LOGARITHME NÉPÉRIEN

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Présentation du nombre d'Euler e.

Table des matières

1 Puissances

Définition 1.1. *Nous dirons que a est élevé à la puissance n si a est multiplié par lui-même n fois :*

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}$$

Cette expression est notée a^n.

Propriété 1.1.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \qquad a^n \times a^m = a^{n+m}}$$

Démonstration. En se servant de la définition 1.1,

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n+m} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

□

Propriété 1.2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^*, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Démonstration. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^*,$

$$\begin{aligned} a^m \times \frac{1}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m-n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

Date: 17 octobre 2025.

En se servant de la propriété 1.1,

$$\begin{aligned} a^m \times \frac{1}{a^n} &= a^m \times a^{-n} \\ \frac{1}{a^n} &= a^{-n} \end{aligned}$$

Et nous avons maintenant $n \in \mathbb{Z}^*$. □

Propriété 1.3.

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \qquad a^0 = 1$$

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^*,$

$$\frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}} = 1$$

Avec la propriété 1.2,

$$\begin{aligned} a^{n-n} &= 1 \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

Et $n \in \mathbb{Z}$. □

Propriété 1.4.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (n, m) \in \mathbb{Z}, \qquad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n})^m \\ &= \underbrace{(\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}) \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}) \times \cdots \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n})}_{m \textit{ termes de } n \textit{ termes}} \\ &= a^{n \times m} \end{aligned}$$

□

Propriété 1.5.

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^* \textit{ ou bien } \forall a \in \mathbb{R}^-, \forall n \textit{ impaire} \in \mathbb{Z}^*, \qquad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

appelé racine n-ième de a.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Soit} \qquad & A^n = a \\ \text{Par définition de la racine } n\text{-ième} \qquad & A = \sqrt[n]{a} \\ \text{Or, d'après la définition 1.1} \qquad & A = A^1 = A^{n/n} \\ \text{et d'après la propriété 1.4} \qquad & = (A^n)^{1/n} = a^{1/n} \\ \text{Donc} \qquad & a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \end{aligned}$$

Et $n \in \mathbb{Q}$. □

2 Logarithmes

Définition 2.1. *On définit la fonction logarithme comme étant la fonction réciproque de la fonction puissance :*

$$\log_a(a^x) \triangleq x$$

Propriété 2.1.

$$\boxed{\log_a(X \times Y) = \log_a X + \log_a Y}$$

Démonstration. Avec la propriété 1.1 des puissances,

$$\log_a(a^x \times a^y) = \log_a \left(a^{x+y}\right)$$

En appliquant la définition 2.1 du logarithme sur le second membre,

$$\log_a(a^x \times a^y) = x + y$$

En appliquant de nouveau la définition 2.1 du logarithme sur le second membre,

$$\log_a(a^x \times a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y$$

En posant $X = a^x$ et $Y = a^y$ nous avons,

$$\log_a(X \times Y) = \log_a X + \log_a Y$$

□

Propriété 2.2.

$$\boxed{\log_a X^n = n \log_a X}$$

Démonstration.

$$\log_a X^n = \log_a(\underbrace{X \times X \cdots \times X}_{n})$$

En utilisant la propriété 2.1 des logarithmes,

$$\log_a X^n = \log_a X + \log_a X + \cdots + \log_a X = n \log_a X$$

□

Propriété 2.3.

$$\boxed{a^{\log_a X} = X}$$

Démonstration. En partant de la définition 2.1 du logarithme,

$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a a^x} = a^x$$

En posant $X = a^x$,

$$a^{\log_a X} = X$$

□

Propriété 2.4.

$$\boxed{\log_b X = \log_a X \times \log_b a}$$

Démonstration. En utilisant la propriété 2.3,

$$X = a^{\log_a X}$$
$$\log_b X = \log_b \left(a^{\log_a X}\right)$$

Nous pouvons descendre l'exposant en utilisant la propriété 2.2,

$$\log_b X = \log_a X \times \log_b a$$

□

3 Démonstration du théorème de Newton sur le Logarithme népérien

Théorème 3.1.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Démonstration. On dérive un logarithme de base « a » inconnue :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log_a x &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]\\
&= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]\\
&= \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]
\end{aligned}$$

Or,

$$\forall x, \quad \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,28$$

nombre appelé constante d'Euler et noté e. Donc,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$$

Pour $a = e$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log_e x &= \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}\\
[\log_e t]_1^x &= \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt\\
\log_e x - \log_e 1 &= \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt
\end{aligned}$$

Le logarithme de base e se notant ln, nous avons :

$$\ln x - \ln 1 = \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt$$

Il reste à démontrer que $\ln 1 = 0$. Avec la définition 2.1, et avec la propriété 1.3 :

$$\begin{aligned}
\forall b, &\quad \log_b b^0 = 0\\
\forall b, &\quad \log_b 1 = 0
\end{aligned}$$

Vrai $\forall b$, donc pour $b = e$. ☐

4 La démonstration de Leonhard Euler

Théorème 4.1.

$$e = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Démonstration. Euler cherche à exprimer la fonction puissance sous la forme d'un polynôme [1]. Soient $a, A, B, C, D, \dots$ des constantes, alors :

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

D'après la propriété 1.3,

$$a^0 = 1 \;\Rightarrow\; A = 1$$

De plus, d'après la propriété 1.4 :

$$a^{2x} = (a^x)^2$$
$$1 + B(2x) + C(2x)^2 + D(2x)^3 + \dots = (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots)^2$$

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned} 1+2Bx+4Cx^2+8Dx^3+\dots &= (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots) \times (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots) \\ &= 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Bx + B^2x^2 + BCx^3 + \dots \\ &\qquad \dots + Cx^2 + BCx^3 + \dots + Dx^3 + \dots \\ &= 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + 2(BC + D)x^3 + \dots \end{aligned}$$

En égalant les coefficients,

$$4C = B^2 + 2C \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{B^2}{2}$$

$$8D = 2(BC + D) \qquad \Rightarrow \qquad 3D = BC \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{B^3}{2.3}$$

$$\vdots$$

Nous obtenons :

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{2.3}x^3 + \dots$$

Sous cette forme, la fonction puissance la plus simple est celle pour laquelle $B = 1$:

$$a^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

et l'on peut calculer le a auquel elle correspond en posant $x = 1$:

$$a = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots = 2{,}718\,281\,828\dots$$

que l'on note e. On définit alors la fonction exponentielle par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

□

Email address: o.castera@free.fr
URL: https://sciences-physiques.netlify.app/

1. Tangente Hors Série numéro 29