LE CALCUL DE PI

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Démonstration de la formule de John Machin.

Table des matières

1 Introduction 1
2 Formule de John Machin (1706) 2
2.1 Cas où a=16 et b=4 3
2.2 Cas où a=4 et b=4 4
2.3 Cas où a=8 et b=4 5
3 Développement en série entière et développement limité 6
3.1 Développement en série de Maclaurin 6
3.2 Développement en série de Taylor 7
3.3 Développement limité d'arctangente 8

1 Introduction

Pour obtenir une approximation de $\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ldots$ nous utilisons la formule trigonométrique

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \tag{1}$$

et le développement limité (D.L.) au voisinage de zéro de la fonction arctangente (voir annexe (8) p. 9) :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Au point d'abscisse $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots \tag{2}$$

Les 10 premiers termes donnent

$$\pi \approx 3{,}041\ 8\ldots$$

Cette formule converge très lentement car nous effectons un D.L. au voisinage de zéro, et pour trouver π nous nous plaçons au point d'abscisse 1. Le D.L. d'ordre n d'une fonction au voisinage de l'un de ses points $(x_0, f(x_0))$ est le polynôme d'ordre n qui se superpose au mieux à la fonction au voisinage de ce point. Ce point $(x_0, f(x_0))$ est le seul point qui appartienne à la fois au polynôme et à la fonction, et l'on a $f(x_0) = a_0$, où a_0 est le premier coefficient du polynôme.

Date: 14 décembre 2025.

Nous ne pouvons pas nous servir du D.L. d'arctan(x) au voisinage de 1 car cela suppose que l'on connaisse déjà la valeur de π. En effet, d'après (9) p. 9 il s'écrit,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + o[(x-1)^2]$$

et au point d'abscisse $x = 1$ on obtient $\pi/4 = \pi/4$. De même, en posant $X = x - 1$:

$$\arctan(X+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{4} + o(X^2)$$

Au point $X = 0$ on obtient à nouveau $\pi/4 = \pi/4$. Le D.L. d'arctan($x + 1$) au voisinage de $x = -1$ s'écrit :

$$\arctan(x+1) = (x+1) - \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(x+1)^5}{5} + o[(x+1)^5]$$

et au point $X = 0$ on obtient à nouveau (2).

2 Formule de John Machin (1706)

Théorème 1.

$$\boxed{\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)}$$

Démonstration. La formule (1) p. 1 est de la forme

$$\pi = a \arctan(\varphi)$$

avec $a = 4$ et $\varphi = 1$. Nous cherchons maintenant une formule de la forme :

$$\pi = a \arctan(\alpha) + b \arctan(\beta) \tag{3}$$

avec α et β les plus petits possible pour avoir une convergence plus rapide car le D.L. de arctangente sera pris au voisinage de zéro. Les paramètres a et b sont libres mais nous devons les choisir les plus grands possible pour que les arctangentes soient les plus petites possibles. En posant $A = \arctan(\alpha)$ et $B = \arctan(\beta)$, nous avons à résoudre :

$$\begin{aligned} aA + bB &= \pi \\ \frac{aA}{4} + \frac{bB}{4} &= \arctan 1 \\ \tan\left(\frac{aA}{4} + \frac{bB}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Or,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

donc,

$$\begin{aligned} \frac{\tan\left(\frac{aA}{4}\right) + \tan\left(\frac{bB}{4}\right)}{1 - \tan\left(\frac{aA}{4}\right)\tan\left(\frac{bB}{4}\right)} &= 1 \\ \tan\left(\frac{aA}{4}\right) + \tan\left(\frac{bB}{4}\right) + \tan\left(\frac{aA}{4}\right)\tan\left(\frac{bB}{4}\right) &= 1 \\ \tan\left(\frac{aA}{4}\right) + \tan\left(\frac{bB}{4}\right)\left[1 + \tan\left(\frac{aA}{4}\right)\right] &= 1 \end{aligned}$$

et,

$$\tan\left(\frac{bB}{4}\right) = \frac{1-\tan\left(\frac{aA}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{aA}{4}\right)} \tag{4}$$

Nous devons chercher des valeurs de a, b, A, et B solutions de cette équation, puis les remplacer dans l'équation (3) p. 2. Nous avons le choix pour les paramètres a et b, mais nous devons faire réapparaître α et β, autrement dit $\tan A$ et $\tan B$. Pour cela nous devons prendre a et b multiples de 4 car ces paramètres sont dans les tangentes de (4), et nous utiliserons les formules de l'angle double. Pour retrouver la formule de Machin, posons $a = 16$ et $b = 4$. Par la suite nous essaierons avec $a = 4$ et avec $a = 8$.

2.1 Cas où a=16 et b=4

$$\tan B = \frac{1-\tan(4A)}{1+\tan(4A)} \tag{5}$$

Or

$$\begin{aligned}
\tan(4A) &= \frac{2\tan(2A)}{1-\tan^2(2A)} \\
&= \frac{2[(2\tan A)/(1-\tan^2 A)]}{1-[(2\tan A)/(1-\tan^2 A)^2]} \\
&= \frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{(1-\tan^2 A)^2 - 4\tan^2 A} \\
&= \frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{\tan^4 A - 6\tan^2 A + 1}
\end{aligned}$$

En se rappelant que $\alpha = \tan A$,

$$\tan(4A) = \frac{4\alpha(1-\alpha^2)}{\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1}$$

D'où avec l'équation (5) et $\beta = \tan B$,

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1-(4\alpha-4\alpha^3)/(\alpha^4-6\alpha^2+1)}{1+(4\alpha-4\alpha^3)/(\alpha^4-6\alpha^2+1)} \\
&= \frac{\alpha^4+4\alpha^3-6\alpha^2-4\alpha+1}{\alpha^4-4\alpha^3-6\alpha^2+4\alpha+1}
\end{aligned} \tag{6}$$

Toutes les valeurs de α et β respectant l'équation précédente sont solutions du problème. Pour que la formule converge rapidement nous prenons les valeurs les plus petites possibles pour α et β. Le couple de valeurs (α, β) qui respecte cette condition est tel que $\alpha = \beta$. Soit donc à résoudre :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\alpha^4+4\alpha^3-6\alpha^2-4\alpha+1}{\alpha^4-4\alpha^3-6\alpha^2+4\alpha+1} \\
\alpha^5-4\alpha^4-6\alpha^3+4\alpha^2+\alpha &= \alpha^4+4\alpha^3-6\alpha^2-4\alpha+1 \\
\alpha^5-5\alpha^4-10\alpha^3+10\alpha^2+5\alpha-1 &= 0
\end{aligned}$$

Cette équation admet 5 racines, toutes réelles :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\sqrt{5-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1 \\
\alpha_2 &= \sqrt{5-2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1 \\
\alpha_3 &= -\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1 \\
\alpha_4 &= \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1 \\
\alpha_5 &= 1
\end{aligned}$$

La plus petite racine en valeur absolue est

$$\alpha_4 = 0{,}158\ 384\ 44\ldots$$

On choisit un nombre rationnel proche de cette valeur, par exemple

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1/5 \\
&= 0,2
\end{aligned}$$

Avec (6) p. 3 on calcule alors

$$\begin{aligned}
\beta &= -1/239 \\
&= 0{,}004\ 184\ 1
\end{aligned}$$

et l'on remplace dans (3) p. 2

$$\pi = 16\arctan(\tfrac{1}{5}) - 4\arctan(\tfrac{1}{239})$$

ce qui achève la démonstration. □

Pour

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1/6 \\
&= 0{,}166\ 67\ldots
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\beta &= 673/1489 \\
&= 0{,}451\ 981\ldots
\end{aligned}$$

qui converge moins vite car $0{,}45 > 0{,}2$. En utilisant le D.L. d'arctangente au voisinage de zéro à l'ordre 3 donné en (8) p. 9, la formule de Machin s'écrit :

$$\begin{aligned}
\pi &\approx 16(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5^3\times 3}) - 4(\tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{239^3\times 3}) \\
&\approx \frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{16}{375} + \frac{4}{40955757}
\end{aligned}$$

Les 4 premiers termes donnent $\pi \approx 3{,}140\ 6\ldots$

2.2 Cas où a=4 et b=4

L'équation (4) s'écrit :

$$\tan B = \frac{1-\tan(A)}{1+\tan(A)}$$

En se rappelant que $\alpha = \tan A$ et $\beta = \tan B$,

$$\beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

De même que précédemment, on pose $\alpha = \beta$ et l'on résoud l'équation :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ \alpha + \alpha^2 &= 1 - \alpha \\ \alpha^2 + 2\alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$

On trouve le discriminant réduit $\Delta' = 2$ et les racines $\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. On garde la racine la plus petite en valeur absolue, $\alpha_1 = -1 + \sqrt{2}$. Remplaçons dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned} \pi &= 4\arctan(\alpha) + 4\arctan(\alpha) \\ &= 8\arctan(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Cette formule dépend du calcul de $\sqrt{2}$ et converge plus lentement que la formule de Machin car

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 1 &\approx= 0,414213\ldots \\ &> 1/5 \end{aligned}$$

2.3 Cas où a=8 et b=4

L'équation (4) p. 3 s'écrit :

$$\tan B = \frac{1 - \tan(2A)}{1 + \tan(2A)}$$

Or,

$$\begin{aligned} \tan(2A) &= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \\ &= \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1 - 2\alpha/(1-\alpha^2)}{1 + 2\alpha/(1-\alpha^2)} \\ &= \frac{1 - \alpha^2 - 2\alpha}{1 - \alpha^2 + 2\alpha} \\ &= \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha - 1} \end{aligned} \tag{7}$$

On pose $\alpha = \beta$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha - 1} \\ \alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha &= \alpha^2 + 2\alpha - 1 \\ \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation admet 3 racines, toutes réelles :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 - \sqrt{3} \\ \alpha_2 &= 2 + \sqrt{3} \\ \alpha_3 &= -1 \end{aligned}$$

La plus petite racine en valeur absolue est $\alpha_1 \approx 0{,}267\,949\,192$. On choisit un nombre rationnel proche de cette valeur, par exemple $\alpha = 1/4$. Avec (7) p. 5 on calcule $\beta = 7/23$, on remplace dans (3) p. 2 :

$$\pi = 8\arctan(1/4) + 4\arctan(7/23)$$

qui converge plus lentement que la formule de Machin car $7/23 > 1/5$.

3 Développement en série entière et développement limité

On appelle *série* une somme infinie de termes. Les séries entière, aussi appelées séries de puissances, sont des polynômes de degré infini.

3.1 Développement en série de Maclaurin

On suppose que la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme en x :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

En posant $x = 0$, nous obtenons le premier coefficient :

$$f(0) = a_0$$

Si $f(x)$ est de classe C^1 (dérivable une fois), alors :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

En posant $x = 0$, nous obtenons le deuxième coefficient :

$$f'(0) = a_1$$

Si $f(x)$ est de classe C^2 :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2a_2 + 2 \times 3a_3 x + 3 \times 4a_4 x^2 + \dots \\ f''(0) &= 2a_2 \end{aligned}$$

Si $f(x)$ est de classe C^3 :

$$\begin{aligned} f'''(x_0) &= 2 \times 3a_3 + 3 \times 4a_4 x + \dots \\ f'''(0) &= 2 \times 3a_3 \end{aligned}$$

En notant $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x)$, les coefficients a_n s'écrivent :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Le développement en série entière de $f(x)$ de classe C^∞ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Le développement en série entière n'est pas une approximation de la fonction, c'est très exactement la fonction. En revanche, si on limite le développement au n premiers termes de la série on obtient une approximation de la fonction par un *D.L.* à l'ordre n :

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + R(x) \end{aligned}$$

Le point $M(0, a_0)$ est le seul point appartenant à la courbe et à son approximation, l'approximation n'est donc valable qu'au voisinage de zéro. De plus, le reste $R(x)$ doit être inférieur au plus petit terme du D.L., c'est-à-dire le dernier, lorsque l'on est au voisinage de $x = 0$. Il doit tendre vers zéro plus vite que le $n^{ième}$ terme. Autrement dit une cns est que l'on ait :

$$\lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{a_n x^n} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{x^n} = 0$$

Les fonctions qui tendent vers zéro plus vite que la fonction puissance n au voisinage de zéro sont notées « petit o » : $o(x^n)$ en notation dite de Edmund Landau.

Exemples. *Au premier ordre nous obtenons une approximation linéaire (ou approximation affine) de la fonction :*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + o(x) \\ &\approx a_0 + a_1 x \end{aligned}$$

L'approximation linéaire est une droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $M(0, a_0)$.

Développement limité à l'ordre 4 de $f(x)$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

3.2 Développement en série de Taylor

Nous pouvons reconstruire la courbe en commençant par un point quelconque x_0 autre que le point $x = 0$, en translatant le polynôme de x_0. On suppose que la fonction peut s'écrire sous la forme du polynome suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \end{aligned}$$

Dans ce cas, le premier coefficient est obtenu en $x = x_0$:

$$f(x_0) = a_0$$

Si $f(x)$ est de classe C^1, alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots \\ f'(x_0) &= a_1 \end{aligned}$$

Le développement en série de Taylor de $f(x)$ de classe C^∞ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Si l'on considère uniquement les $n + 1$ premiers termes de la série de Taylor, on obtient le D.L. à l'ordre n de la fonction $f(x)$ de classe C^n au voisinage de x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o[(x - x_0)^n] \end{aligned}$$

Le point $M(x_0, a_0)$ est le seul point appartenant à la courbe et à son approximation, l'approximation n'est donc valable qu'au voisinage de x_0.

Exemple. *Développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 1 :*

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + o[(x-1)^2]$$

3.3 Développement limité d'arctangente

Cherchons la dérivée de $\arctan(x)$, fonction réciproque de $\tan(x)$.

Théorème 2. *Dérivée d'une fonction composée.*

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \times g'(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\{f[g(x)]\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h) - f[g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x) + g(x+h) - g(x)] - f[g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x) + g(x+h) - g(x)] - f[g(x)]}{g(x+h) - g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f[g(x) + k] - f[g(x)]}{k} \times \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'[g(x)] \times g'(x)
\end{aligned}$$

□

Théorème 3. *Dérivée d'une fonction réciproque.*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$$

Démonstration. En posant $g(x) = f^{-1}(x)$ dans le théorème 2,

$$\left(f \circ f^{-1}\right)'(x) = \left(f' \circ f^{-1}\right)(x) \times \left(f^{-1}\right)'(x)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left(f \circ f^{-1}\right)'(x) &= x' \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$$

□

Appliquons le théorème 3 à la fonction $\arctan(x)$. La dérvivée de $\tan(x)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= 1 + \tan^2(x)
\end{aligned}$$

On en déduit celle de $\arctan(x)$:

$$\begin{aligned}
\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

La dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(1+x^2)^{-2} \times 2x \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

La dérivée troisième :

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{-2\left(1+x^2\right)^2 + 2x \times 2(1+x^2) \times 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{[-2(1+x^2) + 8x^2]}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{(6x^2-2)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

La dérivée quatrième :

$$\begin{aligned} f''''(x) &= \frac{12x\left(1+x^2\right)^3 - (6x^2-2) \times 3\left(1+x^2\right)^2 \times 2x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{1+x^2} \\ &= \frac{24(x-x^3)}{1+x^2} \end{aligned}$$

La dérivée cinquième :

$$f'''''(x) = 24\,\frac{(1-3x^2)(1+x^2) - (x-x^3) \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Nous obtenons le D.L. d'arctan(x) au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}\,x^4 + \frac{f'''''(0)}{5!}\,x^5 \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \end{aligned} \qquad (8)$$

Le D.L. d'arctan(x) au voisinage de 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\,(x-1)^3 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o[(x-1)^3] \end{aligned} \qquad (9)$$

Adresse électronique : o.castera@free.fr
Site web : https://sciences-physiques.neocities.org