+ - \mathrm{d}x^0_-)/2 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j} \\ dl^2 &= \tfrac{1}{g_{00}}(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &= \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &= \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \end{aligned} \tag{26.6}$$

où

$$\boxed{\forall i,j \qquad \gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}}$$

est la métrique tridimensionnelle de l'espace exprimée en fonction de celle quadridimensionnelle de l'espace-temps. En général les $g_{\lambda\mu}$ dépendent de x^0 de sorte que la métrique spatiale dépend du temps. Dans ce cas on ne peut intégrer dl car sa valeur dépend de la ligne d'univers choisie entre les deux évènements. En relativité générale la notion de distance perd donc sa signification, sauf lorsque les $g_{\lambda\mu}$ ne dépendent pas du temps.

Remarque 5.1

Lorsque le champ gravitationnel tend vers zéro, l'espace-temps devient celui pseudo-euclidien de la relativité restreinte avec les g_{0i} nuls et $g_{00} = 1$. Nous retrouvons alors

$$\forall i,j \qquad \gamma_{ij} = -g_{ij}$$

Le signe négatif est dû au choix de la signature de la métrique.

(12.13) p. 209

$$\forall \lambda,\mu \qquad g^{\lambda\nu}g_{\nu\mu} = \delta^\lambda_\mu$$

vraie lorsque les paramètres λ et μ prennent les valeurs $0,1,2,3$ est aussi vraie lorsque les paramètres ne prennent que les valeurs $1,2,3$:

$$\forall i,j \qquad g^{i\nu}g_{\nu j} = \delta^i_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i,j \qquad g^{ik}g_{kj} + g^{i0}g_{0j} = \delta^i_j \tag{26.7}$$

Elle est également vraie lorsqu'au moins un paramètre est nul

$$\begin{cases} g^{0\nu}g_{\nu j} = \delta^0_j & \forall j \\ g^{i\nu}g_{\nu 0} = \delta^i_0 & \forall i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g^{0k}g_{kj} + g^{00}g_{0j} = \delta^0_j & \forall j \\ g^{ik}g_{k0} + g^{i0}g_{00} = \delta^i_0 & \forall i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g^{0k}g_{kj} + g^{00}g_{0j} = 0 & \forall j \neq 0 \\ g^{0k}g_{k0} + g^{00}g_{00} = 1 & i = j = 0 \\ g^{ik}g_{k0} + g^{i0}g_{00} = 0 & \forall i \neq 0 \end{cases}$$

$$\forall i \qquad g^{ik}g_{k0} + g^{i0}g_{00} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \qquad g^{i0} = -\frac{g^{ik}g_{k0}}{g_{00}}$$

Reprenons (26.7) p. 565

$$\begin{aligned}\forall i,j \qquad g^{ik}g_{kj}+g^{i0}g_{0j}&=\delta^i_j\\ g^{ik}g_{kj}-\frac{g^{ik}g_{k0}}{g_{00}}g_{0j}&=\delta^i_j\\ g^{ik}\left(g_{kj}-\frac{g_{k0}g_{0j}}{g_{00}}\right)&=\delta^i_j\\ -g^{ik}\gamma_{kj}&=\delta^i_j\end{aligned}$$

D'après (12.13) p. 209 :

$$\forall j,k \qquad \gamma_{kj}=-g_{kj}$$

et

$$\forall j,k \qquad \gamma^{kj}=-g^{kj}$$

Le tenseur tridimensionnel $-g_{ij}$ est le tenseur métrique de la métrique (26.6) p. 565.

Pour synchroniser deux horloges aux points A et B précédents, nous utilisons également des signaux lumineux. L'instant x^0 au point A est simultané à l'instant au point B milieu de l'aller-retour :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^0_- + \mathrm{d}x^0_+\right)&=\frac{1}{2}\left\{\frac{-g_{0i}\mathrm{d}x^i+\sqrt{(g_{0i}g_{0j}-g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}}{g_{00}}+\frac{-g_{0i}\mathrm{d}x^i-\sqrt{(g_{0i}g_{0j}-g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}}{g_{00}}\right\}\\ &=-\frac{g_{0i}\mathrm{d}x^i}{g_{00}}\end{aligned}$$

Ainsi, l'instant x^0 au point A est simultané avec l'instant $-g_{0i}\mathrm{d}x^i/g_{00}$ au point B. Cette relation permet de synchroniser les horloges dans un volume infinitésimal autour du point B. En procédant de proche en proche on peut synchroniser des horloges le long d'une ligne ouverte, mais pas le long d'un contour fermé. En effet, après avoir fait le tour du contour, on se trouve avec une valeur de $-g_{0i}\mathrm{d}x^i/g_{00}$ différente de zéro. La synchronisation des horloges dans tout l'espace est a fortiori impossible, à l'exception des référentiels dans lesquels $\forall i\ g_{0i}=0$. Cette impossibilité de synchroniser toutes les horloges dans tout l'espace n'est pas une propriété de l'espace-temps, elle est liée au choix du référentiel. Dans tout champ gravitationnel il est toujours possible de choisir un référentiel tel que les quantités g_{0i} soient nulles, ce qui rend possible la synchronisation de toutes les horloges.

En relativité restreinte le cours du temps est différent pour deux horloges animées d'un mouvement relatif. En relativité générale s'ajoute le fait que le temps s'écoule différemment en différents points de l'espace d'un référentiel donné. Si deux évènements E_1 et E_2 ont lieu en un point A et sont simultanés avec respectivement les deux évènements E'_1 et E'_2 en un point B, l'intervalle de temps propre entre E_1 et E_2 sera en général différent de l'intervalle de temps propre entre E'_1 et E'_2.

Puisque nous avons supposé $\mathrm{d}x^0_- = \mathrm{d}x^0_+$, la relation précédente s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\frac{g_{00}}{2}\left(\mathrm{d}x^0_+ + \mathrm{d}x^0_-\right)+g_{0i}\mathrm{d}x^i&=0\\ g_{00}\mathrm{d}x^0+g_{0i}\mathrm{d}x^i&=0\\ g_{0\lambda}\mathrm{d}x^\lambda&=0\\ \mathrm{d}x_0&=0\end{aligned}$$

La différentielle covariante $\mathrm{d}x_0$ doit donc être nulle.

6 Lien potentiel gravitationnel et quadritenseur énergie-impulsion

Prenons le laplacien du potentiel gravitationnel g_{00} en champ faible et pour $v \ll c$:

$$\begin{aligned}\Delta g_{00} &= \Delta\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)\\ &= \frac{2}{c^2}\Delta\phi\end{aligned}$$

Avec l'équation de Poisson (10.4) p. 194 :

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi\rho\mathcal{G}}{c^2}$$

Or avec la déf. 25.8 p. 546 du tenseur énergie-impulsion :

$$P^{00} = \rho c^2$$

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219, avec la signature $(+---)$, $P^{00} = P_{00}$:

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} P_{00} \tag{26.8}$$

7 Trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel

Nous cherchons l'équation de la trajectoire d'un mobile libre de masse m dans un champ gravitationnel. Nous reprenons le principe de moindre action en relativité restreinte (25.12) p. 548 dans lequel la présence d'un champ gravitationnel est prise en compte dans l'expression de la métrique $\mathrm{d}s$:

$$\begin{aligned}-mc\delta\int_A^B \mathrm{d}s &= 0\\ \delta\int_A^B \mathrm{d}s &= 0\\ \int_A^B \delta\mathrm{d}s &= 0\end{aligned}$$

À partir de (26.1) p. 555 :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\\ \delta\mathrm{d}s^2 &= \delta g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + g_{\mu\nu}\delta\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\delta\mathrm{d}x^\nu\\ 2\mathrm{d}s\delta\mathrm{d}s &= \delta g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + 2g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\delta\mathrm{d}x^\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{d}s &= \left(\frac{1}{2}\,\delta g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\delta \mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{1}{2}\,\delta g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\nu\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^\nu\right]\mathrm{d}s \\ \int \delta \mathrm{d}s &= \int \left[\frac{1}{2}\,\delta g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^\nu\right] ds + \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\delta x^\nu\right) ds\end{aligned}$$

Le dernier membre est nul car $\delta x^\nu(A) = \delta x^\nu(B) = 0$:

$$\begin{aligned}\int \delta \mathrm{d}s &= \int \left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\,\delta x^\sigma\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\mu\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^\sigma\right]\mathrm{d}s \\ &= \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} - g_{\mu\sigma}\,\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\right)\delta x^\sigma ds\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\forall \sigma = 0,\ldots,3 \qquad \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\right)\end{aligned}$$

$$\int \delta \mathrm{d}s = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} - g_{\mu\sigma}\,\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\right]\delta x^\sigma ds$$

On utilise les symboles de Christoffel de 1re espèce, relation (22.21) p. 442,

$$\int \delta \mathrm{d}s = \int \left(-\Gamma_{\sigma\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} - g_{\mu\sigma}\,\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\right)\delta x^\sigma ds$$

puis les symboles de Christoffel de 2e espèce, relation (22.12) p. 439 :

$$\begin{aligned}\int \delta \mathrm{d}s &= -\int \left(g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + g_{\mu\sigma}\,\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\right)\delta x^\sigma \mathrm{d}s \\ &= -\int \left(g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + g_{\lambda\sigma}\,\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)\delta x^\sigma \mathrm{d}s \\ &= -\int g_{\sigma\lambda}\left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)\delta x^\sigma ds\end{aligned}$$

La variation de l'action étant nulle pour des variations arbitraires des coordonnées δx^σ, nous retrouvons l'équation (22.2) p. 428 d'une géodésique :

$$\forall \lambda = 0,\ldots,3 \qquad \frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 0$$

Nous pouvons obtenir ce résultat par un raisonnement beaucoup plus direct. En relativité restreinte un mobile est libre si sa 4-accélération est nulle, relation (25.14) p. 549 :

$$\forall \lambda \qquad \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}s} = 0$$

En relativité générale le champ gravitationnel courbe l'espace-temps, ce qui revient à prendre un système de coordonnées curviligne. La dérivée ordinaire est remplacée par une dérivée absolue :

$$\begin{aligned} \forall\lambda \qquad \frac{Du^\lambda}{\mathrm{d}s} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}u^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} u^\mu \mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} &= 0 \end{aligned} \tag{26.9}$$

C'est l'équation de la trajectoire d'un mobile libre dans un champ gravitationnel.

8 Les équations du champ gravitationnel

8.1 Cas intérieur

Nous cherchons à établir une relation entre champ gravitationnel et matière qui généralise les équations de Poisson (10.4) p. 194 et de Laplace. Ces équations différentielles déterminent localement le potentiel newtonien dans les cas intérieur et extérieur à la distribution de matière. Nous cherchons cette relation sous une forme covariante générale, c.-à-d. tensorielle. Commençons par l'équation du champ en dehors de la matière (cas extérieur). Supposons que le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel (§ 4.4 p. 495) soit nul

$$\forall\lambda,\mu,\nu,\sigma \qquad R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$$

Dans ce cas, on peut toujours effectuer un changement de coordonnées pour rendre constants les potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$ et nuls les symboles de Christoffel. Les géodésiques sont alors des lignes droites dans l'espace-temps et dans l'espace. C'est l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte, sans courbure ni gravitation. Par exemple, dans notre système solaire, à l'extérieur de la matière du Soleil et des planètes, ces dernières se déplaceraient en ligne droite à vitesse constante. On rejète donc cette hypothèse.

Supposons que le tenseur de courbure de Ricci (§ 4.9 p. 507) soit nul :

$$\forall\mu,\sigma \qquad R_{\mu\sigma} = 0 \tag{26.10}$$

Cette hypothèse est moins contraignante car on peut avoir $R_{\mu\nu,\lambda\sigma} \neq 0$ bien que le tenseur de Ricci soit nul. Cette relation conduit à des équations aux dérivées partielles du second ordre pour les potentiels gravitationnels (autrement dit contenant les potentiels gravitationnels ainsi que leurs dérivées premières et secondes), dans lesquelles les dérivées secondes interviennent linéairement. En cela elle ressemble à l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ (relation (10.5) p. 194). Nous conservons cette hypothèse.

Cherchons maintenant les équations à l'intérieur de la matière sous la forme d'une égalité entre tenseurs de l'espace-temps,

$$\forall\mu,\nu \qquad S_{\mu\nu} = \chi Q_{\mu\nu}$$

où d'après (26.8) p. 567 :

$$\forall\mu,\nu \qquad S_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} Q_{\mu\nu}$$

Le tenseur $Q_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion total des distributions de matière et d'énergie. Il décrit en chaque point d'univers la distribution de matière et d'énergie (cas intérieur). Dans les régions vides de matière et d'énergie (cas extérieur) il est identiquement nul et nous devons retrouver (26.10) p. 569, donc $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Le tenseur $Q_{\mu\nu}$ étant d'ordre deux, le tenseur $S_{\mu\nu}$ est aussi d'ordre deux.

Dans l'hypothèse d'un milieu continu avec interactions électromagnétiques nous avons

$$\forall \mu, \nu \qquad Q_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}$$

où $P_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du milieu continu (déf. (25.8) p. 546) et $M_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. $P_{\mu\nu}$ et $M_{\mu\nu}$ étant symétriques, $Q_{\mu\nu}$ l'est aussi. Par conséquent le tenseur que nous cherchons $S_{\mu\nu}$ est aussi symétrique. La gravitation n'étant pas modélisée par une force, les f^i sont nulles et (25.7) p. 546 deviennent :

$$\forall \mu, \nu \qquad \nabla_\nu P^{\mu\nu} = 0$$

La divergence du tenseur énergie-impulsion du milieu continu est nulle car il se conserve (13.69) p. 318, ainsi que celle de $Q_{\mu\nu}$ qui généralise $P_{\mu\nu}$

$$\forall \mu, \nu \qquad \nabla_\nu Q^{\mu\nu} = 0$$

Ils sont dits *conservatifs*. Cette étude valable en relativité restreinte est valable localement pour l'espace-temps de la relativité générale en prenant une métrique pseudo-euclidienne osculatrice à V_4. Par conséquent $S_{\mu\nu}$ est aussi de divergence nulle :

$$\forall \mu, \nu \qquad \nabla_\nu S^{\mu\nu} = 0$$

$S_{\mu\nu}$ est un tenseur purement géométrique ne dépendant que de la métrique, c.-à-d. des potentiels gravitationnels et de leurs dérivées (par rapport aux coordonnées). Si on utilise le tenseur métrique et uniquement ses dérivées premières, alors aucun nouveau tenseur ne peut être construit. En effet, en chaque point on peut trouver un système de coordonnées (géodésiques) dans lequel les dérivées premières du tenseur métrique sont nulles. Le tenseur cherché est alors égale au tenseur métrique lui-même, ou à son inverse, ou à $\epsilon^{ijkl}/\sqrt{g}$ (où ϵ^{ijkl} est le tenseur d'antisymétrie), etc. Cette égalité entre tenseur étant vraie dans un système de coordonnées, elle est vraie dans tout système de coordonnées. Nous utilisons donc le tenseur métrique ainsi que ses dérivées premières et secondes. Le tenseur de courbure de Ricci dépend des potentiels gravitationnels et est symétrique d'ordre deux mais n'est pas de divergence nulle, en revanche le tenseur d'Einstein (23.33) p. 512 est symétrique d'ordre deux, conservatif et dépendant des potentiels gravitationnels.

Élie Cartan a montré que de façon générale les tenseurs satisfaisant aux conditions précédentes sont donnés par

$$\forall \mu, \nu \qquad S_{\mu\nu} = \alpha \left[R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(R + \beta) \right]$$

où α et β sont des constantes, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure de Ricci, R est sa courbure riemannienne scalaire. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall \mu, \nu \qquad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(R + \beta) &= \chi Q_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \chi Q_{\mu\nu} \end{aligned}$$

où l'on supprime la constante α puisqu'il y a déjà la constante χ. La constante $\Lambda = -\frac{1}{2}\beta$ est appelée *constante cosmologique*. Sauf dans certaines études cosmologiques très spéciales, on n'envisage en théorie relativiste de la gravitation que le cas $\Lambda = 0$. Nous avons alors les

équations du champ gravitationnel :

$$\boxed{\forall \mu, \nu \qquad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi \mathcal{G}}{c^4}\, Q_{\mu\nu}} \tag{26.11}$$

8.2 Cas extérieur

Les équations du champ gravitationnel libre, c.-à-d. à l'extérieur des masses qui l'engendrent s'écrivent :

$$\boxed{\forall \mu, \nu \qquad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = 0}$$

En passant en composantes mixtes :

$$\begin{aligned} \forall \nu, \nu \qquad g^{\nu\mu} R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} R &= \chi g^{\nu\mu} Q_{\mu\nu} \\ R^{\nu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\, \delta^{\nu}_{\nu} R &= \chi Q^{\nu}_{\nu} \end{aligned}$$

où l'on utilise la notation 5.1 p. 399 des tenseurs symétriques. En contractant les indices ν et ν,

$$\forall \nu \qquad R^{\nu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\, \delta^{\nu}_{\nu} R = \chi Q^{\nu}_{\nu}$$

D'après la déf. (4.5) p. 509 de la courbure scalaire :

$$R^{\nu}_{\nu} = R$$

De même la contraction suivante est appelée *scalaire de Laue* :

$$Q^{\nu}_{\nu} = Q$$

D'après (12.14) p. 209, pour un espace à 4 dimensions, $\delta^{\nu}_{\nu} = 4$, on a alors :

$$\begin{aligned} R - 2R &= \chi Q \\ R &= -\chi Q \end{aligned}$$

Cette dernière relation permet d'écrire les équations équivalentes à (26.11) p. 571 :

$$\boxed{\forall \mu, \nu \quad R_{\mu\nu} = \frac{8\pi \mathcal{G}}{c^4} \left(Q_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} Q \right)}$$

Dans un espace vide $Q_{\mu\nu} = 0$, nous retrouvons (26.10) p. 569 :

$$\boxed{\forall \mu, \nu \qquad R_{\mu\nu} = 0} \tag{26.12}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, cela ne signifie pas que l'espace-temps vide de matière et d'énergie soit plat (il est déformé par de la matière ou de l'énergie « plus loin »), car pour cela il faudrait que le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel soit nul, c.-à-d. les conditions plus restrictives $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$.

9 Principe de moindre action en relativité générale

9.1 Cas extérieur

Le principe de moindre action est la méthode historique utilisée par David Hilbert pour établir les équations du champ gravitationnel. Par analogie avec le principe de moindre action qui donne les équations de la dynamique classique, nous supposons que les équations du champ gravitationnel à l'extérieur des masses et de l'énergie qui l'engendrent, dérivent (sont issues) d'un principe de moindre action. Il s'agit de trouver l'action $\mathcal{S}_g$ du champ gravitationnel comme fonction des potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$, invariante par changement de coordonnées pour assurer l'invariance des équations du champ gravitationnel, puis de poser l'hypothèse que la variation de cette action est nulle lors d'une variation des potentiels gravitationnels :

$$\delta\mathcal{S}_g = 0$$

Pour trouver l'expression de $\mathcal{S}_g$, partons de l'invariance de l'hypervolume par changement de coordonnées, (23.7) p. 472 :

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega &= \sqrt{|g'|}\,\mathrm{d}\Omega' \\ \int \mathcal{L}_g\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Omega &= \int \mathcal{L}'_g\sqrt{|g'|}\,\mathrm{d}\Omega'\end{aligned}$$

où le lagrangien du champ gravitationnel $\mathcal{L}_g$ est un scalaire, donc un invariant. Le déterminant g étant négatif d'après (13.9) p. 231, nous avons la forme de l'action cherchée :

$$\mathcal{S}_g = \kappa \int \mathcal{L}_g\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\Omega$$

où κ est une constante. Il s'agit à présent de trouver l'expression du lagrangien $\mathcal{L}_g$. Par analogie avec l'équation de Laplace du potentiel du champ gravitationnel dans le cas extérieur $\Delta\phi = 0$ (relation (10.5) p. 194), nous cherchons les équations du champ gravitationnel sous forme d'équations différentielles du second ordre par rapport aux potentiels gravitationnels $g_{\mu\nu}$. Autrement dit $\mathcal{L}_g$ doit être du premier ordre car on prend sa variation. Il n'existe pas de scalaire formé à partir des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées premières $\partial_k g_{\mu\nu}$ (ou des symboles de Christoffel). Ces derniers peuvent toujours être annulés en un point en prenant un système de coordonnées localement géodésique en ce point. En revanche, le scalaire de courbure riemannienne R, ainsi que $\alpha R + \beta$ où α et β sont des constantes, contiennent les dérivées secondes des $g_{\mu\nu}$ de manière linéaire, ce qui fait qu'elles disparaissent lors de la variation. Dans un premier temps on suppose que le

lagrangien est la courbure scalaire. Avec la définition de la courbure scalaire R 4.5 p. 509 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_g &= \kappa \int \sqrt{-g}\, R \mathrm{d}\Omega \\
\delta\mathcal{S}_g &= \kappa \int \delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right) \mathrm{d}\Omega \\
\frac{1}{\kappa}\delta\mathcal{S}_g &= \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \mathrm{d}\Omega \\
&= \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g}\, \mathrm{d}\Omega + \int \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}\Omega + \int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

- Calculons la première intégrale grâce à (12.17) p. 210 qui donne δg :

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}} \\
&= \frac{-g}{2\sqrt{-g}}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Avec (12.14) p. 209

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= 1 \\
\delta\left(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}\right) &= 0 \\
g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{g}{2\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{\sqrt{-g}\sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g}\, \mathrm{d}\Omega &= \int R\delta\sqrt{-g}\, \mathrm{d}\Omega \\
&= -\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu} R\sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

- Calculons la troisième intégrale en nous plaçant dans un système de coordonnées localement géodésiques. Le tenseur de courbure de Ricci (déf. 4.4 p. 508) se simplifie. Les symboles de Christoffel sont nuls, mais pas leur dérivée :

$$\begin{aligned}
\forall \mu, \sigma = 0, \ldots, 3 \qquad R_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\xi{}_{\sigma\mu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\xi} \\
&= \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \\
&= \delta\left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\lambda\right) \\
&= \partial_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \\
&= D_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - D_\sigma \delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

car lorsque les symboles de Christoffel sont nuls, la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle ordinaire. C'est une équation tensorielle, donc valable dans tous

système de coordonnées, pas seulement localement géodésique.

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\left(D_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - D_\nu \delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right) \\ &= g^{\mu\nu} D_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\nu} D_\nu \delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

La dérivation covariante du tenseur métrique étant nulle :

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right) - D_j\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right) \\ &= D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right) - D_\lambda\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right) \\ &= D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant et en utilisant le théorème de la divergence sous forme tensorielle (9.28) p. 179 :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega &= \int \sqrt{-g}\, D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \oint \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right)\mathrm{d}\sigma_\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cette intégrale est nulle car calculée sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration sur laquelle les variations du champ sont nulles conformément au principe de moindre action.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa}\,\delta\mathcal{S}_g &= -\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}R\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega + \int \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega \\ \delta\mathcal{S}_g &= \kappa\int \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit les équations du champ gravitationnel dans le cas extérieur :

$$\begin{aligned} \forall \mu,\nu = 0,\ldots,3 \qquad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R &= 0 \\ S_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Chaque composante du tenseur $S_{\mu\nu}$ est nulle, ce qui donne 16 relations. Nous avons vu que par symétrie des tenseurs $R_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, le tenseur S est symétrique. Par conséquent, parmi les 16 composantes de ce tenseur, seules 10 sont distinctes et ne restent que 10 relations indépendantes (par exemple la relation $S_{02} = 0$ est équivalente à la relation $S_{20} = 0$). De plus (12.13) p. 209 et la nullité de la divergence du tenseur d'Einstein (23.32) p. 511 donnent :

$$\begin{aligned} \forall \lambda,\nu = 0,\ldots,3 \qquad g^{\lambda\mu}R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu}R &= 0 \\ R^{\lambda_\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^\lambda_\nu R &= 0 \\ \forall \nu = 0,\ldots,3 \qquad \nabla_\lambda\left(R^{\lambda_\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^\lambda_\nu R\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ces quatre relations lient les dix composantes de $S_{\mu\nu}$ restantes, il n'y a donc que six relations distinctes, qui correspondent aux six composantes indépendantes du tenseur métrique.

9.2 Lagrangien du champ gravitationnel

Nous allons voir que le lagrangien a une expression plus simple que la courbure scalaire. Avec la déf. 4.5 p. 509 de la courbure scalaire R puis celle du tenseur de courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ 4.4 p. 508 :

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ \sqrt{-g}\, R &= \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\xi{}_{\nu\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\nu\xi} \right) \end{aligned}$$

On intègre par partie le premier et le deuxième terme dans la parenthèse :

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\, R = \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \right) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) \\ + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \right) \\ + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\xi{}_{\nu\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\nu\xi} \right) \end{aligned}$$

Réorganisons les termes et intégrons :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g}\, R \mathrm{d}\Omega = \int & \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\xi{}_{\nu\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\nu\xi} \right) \mathrm{d}\Omega \\ & + \int \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \right) \mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la divergence sous forme tensorielle (9.28) p. 179, le dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \int \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \right) \mathrm{d}\Omega &= \int \partial_\lambda \left[\sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \Gamma^\nu{}_{\nu\mu} \right) \right] \mathrm{d}\Omega \\ &= \oint \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda} \Gamma^\nu{}_{\nu\mu} \right) \mathrm{d}\sigma^r \end{aligned}$$

Sa variation est nulle car l'intégrale est évaluée sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration sur laquelle la variation du champ est nulle conformément au principe de moindre action. Il reste

$$\int \sqrt{-g}\, R \mathrm{d}\Omega = \int \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\xi{}_{\nu\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\, \Gamma^\lambda{}_{\nu\xi} \right) \mathrm{d}\Omega$$

- le premier terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \mu \qquad \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) &= g^{\mu\nu} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} \right) + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{\partial_\nu g}{2\sqrt{-g}} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

  Avec (12.18) p. 210 donnant $\partial_\nu g$:

$$\begin{aligned} \forall \mu \qquad \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \right) &= -g^{\mu\nu} \frac{g}{2\sqrt{-g}}\, g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{-\sqrt{-g}\sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}}\, g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g} \left(\tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\nu g^{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

Avec (12.13) p. 209 sur le symbole de Kronecker :

$$\begin{aligned}\forall \mu,\nu=0,\dots,3 \qquad g^{\mu\nu} &= g^{\mu\lambda}\delta^{\nu}_{\lambda}\\ &= g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma}\\ \forall \mu \qquad \partial_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda}\partial_\nu g^{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\\ &= \partial_\nu g^{\mu\lambda}\delta^{\nu}_{\lambda} + \delta^{\mu}_{\sigma}\partial_\nu g^{\nu\sigma} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\\ &= \partial_\nu g^{\mu\nu} + \partial_\nu g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\\ &= -g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\end{aligned}$$

Donc

$$\forall \mu \qquad \partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\right)$$

Avec la relation donnant les symboles de Christoffel de 2$^{\text{e}}$ espèce en fonction du tenseur métrique (22.22) p. 442 :

$$\begin{aligned}\forall \mu,\sigma,\nu=0,\dots,3 \qquad \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} &= \tfrac{1}{2}\,g^{\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\sigma\nu}\right)\\ \forall \mu \qquad g^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} &= g^{\mu\lambda}\left(\tfrac{1}{2}\,g^{\sigma\nu}\,\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \tfrac{1}{2}\,g^{\sigma\nu}\,\partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \tfrac{1}{2}\,g^{\sigma\nu}\,\partial_\lambda g_{\sigma\nu}\right)\\ &= g^{\mu\lambda}\left(g^{\sigma\nu}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}\,g^{\sigma\nu}\,\partial_\lambda g_{\sigma\nu}\right)\\ &= g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}\,g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu}\partial_\lambda g_{\sigma\nu}\\ &= g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\end{aligned}$$

Donc

$$\forall \mu \qquad \partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = -\sqrt{-g}g^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}$$

- le deuxième terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall \lambda,\mu,\nu=0,\dots,3 \qquad \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\right) + \sqrt{-g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu}\\ &= g^{\mu\nu}\frac{-\partial_\lambda g}{2\sqrt{-g}} + \sqrt{-g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu}\\ &= \tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,g^{\xi\omega}\partial_\lambda g_{\xi\omega} + \sqrt{-g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu}\\ &= \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\xi\omega}\partial_\lambda g_{\xi\omega} + \partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

D'après le théorème de Ricci en composantes contravariantes (22.37) p. 459 et en appliquant (22.35) p. 457 :

$$\begin{aligned}\forall \mu,\nu \qquad Dg^{\mu\nu} &= 0\\ \forall \lambda,\mu,\nu \qquad \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda} &= 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall \lambda,\mu,\nu \qquad \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\xi\omega}\partial_\lambda g_{\xi\omega} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right)$$

On utilise la forme particulière des symboles de Christoffel, (22.23) p. 442 :

$$\forall \lambda,\mu,\nu \qquad \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right)$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g}\,R\mathrm{d}\Omega = \int -\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\sqrt{-g}g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right)\\ + \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\xi}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

Factorisons $\sqrt{-g}$ et développons le reste :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g}\, R\mathrm{d}\Omega &= \int \sqrt{-g}\left(-g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\xi\lambda} + g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right.\\ &\qquad\left. + g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\xi} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right)\mathrm{d}\Omega\\ &= \int \sqrt{-g}\left(-g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} + g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right)\mathrm{d}\Omega\\ &= \int \sqrt{-g}\left(2g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indices $\sigma \rightleftarrows \mu$ et $\nu \rightleftarrows \xi$ dans le deuxième terme, et $\nu \to \xi$ et $\xi \to \sigma$ dans le troisième :

$$\int \sqrt{-g}\, R\mathrm{d}\Omega = \int \sqrt{-g}\left(2g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\xi\sigma}\right)\mathrm{d}\Omega$$

Ajoutons le terme nul $\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g}\, R\mathrm{d}\Omega &= \int \sqrt{-g}g^{\mu\xi}\left[2\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}\right) - \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}\right)\right]\mathrm{d}\Omega\\ &= \int \sqrt{-g}g^{\mu\xi}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}\right)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

Nous obtenons l'expression du lagrangien du champ gravitationnel :

$$\mathcal{L}_g = g^{\mu\xi}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}\right)$$

9.3 Constante cosmologique

Si à la place de R nous prenons la combinaison linéaire $\alpha R+\beta$ avec α et β des constantes, nous avons :

$$\mathcal{S}_g = \kappa \int \sqrt{-g}\,(\alpha R + \beta)\mathrm{d}\Omega$$

Or nous devons retrouver

$$\mathcal{S}_g = \kappa \int \sqrt{-g}\, R\mathrm{d}\Omega$$

lorsque la constante β est nulle, donc $\alpha = 1$. Les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\forall \mu,\nu = 0,\ldots,3 \qquad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(R+\beta) &= 0\\ R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\beta &= 0\\ R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}$$

où

$$\Lambda = -\tfrac{1}{2}\,\beta$$

est appelée *constante cosmologique*. Si cette constante est non nulle, sa valeur est très faible et par conséquent n'intervient quasiment pas localement mais uniquement en cosmologie, d'où son nom.

9.4 Cas intérieur

Dans le cas intérieur, pour déterminer les équations du champ gravitationnel dans la matière ou en présence de rayonnement électromagnétique, nous devons ajouter à l'action du champ gravitationnel $\mathcal{S}_g$, l'action pour la matière et le champ électromagnétique $\mathcal{S}_e$ (« e » pour énergie), telle que :

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{S}_g + \mathcal{S}_e) &= 0\\ \delta\mathcal{S}_g + \delta\mathcal{S}_e &= 0\\ \delta\mathcal{S}_e &= 0\end{aligned}$$

On suppose que l'action s'écrit

$$\mathcal{S}_e = \kappa' \int \mathcal{L}_e \sqrt{-g}\,\mathrm{d}\Omega$$

où le lagrangien $\mathcal{L}_e$ est fonction du tenseur métrique et de ses dérivées premières :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_e &= \mathcal{L}_e(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu})\\ &= \mathcal{L}_e(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})\end{aligned}$$

La variation de l'action s'écrit

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_e &= \kappa' \int \delta(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})\,\mathrm{d}\Omega\\ \tfrac{1}{\kappa'}\,\delta\mathcal{S}_e &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)\mathrm{d}\Omega\\ &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega + \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

On intègre par partie le second terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\kappa'}\,\delta\mathcal{S}_e &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega + \int \partial_\lambda\left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta g^{\mu\nu}\right]\mathrm{d}\Omega - \int \partial_\lambda\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]\delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}\Omega\\ &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega + \int \partial_\lambda\left[\sqrt{-g}\,\frac{\partial\mathcal{L}_e}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta g^{\mu\nu}\right]\mathrm{d}\Omega - \int \partial_\lambda\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]\delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

On utilise le théorème de la divergence sous forme tensorielle (9.28) p. 179 :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\kappa'}\,\delta\mathcal{S}_e &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega + \oint \sqrt{-g}\,\frac{\partial\mathcal{L}_e}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma_\lambda - \int \partial_\lambda\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]\delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}\Omega\\ &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega - \int \partial_\lambda\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]\delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

L'intégrale sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration est nulle car les variations du champ y sont nulles conformément au principe de moindre action.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_e &= \kappa' \int \left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]\right\}\delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}\Omega\\ &= \kappa' \int \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

où l'on a posé le tenseur impulsion-énergie

$$\forall \mu, \nu = 0, \ldots, 3 \qquad T_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \left(\mathcal{L}_e \sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial (\mathcal{L}_e \sqrt{-g})}{\partial \left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)} \right]$$

Nous avons alors

$$\delta(\mathcal{S}_g + \mathcal{S}_e) = \kappa \int \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R - \chi T_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} \mathrm{d}\Omega$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit les équations du champ gravitationnel dans le cas intérieur :

$$\forall \mu, \nu = 0, \ldots, 3 \qquad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}$$

10 Champ gravitationnel à symétrie sphérique

10.1 La métrique de Schwarzschild

Ce champ est créé par une distribution de matière à symétrie centrale. Lorsque la densité de matière tend vers zéro nous devons retrouver une métrique euclidienne, qui s'écrit en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2 \mathrm{d}t^2 - \left[\mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) \mathrm{d}\phi^2 \right] \\ &= c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2 \left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta) \mathrm{d}\phi^2 \right] \end{aligned}$$

Le $\mathrm{d}s^2$ le plus général est donc

$$\mathrm{d}s^2 = a(r,t) c^2 \mathrm{d}t^2 - b(r,t) \mathrm{d}r^2 - c(r,t) \left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta) \mathrm{d}\phi^2 \right] + \mathrm{d}(r,t) \mathrm{d}r \mathrm{d}t$$

où les fonctions a, b et d sont sans dimension, et c est homogène au carré d'une longueur. Effectuons une transformation de coordonnées de la forme générale

$$r = f_1(r', t') \qquad \text{et} \qquad t = f_2(r', t')$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques des nouvelles coordonnées r' et t'. Chaque fonction permet une condition, et l'on se débarasse du terme croisé en posant

$$d(r', t') = 0$$

La deuxième condition conserve la symétrie centrale :

$$c(r', t') = r'^2$$

Les deux fonctions inconnues restantes sont écrites sous une forme exponentielle :

$$a(r', t') = e^{\alpha(r', t')} \qquad \text{et} \qquad b(r', t') = e^{\beta(r', t')}$$

Nous obtenons le $\mathrm{d}s^2$ de la métrique de Schwarzschild (en omettant les primes)

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\alpha} c^2 \mathrm{d}t^2 - e^{\beta}\, \mathrm{d}r^2 - r^2 \left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta) \mathrm{d}\phi^2 \right]$$

où α et β sont des fonctions de r et t.

10.2 Le tenseur métrique de Schwarzschild

En coordonnées galiléennes réduites déf. 1.4 p. 219 avec la notation indicielle 1.2 p. 219 :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}(x^0)^2 + g_{11}\mathrm{d}(x^1)^2 + g_{22}\mathrm{d}(x^2)^2 + g_{33}\mathrm{d}(x^3)^2$$

avec

$$\begin{cases} g_{00} = e^{\alpha} \\ g_{11} = -e^{\beta} \\ g_{22} = -r^2 \\ g_{33} = -r^2\sin^2(\theta) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad G\begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{26.13}$$

Le déterminant de G s'écrit

$$g = -e^{\alpha}e^{\beta}r^4\sin^2(\theta) \tag{26.14}$$

10.3 Le tenseur métrique dual de Schwarzschild

Les composantes du tenseur dual s'écrivent :

$$g^{00} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} -e^{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad g^{00} = \frac{-e^{\beta}r^4\sin^2(\theta)}{-e^{\alpha}e^{\beta}r^4\sin^2(\theta)} \quad \Rightarrow \quad g^{00} = e^{-\alpha}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad g^{11} = \frac{e^{\alpha}r^4\sin^2(\theta)}{-e^{\alpha}e^{\beta}r^4\sin^2(\theta)} \quad \Rightarrow \quad g^{11} = -e^{-\beta}$$

$$g^{22} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad g^{22} = \frac{e^{\alpha}e^{\beta}r^2\sin^2(\theta)}{-e^{\alpha}e^{\beta}r^4\sin^2(\theta)} \quad \Rightarrow \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}$$

$$g^{33} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad g^{33} = \frac{e^{\alpha}e^{\beta}r^2}{-e^{\alpha}e^{\beta}r^4\sin^2(\theta)} \quad \Rightarrow \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}$$

$$\left[g^{ij}\right] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

10.4 Symboles de Christoffel en métrique de Schwarzschild

Les symboles de Christoffel ayant trois indices, dans un espace de dimension quatre ils ont $4^3 = 64$ composantes. Leur symétrie par rapport à deux indices réduit le nombre de composantes indépendantes à $4 \times (8+2) = 40$ (la moitié de la matrice 4×4 des indices symétriques, plus la moitié de ses éléments diagonaux, le tout fois 4).

Les relations (22.27) p. 444 en coordonnées rectangulaires nous donnent pour les symboles de Christoffel de 2$^{\text{e}}$ espèce :

$$\begin{cases} \Gamma^0{}_{00} = \dfrac{g_{00,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{01} = \dfrac{g_{00,1}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{02} = \dfrac{g_{00,2}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{03} = \dfrac{g_{00,3}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{11} = \dfrac{-g_{11,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{22} = \dfrac{-g_{22,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{33} = \dfrac{-g_{33,0}}{2g_{00}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^1{}_{11} = \dfrac{g_{11,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{10} = \dfrac{g_{11,0}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{12} = \dfrac{g_{11,2}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{13} = \dfrac{g_{11,3}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{00} = \dfrac{-g_{00,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{22} = \dfrac{-g_{22,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{33} = \dfrac{-g_{33,1}}{2g_{11}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{22} = \dfrac{g_{22,2}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{20} = \dfrac{g_{22,0}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{21} = \dfrac{g_{22,1}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{23} = \dfrac{g_{22,3}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{00} = \dfrac{-g_{00,2}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{11} = \dfrac{-g_{11,2}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{33} = \dfrac{-g_{33,2}}{2g_{22}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^3{}_{33} = \dfrac{g_{33,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{30} = \dfrac{g_{33,0}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{31} = \dfrac{g_{33,1}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{32} = \dfrac{g_{33,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{00} = \dfrac{-g_{00,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{11} = \dfrac{-g_{11,3}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{22} = \dfrac{-g_{22,3}}{2g_{33}} \end{cases}$$

g_{00} et g_{11} ne sont fonction que des coordonnées x^0 et x^1, g_{22} n'est fonction que de x^1, et g_{33} n'est fonction que de x^1 et x^2. Donc

$$g_{00,2} = g_{00,3} = g_{11,2} = g_{11,3} = g_{22,0} = g_{22,2} = g_{22,3} = g_{33,0} = g_{33,3} = 0$$

$$\begin{cases} \Gamma^0{}_{00} = \dfrac{g_{00,0}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{01} = \dfrac{g_{00,1}}{2g_{00}} \\ \Gamma^0{}_{11} = \dfrac{-g_{11,0}}{2g_{00}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^1{}_{11} = \dfrac{g_{11,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{10} = \dfrac{g_{11,0}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{00} = \dfrac{-g_{00,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{22} = \dfrac{-g_{22,1}}{2g_{11}} \\ \Gamma^1{}_{33} = \dfrac{-g_{33,1}}{2g_{11}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{21} = \dfrac{g_{22,1}}{2g_{22}} \\ \Gamma^2{}_{33} = \dfrac{-g_{33,2}}{2g_{22}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^3{}_{31} = \dfrac{g_{33,1}}{2g_{33}} \\ \Gamma^3{}_{32} = \dfrac{g_{33,2}}{2g_{33}} \end{cases}$$

Notons par un point la dérivation par rapport à ct et par un prime celle par rapport à r. Avec le tenseur métrique de Schwarzschild (26.13) p. 580 :

$$\begin{cases}\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}\dot{\alpha}\\ \Gamma^0{}_{01} = \frac{1}{2}\alpha'\\ \Gamma^0{}_{11} = \frac{1}{2}\dot{\beta}e^{\beta-\alpha}\end{cases}\quad\begin{cases}\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2}\beta'\\ \Gamma^1{}_{10} = \frac{1}{2}\dot{\beta}\\ \Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2}\alpha' e^{\alpha-\beta}\\ \Gamma^1{}_{22} = -re^{-\beta}\\ \Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2(\theta)e^{-\beta}\end{cases}\quad\begin{cases}\Gamma^2{}_{21} = \dfrac{1}{r}\\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases}\quad\begin{cases}\Gamma^3{}_{31} = \dfrac{1}{r}\\ \Gamma^3{}_{32} = \cot(\theta)\end{cases}\tag{26.15}$$

10.5 Symboles de Christoffel contractés en métrique de Schwarzschild

Avec le déterminant du tenseur métrique de Schwarzschild (26.14) p. 580, notons par un point la dérivation par rapport à ct et par un prime celle par rapport à r :

$$\begin{cases}\Gamma^i{}_{i0} = \dfrac{\partial_0 g}{2g}\\ \Gamma^i{}_{i1} = \dfrac{\partial_1 g}{2g}\\ \Gamma^i{}_{i2} = \dfrac{\partial_2 g}{2g}\\ \Gamma^i{}_{i3} = \dfrac{\partial_3 g}{2g}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Gamma^i{}_{i0} = \dfrac{-(\dot{\alpha}+\dot{\beta})e^{\alpha+\beta}r^4\sin^2(\theta)}{-2e^{\alpha+\beta}r^4\sin^2(\theta)}\\ \Gamma^i{}_{i1} = \dfrac{-\left[4r^3+(\alpha'+\beta')r^4\right]e^{\alpha+\beta}\sin^2(\theta)}{-2e^{\alpha+\beta}r^4\sin^2(\theta)}\\ \Gamma^i{}_{i2} = \dfrac{-2e^{\alpha+\beta}r^4\sin(\theta)\cos(\theta)}{-2e^{\alpha+\beta}r^4\sin^2(\theta)}\\ \Gamma^i{}_{i3} = 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Gamma^i{}_{i0} = \dfrac{1}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\\ \Gamma^i{}_{i1} = \dfrac{2}{r}+\dfrac{1}{2}(\alpha'+\beta')\\ \Gamma^i{}_{i2} = \cot(\theta)\\ \Gamma^i{}_{i3} = 0\end{cases}$$

10.6 Tenseur de Ricci pour la métrique de Schwarzschild

Grâce aux symboles de Christoffel, § 10.4 p. 581, calculons la composante R_{00} :

$$R_{00} = \partial_r\Gamma^r{}_{00} - \partial_0\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^k{}_{00}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{0k}$$

$$\begin{aligned}\partial_r\Gamma^r{}_{00} &= \partial_0\Gamma^0{}_{00} + \partial_1\Gamma^1{}_{00} + \partial_2\Gamma^2{}_{00} + \partial_3\Gamma^3{}_{00}\\ &= \partial_0\Gamma^0{}_{00} + \partial_1\Gamma^1{}_{00}\\ &= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\partial_r\left(\alpha' e^{\alpha-\beta}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\ddot{\alpha} + \left(\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'\beta'\right)e^{\alpha-\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_0\Gamma^r{}_{r0} &= \partial_0\Gamma^0{}_{00} + \partial_0\Gamma^1{}_{10} + \partial_0\Gamma^2{}_{20} + \partial_0\Gamma^3{}_{30}\\ &= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\partial_r\dot{\beta}\\ &= \tfrac{1}{2}\ddot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\ddot{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{00}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^0{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^2{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r2} + \Gamma^3{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r3} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r1} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\left(\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^1{}_{10} + \Gamma^2{}_{20} + \Gamma^3{}_{30}\right) + \Gamma^1{}_{00}\left(\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}\left(\tfrac{1}{2}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha' e^{\alpha-\beta}\left(\tfrac{1}{2}\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta' + \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \left(\tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' + \tfrac{1}{r}\alpha'\right) e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{0k} &= \Gamma^0{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{00} + \Gamma^1{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{01} + \Gamma^2{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{02} + \Gamma^3{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{03} \\
&= \Gamma^0{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{00} + \Gamma^1{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{01} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{10}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^0{}_{20}\Gamma^2{}_{00} + \Gamma^0{}_{30}\Gamma^3{}_{00} \\
&\qquad + \Gamma^1{}_{00}\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{10}\Gamma^1{}_{01} + \Gamma^1{}_{20}\Gamma^2{}_{01} + \Gamma^1{}_{30}\Gamma^3{}_{01} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\,\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{10}\,\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{00}\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{10}\Gamma^1{}_{01} \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta} + \tfrac{1}{4}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \tfrac{1}{2}\,\ddot{\alpha} + \left(\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'\beta'\right) e^{\alpha-\beta} - \tfrac{1}{2}\,\ddot{\alpha} - \tfrac{1}{2}\,\ddot{\beta} \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \left(\tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' + \tfrac{1}{r}\alpha'\right) e^{\alpha-\beta} \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 - \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta} \\
&= -\tfrac{1}{2}\,\ddot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{4}\alpha'^2 - \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' + \tfrac{1}{r}\alpha'\right) e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

Calculons la composante R_{10} :

$$R_{10} = \partial_r \Gamma^r{}_{01} - \partial_0 \Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^k{}_{01}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{0k}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r \Gamma^r{}_{01} &= \partial_0 \Gamma^0{}_{01} + \partial_1 \Gamma^1{}_{01} + \partial_2 \Gamma^2{}_{01} + \partial_3 \Gamma^3{}_{01} \\
&= \partial_0 \Gamma^0{}_{01} + \partial_1 \Gamma^1{}_{01} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\alpha' + \tfrac{1}{2}\partial_r \dot{\beta} \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}' + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Gamma^r{}_{r1} &= \partial_0 \Gamma^0{}_{01} + \partial_0 \Gamma^1{}_{11} + \partial_0 \Gamma^2{}_{21} + \partial_0 \Gamma^3{}_{31} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\alpha' + \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\beta' + \partial_{ct}\tfrac{1}{r} + \partial_{ct}\tfrac{1}{r} \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}' + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{01}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^0{}_{01}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{01}\,\Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^2{}_{01}\,\Gamma^r{}_{r2} + \Gamma^3{}_{01}\,\Gamma^r{}_{r3} \\
&= \Gamma^0{}_{01}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{01}\,\Gamma^r{}_{r1} \\
&= \Gamma^0{}_{01}\left(\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^1{}_{10} + \Gamma^2{}_{20} + \Gamma^3{}_{30}\right) + \Gamma^1{}_{01}\left(\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31}\right) \\
&= \Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{01}\Gamma^1{}_{10} + \Gamma^1{}_{01}\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{01}\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^1{}_{01}\Gamma^2{}_{21} + \Gamma^1{}_{01}\Gamma^3{}_{31} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\alpha} + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\beta' + \tfrac{1}{r}\dot{\beta} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\beta' + \tfrac{1}{r}\dot{\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{0k} &= \Gamma^0{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{00} + \Gamma^1{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{01} + \Gamma^2{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{02} + \Gamma^3{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{03} \\
&= \Gamma^0{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{00} + \Gamma^1{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{01} \\
&= \Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^0{}_{21}\Gamma^2{}_{00} + \Gamma^0{}_{31}\Gamma^3{}_{00} \\
&\qquad + \Gamma^1{}_{01}\,\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11}\,\Gamma^1{}_{01} + \Gamma^1{}_{21}\,\Gamma^2{}_{01} + \Gamma^1{}_{31}\,\Gamma^3{}_{01} \\
&= \Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{01}\,\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11}\,\Gamma^1{}_{01} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot\alpha + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot\beta + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot\beta + \tfrac{1}{4}\dot\beta\beta' \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha'\dot\beta + \tfrac{1}{4}\dot\beta\beta'
\end{aligned}$$

$$R_{10} = \frac{\dot\beta}{r}$$

Calculons la composante R_{11} :

$$R_{11} = \partial_r\Gamma^r{}_{11} - \partial_1\Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^k{}_{11}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{1k}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r\Gamma^r{}_{11} &= \partial_0\Gamma^0{}_{11} + \partial_1\Gamma^1{}_{11} + \partial_2\Gamma^2{}_{11} + \partial_3\Gamma^3{}_{11} \\
&= \partial_0\Gamma^0{}_{11} + \partial_1\Gamma^1{}_{11} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\left(\dot\beta e^{\beta-\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\partial_r\beta' \\
&= \tfrac{1}{2}\beta'' + \left(\tfrac{1}{2}\,\ddot\beta + \tfrac{1}{2}\dot\beta^2 - \dot\beta\dot\alpha\right)e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1\Gamma^r{}_{r1} &= \partial_1\Gamma^0{}_{01} + \partial_1\Gamma^1{}_{11} + \partial_1\Gamma^2{}_{21} + \partial_1\Gamma^3{}_{31} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_r\alpha' + \tfrac{1}{2}\partial_r\beta' + \partial_r\tfrac{1}{r} + \partial_r\tfrac{1}{r} \\
&= \tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{2}\beta'' - \tfrac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{11}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^0{}_{11}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{11}\,\Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^2{}_{11}\,\Gamma^r{}_{r2} + \Gamma^3{}_{11}\,\Gamma^r{}_{r3} \\
&= \Gamma^0{}_{11}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{11}\,\Gamma^r{}_{r1} \\
&= \Gamma^0{}_{11}\left(\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^1{}_{10} + \Gamma^2{}_{20} + \Gamma^3{}_{30}\right) + \Gamma^1{}_{11}\left(\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31}\right) \\
&= \Gamma^0{}_{11}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{10} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^2{}_{21} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^3{}_{31} \\
&= \tfrac{1}{4}\dot\beta\dot\alpha e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot\beta^2 e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{2r}\beta' + \tfrac{1}{2r}\beta' \\
&= \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{r}\beta' + \left(\tfrac{1}{4}\dot\beta\dot\alpha + \tfrac{1}{4}\dot\beta^2\right)e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{r1}\Gamma^r{}_{1k} &= \Gamma^0{}_{r1}\Gamma^r{}_{10} + \Gamma^1{}_{r1}\Gamma^r{}_{11} + \Gamma^2{}_{r1}\Gamma^r{}_{12} + \Gamma^3{}_{r1}\Gamma^r{}_{13} \\
&= \Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{10} + \Gamma^0{}_{21}\Gamma^2{}_{10} + \Gamma^0{}_{31}\Gamma^3{}_{10} \\
&\quad + \Gamma^1{}_{01}\Gamma^0{}_{11} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^1{}_{21}\Gamma^2{}_{11} + \Gamma^1{}_{31}\Gamma^3{}_{11} \\
&\quad + \Gamma^2{}_{01}\Gamma^0{}_{12} + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^1{}_{12} + \Gamma^2{}_{21}\Gamma^2{}_{12} + \Gamma^2{}_{31}\Gamma^3{}_{12} \\
&\quad + \Gamma^3{}_{01}\Gamma^0{}_{13} + \Gamma^3{}_{11}\Gamma^1{}_{13} + \Gamma^3{}_{21}\Gamma^2{}_{13} + \Gamma^3{}_{31}\Gamma^3{}_{13} \\
&= \Gamma^0{}_{01}\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{10} + \Gamma^1{}_{01}\Gamma^0{}_{11} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{21}\Gamma^2{}_{12} + \Gamma^3{}_{31}\Gamma^3{}_{13} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\dot\beta^2 e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot\beta^2 e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{r^2} + \tfrac{1}{r^2} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{2}{r^2} + \tfrac{1}{2}\dot\beta^2 e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{11} &= \tfrac{1}{2}\beta'' + \left(\tfrac{1}{2}\ddot{\beta} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha'' - \tfrac{1}{2}\beta'' + \tfrac{2}{r^2} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{r}\beta' + \left(\tfrac{1}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2\right)e^{\beta-\alpha} \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\alpha'^2 - \tfrac{1}{4}\beta'^2 - \tfrac{2}{r^2} - \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} \\ &= -\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{r}\beta' - \tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\tfrac{1}{2}\ddot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \tfrac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

Calculons la composante R_{22} :

$$R_{22} = \partial_r \Gamma^r{}_{22} - \partial_2 \Gamma^r{}_{r2} + \Gamma^k{}_{22}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r2}\,\Gamma^r{}_{2k}$$

$$\begin{aligned}\partial_r \Gamma^r{}_{22} &= \partial_0 \Gamma^0{}_{22} + \partial_1 \Gamma^1{}_{22} + \partial_2 \Gamma^2{}_{22} + \partial_3 \Gamma^3{}_{22} \\ &= \partial_1 \Gamma^1{}_{22} \\ &= \partial_r\left(-re^{-\beta}\right) \\ &= -e^{-\beta} + r\beta' e^{-\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_2 \Gamma^r{}_{r2} &= \partial_2 \Gamma^0{}_{02} + \partial_2 \Gamma^1{}_{12} + \partial_2 \Gamma^2{}_{22} + \partial_2 \Gamma^3{}_{32} \\ &= \partial_2 \Gamma^3{}_{32} \\ &= \partial_\theta \cot(\theta) \\ &= -1 - \cot^2(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^k{}_{22}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^0{}_{22}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{22}\,\Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^2{}_{22}\,\Gamma^r{}_{r2} + \Gamma^3{}_{22}\,\Gamma^r{}_{r3} \\ &= \Gamma^1{}_{22}\left(\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31}\right) \\ &= -re^{-\beta}\left(\tfrac{1}{2}\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta' + \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r}\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}r\left(\alpha' + \beta'\right)e^{-\beta} - 2e^{-\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^k{}_{r2}\Gamma^r{}_{2k} &= \Gamma^0{}_{r2}\Gamma^r{}_{20} + \Gamma^1{}_{r2}\Gamma^r{}_{21} + \Gamma^2{}_{r2}\Gamma^r{}_{22} + \Gamma^3{}_{r2}\Gamma^r{}_{23} \\ &= \Gamma^1{}_{r2}\Gamma^r{}_{21} + \Gamma^2{}_{r2}\Gamma^r{}_{22} + \Gamma^3{}_{r2}\Gamma^r{}_{23} \\ &= \Gamma^1{}_{02}\Gamma^0{}_{21} + \Gamma^1{}_{12}\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^1{}_{21}\Gamma^2{}_{21} + \Gamma^1{}_{31}\Gamma^3{}_{21} \\ &\quad + \Gamma^2{}_{02}\Gamma^0{}_{22} + \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^2{}_{22}\Gamma^2{}_{22} + \Gamma^2{}_{32}\Gamma^3{}_{22} \\ &\quad + \Gamma^3{}_{02}\Gamma^0{}_{23} + \Gamma^3{}_{12}\Gamma^1{}_{23} + \Gamma^3{}_{22}\Gamma^2{}_{23} + \Gamma^3{}_{32}\Gamma^3{}_{23} \\ &= \Gamma^1{}_{12}\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^3{}_{32}\Gamma^3{}_{23} \\ &= \tfrac{1}{r} \times -re^{-\beta} + \tfrac{1}{r} \times -re^{-\beta} + \cot(\theta)\cot(\theta) \\ &= -2e^{-\beta} + \cot^2(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{22} &= -e^{-\beta} + r\beta' e^{-\beta} + 1 + \cot^2(\theta) - \tfrac{1}{2}r\left(\alpha' + \beta'\right)e^{-\beta} - 2e^{-\beta} + 2e^{-\beta} - \cot^2(\theta) \\ &= -\left[1 + \tfrac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1\end{aligned}$$

En résumé, les composantes covariantes du tenseur de Ricci s'écrivent :

$$\begin{cases} R_{00} = -\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha'\right) e^{\alpha-\beta} \\ R_{10} = \frac{\dot{\beta}}{r} \\ R_{11} = -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right) e^{\beta-\alpha} \\ R_{22} = -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right] e^{-\beta} + 1 \end{cases}$$

On applique les équations du champ gravitationnel dans le cas extérieur (26.12) p. 571 :

$$\forall \mu, \nu \qquad R_{\mu\nu} = 0$$

soit,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha'\right) e^{\alpha-\beta} = 0 \\ \frac{\dot{\beta}}{r} = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right) e^{\beta-\alpha} = 0 \\ -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right] e^{-\beta} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha' = 0 \\ \dot{\beta} = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 = 0 \\ 1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta') = e^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' + \beta' = 0 \\ \beta = \beta(r) \\ 1 - r\beta' = e^{\beta} \\ 1 + r\alpha' = e^{\beta} \end{cases}$$

Cherchons les expressions de e^{α} et de e^{β}. On pose

$$\begin{aligned} y &= e^{-\beta} \\ y' &= -\beta' e^{-\beta} \\ y + ry' &= e^{-\beta} - r\beta' e^{-\beta} \\ &= (1 - r\beta')\, e^{-\beta} \end{aligned}$$

La troisième relation s'écrit

$$\begin{aligned} (1 - r\beta')\, e^{-\beta} &= 1 \\ y + ry' &= 1 \end{aligned}$$

y est de la forme $y = Ar^{-1} + B$:

$$\begin{aligned} Ar^{-1} + B + r\left(\frac{r_s}{r^2}\right) &= 1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

donc A est homogène à r, une longueur. Revenons à la variable de départ :

$$\begin{aligned} y &= Ar^{-1} + 1 \\ e^{-\beta} &= Ar^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Cherchons l'expression de e^{α} :

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= 0 \\ \alpha + \beta &= \kappa(t) \end{aligned}$$

Comme α et β, κ est sans dimension.

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= e^{\kappa} \\ e^{\alpha} &= e^{\kappa} e^{-\beta} \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante κ, remarquons que lorsque l'on s'éloigne à l'infini de la distribution de masse qui crée le champ gravitationnel, la métrique doit redevenir euclidienne :

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} e^{\alpha} = 1 \\ \lim\limits_{r\to\infty} e^{\beta} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \kappa = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha} = e^{-\beta} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = 0$$

Pour trouver l'expression de la constante A remarquons qu'à la limite des champs gravitationnels faibles, nous devons retrouver (26.3) p. 558 :

$$\begin{aligned} g_{00} &\approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ \frac{A}{r} + 1 &\approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ A &\approx r\,\frac{2\phi}{c^2} \end{aligned}$$

Le modèle du potentiel du champ gravitationnel ϕ est donné par (10.3) p. 189, M étant la masse qui crée le champ. On pose

$$\begin{aligned} r_s &= -A \\ &= \frac{2\mathcal{G}M}{c^2} \end{aligned} \tag{26.16}$$

le *rayon de Schwarzschild* de la masse M qui crée le champ gravitationnel, de dimension une longueur.

Remarque 10.1

Deux corps de masse m et M peuvent se libérer de leur attraction gravitationnelle mutuelle si leur vitesse radiale relative en éloignement est suffisamment élevée. Dans le cadre de la mécanique classique, supposons $m \ll M$ et supposons la conservation de l'énergie mécanique de m :

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ E_{ci} + E_{pi} &= E_{cf} + E_{pf} \end{aligned}$$

À mesure que m s'éloigne de M, son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle à l'infini. Prenons l'origine de l'énergie potentielle à l'infini :

$$\begin{aligned} E_{ci} + E_{pi} &= 0 \\ \frac{mv_l^2}{2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} &= 0 \\ v_l &= \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}} \end{aligned}$$

Calculons le rayon maximum, appelé rayon de Schwarzschild, que doit faire le corps de masse M pour que sa vitesse de libération associée soit égale ou supérieure à la vitesse limite c :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r_s}} \\ r_s &= \frac{2\mathcal{G}M}{c^2} \end{aligned}$$

Le rayon de Schwarzschild est aussi appelé rayon du trou noir.

Par conséquent

$$e^{\alpha} = 1 - \frac{r_s}{r} \qquad \text{et} \qquad e^{\beta} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$$

La métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2\right)}$$

Le temps coordonnée t est mesuré loin de toute masse-énergie, donc loin de M, autrement dit pour $r \gg r_s$. Comme les distances radiales varient fortement dans le champ gravitationnel, la coordonnée radiale r n'est pas la distance physique au centre de la masse M, mais correspond à la circonférence divisée par 2π d'une sphère de centre M, sur laquelle le champ gravitationnel est homogène. La métrique de Schwarzschild n'est pas définie en $r = 0$, point de l'espace-temps appelé *singularité gravitationnelle*. En revanche, l'hypersurface $r = r_s$ n'est pas une singularité gravitationnelle, c'est une *singularité de coordonnées* car un changement de coordonnées approprié permet de définir la métrique de Schwarzschild en r_s. Cette hypersurface qui ne peut être traversée que dans un sens est appelée *horizon des évènements*.

Pour $r \gg r_s$ on vérifie que la métrique de Schwarzschild est asymptotique à la métrique de Lorentz de la relativité restreinte en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2\right)$$

Les symboles de Christoffel de 2$^{\text{e}}$ espèce s'écrivent :

$$\left\{\Gamma^0{}_{01} = \tfrac{1}{2}\,\alpha'\right. \quad \begin{cases} \Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2}\,\beta' \\ \Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2}\,\alpha' e^{\alpha-\beta} \\ \Gamma^1{}_{22} = -re^{-\beta} \\ \Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2(\theta)e^{-\beta} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{21} = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^3{}_{31} = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^3{}_{32} = \cot(\theta) \end{cases}$$

10.7 Équation de la trajectoire d'un corps de faible masse

Le corps d'épreuve suit une géodésique de l'espace-temps courbé par une masse supposée beaucoup plus grande que la sienne, d'équation (26.9) p. 569 :

$$\forall \lambda = 0, \ldots, 3 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 0$$

Remarque 10.2

Un corps de masse plus importante suit aussi une géodésique de l'espace-temps mais contribue à la courbure de celui-ci.

Notons par un point la dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s.

1) $\lambda = 0$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée temporelle $x^0 = ct$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^0 + \Gamma^0{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^0 + \Gamma^0{}_{00}\,\dot{x}^0\dot{x}^0 + \Gamma^0{}_{01}\,\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^0{}_{11}\,\dot{x}^1\dot{x}^1 &= 0 \\ \ddot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\eta'\,\dot{x}^0\dot{x}^1 &= 0 \end{aligned}$$

Or nous avons trouvé au § 10.1 p. 579 précédent pour un corps à symétrie sphérique :

$$\begin{cases} e^{\alpha} = \left(1 - \dfrac{r_s}{r}\right)^{-1} \\ e^{\beta} = 1 - \dfrac{r_s}{r} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (e^{\alpha})' = -\left(1 - \dfrac{r_s}{r}\right)^{-2} \dfrac{r_s}{r^2} \\ \left(e^{\beta}\right)' = \dfrac{r_s}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' e^{\alpha} = -\dfrac{r_s}{r^2}\left(1 - \dfrac{r_s}{r}\right)^{-2} \\ \beta' e^{\beta} = \dfrac{r_s}{r^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha' = -\dfrac{r_s}{r^2}\left(1 - \dfrac{r_s}{r}\right)^{-1} \\ \beta' = \dfrac{r_s}{r^2}\left(1 - \dfrac{r_s}{r}\right)^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2 \mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{r_s}{2r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} &= 0 \\ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right] &= 0 \\ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= \alpha \end{aligned} \tag{26.17}$$

où α est constante sur la trajectoire.

2) $\lambda = 1$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée radiale r :

$$\begin{aligned} \ddot{x}^1 + \Gamma^1{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^1 + \Gamma^1{}_{00}\,\dot{x}^0\dot{x}^0 + \Gamma^1{}_{11}\,\dot{x}^1\dot{x}^1 + \Gamma^1{}_{22}\,\dot{x}^2\dot{x}^2 + \Gamma^1{}_{33}\,\dot{x}^3\dot{x}^3 &= 0 \\ \ddot{x}^1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha' e^{\alpha-\beta}\dot{x}^0\dot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\beta'\dot{x}^1\dot{x}^1 - r e^{-\beta}\dot{x}^2\dot{x}^2 - r\sin^2(\theta)e^{-\beta}\dot{x}^3\dot{x}^3 &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{r_s}{2r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 & \\ -r\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^2 - r\sin^2(\theta)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

3) $\lambda = 2$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée angulaire θ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}^2 + \Gamma^2{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^2 + 2\Gamma^2{}_{12}\,\dot{x}^1\dot{x}^2 + \Gamma^2{}_{33}\,\dot{x}^3\dot{x}^3 &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{26.18}$$

4) $\lambda = 3$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée angulaire ϕ :

$$\begin{aligned} \ddot{x}^3 + \Gamma^3{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \ddot{x}^3 + 2\Gamma^3{}_{13}\,\dot{x}^1\dot{x}^3 + \Gamma^3{}_{23}\,\dot{x}^2\dot{x}^3 &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}s^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} + 2\cot(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} &= 0 \end{aligned} \tag{26.19}$$

Prenons pour condition initiale $\theta = \pi/2$, le point de départ est dans le plan xoy (fig. 3.10 p. 42). Prenons une vitesse initiale contenue dans le plan xoy, donc telle que $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s = 0$. (26.18) p. 589

donne comme équation paramétrique pour θ :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} &= 0\\ \theta &= C_1 s + C_2\\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} &= C_1\end{aligned}$$

Or nous avons pris comme condition initiale $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s = 0$, donc $C_1 = 0$ et $\theta = C_2 = \pi/2$. La trajectoire reste dans le plan xoy. (26.19) p. 589 donne :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}s^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} &= 0\\ \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right) &= 0\\ r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} &= \beta\end{aligned} \tag{26.20}$$

où β est une constante, qui est la constante de aires au facteur c près :

$$\begin{aligned}\beta &= r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{c\,\mathrm{d}\tau}\\ c\beta &= r^2\dot{\phi}\end{aligned}$$

τ est le temps propre du corps de faible masse. Avec les conditions initiales, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\phi^2\\ 1 &= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2\end{aligned}$$

Éliminons $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}s$ à l'aide des relations (26.17) p. 589 et (26.20) p. 590 :

$$\begin{aligned}1 &= \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\alpha^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\\ 1-\frac{r_s}{r} &= \alpha^2 - \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\\ \frac{1}{\beta^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right) &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\end{aligned}$$

Le changement de variable,

$$u = \frac{1}{r} \tag{26.21}$$

implique

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} &= \frac{d(u^{-1})}{\mathrm{d}\phi}\\ &= -u^{-2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\\ \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 &= u^{-4}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\\ \frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\end{aligned}$$

Remplaçons le rayon de Schwarzschild par son expression, (26.16) p. 587 :

$$\frac{1}{\beta^2}\left(1-\frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - u^2\left(1-\frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right)$$

Dérivons par rapport à ϕ :

$$\begin{aligned}-\frac{2\mathcal{G}M}{c^2\beta^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} &= -2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} - 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\left(1-\frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right) + u^2\frac{2\mathcal{G}M}{c^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\\ -\frac{\mathcal{G}M}{c^2\beta^2} &= -\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} - u\left(1-\frac{2u\mathcal{G}M}{c^2}\right) + u^2\frac{\mathcal{G}M}{c^2}\\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u &= \frac{\mathcal{G}M}{c^2\beta^2} + \frac{3\mathcal{G}Mu^2}{c^2}\end{aligned} \tag{26.22}$$

En posant

$$p = \frac{c^2\beta^2}{\mathcal{G}M} \tag{26.23}$$

nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M}{c^2}u^2 \tag{26.24}$$

En mécanique classique, le problème de Kepler conduit à l'équation différentielle d'une ellipse

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{1}{p}$$

où $p = r^4\dot{\theta}^2/(\mathcal{G}M)$ est le *paramètre* de l'ellipse et M est la masse du corps qui crée le champ.

Remarque 10.3

L'équation d'une ellipse en coordonnées polaires (r,ϕ) de centre l'un des foyers s'écrit :

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\phi-\phi_0)}$$

où p est le paramètre et e est l'excentricité. Pour un cercle $e=0$ et pour une ellipse $0<e<1$. En posant $u=1/r$ l'équation s'écrit

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\phi-\phi_0)$$

Cette équation est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{e}{p}\sin(\phi-\phi_0)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -\dfrac{e}{p}\cos(\phi-\phi_0)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{1}{p}$$

En relativité générale il s'introduit le terme correctif $3\mathcal{G}M_{\odot}u^2/c^2$. L'équation de la trajectoire n'admet pas de solution périodique dans l'espace, lorsque ϕ varie de 2π l'inverse du rayon vecteur u ne reprend pas les mêmes valeurs. En conséquence, la trajectoire ne se referme pas après un tour. Nous savons aussi par les observations de Mercure que la solution n'est pas périodique car sa trajectoire elliptique n'est pas fermée.

10.8 Avance du périhélie de Mercure

Remarque 10.4

Toutes les planètes du système solaire ont une avance de leur périhélie, point de leur trajectoire le plus proche du Soleil. L'avance du périhélie de Mercure est plus importante, sa proximité avec le Soleil la place dans un champ gravitationnel plus intense dans lequel les effets relativistes sont plus marqués. Plus généralement, tous les astres et satellites en orbite ont une avance de leur périastre.

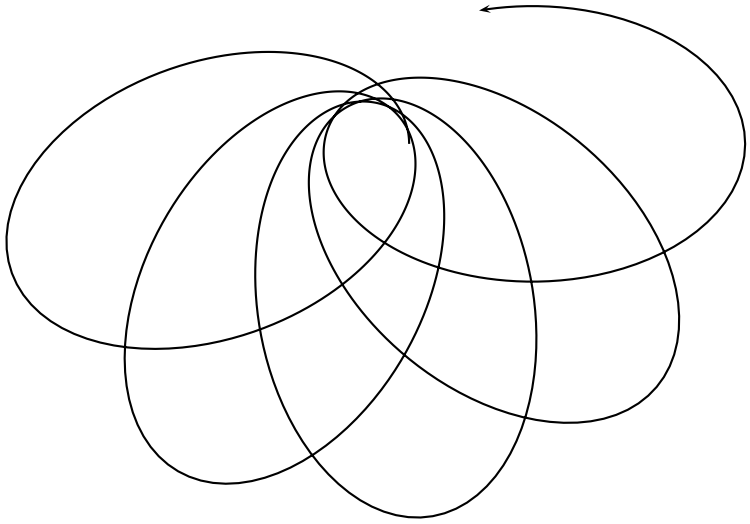


Fig. 26.1 – Avance du périhélie

On vérifie que le terme quadratique correctif est petit devant u en faisant leur rapport :

$$\frac{3\mathcal{G}M_{\odot}u^2}{c^2u} = \frac{3\mathcal{G}M_{\odot}}{rc^2}$$

Prenons les valeurs numériques :

Masse du Soleil : $M_{\odot} = 1{,}998\ 5 \times 10^{30}$ kg

Constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6{,}674\ 30 \times 10^{-11}$ m^3/kg/s^2

Vitesse limite : $c = 299\ 792\ 458$ m/s

Demi-grand axe : $a_{\mathrm{☿}} = 57\ 909\ 083 \times 10^3$ m

Distance minimale : $r_{min\mathrm{☿}} = 46\ 001\ 200 \times 10^3$ m

Distance maximale : $r_{max\mathrm{☿}} = 69\ 816\ 900 \times 10^3$ m

Excentricité : $e_{\mathrm{☿}} = 0{,}205\ 63$

Période de révolution : $T_{\mathrm{♀}} = 7\ 442\ 203$ s

$$\begin{aligned}\frac{3\mathcal{G}M_\odot}{rc^2} &= \frac{3 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 1{,}998\ 5 \times 10^{30}}{57\ 909\ 050 \times 10^3 \times 299\ 792\ 458^2} \\ &= 7{,}65 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

En première approximation l'équation différentielle du mouvement s'écrit sans le terme quadratique et donne une trajectoire ayant pour équation l'ellipse de la mécanique classique. Cette solution est injectée dans l'équation différentielle du mouvement pour remplacer le terme quadratique, elle devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M_\odot}{p^2c^2}\left[1 + e\cos(\phi - \phi_0)\right] \\ &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M_\odot}{p^2c^2}\left[1 + 2e\cos(\phi - \phi_0) + e^2\cos^2(\phi - \phi_0)\right] \\ &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathcal{G}M_\odot}{p^2c^2} + \frac{6\mathcal{G}M_\odot}{p^2c^2}e\cos(\phi - \phi_0)\end{aligned}$$

où e^2 est d'autant plus petit devant e que l'orbite est proche d'un cercle. On compare les deux premiers termes en faisant leur rapport :

$$\begin{aligned}\frac{3\mathcal{G}M_\odot}{pc^2} &\approx \frac{3\mathcal{G}M_\odot}{rc^2} \\ &\approx 7{,}65 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

Le deuxième terme est donc négligeable devant le premier :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{6\mathcal{G}M_\odot}{p^2c^2}e\cos(\phi - \phi_0)$$

On pose $w = u - 1/p$:

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\phi^2} + w \approx \frac{6\mathcal{G}M_\odot}{pc^2}w$$

En posant la constante

$$\alpha = 1 - \frac{6\mathcal{G}M_\odot}{pc^2}$$

nous avons l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\phi^2} + \alpha^2 w \approx 0$$

qui a pour solution :

$$\begin{aligned}w &= \beta\cos[\alpha(\phi - \phi_0)] \\ u &= \frac{1}{p} + \beta\cos[\alpha(\phi - \phi_0)]\end{aligned}$$

On identifie β avec e/p pour retrouver le cas non relativiste, et l'on a

$$r = \frac{p}{1 + e\cos[\alpha(\phi - \phi_0)]}$$

Le rayon vecteur reprend sa valeur lorsque

$$\begin{aligned}\alpha\phi &= 2\pi \\ \phi &= 2\pi/\alpha\end{aligned}$$

autrement dit, puisque $\alpha < 1$, après un tour complet. Le périhélie avance. La différence d'angle avec un tour complet ($\phi = 2\pi$) vaut

$$\begin{aligned}\delta &= 2\pi/\alpha - 2\pi \\ &= 2\pi \left[\left(1 - \frac{6\mathcal{G}M_\odot}{pc^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &\approx \frac{6\pi\mathcal{G}M_\odot}{pc^2}\end{aligned}$$

Pour faire intervenir des grandeurs directement mesurables, on utilise la relation classique suivante, qui lie le paramètre de l'ellipse, son demi grand axe a et son excentricité e,

$$p = a\left(1 - e^2\right)$$

et la troisième loi de Kepler

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mathcal{G}M_\odot$$

où T est la période de révolution et m la masse qui crée le champ gravitationnel. Avec ces relations, l'avance du périhélie de Mercure devient

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{☿}} &= \frac{6\pi \times 4\pi^2 a_{\mathrm{☿}}^3}{a_{\mathrm{☿}}\left(1 - e_{\mathrm{☿}}^2\right) T_{\mathrm{☿}}^2 c^2} \\ &= \frac{24\pi^3 a_{\mathrm{☿}}^2}{\left(1 - e_{\mathrm{☿}}^2\right) T_{\mathrm{☿}}^2 c^2} \\ &= \frac{24 \times 3{,}141\ 592^3 \times (57\ 909\ 083 \times 10^3)^2}{(1 - 0{,}205\ 63^2)\, 7\ 442\ 203^2 \times 299\ 792\ 458^2} \\ &= 5{,}234 \times 10^{-7} \text{ rad}\end{aligned}$$

En secondes d'arc ($1° = 3\ 600''$) pour un siècle :

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{☿}} &= \frac{5{,}234 \times 10^{-7} \times 180 \times 3600 \times 100 \times 365.2422}{\pi \times 87.9693} \\ &= 44{,}8'' \text{ par siècle}\end{aligned}$$

11 Déviation des rayons lumineux

Cherchons l'équation d'une géodésique au voisinage immédiat du Soleil, c.-à-d. l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux lorsqu'il passe au voisinage immédiat du Soleil, si l'on suppose que la masse du photon est nulle et que ce dernier se propage à la vitesse limite c. Reprenons l'équation du mouvement (26.22) p. 591 :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2\beta^2} + \frac{3\mathcal{G}M_\odot u^2}{c^2}$$

(26.20) p. 590 donne :

$$\frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2\beta^2} = \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r^4}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\phi}\right)^2$$

Or, pour tout ce qui se propage à la vitesse limite $s = 0$ donc $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\phi = 0$. L'équation devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{3\mathcal{G}M_\odot u^2}{c^2}$$

Avec (26.21) p. 590 $r = 1/u$:

$$r^2 \gg r \qquad \Leftrightarrow \qquad u^2 \ll u$$

Si l'on suppose le terme correctif négligeable devant u, l'équation approchée s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2\beta^2}$$

On résoud l'équation sans second membre :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = 0$$

On cherche une solution de la forme $u_0 = a + b\cos(\phi)$:

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\phi} = -b\sin(\phi)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\phi^2} = -b\cos(\phi)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\phi^2} + u = a$$

Donc $a = 0$ et

$$b\cos(\phi) = \frac{1}{r_0}$$
$$b\cos(\pi/2) = \frac{1}{r_{min}}$$
$$b = \frac{1}{r_{min}}$$

si bien que

$$u_0 = \frac{\cos(\phi)}{r_{min}}$$

Revenons à l'équation complète en cherchant une solution de la forme $u_0 + u_1$ avec $u_1 \ll u_0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2(u_0+u_1)}{\mathrm{d}\phi^2} + u_0 + u_1 = \frac{3\mathcal{G}M_\odot(u_0+u_1)^2}{c^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\phi^2} + \frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\phi^2} + u_0 + u_1 = \frac{3\mathcal{G}M_\odot\,(u_0^2 + 2u_0u_1 + u_1^2)}{c^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\phi^2} + u_1 = \frac{3\mathcal{G}M_\odot u_0^2}{c^2}$$
$$= \frac{3\mathcal{G}M_\odot\cos^2(\phi)}{c^2 r_{min}^2}$$

On cherche une solution de la forme $a + b\cos^2(\phi)$:

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\phi} = -2b\cos(\phi)\sin(\phi)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\phi^2} &= -2b\left[-\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right] \\
&= -2b\left[2\cos^2(\phi) - 1\right] \\
\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\phi^2} + u_1 &= -4b\cos^2(\phi) + 2b + a + b\cos^2(\phi) \\
&= 2b + a - 3b\cos^2(\phi) \\
&= -3b\cos^2(\phi)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $a = -2b$.

$$\begin{aligned}
b &= -\frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2} \\
u_1 &= \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[2 - \cos^2(\phi)\right] \\
&= \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[1 + \sin^2(\phi)\right]
\end{aligned}$$

D'où la solution :

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + u_1 \\
&= \frac{\cos(\phi)}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[1 + \sin^2(\phi)\right]
\end{aligned}$$

Pour calculer la déviation subie par le rayon lumineux, on considère les deux asymptotes aux deux branches infinies de la trajectoire hyperbolique du rayon. À l'infini le rayonnement « suit » la première asymptote, après avoir été dévié, à l'infini il « suit » la seconde asymptote. L'angle δ de déviation est l'angle entre les deux asymptotes. Par symétrie du problème, nous n'avons besoin que de l'angle ϕ_{asy} que fait l'une des asymptotes avec l'axe focale de l'hyperbole :

$$\phi_{asy} = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$$

u tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\phi_{asy})}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[1 + \sin^2(\phi_{asy})\right] &= 0 \\
\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta_\odot}{2}\right)}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta_\odot}{2}\right)\right] &= 0 \\
\frac{-\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{r_{min}} + \frac{\mathcal{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[1 + \cos^2\left(\frac{\delta_\odot}{2}\right)\right] &= 0
\end{aligned}$$

L'angle $\delta_\odot$ étant petit, on effectue un développement limité à l'ordre un des fonctions sinus et cosinus au voisinage de zéro, $\sin(x) \approx x$ et $\cos(x) \approx 1$:

$$-\frac{\delta_\odot}{2r_{min}} + \frac{2\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2} = 0$$
$$\delta_\odot \approx \frac{4\mathcal{G}M_\odot}{c^2 r_{min}}$$

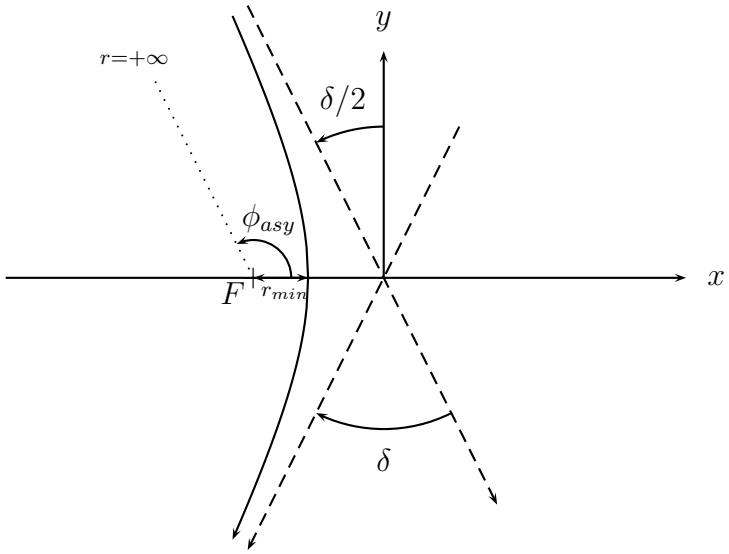


Fig. 26.2 – Trajectoire hyperbolique du rayon lumineux

En prenant pour r_{min} le rayon du Soleil $r_\odot = 696\ 342 \times 10^3$ m :

$$\begin{aligned}\delta_\odot &\approx \frac{4 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 1{,}988\ 5 \times 10^{30}}{299\ 792\ 458^2 \times 696\ 342 \times 10^3} \\ &\approx 8{,}48 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ &\approx 1{,}75''\end{aligned}$$

Chapitre 27

ANNEXES

Sommaire

1 Implication et causalité 599
2 Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 600
3 Bases non holonomiques 602

1 Implication et causalité

1.1 Implication

Les phrases suivantes expriment la même idée et sont notées $A \Rightarrow B$.

- A /implique/entraine/donc/par conséquent/ B. C'est un diamant implique que c'est dur
- De A on déduit B. Du fait que ce soit un diamant on déduit que c'est dur
- Si A alors B. Si c'est un diamant alors c'est dur
- B /si/est la conséquence de/est une condition nécessaire pour avoir/ A. C'est dur si c'est un diamant
- A /seulement si/que si/est une condition suffisante pour avoir/ B. Être un diamant est une condition suffisante pour être dur
- Il suffit de A pour avoir B. Il suffit que ce soit un diamant pour être dur
- Il /faut/est nécessaire d'avoir/ B pour avoir A. Il faut que ce soit dur pour être un diamant

1.2 Relation de causalité

En prenant cette fois une relation de causalité, l'ordre temporel intervient, A d'abord, B ensuite. Par exemple les frottements créent de la chaleur [1], alors que chauffer ne crée pas de frottements.

- Les frottements /implique la/sont une condition suffisante pour avoir/ création de chaleur
- Il y a des frottements /donc/par conséquent/seulement si/ création de chaleur
- Si il y a des frottements alors de la chaleur est créée
- De la chaleur est créée s'il y a des frottements
- La création de chaleur est /la conséquence/une condition nécessaire pour avoir/ des frottements
- Il suffit qu'il y ait des frottements pour avoir création de chaleur
- Il faut la création de chaleur pour avoir des frottements

1.3 Équivalence

Les phrases suivantes expriment la même idée et sont notées $A \Leftrightarrow B$.

- A si et seulement si B (noté A ssi B)
- A implique B et B implique A
- A est une condition nécessaire et suffisante pour avoir B (noté A cns B)
- B est une condition nécessaire et suffisante pour avoir A
- Il faut et il suffit de A pour avoir B
- Il faut et il suffit de B pour avoir A

2 Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Démonstration. Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Pour tout espace vectoriel pré-euclidien, la méthode d'orthonormalisation de Schmidt permet la construction effective d'une base orthonormée.

Soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une base quelconque d'un espace vectoriel pré-euclidien E_n. Cherchons n vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, orthogonaux entre eux et linéairement indépendants pour former une base orthogonale. Pour le premier de ces vecteurs, nous posons :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

Bien entendu, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ forme une base de E_n. Cherchons le deuxième vecteur $\mathbf{v}_2$ sous la forme de la combinaison linéaire suivante, où λ_1 est l'inconnue :

$$\mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2$$

1. « chaleur » est pris ici dans son sens commun, pas dans son sens thermodynamique de transfert d'énergie.

Écrivons la relation d'orthogonalité entre $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 0 \\
\mathbf{u}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= 0 \\
\lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= 0 \\
\lambda_1 &= -\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}
\end{aligned}$$

λ_1 est non nul car $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont supposés non orthogonaux. Le vecteur $\mathbf{v}_2$ est non nul car le système $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ étant libre, $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont non nuls et linéairement indépendants. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n)$ est donc un système libre. Cherchons le troisième vecteur $\mathbf{v}_3$ sous la forme :

$$\mathbf{v}_3 = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3$$

Les coefficients μ_1 et μ_2 se calculent en écrivant d'une part les relations d'orthogonalité entre $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \\
\mathbf{u}_1 \cdot (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3) &= 0 \\
\mathbf{u}_1 \cdot [\mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3] &= 0 \\
\mu_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mu_2 \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \mu_2 \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 - \mu_2 \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_1 &= -\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_1\|^2}
\end{aligned}$$

et d'autre part les relations d'orthogonalité entre $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \\
(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3) &= 0 \\
\lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mu_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + \mu_1 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mu_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + \mu_1 (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 & \\
+\mu_2 (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_2 &= -\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_2\|^2}
\end{aligned}$$

Nous avons déterminé le vecteur $\mathbf{v}_3$, orthogonal aux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Ce vecteur est non nul, car le système $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n)$ étant libre, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont non nuls et linéairement indépendants. Le système $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{u}_n)$ est donc libre. On construit ainsi de proche en proche le système de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ orthogonaux entre eux, dont aucun n'est nul, et dont l'ensemble forme une base orthogonale de E_n.

En divisant chacun de ces vecteurs par sa norme,

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$$

l'ensemble des vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ forme une base orthonormée de E_n. □

3 Bases non holonomiques

Considérons la base polaire normée. Ses vecteurs de base ont pour expression :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = \boldsymbol{e}_\rho \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = \cos(\theta)\,\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\,\boldsymbol{j} \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = -\sin(\theta)\,\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\,\boldsymbol{j} \end{cases}$$

Existe-t-il un système de coordonnées (ξ, η) tel que $(\mathbf{e}_{\hat{\rho}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}})$ en soit une base naturelle ?

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = \boldsymbol{e}_\xi \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \boldsymbol{e}_\eta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = x_{,\xi}\,\boldsymbol{i} + y_{,\xi}\,\boldsymbol{j} \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = x_{,\eta}\,\boldsymbol{i} + y_{,\eta}\,\boldsymbol{j} \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \cos(\theta), \qquad & y_{,\xi} &= \sin(\theta) \\ x_{,\eta} &= -\sin(\theta), \qquad & y_{,\eta} &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Les dérivées partielles croisées donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\eta}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\dfrac{\partial x}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta}\dfrac{\partial y}{\partial\xi} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\dfrac{\partial y}{\partial\eta} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\cos(\theta)}{\partial\eta} = \dfrac{\partial(-\sin(\theta))}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial\sin(\theta)}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\cos(\theta)}{\partial\xi} \end{cases}$$

Il est plus simple de passer par la base duale normée.

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \mathbf{e}^\rho \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \rho\,\mathbf{e}^\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \cos(\theta)\,\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\,\boldsymbol{j} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = -\sin(\theta)\,\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\,\boldsymbol{j} \end{cases}$$

Existe-t-il un système de coordonnées (ξ, η) tel que $(\mathbf{e}^{\hat{\rho}}, \mathbf{e}^{\hat{\theta}})$ en soit la base duale de la base naturelle ?

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \mathbf{e}^\xi \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \mathbf{e}^\eta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \xi_{,x}\,\boldsymbol{i} + \xi_{,y}\,\boldsymbol{j} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \eta_{,x}\,\boldsymbol{i} + \eta_{,y}\,\boldsymbol{j} \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \xi_{,x} &= \cos(\theta), \qquad & \xi_{,y} &= \sin(\theta) \\ \eta_{,x} &= -\sin(\theta), \qquad & \eta_{,y} &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Les dérivées partielles croisées donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\cos(\theta)}{\partial y} = \dfrac{\partial\sin(\theta)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(-\sin(\theta))}{\partial y} = \dfrac{\partial\cos(\theta)}{\partial x} \end{cases}$$

Réécrivons la dernière relation :

$$\frac{\partial\sin(\theta)}{\partial y} + \frac{\partial\cos(\theta)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = 0$$

ce qui est impossible. Le système de coordonnées (ξ, η) n'existe donc pas.

Index

Algèbre tensorielle, 385
Angle entre deux vecteurs, 118
  d'un espace vectoriel euclidien, 360
  d'un espace vectoriel pré-euclidien, 359
Application
  bijective, 3
  bilinéaire, 105
  définition, 2, 95
  linéaire, 96
  multilinéaire, 106
  projection, 326
Avance du périhélie de Mercure, 592

Base
  coordonnées, 38
  d'un espace vectoriel, 35
  duale définition, 332
  holonomique, 38
  naturelle
    définition, 38
    polaire, 39, 202, 439
  non holonomique, 602
  orthogonale, 211
  orthonormée, 212
  réciproque, 31
    de la base naturelle, 382
    de la base naturelle polaire, 383
    définition, 333
  vectorielle, 31
Bijection définition, 3

Causalité, 261
Célérité, 278, 279
Centrale inertielle, 134
Champ
  de scalaires, 24
  de tenseurs, 437
  de vecteurs, 24, 473
  gravitationnel, 188
    faible, 556
Combinaison linéaire, 22
  de vecteurs, 22
Composantes
  contravariantes
    d'un vecteur, 47
    du vecteur différentielle absolue, 449
  covariantes
    d'un vecteur, 129
    deux fois, 388
    du vecteur différentielle absolue, 450
    du vecteur dérivée covariante, 452
  d'un vecteur, 32
  mixtes du vecteur dérivée covariante, 451
Cône de lumière, 256, 257, 281
Constante
  chronogéométrique, 222
  cosmologique, 570, 577
  de structure de l'espace-temps, 222
  gravitationnelle, 563
Convention
  de genre espace, 229
    pour la sphère de lumière, 227
    tenseur métrique, 232
  de genre temps
    pour la sphère de lumière, 227
    tenseur métrique, 230
  de sommation sur les indices répétés, 15, 209, 334
Coordonnées
  affines, 3
  cartésiennes, 3, 108, 366
    normales, 5, 109
    obliques, 5, 45, 47, 128, 368
  curvilignes, 4, 112
  cylindriques, 41, 113
  d'un point, 366
  définition, 1
  galiléennes, 218
    réduites, 219
  localement géodésiques, 499
  obliques, 112
  orthogonales, 112
  polaires, 32, 39, 41, 49, 112, 113, 361
  rectangulaires, 5, 109, 368
  rectilignes, 3, 108, 366, 430, 482, 498
    obliques, 368
  sphériques, 42, 408
Courbe
  arc de, 249
  ensemble nul d'une, 250
  longueur d'une, 248

nulle, 250
nulle en un point, 249
paramétrique définition, 12
régulière, 250
Courbure, 10
de la lumière, 139
de Ricci, 509
négative, 11
positive, 10
Covariance
principe de, 386
Covecteur, 129
gradient, 379
notation matricielle, 207

Densité d'énergie, 534
Diagramme
d'espace-temps, 251
de Clapeyron, 29
de Minkowski, 254
de Poincaré, 262
spatial, 251
spatial et temporel, 252
Différentielle
absolue, 464
d'un tenseur, 473
d'un vecteur, 448
des composantes d'un tenseur, 456
d'un champ de scalaires, 373
Dimension
d'un espace topologique, 6
d'un espace vectoriel, 35
d'une matrice, 52
Distance
d'univers, 229
définition, 13
en coordonnées polaires, 368
euclidienne, 366
propre, 246
pré-euclidienne, 367
relativiste, 14
spatio-temporelle, 222
Divergence, 462, 511
d'un champ de tenseurs, 460
du tenseur d'Einstein, 512, 574
du tenseur énergie-impulsion, 570
nulle, 192, 480, 570
Divergence d'un champ de vecteurs, 177, 459
Droite, 9, 107
de coordonnées, 47
en coordonnées polaires, 433
vectorielle, 35
Durée
impropre, 243
propre, 241
Décalage gravitationnel vers le rouge, 562
Dérivée
absolue
d'un champ de scalaire, 451
d'une multiplication tensorielle, 465
covariante
d'un tenseur, 458, 464
d'un vecteur, 451
d'une somme de deux vecteur, 464
seconde d'un vecteur, 463
particulaire, 526
Déviation des rayons lumineux, 594

Élement linéaire
de l'espace de configuration, 514
de l'espace euclidien, 425
de l'espace-temps de configuration, 521
en coordonnées curvilignes, 437
en coordonnées géodésiques, 500
en coordonnées rectangulaires, 475
en coordonnées sphériques, 426
sur une sphère, 485
Énergie
au repos, 309
cinétique relativiste, 309
totale relativiste, 310
Ensemble produit, 27
Équation(s)
d'onde, 299
de conservation, 183
de continuité, 183
de la dynamique
des milieux continus, 530
lagrangienne, 516
newtonienne, 155
relativiste des milieux continus, 544
de la sphère de lumière, 227
de la trajectoire d'un mobile dans un champ gravitationnel, 567
de Lagrange, 455
de Laplace, 194
de Maxwell, 225
de Poisson, 194
du champ gravitationnel
cas extérieur, 571
cas intérieur, 569
du mouvement sous forme tensorielle, 544
tensorielles, 423
Équipotence définition, 3
Espace
affine, 29
des phases, 8
euclidien, 8, 11, 108, 110, 262, 266
euclidien définition, 6
métrique, 13, 222
non euclidien, 195
ponctuel, 29
euclidien, 365
pré-euclidien, 365

repère, 366
pré-euclidien, 109
produit
cartésien, 390
tensoriel, 390
pseudo-euclidien, 217, 230
pseudo-métrique, 14
topologique, 2
vectoriel
définition, 27
euclidien, 355
improprement euclidien, 356
pré-euclidien, 355
pseudo-euclidien, 356
signature, 356
Evènement, 224

Facteur
de dilatation temporelle, 242, 279
de Lorentz, 236, 292
de proportionnalité, 38
relativiste, 236
dérivée du, 289
Fonction
scalaire, 23
scalaire des coordonnées, 24
vectorielle, 24
vectorielle de la position, 24
Fonction indicatrice, 247
Force
gravitationnelle, 188
Forme, 325
bilinéaire, 343, 354
antisymétrique, 344
expression analytique, 345
symétrique, 344
linéaire, 88, 326
expression analytique, 330
quadratique, 88
associée au tenseur métrique, 322, 412
associée à une forme bilinéaire symétrique, 346
binaire, 93
carré de la norme, 329
de l'espace euclidien, 110
différentielle, 322
du carré de l'intervalle élémentaire, 481
du plan, 109
définie, 89
définie négative, 89
définie positive, 89, 90
expression analytique, 347
fondamentale, 198, 367
forme matricielle, 91
indéfinie, 89
matrice symétrique associée, 90
nomenclature, 89
non définie positive, 90, 94
négative, 89
positive, 89
réelle, 92
semi définie, 90
ternaire, 93
unaire, 89
Fréquence
spatiale d'une onde, 301
temporelle d'une onde, 301

Géodésique(s)
d'un espace riemannien, 482
de l'espace euclidien
en coordonnées curvilignes, 428
en coordonnées rectangulaires, 116
de l'espace-temps de Minkowski, 233
définition, 9
théorème
dans l'espace euclidien, 428
dans l'espace-temps de Minkowski, 234
dans un espace riemannien, 482
trajectoire définition, 135
Gradient, 382, 403, 526
d'un champ de scalaires, 374, 459
de vitesse, 531
en coordonnées
cylindriques, 383
rectangulaires, 383
produit contracté, 421
représentation, 381
Gravitation
newtonienne, 187
relativiste, 555
Groupe définition, 28

Hamilton principe de, 432
Homomorphisme définition, 96
Hyperboles invariantes, 257
Hypercône de lumière, 257, 555
Hyperplan définition, 11
Hypersurface
de coordonnée, 12
définition, 11

Inertie, 307
Intervalle
d'univers, 222
de genre
espace, 260
lumière, 260
temps, 260
infinitésimal, 229
Invariant, 221
de Lorentz, 226
relativiste, 226
Inégalité
de Cauchy-Schwarz, 122
triangulaire, 123

Isomorphisme, 96

Jacobien d'une transformation, 67
Jumeaux de Langevin, 245

Lagrangien, 432, 433, 485, 486, 515, 524, 547
  dans un champ gravitationnel, 558
  du champ gravitationnel, 575
  relativiste, 548
Laplacien, 567
  d'un champ de scalaires, 185, 462
Laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs, 185
Ligne
  d'univers, 241
  de coordonnée, 2
Loi
  covariante, 225
  d'inertie de Sylvester, 93, 109, 233
  de composition
    $\otimes$, 390
    des vitesses, 277
    des vitesses non commutative, 277
    des vitesses non relativistes, 276
    interne, 125, 228
    relativiste des vitesses, 276
  de dérivation covariante de la multiplication
    contractée, 465
  de Gauss
    forme différentielle, 193
    forme intégrale, 193
    pour la gravitation, 193
  de Kepler, 594
  de l'action-réaction, 154
  de multiplication
    scalaire euclidienne, 126
    tensorielle, 390
  de transformation des composantes, 271
  des cosinus, 191
Longueur
  d'onde, 299
  d'une courbe, 115, 199
  d'une courbe en relativité restreinte, 247
  impropre, 246
  propre, 246

Mach Principe de, 140, 478
Masse
  grave, 156
  inerte, 145
  solaire, 563
Matrice, 51
  addition, 52
  changement de base, 69, 70
  cofacteur, 63
  de Lorentz, 237
  de passage, 72
  déterminant, 20
  identité, 60
  inverse
    définition, 60
    unicité, 60
  jacobienne, 66
  mineur, 62
  ordre, 52
  transposée, 57
Métrique
  d'une sphère, 203
  de l'espace euclidien, 109
  de l'espace-temps, 203
  de la relativité générale, 555
  de Schwarzschild, 579, 580
  du plan, 113, 202
    en coordonnées polaires, 202
    en coordonnées rectangulaires, 202
  euclidienne
    de raccordement, 488
    tangente, 468
  stationnaire, 556
Mobile inertiel, 139
Monôme
  définition, 87
Monôme
  degré, 87
Mouvement inertiel définition, 478
Multiplication contractée, 420
Métrique
  d'un champ gravitationnel, 564

nabla, 184
Norme
  d'un vecteur, 211
  définition, 119
  euclidienne, 127
Notation indicielle, 15

Onde
  plane harmonique, 301
  sinusoïdale, 298
Opérateur
  divergence, 177, 459
  gradient, 374
  laplacien, 185
  laplacien vectoriel, 185
  nabla, 184, 316
  rotationnel, 166, 461

Phase
  d'un mouvement sinusoïdal, 299
  à l'origine, 299
Plan d'onde, 301
Plongement, 10, 268
Point
  d'univers, 224
  fonction d'une variable, 370
Polynôme, 88
  degré, 88

homogène, 88
Potentiel
de la force gravitationnelle, 189
du champ gravitationnel, 188
scalaire, 187
scalaire d'un champ vectoriel, 188
Poussière, 533
Principe
d'inertie, 541
d'équivalence, 138
entre masse inerte et masse grave, 157
de covariance, 386
de Hamilton, 432
de Mach, 140, 478
de moindre action, 567
en relativité générale, 572
en relativité restreinte, 547
de relativité, 218
Produit
cartésien d'ensembles, 27
de Kronecker, 351
extérieur, 535
scalaire
avec un vecteur donné, 328
d'un produit tensoriel, 396
d'une force par un déplacement, 123
de Minkowski, 273
définition, 355
euclidien, 125, 126, 355, 356
expression analytique, 127
indéfini, 356
invariance, 214, 274
les différentes notations, 205
lien avec la signature, 356
lien avec le tenseur métrique, 201
lien avec les composantes covariantes, 128
multiplication matricielle, 207
non dégénéré, 126, 204
notation avec le tenseur métrique, 203
origine du, 123
propriétés, 124, 126
pseudo-euclidien, 357
représentation algébrique, 125
symétrie, 203, 205, 328
tensoriel, 390
contracté, 420
de deux espaces identiques, 393
de deux vecteurs, 390
de plusieurs espaces, 395
expression analytique, 391
Pseudo
-euclidien, 356
-métrique, 229
-norme, 121, 357
-orthogonale, 292
-orthogonaux, 292, 293, 312
-produit scalaire, 126
-riemannien, 323
Distance définition, 14
Période, 300

Quadri
-distance, 222
-norme, 273
d'un vecteur, 121
de la 4-accélération, 292
de la 4-impulsion, 311
de la 4-position, 270
de la 4-vitesse, 282
-tenseur
moment cinétique, 536, 552
énergie-impulsion, 534, 546, 567
-vecteur
accélération, 290
d'onde, 304
densité numérique-flux, 305
densité-courant, 306
force, 314
impulsion, 307
nabla, 316
position temps-espace, 269
vitesse, 281
vitesse unitaire, 282
Produit
scalaire, 273
Quadriscalaire, 226
Quasi-parallélogramme, 492

Rang
d'une forme quadratique, 94
Rapidité
définition, 264
Rayon
solaire moyen, 563
vecteur, 187, 301
Référentiel(s)
définition, 134
en relativité, 218
en configuration standard, 219
équivalents, 136
galiléen, 218
inertiel, 138
propre, 134
Relation
d'égalité, 136
d'équivalence, 136
fondamentale de la dynamique, 155
Relativité
principe de, 218
Repère, 2, 32
Repère naturel, 39
Rotationnel d'un champ de vecteurs, 166, 461

Scalaire
de Lorentz, 226

Scalaire(s)
  définition
    mathématique, 27
    physique, 23
Signature
  d'un espace
    vectoriel pré-euclidien, 356
  d'une forme quadratique, 94
  de l'espace
    de la physique non relativiste, 357
    vectoriel euclidien, 357
  de l'espace-temps de la relativité restreinte, 357
  euclidienne, 109, 110, 233, 357
  lorentzienne, 357
    $(+++-)$, 359
    $(+---)$, 231, 260, 273, 380, 558, 567
    $(-+++)$, 232, 273
    $(1,3)$, 230
Sphère, 195
Symbole(s)
  d'antisymétrie, 19
  de Christoffel
    de première espèce, 439
    de seconde espèce, 438
    en fonction de la métrique, 441
    en métrique de Schwarzschild, 581
  de Kronecker, 18
Système
  de coordonnées
    direct, 5
Système(s)
  d'unités géométriques, 223, 239
  d'équations linéaires, 51
  de coordonnées
    définition, 2
    dégénéré, 4
    localement géodésiques, 498
    non dégénéré, 3
  holonomes
    à liaisons rhéonomes, 521
    à liaisons scléronomes, 514

Temps
  coordonnées, 556
  dans un champ gravitationnel, 560
  de la mécanique classique, 244
  impropre, 243, 556
  propre, 241
Tenseur
  d'Einstein, 512
  d'un espace riemannien, 471
  de courbure d'un espace riemannien, 491
  de Ricci, 508
    pour la métrique de Schwarzschild, 582
  de Riemann-Christoffel
    de première espèce, 497
    de seconde espèce, 495, 496
  définition, 395
  des contraintes, 526
  différentielle absolue d'un tenseur, 456
  métrique, 110, 198, 201, 230
    de la sphère, 196
    de Schwarzschild, 580
    définition, 201
    du plan, 113, 202
    propriétés, 322
  zéro, 423
Théorème
  critère de tensorialité, 422
  d'analyse vectorielle, 434
  d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, 212, 356, 367, 426, 600
  de décomposition unique d'un vecteur, 35
  de Gauss, 179
  de Gödel, 108
  de la divergence, 177, 179, 193, 511, 530, 531, 574, 575, 578
  de Pythagore, 109, 110
    généralisation, 368
  de Ricci, 458, 576
  du quotient, 421, 496
  sur les composantes d'un tenseur, 409
  sur les composantes d'un vecteur, 129
Topologie, 2
Trajectoire définition, 11
Transformation
  de Galilée, 221
  de Lorentz-Poincaré, 224, 226, 235, 256, 258, 267
    de la tri-accélération, 286
    de la vitesse propre, 280
    sous forme intrinsèque, 240
  des coordonnées, 67, 220
  spéciale de Lorentz, 236
Transport parallèle, 477
  en espace courbe, 476
Trivecteur
  accélération, 284
    propre, 288
  force relativiste, 315
  impulsion relativiste, 308
  nabla, 184
  position, 268
  vitesse propre, 278
  vélocité, 274

Vaisseau spatial, 293
Variété, 322
  d'univers, 230
  définition, 7
  différentielle, 7, 8, 514
  pseudo-riemannienne, 321
  riemannienne, 321, 467, 555
Vecteur(s)
  combinaison linéaire de, 22

définition, 27
différentielle
absolue d'un vecteur, 448
d'un vecteur, 370
dérivée d'un vecteur, 370
équipollents, 477
fonction d'une variable, 369
normal à une surface, 360
normé, 121
nul, 121
opérations sur les, 21
orthogonaux, 128
parallèle, 446, 476
position, 33, 268
propriétés, 26
propriétés des lois de composition, 25
représentation
algébrique, 28
géométrique, 21
tangent à une courbe, 248
tendant vers le vecteur nul, 369
zéro, 121
Vélocité
angle imaginaire, 263
d'un mobile libre, 541
définition, 274
dérivée de la, 284
lien avec la rapidité, 264
lien avec la vitesse, 279
Vitesse
de la lumière, 225, 563
limite, 222, 225
propre, 278