

<https://sciences-physiques.neocities.org>  
o.castera@free.fr

---

---

# Mécanique classique

---

---

Olivier Castéra

Le 16 décembre 2025



# Table des matières

Chapitre 1. Les forces fictives	1
A Loi de composition des vitesses	1
B Loi de composition des accélérations	5
C Forces dans un référentiel non galiléen	8
D Exemple de force fictive : la force centrifuge	9
D.1 Dans le référentiel galiléen	10
D.2 Dans le référentiel non galiléen	10
Chapitre 2. Le pendule balistique	11
A Description	11
B Théorème du moment cinétique	12
C Conservation de l'énergie mécanique	14
D Conservation de l'énergie totale	15
E Condition pour annuler la percussion	16
Chapitre 3. Le problème de Kepler	19
A Coordonnées polaires	19
A.1 Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée ( $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$ )	19
A.2 Expression du vecteur position	20
A.3 Dérivée des vecteurs de base	20
A.4 Expression du vecteur vitesse	21
A.5 Expression du vecteur accélération	21
B Force centrale - Cas général	21
B.1 Centre d'inertie	21
B.2 Masse réduite	22
B.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)	22
B.4 Conservation du moment cinétique	25
B.5 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique	26
B.6 Intégration de l'équation différentielle du mouvement	26
B.7 Potentiel effectif	27
B.8 Étude de la trajectoire	28
B.9 Cas où le rayon vecteur tend vers zéro	29
C Force de gravitation	30
C.1 Relation fondamentale de la dynamique	30
C.2 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique	31
C.3 Intégration de l'équation différentielle du mouvement	32
D Étude de la trajectoire	34
D.1 L'excentricité $e$	34
D.2 L'ellipse	35
D.3 Orientation de l'ellipse	36

## Chapitre 0 : Table des matières

D.4 Demi-grand axe $a$	38
D.5 Demi-petit axe $b$	38
D.6 Période de révolution $T$	39
E Equations paramétriques	39
E.1 Angle en fonction du temps	39
E.2 Rayon en fonction du temps	40
Chapitre 4. Le tenseur d'inertie	45
A Moment d'inertie	45
B Tenseur d'inertie	46
C Repère principal d'inertie	49
C.1 Moments principaux d'inertie	49
C.2 Axes principaux d'inertie	50
C.3 Ellipsoïde d'inertie	52
C.4 Théorème de Huygens	53
D Moment cinétique	53
D.1 Moment cinétique par rapport à un point	54
D.2 Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation	56
D.3 Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie	57
E Énergie cinétique d'un solide en rotation	57
Chapitre 5. Annexes	59
A Premier théorème d'analyse vectorielle	59
B Deuxième théorème d'analyse vectorielle	60
C Troisième théorème d'analyse vectorielle	61

# Chapitre 1

## LES FORCES FICTIVES

Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des forces dites *fictives* car elles ne créent pas le mouvement. Elles ne sont dues qu'au mouvement de l'observateur, on peut les annuler en changeant de référentiel (de ce point de vue, la gravitation est une force fictive). Dans les référentiels non galiléens, nous pouvons utiliser la mécanique développée dans les référentiels galiléens (RFD et théorème du moment cinétique) à la condition d'ajouter ces forces. C'est là leur utilité.

### A Loi de composition des vitesses

#### Définition A.1: Vecteur position

Soit un mobile et soit  $M$  le point où se situe son centre de gravité. Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque de repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , son vecteur position a pour expression :

$$\overrightarrow{OM} \stackrel{\text{def}}{=} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  quelconque, il a pour expression :

$$\overrightarrow{O'M} \stackrel{\text{def}}{=} x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Dans le domaine non relativiste le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels, par exemple pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ ,

$$t = t'$$

de sorte que les dérivations par rapport à  $t$  et  $t'$  sont équivalentes.

#### Notation A.1

La dérivée par rapport au temps sera notée  $d_t^{\mathcal{R}}$  pour un observateur fixe dans  $\mathcal{R}$ , et  $d_t^{\mathcal{R}'}$  pour un observateur fixe dans  $\mathcal{R}'$ .

Soient  $\vec{V}(t)$  la vitesse non constante de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}(t)$  la vitesse du mobile dans  $\mathcal{R}$ , et  $\vec{v}'(t)$  sa vitesse dans  $\mathcal{R}'$ .

### Théorème A.1: Loi de composition des vitesses

Par changement de référentiel, les vecteurs vitesse du mobile sont liés par la loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}$$

où  $\vec{V}(t)$  est la vitesse de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $\vec{\omega}(t)$  est la vitesse angulaire de rotation sur lui-même de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$ .

#### Remarque A.1

On vérifie que si  $\vec{v}'(t) = \vec{0}$  et  $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$  alors on a bien  $\vec{v}(t) = \vec{V}(t)$ .

DÉMONSTRATION. Dérivons dans  $\mathcal{R}$  par rapport à  $t$  la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t) \\ d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM} &= d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OO'} + d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} \end{aligned} \quad (1.1)$$

### Définition A.2: Vitesse absolue

La vitesse du mobile dans  $\mathcal{R}$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM} \\ &= d_t^{\mathcal{R}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

### Définition A.3: Vitesse relative des référentiels

- La vitesse de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OO'} \\ &= d_t^{\mathcal{R}} (x_{O'}\vec{i} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k}) \\ &= \dot{x}_{O'}\vec{i} + \dot{y}_{O'}\vec{j} + \dot{z}_{O'}\vec{k} \end{aligned}$$

- La vitesse de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}'$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{V}'(t) &\stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}'} \overrightarrow{O'O} \\ &= d_t^{\mathcal{R}'} (x'_O\vec{i}' + y'_O\vec{j}' + z'_O\vec{k}') \\ &= \dot{x}'_O\vec{i}' + \dot{y}'_O\vec{j}' + \dot{z}'_O\vec{k}' \end{aligned}$$

#### Remarque A.2

Supposons que vu de  $\mathcal{R}$ , le référentiel  $\mathcal{R}'$  ne fasse que tourner sur lui-même. Alors, vu de  $\mathcal{R}'$ , le référentiel  $\mathcal{R}$  décrit un cercle autour de  $\mathcal{R}'$ . Les vitesses relatives respectives  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$  sont donc en général très différentes.

En se servant des deux définitions précédentes, (1.1) devient :

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} \quad (1.2)$$

Vu de  $\mathcal{R}$ , les vecteurs de base de  $\mathcal{R}'$  varient dans le temps :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} &= d_t^{\mathcal{R}} \left( x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \right) \\ &= \dot{x}' \vec{i}' + \dot{y}' \vec{j}' + \dot{z}' \vec{k}' + x' d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' + y' d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' + z' d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' \end{aligned}$$

#### Définition A.4: Vitesse relative

La vitesse du mobile dans  $\mathcal{R}'$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t) &\stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}'} \overrightarrow{O'M} \\ &= d_t^{\mathcal{R}'} \left( x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \right) \\ &= \dot{x}' \vec{i}' + \dot{y}' \vec{j}' + \dot{z}' \vec{k}' \end{aligned}$$

Avec cette définition

$$d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} = \vec{v}' + x' d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' + y' d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' + z' d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' \quad (1.3)$$

On suppose que les axes  $Oz$  et  $O'z'$  ont même direction et même sens, de sorte que  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  soient équipollents. Appelons  $\alpha(t)$  l'angle orienté de  $\mathcal{R}$  vers  $\mathcal{R}'$ , qui est l'angle de rotation de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  à l'instant  $t$ .

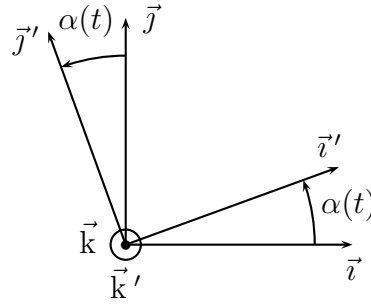


FIG. 1.1 – Rotation de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' = -\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{i} + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{j} \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' = -\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{i} - \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{k}' = \vec{C}^{ste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' = \dot{\alpha} \vec{j}' \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' = -\dot{\alpha} \vec{i}' \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' = \vec{0} \end{cases}$$

Par conséquent (1.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} &= \vec{v}' + x' \dot{\alpha} \vec{j}' - y' \dot{\alpha} \vec{i}' \\ &= \vec{v}' + \dot{\alpha} (x' \vec{j}' - y' \vec{i}') \end{aligned} \quad (1.4)$$

#### Définition A.5: Pseudovecteur vitesse angulaire relative

Le pseudovecteur vitesse angulaire de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  a pour expression :

$$\vec{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (d_t^{\mathcal{R}} \alpha) \vec{k} = \dot{\alpha} \vec{k}$$

Appelons  $\alpha'(t)$  l'angle orienté de  $\mathcal{R}'$  vers  $\mathcal{R}$ , qui est l'angle de rotation de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}'$  à l'instant  $t$ , et tel que  $\alpha' = -\alpha$ . Le pseudovecteur vitesse angulaire de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$

a pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}'(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( d_t^{\mathcal{R}'} \alpha' \right) \vec{k}' = \dot{\alpha}' \vec{k}' = -\dot{\alpha} \vec{k} \\ \vec{\omega}'(t) &= -\vec{\omega}(t)\end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite de (1.4) est un produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} y' \\ \dot{\alpha} x' \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\alpha} (x' \vec{j}' - y' \vec{i}')$$

si bien que (1.4) devient :

$$d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} = \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) \quad (1.5)$$

Avec ce résultat, la loi de composition des vitesses (1.2) p. 2 s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{O'M}(t) \quad \square$$

Remarque A.3

La relation (1.3) p. 3 devient :

$$d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} = d_t^{\mathcal{R}'} \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \quad (1.6)$$

Remarque A.4

On peut obtenir ce résultat en utilisant une démonstration purement algébrique :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 1 \\ d_t^{\mathcal{R}} (\vec{i}' \cdot \vec{i}') &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' + d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' \cdot \vec{i}' &= 0 \\ 2 (\vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}') &= 0 \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' &\perp \vec{i}' \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' &= \vec{\omega} \times \vec{i}'\end{aligned}$$

où  $\vec{\omega}$  est pour l'instant un vecteur indéterminé.

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{j}' &= 0 \\ d_t^{\mathcal{R}} (\vec{i}' \cdot \vec{j}') &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' + \vec{j}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{i}' &= 0 \\ \vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' &= -\vec{j}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{i}')$$

En utilisant le théorème A.1 p. 59 donné en annexe :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' &= -\vec{i}' \cdot (\vec{j}' \times \vec{\omega}) \\ &= \vec{i}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{j}') \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{j}' &= \vec{\omega} \times \vec{j}'\end{aligned}$$



De même pour le vecteur  $\vec{k}$  :

$$\begin{aligned}\vec{i}' \cdot \vec{k}' &= 0 \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' &= \vec{\omega} \times \vec{k}'\end{aligned}$$

En posant  $\vec{k}'$  comme axe de rotation,

$$\begin{aligned}d_t^{\mathcal{R}} \vec{k}' &= \vec{0} \\ \vec{\omega} \times \vec{k}' &= \vec{0}\end{aligned}$$

soit,

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}'$$

En appliquant ces résultats à (1.3) p. 3 puis à (1.2) p. 2, nous obtenons la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}' + x' (\vec{\omega} \times \vec{i}') + y' (\vec{\omega} \times \vec{j}') \\ &= \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{O'M}\end{aligned}$$

### Définition A.6: Vitesse d'entraînement

La vitesse d'entraînement est la vitesse du point  $P$  fixe dans le référentiel mobile ( $\vec{v}'_p = \vec{0}$ ), coïncidant avec le point  $M$  à l'instant  $t_0$  :

$$\vec{v}_e(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{V}(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \vec{O'P}(t_0)$$

Les points  $P$  et  $M$  étant superposés à  $t_0$  :

$$\begin{aligned}\vec{O'M}(t_0) &= \vec{O'P}(t_0) \\ \vec{\omega}(t_0) \times \vec{O'M}(t_0) &= \vec{\omega}(t_0) \times \vec{O'P}(t_0) \\ \vec{V}(t_0) + \vec{v}'(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \vec{O'M}(t_0) &= \vec{V}(t_0) + \vec{v}'(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \vec{O'P}(t_0) \\ \vec{v}(t_0) &= \vec{v}'(t_0) + \vec{v}_e(t_0)\end{aligned}$$

Les trajectoires de  $P$  et  $M$  étant différentes sauf si le corps est fixe dans  $\mathcal{R}'$ , en général :

$$\begin{aligned}d_t^{\mathcal{R}} (\vec{O'M}) &\neq d_t^{\mathcal{R}} (\vec{O'P}) \\ d_t^{\mathcal{R}} (\vec{\omega} \times \vec{O'M}) &\neq d_t^{\mathcal{R}} (\vec{\omega} \times \vec{O'P}) \\ d_t^{\mathcal{R}} (\vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{O'M}) &\neq d_t^{\mathcal{R}} (\vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{O'P}) \\ d_t^{\mathcal{R}} \vec{v} &\neq d_t^{\mathcal{R}} (\vec{v}' + \vec{v}_e)\end{aligned}$$

## B Loi de composition des accélérations

### Théorème B.1: Loi de composition des accélérations

Par changement de référentiel, les vecteurs accélération du corps sont liés par la loi de composition des accélérations

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

dans laquelle  $\vec{a}$  est l'accélération du corps dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{a}'$  est l'accélération du corps dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{a}_e$  est l'accélération d'entraînement et  $\vec{a}_c$  l'accélération de Coriolis.

DÉMONSTRATION. Dérivons dans  $\mathcal{R}$  par rapport au temps, la loi de composition des vitesses du théorème A.1 p. 2 :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \vec{v} &= d_t^{\mathcal{R}} \vec{V} + d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' + d_t^{\mathcal{R}} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) \\ &= d_t^{\mathcal{R}} \vec{V} + d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' + d_t^{\mathcal{R}} \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M} \end{aligned}$$

### Définition B.1: Accélération absolue

L'accélération absolue du corps dans le référentiel  $\mathcal{R}$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{a} &\stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}} (d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{OM}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}} \vec{v} \end{aligned}$$

### Définition B.2: Accélération relative des référentiels

L'accélération relative de  $\mathcal{R}'$  vu de  $\mathcal{R}$  a pour expression :

$$\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}} \vec{V}$$

Avec ces définitions :

$$\vec{a} = \vec{A} + d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'M}$$

En utilisant (1.5) p. 4, nous avons :

$$\vec{a} = \vec{A} + d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) \quad (1.7)$$

La relation (1.6) p. 4 s'applique à tout vecteur exprimé dans  $\mathcal{R}'$  et dérivé dans  $\mathcal{R}$ . Appliquée au vecteur  $\vec{v}'$ , elle donne :

$$d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}' = d_t^{\mathcal{R}'} \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

### Définition B.3: Accélération relative

L'accélération relative est l'accélération du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{a}' \stackrel{\text{def}}{=} d_t^{\mathcal{R}'} \vec{v}'$$

La relation (1.7) devient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{A} + d_t^{\mathcal{R}'} \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) \\ &= \vec{A} + \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (1.8)$$

Soit  $H$  la projection orthogonale du point  $M$  sur l'axe de rotation  $O'z'$  du repère  $\mathcal{R}'$ .

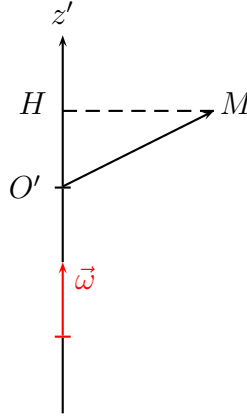


FIG. 1.2 – Projection du point  $M$  sur l'axe de rotation

En utilisant le théorème B.1 p. 60 donné en annexe, l'avant dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}) &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{O'M}) - \overrightarrow{O'M} (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \vec{\omega} (\omega O'H) - \overrightarrow{O'M} \omega^2 \\ &= \overrightarrow{O'H} \omega^2 - \overrightarrow{O'M} \omega^2 \\ &= \overrightarrow{MH} \omega^2\end{aligned}$$

Ce terme est toujours dirigé vers le centre de rotation instantané.

**Définition B.4: Accélération centripète**

Le terme  $\overrightarrow{MH} \omega^2$  s'appelle accélération centripète.

La relation (1.8) s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{MH} \omega^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (1.9)$$

**Définition B.5: Accélération d'entraînement**

L'accélération d'entraînement est l'accélération du point  $P$  fixe dans le référentiel mobile ( $\vec{v}'_p = \vec{0}$ ), coïncidant avec le point  $M$  à l'instant  $t_0$  :

$$\vec{a}_e(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)$$

L'accélération d'entraînement contient l'accélération relative des référentiels, l'accélération de la vitesse angulaire et l'accélération centripète. A l'instant  $t_0$ , les points  $P$  et  $M$  étant superposés, nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'M}(t_0) &= \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) &= \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) \\ \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0) &= \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'P}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)\end{aligned}$$

$$\vec{a}_e(t_0) = \vec{A}(t_0) + \dot{\vec{\omega}}(t_0) \times \overrightarrow{O'M}(t_0) + \overrightarrow{MH}(t_0) \omega^2(t_0)$$

### Définition B.6: Accélération de Coriolis

L'accélération de Coriolis a pour expression,

$$\vec{a}_c \stackrel{\text{def}}{=} 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Avec les définitions B.5 et B.6, (1.9) s'écrit :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

□

#### Remarque B.1

La dérivée dans  $\mathcal{R}$  de la vitesse d'entraînement donne l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}_e &= d_t^{\mathcal{R}} \vec{V} + d_t^{\mathcal{R}} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) \\ &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega} \times d_t^{\mathcal{R}} \overrightarrow{O'P} \end{aligned}$$

En utilisant (1.6) p. 4 puis le théorème B.1 p. 60 donné en annexes :

$$\begin{aligned} d_t^{\mathcal{R}} \vec{v}_e &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'P}) \\ &= \vec{A} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{MH} \omega^2 \\ &= \vec{a}_e \end{aligned}$$

## C Forces dans un référentiel non galiléen

### Théorème C.1: RFD dans un référentiel non galiléen

Soient  $\sum \vec{F}^{\text{ext}}$  la somme des modèles des forces extérieures réelles s'exerçant sur un système. La RFD dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  s'écrit,

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = \frac{d\vec{p}'}{dt}$$

et, lorsque la masse du système est constante :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}'$$

DÉMONSTRATION. La RFD dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse  $m$  du système étant supposée constante :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}$$

Avec le théorème B.1 p. 5 nous avons :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}^{\text{ext}} &= m(\vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c) \\ &= m\vec{a}' + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c \end{aligned}$$

**Définition C.1: Force d'inertie d'entraînement**

La force d'inertie d'entraînement a pour expression :

$$\vec{F}_e \stackrel{\text{def}}{=} -m\vec{a}_e$$

**Définition C.2: Force de Coriolis**

La force de Coriolis a pour expression :

$$\vec{F}_c \stackrel{\text{def}}{=} -m\vec{a}_c$$

Par conséquent, on a bien :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}'$$

Dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , il faut ajouter aux forces extérieures réelles  $\vec{F}^{\text{ext}}$  s'exerçant sur le système, les forces fictives d'entraînement  $\vec{F}_e$  et de Coriolis  $\vec{F}_c$ .  $\square$

## D Exemple de force fictive : la force centrifuge

Le système étudié est un corps de centre de gravité  $M$  et de masse  $m$ , tenu par un fil et tournant avec la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}$  autour de l'axe  $Oz$  d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . On considère le référentiel  $\mathcal{R}'$  de même centre  $O$  que  $\mathcal{R}$ , dont l'axe  $Oz'$  est confondu avec l'axe  $Oz$ . Ce référentiel tourne autour de cet axe à la même vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  que le corps, de sorte que celui-ci soit immobile dans  $\mathcal{R}'$  et soit toujours sur l'axe  $Ox'$  :  $\vec{OM} = x'\vec{i}'$

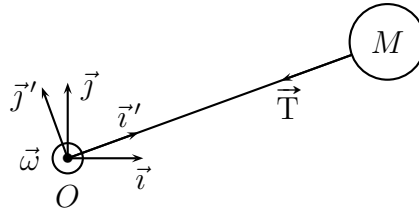


FIG. 1.3 – Rotation du corps  $M$  vue de dessus

## D.1 Dans le référentiel galiléen

Le corps étant fixe dans  $\mathcal{R}'$ , sa vitesse  $\vec{v}'$  et son accélération  $\vec{a}'$  sont nulles.

D'après la déf. B.6 p. 8, l'accélération de Coriolis nulle :  $\vec{a}_c = \vec{0}$

L'accélération relative des référentiels est nulle par hypothèse :  $\vec{A} = \vec{0}$ ,

La variation de la vitesse angulaire est nulle également :  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

Dans (1.9) p. 7 il ne reste que l'accélération centripète :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{MO} \omega^2 \\ &= -\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

où  $r\vec{e}_r$  est le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  en coordonnées polaires. La RFD donne la tension du fil :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}^{\text{ext}} &= m\vec{a} \\ \vec{T} &= -m\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

## D.2 Dans le référentiel non galiléen

Écrivons la RFD pour un observateur dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{F}_e + \vec{F}_c = m\vec{a}'$$

L'accélération de Coriolis étant nulle, d'après la déf. C.2 p. 9 la force de Coriolis est nulle :

$$\begin{aligned}\vec{F}_c &= -m\vec{a}_c \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

L'accélération relative des référentiels étant nulle et la vitesse angulaire constante, il ne reste que l'accélération centripète. D'après la déf. C.1 p. 9 la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= -m\vec{a}_e \\ &= m\omega^2 r \vec{e}_r\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} + m\omega^2 r \vec{e}_r = m\vec{a}'$$

### Définition D.1: Force centrifuge

La force centrifuge a pour expression :

$$\vec{F}_n \stackrel{\text{def}}{=} m\omega^2 r \vec{e}_r$$

Le corps étant immobile dans  $\mathcal{R}'$ , son accélération est nulle :

$$\vec{T} + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Pour un observateur dans  $\mathcal{R}'$ , la force centrifuge s'exerce sur tous les corps immobiles dans  $\mathcal{R}'$  en plus des forces réelles (la tension du fil). Elles permettent à l'observateur dans  $\mathcal{R}'$  d'appliquer la RFD, la somme des forces est nulle pour les objets immobiles.

## Chapitre 2

### LE PENDULE BALISTIQUE

#### A Description

Le pendule balistique permet de mesurer la vitesse d'un projectile. Un sac de sable est relié par l'intermédiaire d'une tige rigide au bras horizontal ( $Oz$ ) d'une potence, autour duquel il peut tourner librement et sans frottement (fig. 2.1 p. 11).

À l'instant  $t_0$  le sac est au repos dans le référentiel terrestre ( $O, x, y, z$ ) supposé galiléen. On note  $M$  la masse du sac,  $G$  son centre de gravité et  $J$  son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, c.-à-d. la répartition de sa masse en fonction du carré de la distance à l'axe de rotation ( $Oz$ ). On note  $l$  la distance  $OG$ .

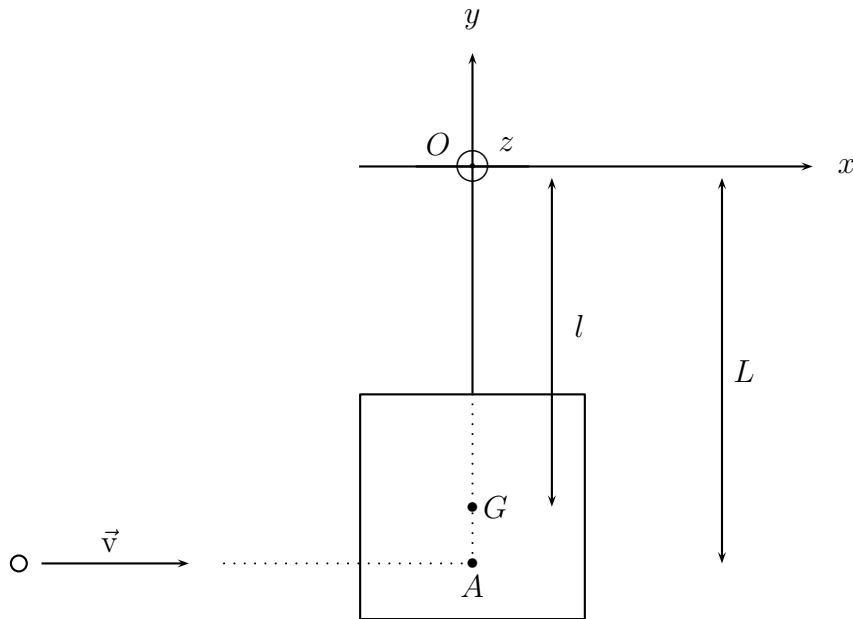


FIG. 2.1 – Pendule balistique avant impact

Remarque A.1

L'utilisation d'une corde au lieu d'une tige rigide autoriserait une rotation du sac de sable autour de son point d'attache avec la corde, ce qui compliquerait la résolution de ce problème.

À l'instant  $t_0$ , un projectile ( $p$ ) de masse  $m$ , de vecteur position  $\vec{\rho}(t)$  et de dimensions négligeables, pénètre le sac de sable avec un vecteur vitesse purement horizontal  $\vec{v}$ , donc au sommet de sa trajectoire, et s'arrête au point  $A$  à l'instant  $t_1$ . Nous supposons que  $A$  est situé sur la droite verticale ( $OG$ ). On note  $L$  la distance  $OA$ .

La durée  $t_1 - t_0$  de l'impact, le sac et le projectile prennent la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$  autour de l'axe de rotation ( $Oz$ ). Le mouvement du sac étant un mouvement de rotation, nous devons utiliser le « théorème » du moment cinétique.

## B Théorème du moment cinétique

- 1) Première méthode : le système étudié est le sac de sable et le projectile, noté ( $s + p$ ).

Avant l'impact, les forces extérieures exercées sur le système sont le poids du sac  $\vec{P}_s$ , la tension dans la tige  $\vec{T}$  et le poids du projectile  $\vec{P}_p$ , avec :

$$\vec{P}_s = -\vec{T}$$

Cette relation n'est plus vraie après l'impact.

Remarque B.1

Les poids du sac et du projectile sont des forces extérieures au système. Elles sont dues à la présence de la Terre.

Le pseudovecteur moment cinétique est noté  $\vec{\sigma}$ . Le théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque  $q$  fixe dans ( $O, x, y, z$ ) s'écrit :

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_q(\vec{F}^{\text{ext}}) \equiv \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{q(s+p)}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_q(\vec{P}_s) + \vec{\mathcal{M}}_q(\vec{P}_p) + \vec{\mathcal{M}}_q(\vec{T}) \equiv \frac{\vec{\sigma}_{q(s+p)}(t_1) - \vec{\sigma}_{q(s+p)}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Remarque B.2

Les forces intenses et de courte durée qui apparaissent lors d'un choc sont appelées *percussions*. On considère qu'un solide ne bouge presque pas lorsqu'il subit une percussion, seule sa vitesse varie. C'est le cas par exemple du rebond d'une balle contre un mur.

En acquérant en très peu de temps une vitesse de rotation autour du bras horizontal, le sac de sable exerce soudainement une force centrifuge  $\vec{F}_c = -M\omega^2 l \vec{j}$  sur la tige. La tension dans la tige augmente brutalement pendant le choc alors que le sac de sable ne bouge presque pas. Cette percussion tend à casser la tige et le bras de la potence, la tension est égale et opposée à la réaction  $\vec{R}$  de l'axe de rotation.

Prenons  $q$  confondu avec  $O$  car en ce point les moments de force sont identiquement nuls : le temps de l'impact les forces passent toutes approximativement par  $O$  :

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}_s) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}_p) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) \equiv \vec{0}$$



Remarque B.3

En toute rigueur le point  $O$  n'est pas fixe dans un référentiel galiléen car la Terre se met à tourner lors de l'impact dans le sac. Pour s'en rendre compte il suffit d'imaginer la même expérience avec une masse terrestre beaucoup plus faible. La masse de la Terre étant très grande par rapport aux masses du projectile et du sac,  $O$  est approximativement fixe dans un référentiel galiléen. Cette approximation permet de ne pas prendre comme système un système isolé. En effet, si l'on remplaçait la Terre par une boule de quelques kilos, il faudrait choisir le système isolé constitué du projectile, du sac, de la tige, de la potence et de la boule. L'interaction gravitationnelle serait alors négligeable.

La variation dans le temps du moment cinétique du système  $(s + p)$  par rapport à  $O$  est nulle, il se conserve :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{O(s+p)}(t_1) &= \vec{\sigma}_{O(s+p)}(t_0) \\ J\omega\vec{k} + \vec{\rho}(t_1) \times m[\vec{\omega} \times \vec{\rho}(t_1)] &= \vec{\rho}(t_0) \times m\vec{v} \\ J\omega\vec{k} + mL^2\omega\vec{k} &= mLv\vec{k} \\ (J + mL^2)\omega &= mLv\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\omega = \frac{mLv}{J + mL^2}\tag{2.2}$$

Remarque B.4

Une réécriture de (2.1) met en évidence le transfert de moment cinétique entre le projectile et le sac :

$$J\omega = mL(v - L\omega)$$

Lorsque la masse du projectile est négligeable devant celle du sac de sable  $m \ll M$  :

$$\omega \approx \frac{mLv}{J}$$

Remarque B.5

À partir de (2.1) p. 13, cherchons quelles sont les approximations qui donnent la conservation de la quantité de mouvement. Si la dimension verticale du sac est petite devant  $l$  et/ou si la dimension verticale du sac est petite par rapport à ses dimensions horizontales alors  $J \approx Ml^2$  et  $L \approx l$ , et (2.1) devient :

$$\begin{aligned}(Ml^2 + ml^2)\omega &\approx mlv \\ (M + m)V &\approx mv\end{aligned}$$

où  $V = l\omega$  est la vitesse horizontale du sac et du projectile après le choc. Par conséquent, si au moins l'une des deux conditions précédentes est respectée, nous pouvons écrire la conservation de la quantité de mouvement lors de l'impact plutôt que la conservation du moment cinétique.

2) Seconde méthode : le système étudié est le sac de sable seul, noté  $(s)$ .

Le système est à masse variable, sa masse passe de  $M$  à  $M + m$ . Avant l'impact, les forces extérieures exercées sur le système sont le poids du sac  $\vec{P}_s$  et la tension dans la tige  $\vec{T}$ . Pendant l'impact apparaissent la force  $\vec{f}_p$  du projectile sur le sac et le poids du projectile  $\vec{P}_p$  lorsque la masse du système passe de  $M$  à  $M + m$ .

Le théorème du moment cinétique par rapport au point  $O$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\sum \mathcal{M}_o(\vec{F}^{\text{ext}}) &\equiv \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_o(s) \\ \mathcal{M}_o(\vec{P}_{(s+p)}) + \mathcal{M}_o(\vec{T}) + \mathcal{M}_o(\vec{f}_p) &\equiv \frac{\vec{\sigma}_o(s)(t_1) - \vec{\sigma}_o(s)(t_0)}{t_1 - t_0} \\ \mathcal{M}_o(\vec{f}_p) &\equiv \frac{\vec{\sigma}_o(s)(t_1)}{t_1 - t_0}\end{aligned}\tag{2.3}$$

La RFD donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_o(\vec{f}_p) &= -L\vec{j} \times m \frac{dv}{dt} \vec{i} \\ &= mL \frac{dv}{dt} \vec{k}\end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}mL \frac{v-0}{t_1-t_0} \vec{k} &= \frac{\vec{\sigma}_o(s)(t_1)}{t_1-t_0} \\ mLv &= J\omega + mL^2\omega\end{aligned}$$

Nous retrouvons (2.1) p. 13.

## C Conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie mécanique permet de trouver l'expression de la vitesse du projectile avant l'impact. Prenons la position initiale du centre de gravité du système sac-projectile comme origine de l'énergie potentielle. Au temps  $t_1$ , juste après la fin de l'impact, l'énergie potentielle du système sac-projectile est nulle et l'énergie cinétique est maximale :

$$E_{cin}(t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (J + mL^2) \omega^2$$

Avec l'expression de omega (2.2) p. 13 :

$$\begin{aligned}E_{cin}(t_1) &= \frac{1}{2} (J + mL^2) \left( \frac{mLv}{J + mL^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{mL^2}{J + mL^2} \right) v^2 \\ &\approx \frac{1}{2} m \left( \frac{mL^2}{J} \right) v^2 \quad m \ll M\end{aligned}$$

On note ici que pour  $m \ll M$  cette énergie cinétique est très petite. Nous verrons au § D que l'énergie cinétique du projectile est en grande partie transformée en énergie thermique.

On mesure l'angle maximal  $\theta_{max}$  atteint par le système sac-projectile à l'instant  $t_2$ . L'énergie cinétique est alors nulle et l'énergie potentielle maximale :

$$\begin{aligned}E_{pot}(t_2) &= Mgl(1 - \cos(\theta_{max})) + mgL(1 - \cos(\theta_{max})) \\ &= (Ml + mL)g(1 - \cos(\theta_{max}))\end{aligned}$$

Lorsque la masse du projectile est négligeable devant celle du sac de sable, en appelant  $h_{max}$  la hauteur maximale atteinte par le centre de gravité du sac de sable :

$$\begin{aligned} E_{pot}(t_2) &\approx Mgl(1 - \cos(\theta_{max})) & m \ll M \\ &\approx Mgh_{max} & m \ll M \end{aligned}$$

En négligeant les frottements de l'air et les frottements au niveau de l'axe, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{méca}(t_1) &= E_{méca}(t_2) \\ E_{cin}(t_1) + E_{pot}(t_1) &= E_{cin}(t_2) + E_{pot}(t_2) \\ \frac{m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 &= (Ml + mL)g(1 - \cos(\theta_{max})) \\ v &= \frac{1}{mL} \sqrt{2(J + mL^2)(Ml + mL)g(1 - \cos(\theta_{max}))} \\ &\approx \frac{1}{mL} \sqrt{2JMgh_{max}} & m \ll M \end{aligned}$$

Avec  $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2(\theta/2)$  :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{(J + mL^2)(Ml + mL)g} \\ &\approx \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{J M g l} & m \ll M \end{aligned} \tag{2.4}$$

## D Conservation de l'énergie totale

On peut à présent calculer le transfert de chaleur  $Q$  du projectile au sac de sable lors de l'impact. On écrit la conservation de l'énergie totale lors du transfert d'énergie cinétique au moment de l'impact :

$$Q = E_{cin}(t_0) - E_{cin}(t_1) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 \\ &= \frac{m(J + mL^2) - m^2 L^2}{2(J + mL^2)} v^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{J}{J + mL^2} \right) v^2 \\ &\approx \frac{1}{2} m v^2 & m \ll M \end{aligned} \tag{2.6}$$

La quasi totalité de l'énergie cinétique du projectile est transformée en énergie thermique, une faible partie est transformée en énergie cinétique du sac et du projectile.

## E Condition pour annuler la percussion

Le théorème du moment cinétique et la relation fondamentale de la dynamique permettent de trouver la hauteur d'impact  $h$  qui annule une partie de la percussion sur l'axe (la percussion due à la force centrifuge de mise en rotation du sac de sable ne peut être annulée).

Soit  $\vec{f}$  la force exercée par le projectile sur le sac, le théorème du moment cinétique (2.3) p. 14 se réécrit :

$$\begin{aligned} -h\vec{j} \times f\vec{i} &= \frac{d}{dt} (J\omega + mh^2\omega) \vec{k} \\ h &\approx \frac{J\dot{\omega}}{f} \end{aligned}$$

La percussion sur  $(Oz)$  est nulle si  $f$  sert intégralement à accélérer le sac de sable (et n'est donc pas transmise à l'axe  $(Oz)$ ). La RFD donne :

$$\begin{aligned} f &= \frac{d}{dt}(Ml\omega) \\ &= Ml\dot{\omega} \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$h = \frac{J}{Ml} \quad (2.7)$$

Cette hauteur est particulière. En effet, la période du pendule pesant de moment d'inertie  $J$ , de masse  $M$  et de longueur  $l$  s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{gMl}}$$

Celle du pendule simple de longueur  $h$  s'écrit :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Si on égale ces deux périodes on retrouve (2.7). Il faut donc que le projectile percute le sac de sable à la distance  $h$  de l'axe de rotation, égale à la longueur du pendule simple synchrone avec le pendule balistique. En effet, lorsque le projectile percute le centre de gravité du sac de sable, celui-ci prend un mouvement de translation rectiligne seul. Or il doit aussi avoir un mouvement de rotation. L'impact doit donc se trouver sous le centre de gravité pour correspondre au mouvement naturel du sac de sable autour de l'axe  $(Oz)$ .

En remplaçant  $J$  par  $Lml$  dans (2.4) p. 15, nous obtenons pour la vitesse :

$$v = \frac{2}{mL} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{g(Lml + mL^2)(Ml + mL)}$$

$$v = \frac{2(Ml + mL)}{m} \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) \sqrt{\frac{g}{L}}$$

## Chapitre 2 : Le pendule balistique

En remplaçant  $J$  par  $LMl$  dans (2.6) p. 15, nous avons :

$$Q = \frac{1}{2} m \left( \frac{Ml}{Ml + mL} \right) v^2$$



## Chapitre 3

### LE PROBLÈME DE KEPLER

Il s'agit de déterminer l'équation de l'orbite d'une planète à partir de la mécanique de Newton, en ne considérant que la seule force de gravitation, en négligeant l'interaction gravitationnelle des planètes entre elles, et en supposant les astres ponctuels. Ce problème est aussi connu sous le nom de « problème des deux corps ».

---

#### A Coordonnées polaires

Etant donné que l'on traite ici de la révolution d'une planète autour du Soleil, il est avantageux de passer en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ . Les axes des  $z$  en coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$  et en cylindriques sont supposés confondus. Nous nous intéressons ici aux coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  prises dans le plan  $(x, y)$ .

---

##### A.1 Expression des vecteurs de base de la base polaire orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$

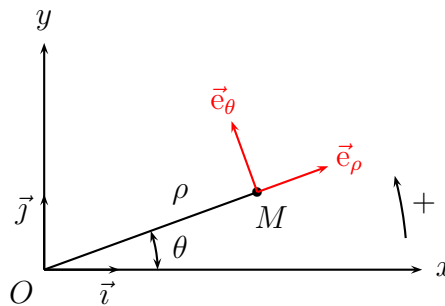


FIG. 3.1 – Vecteurs de la base polaire orthonormée

##### 1) Première méthode

En se servant de la figure 3.1, exprimons les vecteurs unitaires de base  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$  en fonction de ceux de la base rectangulaire normée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases}$$

## 2) Deuxième méthode

Soit  $M$  un point de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  et de coordonnées rectangulaires  $(x, y)$ . Le changement de coordonnées de polaires vers rectangulaires s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rho \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Déterminons les vecteurs unitaires de base  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$  en différentiant le rayon vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  exprimé en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  dans la base rectangulaire normée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ d\vec{r}(\rho, \theta) &= \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right)_\theta d\rho + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right)_\rho d\theta \\ &= [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] d\rho + \rho [-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}] d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r}(\rho, \theta) = \vec{e}_\rho d\rho + \rho \vec{e}_\theta d\theta$$

## A.2 Expression du vecteur position

Cherchons l'expression du vecteur position en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  dans la base polaire orthonormée  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$  :

$$\begin{aligned} \vec{r}(\rho, \theta) &= \rho \cos(\theta)\vec{i} + \rho \sin(\theta)\vec{j} \\ &= \rho [\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}] \\ &= \rho \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

## A.3 Dérivée des vecteurs de base

Nous aurons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{i} - \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \end{cases}$$



#### A.4 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} (\rho \vec{e}_\rho) \\
 &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho
 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (3.1)$$

#### A.5 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps. En coordonnées polaires, dans la base polaire orthonormée, il a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\
 &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \\
 &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho
 \end{aligned}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \quad (3.2)$$

## B Force centrale - Cas général

### B.1 Centre d'inertie

Soient  $m$  et  $M$  les masses de deux astres situés respectivement aux points  $A$  et  $B$ .

#### Définition B.1: Centre d'inertie

Le point  $G$  tel que

$$m \overrightarrow{GA} + M \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

est appelé centre d'inertie, centre de gravité ou centre de masse du système.

Le système binaire formé des deux astres est supposé isolé, son centre d'inertie  $G$  a un mouvement inertiel. On le suppose fixe au centre du référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

### Définition B.2: Référentiel de centre de masse

Le référentiel  $\mathcal{R}$  de centre  $G$  est appelé référentiel de centre de masse.

Notons  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GA}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GB}$  les rayons vecteurs des astres dans  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 &= \vec{0} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m}{M} \vec{r}_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

## B.2 Masse réduite

Déterminons les rayons vecteur des astres en fonction des données du problème, c.-à-d. en fonction du vecteur  $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$  reliant les deux astres :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} \end{aligned}$$

Avec (3.3) p. 22 :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{et} & & \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_1 + \frac{m}{M} \vec{r}_1 & & & &= -\frac{M}{m} \vec{r}_2 - \vec{r}_2 \\ &= \frac{m+M}{M} \vec{r}_1 & & & &= -\frac{m+M}{m} \vec{r}_2 \end{aligned}$$

et l'on a :

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m+M} \vec{r} \quad (3.4a)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{-m}{m+M} \vec{r} \quad (3.4b)$$

Le centre d'inertie se trouve sur le segment de droite  $[AB]$  qui relie les deux astres.

Remarque B.1

Le signe dans les expressions de  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  dépend de la convention choisie pour définir  $\vec{r}$ , c.-à-d.  $\vec{r} = \pm(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ .

## B.3 Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Le système binaire est isolé, la somme des forces se réduit à la seule force d'interaction gravitationnelle entre les deux astres. Écrivons la RFD dans  $\mathcal{R}$  pour chacun de deux sous-systèmes constitués d'un astre. La force est ici extérieure aux sous-systèmes mais intérieure au système binaire :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^{\text{ext}} &= m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} & \text{et} & & \vec{F}_2^{\text{ext}} &= M \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \\ &= \frac{mM}{m+M} \frac{d^2[(m+M)\vec{r}_1/M]}{dt^2} & & & &= \frac{-mM}{m+M} \frac{d^2[(m+M)\vec{r}_2/m]}{dt^2} \end{aligned}$$

Ces deux relations amènent à poser la définition suivante :

**Définition B.3: Masse réduite**

Le rapport ayant pour dimension une masse

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{mM}{m+M}$$

est appelée masse réduite.

Avec cette définition :

$$\vec{F}_1^{\text{ext}} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2^{\text{ext}} = -\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

La loi de l'action-réaction

$$\vec{F}_2^{\text{ext}} = -\vec{F}_1^{\text{ext}}$$

implique que les deux astres sont gouvernés par la même équation :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Cette équation coïncide formellement avec celle d'un point matériel de masse  $\mu$  et de vecteur position  $\vec{r}$ , en mouvement sous l'action de la force extérieure  $\vec{F}^{\text{ext}}$  dirigée vers un point fixe d'un référentiel galiléen. Toute force dirigée vers un point fixe est dite *centrale* :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = F \vec{e}_\rho$$

Nous pouvons à tout moment passer des rayon vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  au rayon vecteur  $\vec{r}$  à condition de passer des masses  $m$  et  $M$  à la masse réduite  $\mu$ , et vice versa. Si la trajectoire est établie pour le rayon vecteur  $\vec{r}$ , les trajectoires  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  seront obtenues grâce aux relations (3.4) p. 22.

Par symétrie du problème et isotropie de l'espace, chaque force attractive exercée par un astre sur l'autre est dirigée suivant la droite passant par les deux astres, vers le centre d'inertie du système. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de centre de masse, ce dernier est un point fixe. Chaque force étant constamment dirigée vers ce centre fixe, le problème est dit à *force centrale*. Dans ce référentiel, les forces n'ont de composante que selon le vecteur  $\vec{e}_\rho$ , et le mouvement est donc plan (aucune force ne permet la sortie de ce plan). En écrivant ceci on fait l'hypothèse implicite que le moment cinétique de chaque astre se conserve, comme nous allons le voir. En utilisant l'accélération en coordonnées polaires (3.2) p. 21, la RFD s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{ext}} &= \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ F \vec{e}_\rho &= \mu \frac{d^2(\rho \vec{e}_\rho)}{dt^2} \\ &= \mu \left( \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_\rho + \mu \left( 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

- la RFD selon  $\vec{e}_\rho$  donne la première relation suivante

$$\begin{aligned} \mu \left( \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \right) &= F \\ \mu \ddot{\rho} &= \mu \rho \dot{\theta}^2 + F \end{aligned} \tag{3.5}$$

où  $\mu \rho \dot{\theta}^2$  est la force centrifuge.

- la RFD selon  $\vec{e}_\theta$  donne la seconde relation :

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} &= 0 \\ 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème B.1: Loi des aires**

La relation

$$\rho^2\dot{\theta} = C$$

est appelée loi des aires.  $C$  est la constante des aires, de dimensions le carré d'une longueur divisé par un temps  $L^2T^{-1}$ .

La loi des aires s'applique à  $\vec{r}$ , donc à chacun des astres du système binaire. Elle ne dépend pas du modèle de force, elle est donc valable pour toute force centrale et pas seulement pour la force gravitationnelle. Nous verrons que selon la *première loi de Kepler*, l'orbite des planètes est une ellipse dont l'un des foyer est le centre de gravité  $G$  du système planète-Soleil. La constante des aires est alors simplement le double de l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur de la planète, ce qui justifie son nom.

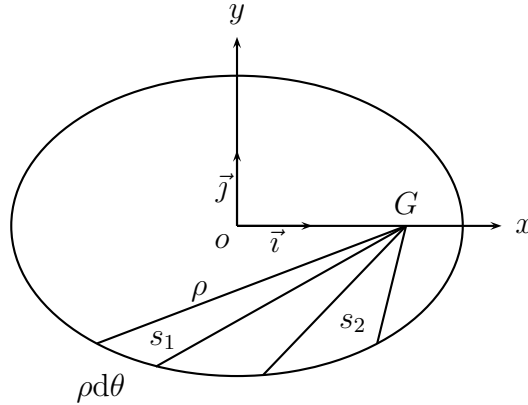


FIG. 3.2 – Aires balayées en des temps égaux

Soit  $d\mathcal{A}$  l'aire infinitésimale balayée par le rayon vecteur  $\rho$  d'un astre en un intervalle de temps infinitésimal  $dt$ . Cette aire est égale au demi-rectangle de côtés  $\rho$  et  $\rho d\theta$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \rho \times \rho d\theta \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} \\ d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C dt \\ \int_0^s d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} C \int_0^\tau dt \\ s &= \frac{1}{2} C \tau \end{aligned}$$

Les aires  $s_1$  et  $s_2$  de la figure 3.2 balayées en des temps égaux sont égales. Nous énonçons la

### Axiome B.1: Deuxième loi de Kepler

*Le rayon vecteur d'un astre balaye des surfaces d'aires égales en des temps égaux.*

En une période  $T$ , le rayon vecteur parcourt la surface totale de l'ellipse, d'aire  $\pi ab$  :

$$\int_0^{\pi ab} dA = \frac{1}{2} C \int_0^T dt$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi ab}{T}} \quad (3.6)$$

En introduisant la pulsation  $\omega$ , telle que  $\omega = 2\pi/T$ ,

$$C = \omega ab$$

### B.4 Conservation du moment cinétique

En utilisant la vitesse en coordonnées polaires (3.1) p. 21, le vecteur moment cinétique  $\vec{L}$  de la masse réduite  $\mu$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \mu \vec{v} \\ &= \rho \vec{e}_\rho \times \mu (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \mu \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mu \rho^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces extérieures :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \rho \vec{e}_\rho \times F \vec{e}_\rho \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Le moment cinétique est donc constant :

$$\vec{L} = \vec{C}^{ste}$$

$$\boxed{L = \mu \rho^2 \dot{\theta}} \quad (3.7)$$

Notons également la relation

$$L = \mu C$$

La loi des aires et la deuxième loi de Kepler ne sont autre que la conservation du module du moment cinétique lorsque la force est centrale. Le théorème de conservation du moment cinétique est plus général et plus puissant puisqu'il implique de plus que la trajectoire de chaque astre soit une courbe plane, dont le plan orbital est perpendiculaire au vecteur moment cinétique constant de l'astre, ce plan contenant les vecteurs  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$ .

Servons-nous du module du moment cinétique pour réécrire la RFD selon  $\vec{e}_\rho$  (3.5) p. 23 :

$$\mu \ddot{\rho} = \frac{L^2}{\mu \rho^3} + F$$

### B.5 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique

Supposons le modèle de force  $F$  conservatif, il dérive par rapport à  $\rho$  d'une énergie potentielle  $E_p$ . Par symétrie du problème, l'énergie potentielle ne dépend explicitement que du rayon vecteur reliant les deux astres. La RFD selon  $\vec{e}_\rho$  s'écrit :

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\mu\rho^3} - \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \quad (3.8)$$

La seule force présente étant conservative, l'énergie mécanique  $E$  se conserve. Le carré de la vitesse (3.1) p. 21 permet d'écrire l'énergie cinétique de la masse réduite  $\mu$  :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \mu v^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

On en déduit l'énergie mécanique de la masse  $\mu$  :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + E_p(\rho) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) \end{aligned} \quad (3.9)$$

#### Remarque B.2

Cette équation différentielle est la relation (3.8) intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, dérivons (3.9) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \mu\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{L^2\dot{\rho}}{\mu\rho^3} + \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{dE}{dt} \\ \mu\ddot{\rho} - \frac{L^2}{\mu\rho^3} + \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} &= 0 \end{aligned}$$

### B.6 Intégration de l'équation différentielle du mouvement

La relation (3.9) est une intégrale première de la RFD selon  $\vec{e}_\rho$  (3.8). Elle s'intègre par séparation des variables et donne la solution générale au problème sous la forme  $t = t(\rho)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 &= E - E_p(\rho) - \frac{1}{2} \mu \rho^2 \dot{\theta}^2 \\ \frac{d\rho}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - E_p(\rho)] - \rho^2 \dot{\theta}^2} \end{aligned}$$

Avec le module du moment cinétique, (3.7) p. 25 :

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2 \rho^2}} \quad (3.10)$$

a) lorsque  $\rho$  est croissant,  $\rho(t_0) < \rho(t)$  et  $d\rho/dt \geq 0$ . Or  $dt > 0$  donc  $d\rho \geq 0$ .

$$\begin{aligned} d\rho &= \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}} dt \\ t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

b) lorsque  $\rho$  est décroissant,  $\rho(t_0) > \rho(t)$  et  $d\rho/dt \leq 0$ . Or  $dt > 0$  donc  $d\rho \leq 0$ .

$$\begin{aligned} d\rho &= -\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}} dt \\ t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - E_p(\rho)] - \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}}} \end{aligned}$$

Cette relation donne de façon implicite le rayon vecteur en fonction du temps. Pour obtenir l'équation de la trajectoire  $\theta = \theta(\rho)$ , reprenons le module du moment cinétique, (3.7) p. 25 :

$$d\theta = \frac{L}{\mu\rho^2} dt$$

On pose  $\theta(t = t_0) = \theta_0$ .

a) lorsque  $\rho$  est croissant, en remplaçant  $dt$  par  $d\rho$  grâce à (3.10) :

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - L^2/\rho^2}} \quad (3.12)$$

b) lorsque  $\rho$  est décroissant

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{-\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - L^2/\rho^2}}$$

## B.7 Potentiel effectif

La RFD selon  $\vec{e}_\rho$  (3.8) p. 26 s'écrit :

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) \right]$$

Le mouvement radial est similaire à un mouvement à une dimension (avec  $\rho > 0$ ) dans un potentiel dit effectif (ou efficace).

### Définition B.4: Potentiel effectif

On appelle potentiel effectif, le potentiel :

$$V_{eff}(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho)$$

où  $L^2/(2\mu\rho^2)$  est appelé *énergie centrifuge*. La RFD selon de ce mouvement linéaire s'écrit

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{eff}(\rho)}{d\rho}$$

et l'énergie mécanique du mouvement à une dimension a pour expression :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_{eff}$$

## B.8 Étude de la trajectoire

Lorsque les limites du domaine du mouvement sont atteintes, l'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie potentielle effective est donc maximale. Toute l'énergie mécanique du mouvement linéaire est sous forme potentielle :

$$\frac{L^2}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) = E$$

La vitesse radiale  $\dot{\rho}$  est alors nulle mais pas la vitesse angulaire  $\rho\dot{\theta}$ , et la distance radiale  $\rho$  est extrémale. En ces points de rebroussement appelés apsides, périapside pour le point de la trajectoire le plus proche de l'autre astre, et apoapside pour celui le plus loin, la fonction  $\rho(t)$  de croissante devient décroissante ou inversement.

Si le domaine de variation de  $\rho$  n'a qu'une limite inférieure,  $\rho \geq \rho_{min}$ , la trajectoire commence à l'infini et finit à l'infini. Si le domaine admet deux limites,  $\rho_{max} \geq \rho \geq \rho_{min}$ , le mouvement est fini et compris entre les cercles  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . Cependant cela ne signifie pas que la trajectoire est fermée, elle ne repasse pas forcément exactement par les mêmes points avec le même vecteur vitesse au bout d'un temps fini. Entre deux passages par  $\rho_{max}$  en passant par  $\rho_{min}$ , le rayon vecteur a tourné d'un angle

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - L^2/\rho^2}}$$

Pour que la trajectoire soit fermée cet angle doit être une fraction rationnelle de  $2\pi$ , de la forme :

$$\Delta\theta = \frac{m}{n} 2\pi$$

avec  $m$  et  $n$  entiers. Ainsi après  $n$  période de temps (par exemple  $n$  passages en  $\rho_{max}$ ), l'angle aura tourné de  $m$  fois  $2\pi$ , et la trajectoire se refermera. En général, pour une forme quelconque de l'énergie potentielle  $E_p$ , l'angle n'est pas une fraction rationnelle de  $2\pi$  et la trajectoire n'est pas fermée. Elle remplit tout l'anneau compris entre  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$ . Il n'existe que deux types de champs centraux pour lesquels les trajectoires sont fermées, les champs en  $1/\rho$  et en  $\rho^2$ . En général donc, la trajectoire a la forme suivante



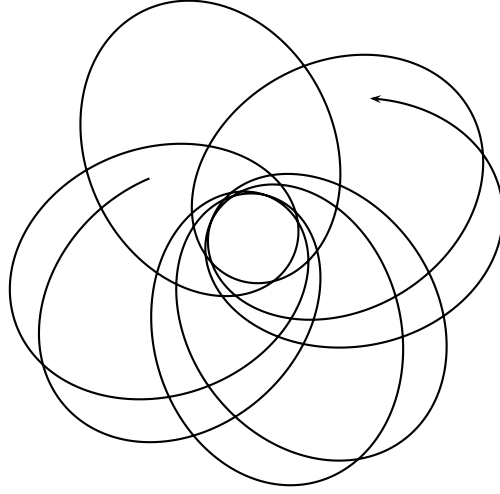


FIG. 3.3 – Trajectoire dans un champ central quelconque

Le champ en  $1/\rho$  est celui de la gravitation non relativiste et celui en  $\rho^2$  est celui de l'oscillateur spatial.

Si l'on prend  $\theta = \theta_0$  aux apsides, les segments de trajectoire adjacents de chaque côté de ces points ne diffèrent que par le signe de  $\theta$  :

$$\theta_{min} - \theta_{max} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - L^2/\rho^2}}$$

et

$$\begin{aligned} \theta_{max} - \theta_{min} &= \int_{\rho_{max}}^{\rho_{min}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{-\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - L^2/\rho^2}} \\ \theta_{min} - \theta_{max} &= - \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu[E - E_p(\rho)] - L^2/\rho^2}} \end{aligned}$$

La trajectoire est donc symétrique de part et d'autre de  $\theta = \theta_0$ . Par conséquent toute la trajectoire est symétrique par répétition de l'arc de trajectoire de  $\rho_{min}$  à  $\rho_{max}$ , puis de  $\rho_{max}$  à  $\rho_{min}$ , puis de  $\rho_{min}$  à  $\rho_{max}$ , etc. Cela concerne également les trajectoires infinies formées de deux branches symétriques, allant de l'infini à  $\rho_{min}$  puis de  $\rho_{min}$  à l'infini.

### B.9 Cas où le rayon vecteur tend vers zéro

Dans l'équation de conservation de l'énergie mécanique (3.9) p. 26, l'énergie cinétique étant toujours positive :

$$\begin{aligned} 0 &< E - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - E_p(\rho) \\ \rho^2 E_p(\rho) &< \rho^2 E - \frac{L^2}{2\mu} \end{aligned}$$

Pour  $L \neq 0$ , c.-à-d. pour une trajectoire qui n'est pas rectiligne dirigée vers le centre de gravité commun, cette dernière relation est toujours vraie, en particulier pour un rayon vecteur tendant

vers zéro. L'énergie mécanique étant constante, le terme associé tend vers zéro :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^2 E_p(\rho)] < \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 E - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{L^2}{2\mu}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^2 E_p(\rho)] < -\frac{L^2}{2\mu}$$

Le terme de droite est constant et négatif, par conséquent celui de gauche ne peut tendre vers zéro. Donc  $\rho$  ne peut tendre vers zéro que si  $E_p(\rho)$  tend vers  $-\infty$  plus vite de  $\rho^2$  vers zéro. Deux possibilités :

- soit  $E_p(\rho) = -\alpha/\rho^2$  avec  $\alpha > L^2/(2\mu)$
- soit  $E_p(\rho) = -A/r^n$  avec  $A$  une constante positive quelconque et  $n > 2$

En général donc, l'existence d'une énergie centrifuge empêche les corps de rejoindre le centre de gravité commun.

## C Force de gravitation

### C.1 Relation fondamentale de la dynamique

Reprenons la RFD selon le rayon vecteur (3.5) p. 23 et la loi des aires (B.1) p. 24 valables pour tout modèle de force centrale. Le modèle de Hooke pour la force de gravitation est en raison inverse du carré de la distance des deux astres (qui varie dans le temps). Notons  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation de dimensions  $L^3T^{-2}M^{-1}$ . La RFD donne les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -\mathcal{G} \frac{mM}{\rho^2} \\ \rho^2\dot{\theta} = C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho^3\ddot{\rho} - \rho^4\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}M\rho \\ \rho^4\dot{\theta}^2 = C^2 \end{cases}$$

$$\rho^3\ddot{\rho} + \mathcal{G}M\rho - C^2 = 0$$

En raisonnant sur l'énergie plutôt que sur les forces, nous obtiendrons la même équation différentielle intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, la RFD est équivalente à la conservation de l'énergie mécanique lorsque les forces dérivent d'un potentiel. Le théorème de l'énergie cinétique permet de travailler sur la vitesse par l'intermédiaire de l'énergie cinétique, plutôt que sur l'accélération.

## C.2 Force conservative - Conservation de l'énergie mécanique

Cherchons le potentiel de la force gravitationnelle exercée sur un astre, autrement dit l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(\rho)$  de cet astre dans le champ de gravitation de l'autre astre :

$$\begin{aligned} -\mathcal{G} \frac{mM}{\rho^2} \vec{e}_\rho &= -\vec{\text{grad}} E_{pp}(\rho) \\ &= -\frac{\partial E_{pp}(\rho)}{\partial \rho} \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

On pose  $\alpha = \mathcal{G}mM$  constante toujours positive :

$$\frac{\alpha}{\rho^2} = \frac{dE_{pp}(\rho)}{d\rho}$$

Seule une différence d'énergie potentielle intervient si bien qu'elle est toujours définie à une constante additive près. Ajuster la valeur de cette constante nous permet de définir le zéro de l'énergie potentielle où cela nous convient le mieux.

- en fixant les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} dE_{pp} &= \frac{\alpha}{\rho^2} d\rho \\ \int_{\rho=+\infty}^{\rho} dE_{pp} &= \alpha \int_{\rho=+\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} \\ [E_{pp}]_{\rho=+\infty}^{\rho} &= -\alpha \left[ \frac{1}{\rho} \right]_{\rho=+\infty}^{\rho} \\ E_{pp}(\rho) &= -\frac{\alpha}{\rho} \end{aligned}$$

- en raisonnant sur la constante d'intégration :

$$\begin{aligned} \int dE_{pp} &= \alpha \int \frac{d\rho}{\rho^2} \\ E_{pp} &= -\frac{\alpha}{\rho} + c^{ste} \end{aligned}$$

Prendre une constante nulle revient à poser  $E_{pp} = 0$  en  $\rho = +\infty$ .

Remarque C.1

Le potentiel effectif a pour expression

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2(m)}{2m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$$

Avec ce modèle d'énergie potentielle, le cas général (3.9) p. 26 devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} &= E \\ \mu^2\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2\mu\alpha}{\rho} &= 2E\mu \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'après (3.11) p. 27, l'équation  $t = t(\rho)$  a pour expression :

$$t - t_0 = \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{\mu^2 \rho^2}}}$$

D'après (3.12) p. 27, l'équation du mouvement  $\rho = \rho(\theta)$  a pour expression :

$$\theta - \theta_0 = \int_{\rho(\theta_0)}^{\rho(\theta)} \frac{\pm \frac{L}{\rho^2} d\rho}{\sqrt{2\mu \left( E + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{\rho^2}}}$$

Nous pouvons chercher à résoudre cette intégrale ou travailler directement sur l'équation différentielle.

### C.3 Intégration de l'équation différentielle du mouvement

Pour intégrer l'équation différentielle et obtenir l'équation de la trajectoire de la forme  $\rho = \rho(\theta)$ , nous supprimons le temps grâce à (3.7) p. 25 :

$$\begin{aligned} L &= \mu \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \\ dt &= \frac{\mu \rho^2 d\theta}{L} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Le premier terme de l'équation différentielle (3.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 &= \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{L^2}{\mu^2} \left( \frac{d\rho}{\rho^2 d\theta} \right)^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d\rho^{-1}}{d\theta} = -\rho^{-2} \frac{d\rho}{d\theta}$$

donc,

$$\mu^2 \dot{\rho}^2 = L^2 \left( \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \right)^2$$

L'équation différentielle (3.13) p. 31 devient :

$$\begin{aligned} L^2 \left( \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{\rho^2} - \frac{2\mu\alpha}{\rho} &= 2E\mu \\ L^2 \left( \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{L}{\rho} - \frac{\mu\alpha}{L} \right)^2 - \left( \frac{\mu\alpha}{L} \right)^2 &= 2E\mu \end{aligned}$$

Nous n'avons plus que des termes en  $\rho^{-1}$ . Effectuons un premier changement de variable

$$r = L\rho^{-1}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \left( r - \frac{\mu\alpha}{L} \right)^2 = 2E\mu + \left( \frac{\mu\alpha}{L} \right)^2$$

### Chapitre 3 : Le problème de Kepler

Posons la constante  $A = 2E\mu + \left(\frac{\mu\alpha}{L}\right)^2$  et effectuons un deuxième changement de variable :

$$r = r - \frac{\mu\alpha}{L}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = A$$
$$\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\right)\right]^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{A}}\right)^2 = 1$$

Effectuons un troisième et dernier changement de variable

$$r = \frac{r}{\sqrt{A}}$$

L'équation différentielle devient :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = 1$$

 (3.15)

1) Première méthode de résolution

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm (1 - r^2)^{1/2}$$
$$d\theta = \pm \frac{dr}{(1 - r^2)^{1/2}}$$

Si le signe est positif cette équation s'intègre en arcocinus plus un angle constant  $\phi$  :

$$\theta = \arccos(r) + \phi$$
$$r = \cos(\theta - \phi)$$

Si le signe est négatif cette équation s'intègre en arcsinus plus un angle constant  $\beta$  :

$$\theta = \arcsin(r) + \beta$$
$$r = \sin(\theta - \beta)$$

Pour  $\beta = \phi - \pi/2$ ,

$$r = \sin(\theta - \phi + \pi/2)$$
$$= \cos(\theta - \phi)$$

Les solutions étant identiques, on conserve  $r = \cos(\theta - \phi)$ .

2) Deuxième méthode de résolution

Dérivons par rapport à  $\theta$  :

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \right] = 0$$
$$2 \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2r}{d\theta^2} + 2r \frac{dr}{d\theta} = 0$$
$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + r = 0$$
$$r = \cos(\theta - \phi)$$

Revenons à la variable  $\rho$  :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \\ r &= \frac{\mu\alpha}{L} + \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \\ \frac{L}{\rho} &= \frac{\mu\alpha}{L} \left[ 1 + \frac{L}{\mu\alpha} \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \right] \\ \rho &= \frac{L^2}{\mu\alpha} \left[ 1 + \frac{L}{\mu\alpha} \sqrt{A} \cos(\theta - \phi) \right]^{-1} \end{aligned}$$

On pose la constante

$$p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \quad (3.16)$$

et l'on reconnaît une section conique (section d'un cône par un plan) de *paramètre*  $p$ , d'équation polaire ayant son foyer à l'origine des coordonnées

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \quad (3.17)$$

et d'*excentricité*

$$e = \frac{L}{\mu\alpha} \sqrt{2E\mu + \left(\frac{\mu\alpha}{L}\right)^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$$

## D Étude de la trajectoire

### D.1 L'excentricité $e$

L'excentricité est sans dimension. Elle est positive ou nulle et définit la forme de l'orbite :

- Si  $E = -\mu\alpha^2/(2L^2)$  alors  $e = 0$  et  $\rho = p$ , l'orbite est un cercle, la trajectoire est fermée. Nous voyons que  $p$  est le paramètre de taille de l'orbite
- Si  $-\mu\alpha^2/(2L^2) < E < 0$  alors  $0 < e < 1$ , l'orbite est une ellipse, la trajectoire est fermée
- Si  $E = 0$  alors  $e = 1$ , la trajectoire est une parabole
- Si  $E > 0$  alors  $e > 1$ , la trajectoire est une hyperbole

Remarque D.1

Pour un champ de répulsion la trajectoire est toujours hyperbolique.

Notons également la relation

$$e^2 - 1 = \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}$$

$$1 - e^2 = \frac{-2EL^2}{\mu\alpha^2}$$

et puisque l'énergie mécanique est strictement négative pour une orbite elliptique :

$$1 - e^2 = \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2} \quad (3.18)$$

## D.2 L'ellipse

Pour  $0 < e < 1$  (donc pour  $E < 0$ ) et pour  $\phi = 0$ , (3.17) p. 34 est une ellipse centrée sur  $o(-c, 0)$  dans le repère  $(F, x, y)$ , où  $F$  et  $F'$  sont les foyers de l'ellipse.

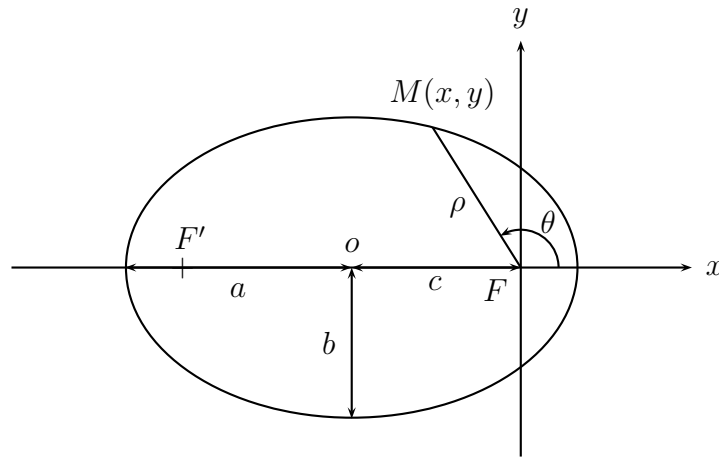


FIG. 3.4 – Orbite elliptique

L'angle  $\theta$  est appelé *anomalie vraie*. Nous pouvons énoncer la

### Axiome D.1: Première loi de Kepler

*Les planètes décrivent des ellipses dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe l'un des foyers.*

#### Remarque D.2

Le Soleil décrit également une ellipse dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe l'un des foyers. À l'exception de Jupiter le centre de gravité du système planète-Soleil est dans le Soleil.

Le couple  $(p, e)$  définit une ellipse de manière unique, sa taille et sa forme. En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une ellipse dont le grand axe est sur l'axe des abscisses, s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le couple formé du demi-grand axe  $a$  et du demi-petit axe  $b$  permet donc aussi de définir parfaitement une ellipse. En étudiant le passage des coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  vers les coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  de l'équation d'une même ellipse, nous obtenons les relations suivantes :

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (3.19a)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3.19b)$$

### D.3 Orientation de l'ellipse

À partir de l'équation polaire d'une conique (3.17) p. 34, pour  $\theta = \phi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \theta - \phi &= 2k\pi \\ \cos(\theta - \phi) &= \cos(2k\pi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 + e} \\ &= \rho_{min} \end{aligned}$$

Nous sommes au *périhélie*, point de l'orbite le plus proche du Soleil. Le grand axe de l'ellipse fait donc un angle  $\phi$  avec l'axe des abscisses.

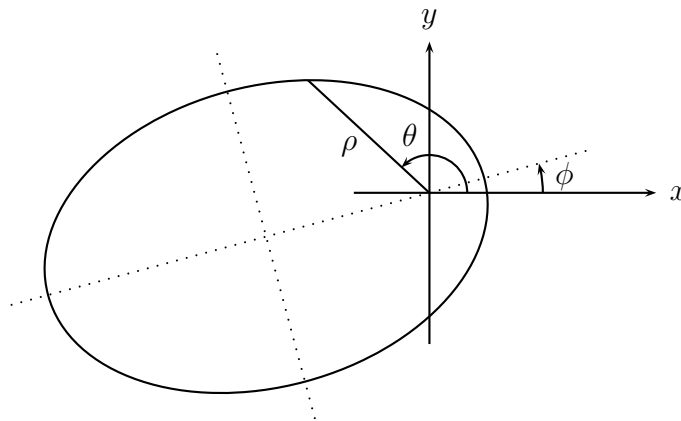


FIG. 3.5 – Orientation de l'ellipse



Pour  $\theta = \phi + (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  nous avons :

$$\begin{aligned}\theta - \phi &= \pi + 2k\pi \\ \cos(\theta - \phi) &= -1 \\ \rho &= \frac{p}{1 - e} \\ &= \rho_{\max}\end{aligned}$$

Nous sommes à l'*aphélie*, point de l'orbite le plus éloigné du Soleil.

L'orbite de la Terre autour du Soleil est dans un plan appelé *plan de l'écliptique*, qui contient à chaque instant la Terre et le Soleil. La révolution terrestre donne lieu au mouvement apparent annuel du Soleil à travers les constellations du zodiaque. Le plan de l'écliptique fait un angle de  $23^\circ 26'$  avec le plan de l'équateur terrestre, et leur intersection forme une droite dans l'espace. Chaque année vers le 21 septembre, le Soleil passe à travers le plan de l'équateur terrestre en allant du Nord au Sud. On pose  $\theta = 0^\circ$  à ce moment précis appelé *équinoxe d'automne* (EA), en retour cela fixe la valeur  $\phi \approx 103^\circ$ . Sur la figure 3.6 l'axe des abscisses est confondu avec la droite d'intersection des deux plans. Dans l'hémisphère Nord, le Soleil de midi monte de moins en moins haut dans le ciel et en  $\theta = \pi/2$  vers le 21 décembre il atteint son point le plus bas dans le ciel, au *solstice d'hiver* (SH). Le Soleil de midi remonte alors dans le ciel et en  $\theta = \pi$  vers le 21 mars il passe à nouveau à travers le plan de l'équateur terrestre, cette fois en allant du Sud au Nord, à l'*équinoxe de printemps* (EP). La droite passant par les équinoxes est donc la droite d'intersection des deux plans. Le Soleil de midi continue de monter et en  $\theta = 3\pi/2$  vers le 21 juin il atteint son point le plus haut dans le ciel, au *solstice d'été* (SE).

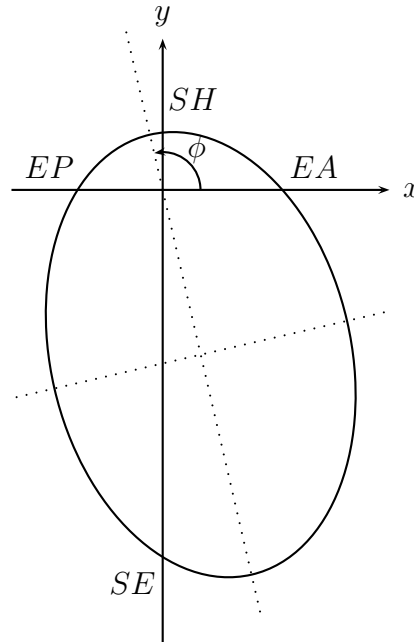


FIG. 3.6 – Orientation de l'ellipse terrestre

#### D.4 Demi-grand axe $a$

Soit  $2a$  la longueur du grand axe de l'ellipse :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\rho_{min} + \rho_{max}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) \\ &= \frac{p}{1-e^2} \end{aligned}$$

Avec les expressions du paramètre (3.16) p. 34 et de l'excentricité (3.18) p. 35 :

$$\begin{aligned} a &= \frac{L^2}{\mu\alpha} \times \frac{\mu\alpha^2}{2|E|L^2} \\ &= \frac{\alpha}{2|E|} \end{aligned} \tag{3.20}$$

On note également la relation

$$p = a(1 - e^2) \tag{3.21}$$

Exprimons le rayon minimum en fonction du demi-grand axe :

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= \frac{p}{1+e} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1+e} \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$

De même pour le rayon maximum :

$$\begin{aligned} \rho_{max} &= \frac{p}{1-e} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1-e} \\ &= a(1+e) \end{aligned}$$

---

#### D.5 Demi-petit axe $b$

En reprenant l'excentricité en fonction de  $a$  et  $b$ , (3.19b) p. 36, et l'expression de l'excentricité (3.18) p. 35

$$\begin{aligned} e^2 - 1 &= -\frac{b^2}{a^2} \\ b^2 &= a^2 (1 - e^2) \\ &= a^2 \times \frac{2|E|L^2}{\mu\alpha^2} \\ &= \frac{aL^2}{\mu\alpha} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Avec l'expression du demi-grand axe (3.20) p. 38 :

$$b^2 = \frac{\alpha}{2|E|} \times \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

$$b = \frac{L}{\sqrt{2|E|\mu}}$$

## D.6 Période de révolution $T$

À partir du carré de (3.6) p. 25 et de  $b$  en fonction de  $a$ , (3.22) p. 38, nous évaluons la période de révolution en fonction du demi-grand axe  $a$  :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 a^3 L^2 \mu^2}{L^2 \mu \alpha}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{\alpha} \quad (3.23)$$

Ceci constitue la :

### Axiome D.2: Troisième loi de Kepler

*Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.*

Nous avons aussi

$$T = \frac{2\pi a b \mu}{L}$$

$$= \frac{2\pi \mu}{L} \times \frac{\alpha}{2|E|} \times \frac{L}{\sqrt{2|E|\mu}}$$

$$= \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$$

La période ne dépend donc que de l'énergie lorsque les masses sont fixées.

## E Equations paramétriques

### E.1 Angle en fonction du temps

Les équations paramétriques du temps vont nous permettre de connaître la position de la planète en fonction du temps.

Cherchons tout d'abord  $\theta = \theta(t)$ . En utilisant la loi des aires (3.14) p. 32 et l'équation de l'orbite (3.17) p. 34 :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\rho^2}{C} d\theta \\ dt &= \frac{p^2 d\theta}{C[1 + e \cos(\theta - \phi)]^2} \\ \int_0^\tau dt &= \frac{p^2}{C} \int_\phi^\vartheta \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \phi)]^2} \end{aligned}$$

où l'on a pris comme condition initiale que la planète est au périhélie, c.-à-d.  $\theta = \phi$  à  $t = 0$ . Le membre de droite s'intègre en termes de fonctions élémentaires. Le résultat est trouvé grâce au logiciel de calcul formel Maxima. Pour une trajectoire elliptique,  $0 < e < 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \left\{ \frac{(1 - e) \sin(\vartheta - \phi)}{\sqrt{1 - e^2} [\cos(\vartheta - \phi) + 1]} \right\} \\ &\quad - \frac{2e \sin(\vartheta - \phi)}{\frac{(e^3 - e^2 - e + 1) \sin^2(\vartheta - \phi)}{[\cos(\vartheta - \phi) + 1]} - (e^3 + e^2 - e - 1) [\cos(\vartheta - \phi) + 1]} \end{aligned}$$

Cette relation est trop complexe pour que son inversion  $\theta = \theta(t)$ , ne soit possible analytiquement.

## E.2 Rayon en fonction du temps

D'après (3.11) p. 27, l'équation  $t = t(\rho)$  a pour expression :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{\alpha}{\rho} \right) - \frac{L^2}{\mu^2 \rho^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{E\rho^2 + \alpha\rho - \frac{2L^2}{\mu}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha\rho}{|E|} - \frac{L^2}{2\mu|E|}}} \end{aligned}$$

car  $E$  étant négative,  $E/|E| = -1$ . Remplaçons les constantes  $E$  et  $L$  par les constantes  $a$  et  $e$ . À partir des expressions du paramètre (3.16) p. 34 et (3.21) p. 38 :

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{\mu\alpha} &= p \\ L^2 &= \mu\alpha a (1 - e^2) \end{aligned}$$

Avec (3.20) p. 38 :

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{\alpha}{2a} \\ \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\frac{L^2}{2\mu|E|} &= \frac{\mu\alpha a(1-e^2)2a}{2\mu\alpha} \\ &= a^2(1-e^2)\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1-e^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{\pm \rho d\rho}{\sqrt{a^2e^2 - (a-\rho)^2}}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Nous avons vu au § D.4 p. 38 que le rayon vecteur varie entre  $a - ae$  et  $a + ae$ . Cela suggère d'effectuer le changement de variable :

$$\rho = a - ae \cos(\psi), \quad \psi \in [0, \pi] \quad (3.25)$$

L'angle  $\psi$ , appelé *anomalie excentrique* remplace le rayon vecteur. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\psi} &= ae \sin(\psi) \\ d\rho &= ae \sin(\psi) d\psi\end{aligned}$$

On suppose de nouveau qu'à l'instant initial la planète est au périhélie, donc à l'instant initial  $\rho = \rho_{min} \Leftrightarrow \psi = 0$  et  $\theta = \phi$ .

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_0^\psi \frac{(a - ae \cos(\psi)) ae \sin(\psi)}{\sqrt{a^2e^2 - a^2e^2 \cos^2(\psi)}} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{\alpha}} \int_0^\psi \frac{(a - ae \cos(\psi)) ae \sin(\psi)}{ae \sin(\psi)} d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} \int_0^\psi (1 - e \cos(\psi)) d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} [\psi - e \sin(\psi)]_0^\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\psi - e \sin(\psi))\end{aligned}\quad (3.26)$$

La planète effectue une demi-période  $T/2$  quand  $\rho$  varie de  $\rho_{min}$  à  $\rho_{max}$ , c.-à-d. quand  $\psi$  varie de 0 à  $\pi$  :

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} (\pi - e \sin(\pi)) \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\end{aligned}$$

On retrouve bien la période de révolution (3.23) p. 39.

En introduisant la période  $T$  puis la pulsation  $\omega$  dans (3.26), la solution de l'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \frac{T}{2\pi} (\psi - e \sin(\psi)) \\ \omega(t - t_0) &= \psi - e \sin(\psi)\end{aligned}\quad (3.27)$$

appelée *équation de Kepler*. L'angle  $\omega(t - t_0)$  s'appelle *anomalie moyenne*.

Revenons à la variable  $\rho$  en inversant le changement de variable (3.25) p. 41. Dans la pratique cela n'est jamais fait, nous allons voir pourquoi.

$$\begin{aligned}\rho &= a - ae \cos(\psi) \\ \frac{a - \rho}{ae} &= \cos(\psi) \\ \psi &= \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\omega(t - t_0) = \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right) - e \sin \arccos\left(\frac{a - \rho}{ae}\right) \quad (3.28)$$

On fixe  $\rho$  pour obtenir  $t - t_0$ . Pour la détermination de l'angle  $\theta$  à partir d'un rayon  $\rho$  fixé, nous utilisons l'équation de l'orbite (3.17) p. 34 :

$$\begin{aligned}\rho + \rho e \cos(\theta - \phi) &= p \\ \cos(\theta - \phi) &= \frac{p - \rho}{\rho e} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{p - \rho}{\rho e}\right) + \phi\end{aligned}$$

Cette méthode n'est pas optimale pour un calcul sur ordinateur, avec un sinus d'arccosinus dans l'expression (3.28). Il est préférable de fixer  $\psi$  pour trouver la durée  $t - t_0$  grâce à l'équation de Kepler (3.27), puis de trouver la distance au Soleil  $\rho$  en utilisant le changement de variable (3.25) p. 41. Enfin, nous pouvons trouver la valeur correspondante de l'angle  $\theta$  en utilisant l'équation de l'orbite (3.17) p. 34 et le changement de variable (3.25) qui donne chacun le rayon  $\rho$  :

$$\begin{aligned}a - ae \cos(\psi) &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \phi)} \\ 1 + e \cos(\theta - \phi) &= \frac{a(1 - e^2)}{a(1 - e \cos(\psi))} \\ e \cos(\theta - \phi) &= \frac{1 - e^2 - (1 - e \cos(\psi))}{1 - e \cos(\psi)} \\ \cos(\theta - \phi) &= \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)}\right) + \phi\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser une forme alternative pour exprimer  $\theta$  en fonction de  $\psi$  :

$$\begin{aligned}1 - \cos(\theta - \phi) &= 1 - \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ 2 \sin^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) &= \frac{1 - e \cos(\psi) - \cos(\psi) + e}{1 - e \cos(\psi)} \\ &= \frac{(1 + e)(1 - \cos(\psi))}{1 - e \cos(\psi)}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\theta - \phi) &= 1 + \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ 2 \cos^2 \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right) &= \frac{1 - e \cos(\psi) + \cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \\ &= \frac{(1 - e)(1 + \cos(\psi))}{1 - e \cos(\psi)} \end{aligned}$$

en faisant le rapport :

$$\begin{aligned} \tan^2 \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right) &= \frac{(1 + e)(1 - \cos(\psi))}{(1 - e)(1 + \cos(\psi))} \\ \tan \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right) &= \sqrt{\frac{(1 + e)}{(1 - e)}} \tan \left( \frac{\psi}{2} \right) \\ \theta &= 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \left( \frac{\psi}{2} \right) \right] + \phi \end{aligned}$$





## Chapitre 4

### LE TENSEUR D'INERTIE

Le tenseur d'inertie calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie d'un solide est une caractéristique intrinsèque de ce solide. Il apparaît naturellement dans l'expression du moment d'inertie (répartition de la masse autour d'un axe de rotation) qui est nécessaire pour le calcul du moment cinétique d'un solide, et de son énergie cinétique de rotation.

---

#### A Moment d'inertie

Soit un solide  $S$  et soit  $\Delta$  un axe quelconque ne passant pas nécessairement par  $S$ , de direction fixe dans le repère  $\mathcal{R}$ .

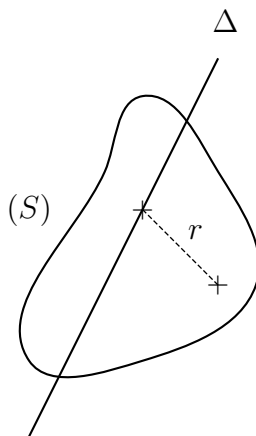


FIG. 4.1 – Solide et axe de rotation quelconques

Le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$  est un scalaire qui caractérise l'inertie en rotation du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ .

### Définition A.1: Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe  $\Delta$ , est la somme des masses de ce système, pondérées par leurs distances à l'axe au carré :

$$I_{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2$$

Pour un système continu :

### Définition A.2: Moment d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$ , d'un solide  $S$  de volume  $V$  et de masse volumique  $\rho$ , a pour expression :

$$I_{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V \rho r^2 d^3V$$

Le moment d'inertie est fonction de  $r^2$ , il dépend donc du choix de l'axe  $\Delta$ , mais pas du choix du repère  $\mathcal{R}$ , car seule la distance à l'axe intervient.

#### Remarque A.1

Lorsque le solide est homogène, sa densité est constante dans l'espace et l'on peut sortir  $\rho$  de l'intégrale de volume.

## B Tenseur d'inertie

Cherchons l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque  $\Delta$ , en fonction du tenseur d'inertie. Considérons un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  dont le centre  $O$  est sur l'axe  $\Delta$ . Soit un élément de volume du solide  $S$ , de masse  $dm$ , situé au point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM}(x_1, x_2, x_3)$ , et soit  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  un vecteur unitaire porté par l'axe  $\Delta$ . On appelle  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur l'axe  $\Delta$ , tel que  $r = MH$ .

En appliquant le théorème de pythagore dans le triangle  $OMH$  rectangle en  $H$  :

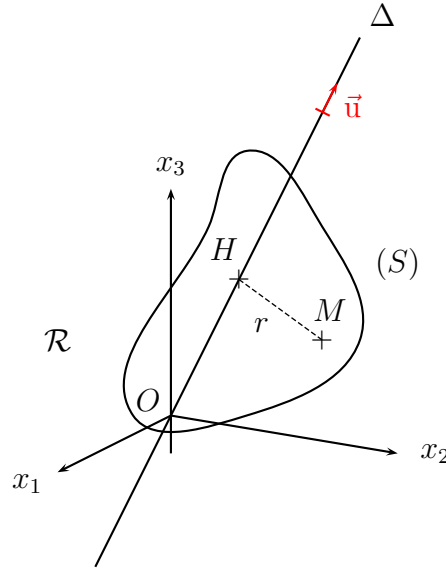
$$\begin{aligned} MH^2 &= OM^2 - OH^2 \\ &= OM^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u})^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3)^2 \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{u}$  étant unitaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} MH^2 &= [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] - (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2 \\ &= [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \\ &\quad - [u_1^2 x_1^2 + u_2^2 x_2^2 + u_3^2 x_3^2 + 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 - 2u_1 u_3 x_1 x_3] \\ &= u_1^2 (x_2^2 + x_3^2) + u_2^2 (x_1^2 + x_3^2) + u_3^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_2 u_3 x_2 x_3 - 2u_1 u_3 x_1 x_3 \end{aligned}$$



Ecrivons le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \iiint_V \rho M H^2 dV \\
 &= u_1^2 \int_V \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V + u_2^2 \int_V \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V + u_3^2 \int_V \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \\
 &\quad - u_1 u_2 \int_V \rho 2x_1 x_2 d^3V - u_2 u_3 \int_V \rho 2x_2 x_3 d^3V - u_1 u_3 \int_V \rho 2x_1 x_3 d^3V \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Nous avons alors le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta} &= \begin{pmatrix} u_1 \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V - u_2 \int \rho x_1 x_2 d^3V - u_3 \int \rho x_1 x_3 d^3V \\ -u_1 \int \rho x_1 x_2 d^3V + u_2 \int \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V - u_3 \int \rho x_2 x_3 d^3V \\ -u_1 \int \rho x_1 x_3 d^3V - u_2 \int \rho x_2 x_3 d^3V + u_3 \int \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_1 x_2 d^3V & -\int \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_2 d^3V & \int \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_3 d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V & \int \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
 &\quad \boxed{I_{\Delta} = [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

où  $[I]_O$  est le tenseur d'inertie du solide  $S$  calculé au centre  $O$  du repère  $\mathcal{R}$ . L'opération  $[I]_O \vec{u}$  est la multiplication de la matrice  $[I]_O$  par le vecteur  $\vec{u}$ , elle donne un vecteur. L'opération suivante est le produit scalaire de deux vecteurs et l'on a :

$$[I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot [I]_O \vec{u}$$

Les composantes du tenseur d'inertie sont des fonctions de  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , il dépend donc du choix du repère  $\mathcal{R}$  (position du centre  $O$  et orientation des axes). En revanche il ne dépend pas de l'axe  $\Delta$ . La dépendance de  $I_{\Delta}$  à l'axe  $\Delta$  se fait uniquement par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  porté par l'axe  $\Delta$ .

Dans l'expression du premier terme,  $x_2^2 + x_3^2$  est la distance au carré à l'axe  $x_1$ . Les termes diagonaux sont par conséquent les moments d'inertie par rapport aux axes  $x_1, x_2, x_3$  du repère  $\mathcal{R}$ . Montrons-le pour un axe de rotation  $\Delta$  confondu avec l'axe  $x_3$ , donc portant le vecteur

unitaire  $\vec{k}$ . Supposons la masse volumique  $\rho$  constante :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= [I]_O \vec{k} \cdot \vec{k} \\
 &= \rho \begin{bmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int x_1 x_2 d^3V & -\int x_1 x_3 d^3V \\ -\int x_1 x_2 d^3V & \int (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int x_2 x_3 d^3V \\ -\int x_1 x_3 d^3V & -\int x_2 x_3 d^3V & \int (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \rho \begin{pmatrix} -\iiint x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint x_2 x_3 d^3V \\ \iiint (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \rho \iiint (x_1^2 + x_2^2) d^3V
 \end{aligned}$$

qui est le moment d'inertie par rapport à l'axe  $x_3$ . Les opposés des termes non diagonaux sont appelés *produits d'inertie*.

### Définition B.1: Tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie d'un solide de volume  $V$  et de masse volumique  $\rho$ , calculé au centre  $O$  d'un repère  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$[I]_O \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix}$$

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

où la convention de signe permet d'avoir des produits d'inertie positif.

### Notation B.1

Le tenseur  $[I]$  est aussi noté  $\mathbf{I}$ ,  $\vec{\vec{I}}$ ,  $\overleftrightarrow{I}$ ,  $\hat{I}$ ,  $\underline{\underline{I}}$ ,  $\approx$ , et en notation indicielle  $I_{ij}$  :

$$I_\Delta = I_{ij} u^i u^j$$

avec une sommation sur les indices répétés. À partir du tenseur d'inertie en un point  $O$ , on trouve le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe passant par  $O$ . Le tenseur d'inertie prend en entrée deux vecteurs (deux fois le vecteur unité porté par l'axe de rotation), et donne en sortie un scalaire (le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation). C'est donc une forme bilinéaire, appelée tenseur deux fois covariant.

Deux indices permettent de repérer ses éléments, c'est donc un tenseur d'ordre deux. Il est covariant, les indices seront en bas par convention. Il est symétrique :

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Les indices pouvant prendre trois valeurs, il appartient à un espace vectoriel de dimension 3. La dimension de l'espace puissance l'ordre du tenseur donne le nombre de composantes du tenseur, soit  $3^2 = 9$  composantes.

## C Repère principal d'inertie

Comme tout tenseur symétrique d'ordre deux, le tenseur d'inertie en tout point  $O$  peut être diagonalisé. Il existe donc un *repère principal d'inertie*  $(O, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$ , composé de trois axes *principaux d'inertie* passant par  $O$ , dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal. Plaçons-nous dans un repère  $\mathcal{R}$  de centre  $O$  et cherchons l'expression des *vecteurs propres*  $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ , et des *valeurs propres*  $I_1, I_2, I_3$  solutions des trois équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} [I]_O \vec{P}^1 &= I_1 \vec{P}^1 \\ [I]_O \vec{P}^2 &= I_2 \vec{P}^2 \\ [I]_O \vec{P}^3 &= I_3 \vec{P}^3 \end{aligned}$$

### C.1 Moments principaux d'inertie

Soient  $I$  un scalaire et  $\vec{P}(p_1, p_2, p_3)$  un vecteur non nuls tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} [I]_O \vec{P} &= I \vec{P} \\ \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} I - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ce système admet des solutions non triviales (différentes de zéro) si le déterminant de la matrice des coefficients est nul,

$$\begin{vmatrix} I - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I - I_{33} \end{vmatrix} = 0$$

qui donne l'équation caractéristique :

$$(I - I_{11})[(I - I_{22})(I - I_{33}) - I_{32}I_{23}] - I_{21}[I_{12}(I - I_{33}) - I_{32}I_{13}] + I_{31}[I_{12}I_{23} - (I - I_{22})I_{13}] = 0$$

Ce polynôme  $Q$  est du troisième degré en  $I$

$$Q = I^3 + a_1 I^2 + a_2 I + a_3$$

qui admet trois racines  $I_1, I_2, I_3$ . Ces trois solutions de l'équation  $Q = 0$  sont les valeurs propres du tenseur d'inertie, aussi appelées *moments principaux d'inertie* au point  $O$ . Pour le premier

vecteur propre  $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$  de valeur propre  $I_1$  nous avons :

$$[I]_O \vec{P}^1 = I_1 \vec{P}^1$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix}$$

## C.2 Axes principaux d'inertie

Réolvons le système (4.3) p. 49 avec les différentes valeurs possibles de  $I$ . Pour la valeur propre  $I_1$  associée au vecteur propre  $\vec{P}^1(p_1^1, p_2^1, p_3^1)$  :

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} (I_1 - I_{11})p_1^1 + I_{12}p_2^1 + I_{13}p_3^1 = 0 \\ I_{21}p_1^1 + (I_1 - I_{22})p_2^1 + I_{23}p_3^1 = 0 \\ I_{31}p_1^1 + I_{32}p_2^1 + (I_1 - I_{33})p_3^1 = 0 \end{cases}$$

Nous n'avons pas besoin de résoudre ce système car nous n'avons besoin que de la direction du vecteur  $\vec{P}^1$ . En effet si  $\vec{P}^1$  est solution alors si  $\alpha$  est un scalaire  $\alpha \vec{P}^1$  est aussi solution :

$$\alpha \begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_1 - I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_1 - I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha p_1^1 \\ \alpha p_2^1 \\ \alpha p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le module  $\|\vec{P}^1\|$  étant quelconque nous pouvons fixer la valeur de la première composante,  $p_1^1 = 1$  :

$$\begin{cases} I_{12}p_2^1 + I_{13}p_3^1 = I_{11} - I_1 \\ (I_1 - I_{22})p_2^1 + I_{23}p_3^1 = -I_{21} \\ I_{32}p_2^1 + (I_1 - I_{33})p_3^1 = -I_{31} \end{cases}$$

Deux équations parmi ces trois suffisent à trouver  $p_2^1$  et  $p_3^1$ , c.-à-d. la direction dans  $\mathcal{R}$  du premier axe principal d'inertie :

$$\begin{bmatrix} I_{12} & I_{13} \\ (I_1 - I_{22}) & I_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} - I_1 \\ -I_{21} \end{pmatrix}$$

Soit  $D$  le déterminant de la matrice carrée, résolvons par la méthode de Cramer :

$$p_2^1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{11} - I_1 & I_{13} \\ -I_{21} & I_{23} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad p_3^1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{12} & I_{11} - I_1 \\ (I_1 - I_{22}) & -I_{21} \end{vmatrix}$$

Nous avons l'expression du premier vecteur propre  $\vec{P}^1 (P_1^1, P_2^1, P_3^1)$ . Nous procédons de même avec  $\vec{P}^2$  et  $\vec{P}^3$ , les deux autres vecteurs propres portés par les *axes principaux d'inertie*. Ainsi il existe un repère principal d'inertie en tout point  $O$ .

Montrons que les directions principales sont orthogonales. Désignons les directions des axes principaux d'inertie par les vecteurs unitaires  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ , et faisons apparaître leurs produits scalaires. Pour  $\vec{n}_1(n_1^1, n_1^2, n_1^3)$  et le scalaire  $I_1$ , (4.4) p. 50 s'écrit :

$$I_1 \vec{n}_1 = [I] \vec{n}_1$$

De même pour  $\vec{n}_2(n_2^1, n_2^2, n_2^3)$  :

$$I_2 \vec{n}_2 = [I] \vec{n}_2$$

Effectuons le produit scalaire

$$\begin{aligned} [I] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}n_1^1 - I_{12}n_1^2 - I_{13}n_1^3 \\ -I_{21}n_1^1 + I_{22}n_1^2 - I_{23}n_1^3 \\ -I_{31}n_1^1 - I_{32}n_1^2 + I_{33}n_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \\ &= I_{11}n_1^1n_2^1 - I_{12}n_1^2n_2^1 - I_{13}n_1^3n_2^1 \\ &\quad - I_{21}n_1^1n_2^2 + I_{22}n_1^2n_2^2 - I_{23}n_1^3n_2^2 \\ &\quad - I_{31}n_1^1n_2^3 - I_{32}n_1^2n_2^3 + I_{33}n_1^3n_2^3 \end{aligned}$$

Par symétrie du tenseur d'inertie, échangeons  $I_{ij}$  par  $I_{ji}$

$$\begin{aligned} [I] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= I_{11}n_1^1n_2^1 - I_{21}n_1^2n_2^1 - I_{31}n_1^3n_2^1 \\ &\quad - I_{12}n_1^1n_2^2 + I_{22}n_1^2n_2^2 - I_{32}n_1^3n_2^2 \\ &\quad - I_{13}n_1^1n_2^3 - I_{23}n_1^2n_2^3 + I_{33}n_1^3n_2^3 \\ &= I_{11}n_2^1n_1^1 - I_{12}n_2^2n_1^1 - I_{13}n_2^3n_1^1 \\ &\quad - I_{21}n_2^1n_1^2 + I_{22}n_2^2n_1^2 - I_{23}n_2^3n_1^2 \\ &\quad - I_{31}n_2^1n_1^3 - I_{32}n_2^2n_1^3 + I_{33}n_2^3n_1^3 \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}n_2^1 - I_{12}n_2^2 - I_{13}n_2^3 \\ -I_{21}n_2^1 + I_{22}n_2^2 - I_{23}n_2^3 \\ -I_{31}n_2^1 - I_{32}n_2^2 + I_{33}n_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_2^1 \\ n_2^2 \\ n_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_1^2 \\ n_1^3 \end{pmatrix} \\ &= [I] \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= I_2 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \\ (I_1 - I_2) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Si  $I_1 \neq I_2$  alors  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$  et les axes principaux d'inertie sont orthogonaux deux à deux.

Cherchons l'expression du tenseur d'inertie dans le repère principal d'inertie  $(O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ . Soit  $\vec{\omega}$  un vecteur porté par un axe de rotation quelconque  $\Delta$  :

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3$$

Soit  $\vec{L}$  un vecteur tel que :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= [I]_O \vec{\omega} \\ L_1 \vec{n}_1 + L_2 \vec{n}_2 + L_3 \vec{n}_3 &= [I]_O (\omega_1 \vec{n}_1 + \omega_2 \vec{n}_2 + \omega_3 \vec{n}_3) \\ &= \omega_1 [I]_O \vec{n}_1 + \omega_2 [I]_O \vec{n}_2 + \omega_3 [I]_O \vec{n}_3 \\ &= \omega_1 I_1 \vec{n}_1 + \omega_2 I_2 \vec{n}_2 + \omega_3 I_3 \vec{n}_3 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_3 = I_3 \omega_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

d'où l'expression du *tenseur principal d'inertie* au point  $O$  :

$$[I]_O = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Il dépend du choix du point  $O$ . En revanche le tenseur principal d'inertie  $[I]_G$  calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie  $G$  du système, est une caractéristique intrinsèque de ce système (elle ne dépend que du système), comme le sont sa masse, son volume ou sa charge électrique. On l'appelle *tenseur central principal d'inertie*. C'est la répartition des masses du solide  $S$ , pondérée par la distance au centre d'inertie au carré.

### C.3 Ellipsoïde d'inertie

Soit un solide  $S$ , et soit un repère  $\mathcal{R}$  de centre  $O$ . Le tenseur d'inertie  $[I]_O$  est donc fixé. Soit  $\Delta$  un axe de rotation quelconque, de vecteur unitaire  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  :

$$\begin{aligned} I_\Delta &= [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \\ &= \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11}u_1 - I_{12}u_2 - I_{13}u_3 \\ -I_{12}u_1 + I_{22}u_2 - I_{23}u_3 \\ -I_{13}u_1 - I_{23}u_2 + I_{33}u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$I_\Delta = I_{11}u_1^2 + I_{22}u_2^2 + I_{33}u_3^2 - 2I_{12}u_2u_1 - 2I_{13}u_3u_1 - 2I_{23}u_2u_3$$

on retrouve (4.1) p. 47. C'est l'équation d'un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde d'inertie*, dans laquelle les composantes  $I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}, I_{23}$  du tenseur d'inertie sont des paramètres.

Pour chaque axe  $\Delta$  de direction  $\vec{u}$ , donc pour chaque ensemble de valeurs  $(u_1, u_2, u_3)$ , l'équation donne une valeur pour le moment d'inertie  $I_\Delta$  du solide  $S$ . De même qu'un vecteur peut être représenté par une flèche, un tenseur symétrique d'ordre deux peut être représenté par un ellipsoïde.



## C.4 Théorème de Huygens

### Théorème C.1: Théorème de Huygens

Soit  $\Delta_G$  un axe parallèle à l'axe  $\Delta$  et passant par le centre d'inertie  $G$  d'un solide  $S$  de masse  $m$ . Soit  $a = KH$  la distance entre ces deux axes, où  $K \in \Delta_G$  et  $H \in \Delta$ , alors :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \rho \iiint (MH)^2 d^3V \\ &= \iiint \rho (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH}) \cdot (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KH}) d^3V \\ &= \iiint \rho (MK)^2 d^3V + \iiint \rho (KH)^2 d^3V + 2 \iiint \rho \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KH} d^3V \\ &= I_{\Delta_G} + a^2 m + 2 \iiint \rho (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{KH} d^3V \end{aligned}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{KH}$  étant constant :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m + 2 \overrightarrow{KH} \cdot \iiint \rho \overrightarrow{MG} d^3V + 2 \iiint \rho \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{KH} d^3V$$

Par définition du centre d'inertie,

$$\iiint \rho \overrightarrow{MG} d^3V = 0$$

De plus,  $\overrightarrow{GK} \perp \overrightarrow{KH}$ , d'où :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

□

## D Moment cinétique

### Définition D.1: Moment cinétique

On appelle moment cinétique (ou moment angulaire ou moment de la quantité de mouvement) par rapport à un point  $O$  fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque, d'un corps de centre de gravité  $G$ , le produit vectoriel du vecteur position  $\overrightarrow{OG}$  par la quantité de mouvement de ce corps dans  $\mathcal{R}$ ,  $\overrightarrow{OG} \times \vec{p}$ .

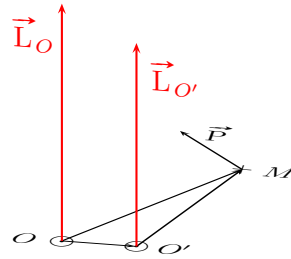
Le vecteur position est noté  $\vec{r}$  et le moment cinétique est noté  $\vec{L}_{/O}$  :

$$\vec{L}_{/O} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

### D.1 Moment cinétique par rapport à un point

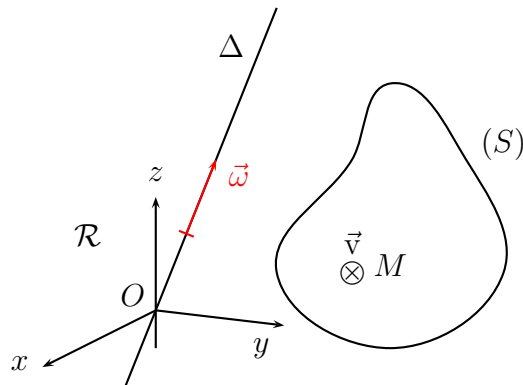
Soient  $O$  et  $O'$  deux points distincts d'un repère  $\mathcal{R}$ , le moment cinétique par rapport au point  $O'$  d'un point massique  $M$  de quantité de mouvement  $\vec{p}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O'}(M) &= \vec{O'M} \times \vec{p} \\ &= (\vec{O'O} + \vec{OM}) \times \vec{p} \\ &= \vec{O'O} \times \vec{p} + \vec{OM} \times \vec{p} \\ &= \vec{O'O} \times \vec{p} + \vec{L}_O(M)\end{aligned}$$



Le moment cinétique d'un solide ou d'un système dépend du point par rapport auquel il est calculé. Le terme  $\vec{O'O} \times \vec{p}$  permet de passer du moment cinétique au point  $O$  à celui au point  $O'$ .

Soit un solide  $S$  de masse volumique  $\rho$ , tournant avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  autour d'un axe  $\Delta$  de direction fixe dans  $\mathcal{R}$ . Si le solide  $S$  est libre alors l'axe de rotation passe obligatoirement par son centre d'inertie, mais l'on envisage ici le cas plus général de la rotation d'un solide autour d'un axe quelconque. Calculons le moment cinétique par rapport au centre du référentiel  $O$  situé sur l'axe  $\Delta$ .



Considérons un élément de volume du solide  $S$ , de masse  $dm$ , de volume  $d^3V$ , de vitesse  $\vec{v}$ , situé au point  $M$ . Son moment cinétique dans  $\mathcal{R}$  par rapport au point  $O$  s'écrit :

$$d\vec{L}_O^{\mathcal{R}}(M) = \vec{OM} \times \vec{v} dm$$

L'axe de rotation  $\Delta$  passant par le point  $O$ , la vitesse du point  $M$  s'écrit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

si bien que

$$\begin{aligned} d\vec{L}_O^{\mathcal{R}}(M) &= \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) dm \\ &= \rho \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) d^3V \end{aligned}$$

Le moment cinétique total du solide  $S$  s'obtient par intégration sur son volume total :

$$\vec{L}_O^{\mathcal{R}}(S) = \iiint \rho \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) d^3V$$

Développons le double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega^2 x_3 - \omega^3 x_2 \\ \omega^3 x_1 - \omega^1 x_3 \\ \omega^1 x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 x_2^2 - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 + \omega^1 x_3^2 \\ \omega^2 x_3^2 - \omega^3 x_2 x_3 - \omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 x_1^2 \\ \omega^3 x_1^2 - \omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 x_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 \\ -\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3 \\ -\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression du moment cinétique de  $S$  par rapport à  $O$ , calculé dans  $\mathcal{R}$  :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O^{\mathcal{R}}(S) &= \begin{pmatrix} \iiint \rho [\omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3] d^3V \\ \iiint \rho [-\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3] d^3V \\ \iiint \rho [-\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2)] d^3V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^1 \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V - \omega^2 \iiint \rho x_1 x_2 d^3V - \omega^3 \iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\omega^1 \iiint \rho x_1 x_2 d^3V + \omega^2 \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V - \omega^3 \iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\omega^1 \iiint \rho x_1 x_3 d^3V - \omega^2 \iiint \rho x_2 x_3 d^3V + \omega^3 \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \iiint \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_2 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\iiint \rho x_1 x_3 d^3V & -\iiint \rho x_2 x_3 d^3V & \iiint \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{L}_O^{\mathcal{R}}(S) = [I]_O \vec{\omega}$$

où  $[I]_O$  est le tenseur d'inertie du solide  $S$ , au point  $O$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

## D.2 Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation  $\Delta$  :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}$$

et soit  $L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S)$  la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation  $\Delta$ . Soit  $MH$  la distance du point  $M$  à l'axe de rotation. En utilisant le théorème B.1 p. 60 de l'analyse vectorielle donné en annexe, on a :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) &= \vec{L}_O^{\mathcal{R}}(S) \cdot \vec{u} \\ &= \iiint \rho \overrightarrow{OM} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) d^3V \cdot \vec{u} \\ &= \iiint \rho \left[ \vec{\omega}(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\omega}) \right] d^3V \cdot \vec{u} \\ &= \omega \iiint \rho \left[ \vec{u} \cdot \vec{u} (OM)^2 - (\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}) \right] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho [(OM)^2 - (OH)^2] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho (MH)^2 d^3V \\ &\quad \boxed{L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) = I_{\Delta} \omega} \end{aligned} \tag{4.5}$$

où le scalaire  $I_{\Delta}$  est le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$ .

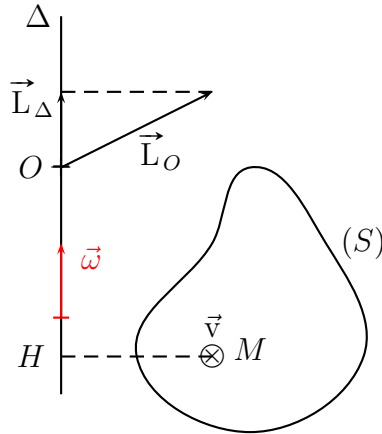


FIG. 4.2 – Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

### D.3 Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation  $\Delta$ . Alors :

$$\begin{aligned} L_{\Delta}^{\mathcal{R}}(S) &= \vec{L}_O^{\mathcal{R}}(S) \cdot \vec{u} \\ &= [I]_O \vec{\omega} \cdot \vec{u} \\ &= [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u} \omega \end{aligned}$$

Par conséquent, avec (4.5) p. 56 :

$$I_{\Delta} = [I]_O \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Nous retrouvons (4.2) p. 47.

## E Énergie cinétique d'un solide en rotation

Soit  $S$  un solide de masse  $m$ , de volume  $V$ , de masse volumique  $\rho$ , en rotation avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  autour du centre  $O$  d'un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . On considère un élément du solide, de masse  $dm$ , de volume  $d^3V$  situé au point  $M$ . Son énergie cinétique  $dT$  s'écrit :

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} v^2 dm \\ &= \frac{\rho}{2} v^2 d^3V \\ &= \frac{\rho}{2} (\vec{\omega} \times \vec{OM})^2 d^3V \end{aligned}$$

L'énergie cinétique totale  $T$  s'obtient par intégration sur le volume total du solide  $S$  :

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint (\vec{\omega} \times \vec{OM})^2 d^3V$$

Grâce au théorème C.2 p. 61 de l'analyse vectorielle donné en annexe :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{OM})^2 &= \omega^2 (OM)^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{OM})^2 \\ &= \left[ (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] - (\omega^1 x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3)^2 \\ &= \left[ (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \right] [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \\ &\quad - \left[ (\omega^1)^2 x_1^2 + (\omega^2)^2 x_2^2 + (\omega^3)^2 x_3^2 + 2(\omega^1 x_1 \omega^2 x_2 + \omega^1 x_1 \omega^3 x_3 + \omega^2 x_2 \omega^3 x_3) \right] \\ &= (\omega^1)^2 (x_2^2 + x_3^2) + (\omega^2)^2 (x_1^2 + x_3^2) + (\omega^3)^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ &\quad - 2 (\omega^1 x_1 \omega^2 x_2 + \omega^1 x_1 \omega^3 x_3 + \omega^2 x_2 \omega^3 x_3) \end{aligned}$$

Ce scalaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{OM})^2 &= \begin{pmatrix} \omega^1 (x_2^2 + x_3^2) - \omega^2 x_1 x_2 - \omega^3 x_1 x_3 \\ -\omega^1 x_2 x_1 + \omega^2 (x_1^2 + x_3^2) - \omega^3 x_2 x_3 \\ -\omega^1 x_3 x_1 - \omega^2 x_3 x_2 + \omega^3 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression du dernier terme :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int \rho (x_2^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_1 x_2 d^3V & -\int \rho x_1 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_2 d^3V & \int \rho (x_1^2 + x_3^2) d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V \\ -\int \rho x_1 x_3 d^3V & -\int \rho x_2 x_3 d^3V & \int \rho (x_1^2 + x_2^2) d^3V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$$

En ajoutant l'énergie cinétique en translation rectiligne du solide  $S$ , l'énergie cinétique  $T$  s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} [I]_O \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}$$

où  $[I]_O$  est le tenseur d'inertie du solide  $S$ , au point  $O$ .

## Chapitre 5

### ANNEXES

#### A Premier théorème d'analyse vectorielle

Théorème A.1

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \\ &= A_x (B_y C_z - B_z C_y) \\ &\quad + A_y (B_z C_x - B_x C_z) \\ &\quad + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \\ &= C_x (A_y B_z - A_z B_y) \\ &\quad + C_y (A_z B_x - A_x B_z) \\ &\quad + C_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\end{aligned}$$

□

## B Deuxième théorème d'analyse vectorielle

### Théorème B.1

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y (B_x C_y - B_y C_x) - A_z (B_z C_x - B_x C_z) \\ A_z (B_y C_z - B_z C_y) - A_x (B_x C_y - B_y C_x) \\ A_x (B_z C_x - B_x C_z) - A_y (B_y C_z - B_z C_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z \\ A_z B_y C_z - A_z B_z C_y - A_x B_x C_y + A_x B_y C_x \\ A_x B_z C_x - A_x B_x C_z - A_y B_y C_z + A_y B_z C_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} &\vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &= \vec{B} (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \vec{C} (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &= \begin{pmatrix} B_x (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ B_y (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_y (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ B_z (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_z (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_x A_y C_y + B_x A_z C_z - C_x A_y B_y - C_x A_z B_z \\ B_y A_x C_x + B_y A_z C_z - C_y A_x B_x - C_y A_z B_z \\ B_z A_x C_x + B_z A_y C_y - C_z A_x B_x - C_z A_y B_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

### Application B.1

Pour  $\vec{A} = \vec{C} = \vec{OM}$  et  $\vec{B} = \vec{\omega}$ , on a :

$$\vec{OM} \times (\vec{\omega} \times \vec{OM}) = \vec{\omega} (\vec{OM} \cdot \vec{OM}) - \vec{OM} (\vec{OM} \cdot \vec{\omega})$$



## C Troisième théorème d'analyse vectorielle

### Théorème C.1

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

DÉMONSTRATION.

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$$

et avec le théorème B.1 p. 60, en remplaçant  $\vec{A}$  par  $\vec{C}$ ,  $\vec{B}$  par  $\vec{A}$ , et  $\vec{C}$  par  $\vec{B}$ ,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= -[\vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{A})] \\ &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

□

### Théorème C.2

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème A.1 :

$$\vec{X} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{X} \times \vec{C}) \cdot \vec{D}$$

On pose  $\vec{X} = \vec{A} \times \vec{B}$ , alors

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}] \cdot \vec{D}$$

et avec le théorème C.1 :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= [\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})] \cdot \vec{D} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \end{aligned}$$

□

### Application C.1

Pour  $\vec{A} = \vec{C} = \vec{\omega}$  et  $\vec{B} = \vec{D} = \overrightarrow{GM}$ , on a :

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{GM})^2 &= (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GM}) - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{GM})(\overrightarrow{GM} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \omega^2(GM)^2 - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{GM})^2 \end{aligned}$$