LES CONIQUES

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Ellipses, paraboles et hyperboles sont des coniques. Ce sont des courbes planes résultant de l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution.

Table des matières

1 Définitions d'une ellipse

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une ellipse. Nous partons d'une définition et montrons l'équivalence avec les autres.

1.1 Définition bifocale d'une ellipse

Définition 1.1. Définition bifocale
Soient F et F' deux points du plan. L'ellipse de foyers F et F' est l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = C^{ste}$$

où $C^{ste} > 0$.

Date: 17 octobre 2025.

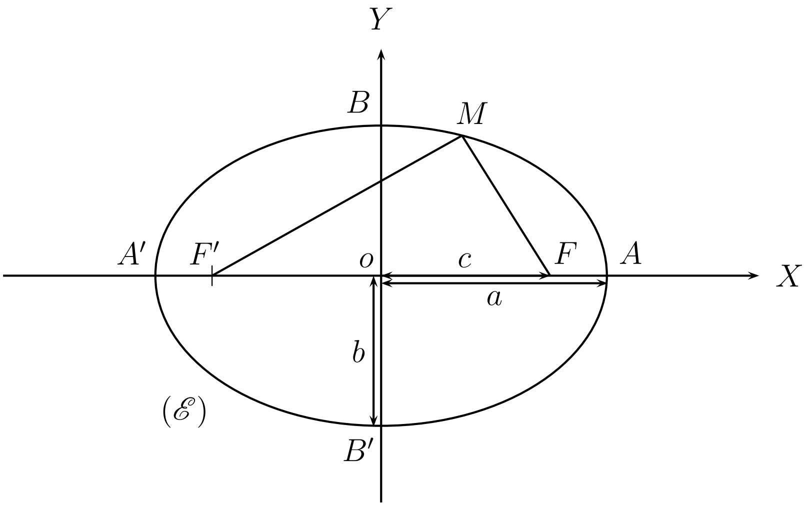

FIG 1 – Une ellipse

A, A', B, B' sont les sommets de l'ellipse. MF et MF' sont les rayons focaux du point M. Le grand axe $A'A$ est appelé axe focal car il passe par les foyers. Soient $2a$ sa longueur et $2b$ celle du petit axe. On pose les coordonnées des foyers, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, si bien que la distance focale s'écrit :

$$FF' = 2c$$

Nous posons la définition suivante :

Définition 1.2. Excentricité

$$e = \frac{c}{a}$$

est appelée excentricité de l'ellipse.

— Si $c > a$ alors $e > 1$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ est vide
— Si $c = a$ alors $e = 1$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ se réduit au segment $[FF']$
— Si $c = 0$ alors $e = 0$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ est un cercle, les foyers sont confondus et $MF = a$ est le rayon du cercle

Nous posons que le cercle est un cas particuliers d'ellipse :

$$a > c \geqslant 0 \tag{1}$$

(1) Lorsque M est en A :

$$\begin{aligned} MF + MF' &= (a - c) + (a + c) \\ &= 2a \end{aligned} \tag{2}$$

ce qui fixe la constante égale à la longueur $2a$ du grand axe.

(2) Lorsque M est en B, avec (2) :

$$\begin{aligned} MF &= MF' \\ &= a \end{aligned}$$

$MF = BF$ étant l'hypothénus du triangle MFo rectangle en o, d'après le théorème de Pythagore :

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3}$$

1.2 Définition cartésienne

Théorème 1.1. *L'équation cartésienne d'une ellipse centrée en $o(0,0)$, de demi-petit axe b et de demi-grand axe a situé sur l'axe des abscisses, s'écrit :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

avec $a \geqslant b > 0$.

Démonstration. Soient $M(x,y)$ un point de l'ellipse $(\mathscr{E})$:

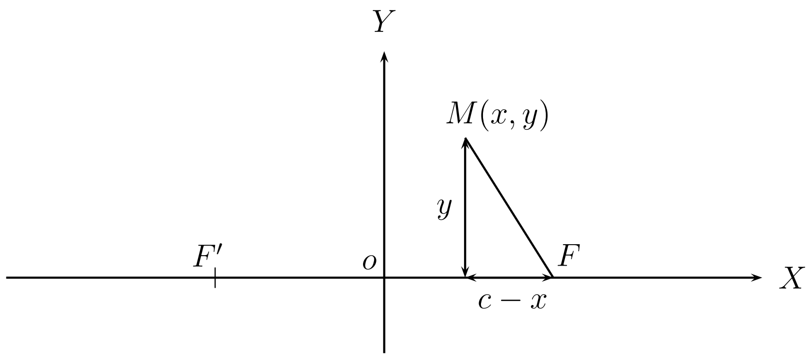

Fig 2

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de la figure 2 :

$$\begin{cases} MF^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MF^2 - MF'^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - \left(x^2 + 2xc + c^2 + y^2\right) \\ (MF + MF')(MF - MF') &= -4xc \\ MF - MF' &= -\frac{2xc}{a} \end{aligned}$$

Par hypothèse :

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -\dfrac{2xc}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} MF = a - \dfrac{xc}{a} & \text{(6a)} \\ MF' = a + \dfrac{xc}{a} & \text{(6b)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad x^2+c^2+y^2 &= a^2+\frac{x^2c^2}{a^2}\\
x^2a^2+c^2a^2+y^2a^2 &= a^4+x^2c^2\\
x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right)
\end{aligned}
$$

On pose $b^2=a^2-c^2$,

$$
\begin{aligned}
x^2b^2+a^2y^2 &= a^2b^2\\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}
$$

□

> **Remarque.** Si $c=0$ alors $a=b$, nous obtenons l'équation cartésienne d'un cercle de rayon a :
> $$x^2+y^2=a^2$$
> Si $a=c$ alors $b=0$ et l'équation cartésienne ne permet pas de retrouver le segment $[FF']$.

Nous avons montré que (1.1) p. 1 implique (4) p. 3. Montrons que (4) implique (1.1).

Théorème 1.2. *L'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x,y)$, d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

où a et b sont des constantes, forme une ellipse.

Démonstration. Par hypothèse :

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1\\
x^2b^2+a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}
$$

Posons c tel que $b^2=a^2-c^2$:

$$
\begin{aligned}
x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right)\\
x^2+c^2+y^2 &= a^2+\frac{x^2c^2}{a^2}
\end{aligned}
$$

En soustrayant et en additionnant $2xc$,

$$
\begin{cases}
x^2-2xc+c^2+y^2=a^2-2xc+\dfrac{x^2c^2}{a^2}\\[2mm]
x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2xc+\dfrac{x^2c^2}{a^2}
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
(x-c)^2+y^2=\left(a-\dfrac{xc}{a}\right)^2\\[2mm]
(x+c)^2+y^2=\left(a+\dfrac{xc}{a}\right)^2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
MF^2=\left(a-\dfrac{xc}{a}\right)^2\\[2mm]
MF'^2=\left(a+\dfrac{xc}{a}\right)^2
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
MF=\pm\left(a-\dfrac{xc}{a}\right)\\[2mm]
MF'=\pm\left(a+\dfrac{xc}{a}\right)
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow\quad
\begin{cases}
MF+MF'=\pm 2a\\[2mm]
MF+MF'=\pm\dfrac{2xc}{a}
\end{cases}
\quad\Rightarrow\quad MF+MF'=2a
$$

□

Il en résulte que les théorèmes 1.1 p. 3 et 1.2 p. 4 sont équivalents à la définition bifocale et peuvent servir de définition pour l'ellipse.

1.3 Définition monofocale d'une ellipse

Théorème 1.3. *L'ensemble* $(\mathscr{E})$ *des points* M *d'une ellipse de foyer* $F(c, 0)$ *suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e \tag{8}$$

où l'excentricité est telle que $1 \geqslant e > 0$*, et où* H *est la projection orthogonale de* M *sur la droite* (D) *d'équation* $x = a^2/c$*.*

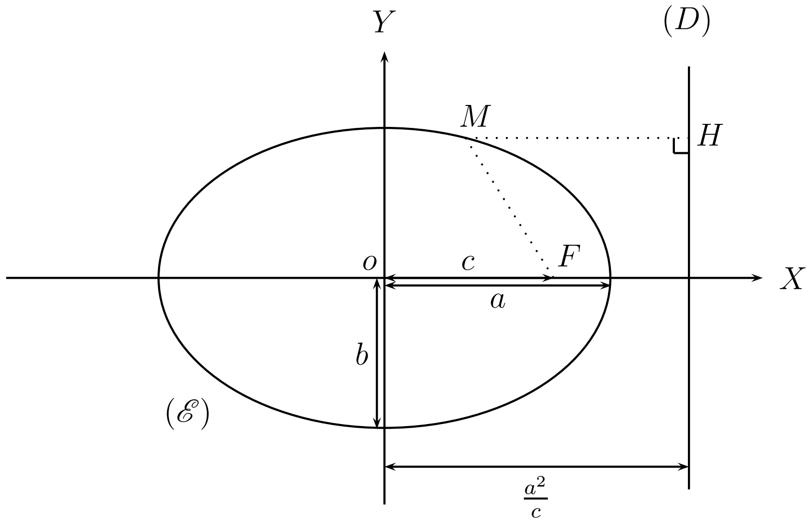

Fig 3 – Une ellipse et l'une de ses deux directrices

Démonstration. Soit (D) la droite verticale d'équation $x = a^2/c$, appelée directrice de l'ellipse associée au foyer F. Soit $M(x_M, y_M)$ un point de l'ellipse de foyer $F(c, 0)$. Par hypothèse, d'après (6a) p. 3,

$$\begin{aligned} MF &= a - \frac{x_M c}{a} \\ &= \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x_M\right) \\ &= \frac{c}{a} MH \\ \frac{MF}{MH} &= e \end{aligned}$$

Remarque. Si $c = 0$, alors $e = 0$ et la définition monofocale ne permet pas de retrouver un cercle. Si $a = c$, alors $e = 1$ et nous verrons que la définition monofocale donne l'équation d'une parabole et non du segment $[FF']$.

□

Nous avons montré que (2) p. 2 implique (8) p. 5, montrons que (8) implique (7) p. 4.

Théorème 1.4. *Soit $F(c, 0)$ un point du plan, et soit $(D) : x = a^2/c$ une droite du plan. L'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où $e = c/a$ est telle que $1 > e > 0$, et où H est la projection orthogonale de M sur la droite (D), forme une ellipse.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{MF}{MH} &= \frac{c}{a} \\
MF^2 &= \frac{c^2}{a^2} MH^2 \\
(x-c)^2 + y^2 &= \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2 \\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2} \\
x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2 &= a^4 + x^2c^2 \\
x^2\left(a^2 - c^2\right) + y^2a^2 &= a^2\left(a^2 - c^2\right)
\end{aligned}$$

$1 > e$ donc $a > c$, on pose $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\begin{aligned}
x^2b^2 + y^2a^2 &= a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

$\square$

Il en résulte que pour $1 > e > 0$, les théorèmes 1.3 p. 5 et 1.4 p. 6 sont équivalents aux définitions bifocale et cartésienne, et peuvent servir de définition de l'ellipse.

2 Définitions d'une hyperbole

2.1 Définition bifocale d'une hyperbole

Définition 2.1. Soient F et F' deux points du plan. L'hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = C^{ste}$$

où $C^{ste} > 0$.

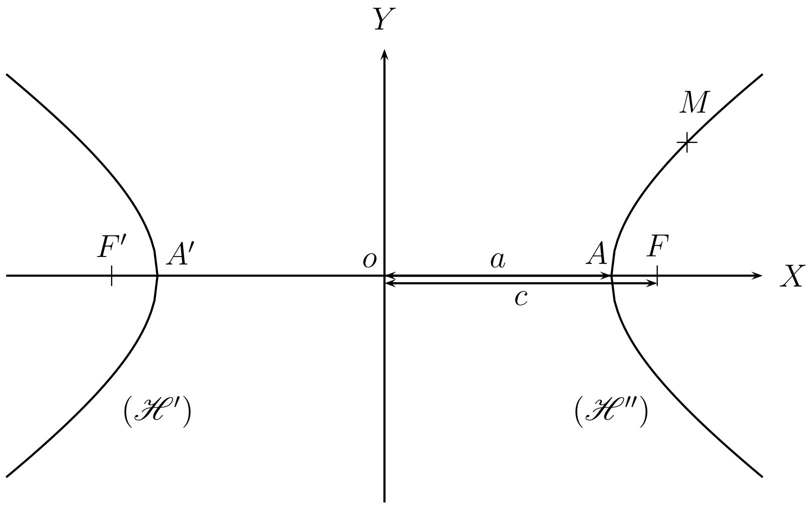

FIG 4 – Une hyperbole

A et A' sont les sommets de l'hyperbole. MF et MF' sont appelés rayons focaux du point M. On pose les coordonnées des foyers, $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$, si bien que la distance focale s'écrit :

$$F'F = 2c$$

Supposons M au sommet A, nous avons,

$$\begin{aligned} MF' - MF &= AF' - AF \\ &= AA' + A'F' - AF \end{aligned}$$

Par symétrie, $A'F' = AF$,

$$\begin{aligned} MF' - MF &= AA' \\ &= \pm 2a \\ |MF - MF'| &= 2a \end{aligned} \tag{9}$$

ce qui fixe la constante égale à la distance $2a$ entre les sommets $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$.

— Le signe positif, $MF - MF' = 2a$ correspond à la branche $(\mathscr{H}')$ de l'hyperbole pour laquelle $x \in]-\infty, -a]$
— le signe négatif, $MF - MF' = -2a$ correspond à la branche $(\mathscr{H}'')$ pour laquelle $x \in [a, +\infty[$
— Si $a > c$, $|MF' - MF| > F'F$ ce qui est impossible, $(\mathscr{H}) = \varnothing$
— Si $a = c$, $|MF' - MF| = F'F$, l'ensemble $(\mathscr{H})$ est la droite (FF') privée du segment ouvert $]FF'[$
— Si $a = 0$, $MF' = MF$, l'ensemble $(\mathscr{H})$ est la droite des ordonnées

Théorème 2.1. *L'équation cartésienne d'une hyperbole centrée en $o(0,0)$, d'axe focal sur l'axe des abscisses, s'écrit :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

où a et b sont des constantes.

Démonstration. Par hypothèse

$$|MF - MF'| = 2a \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} MF - MF' = 2a \\ MF - MF' = -2a \end{cases}$$

La figure 2 p. 3 est valable ici encore. Les relations

$$\begin{cases} MF^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

donnent

$$\begin{aligned} MF^2 - MF'^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - \left(x^2 + 2xc + c^2 + y^2\right) \\ (MF + MF')\,(MF - MF') &= -4xc \end{aligned}$$

— D'une part, nous avons

$$\begin{cases} (MF + MF')\,(MF - MF') = -4xc \\ MF - MF' = 2a \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} MF + MF' = -\dfrac{2xc}{a} \\ MF - MF' = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} MF = a - \dfrac{xc}{a} \\ MF' = -a - \dfrac{xc}{a} \end{cases} \tag{11}$$

— d'autre part, nous avons

$$\begin{cases} (MF + MF')\,(MF - MF') = -4xc \\ MF - MF' = -2a \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} MF + MF' = \dfrac{2xc}{a} \\ MF - MF' = -2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} MF = -a + \dfrac{xc}{a} \\ MF' = a + \dfrac{xc}{a} \end{cases} \tag{12}$$

Les équations (11) et (12) donnent,

$$\begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Comme $c > a$, on pose

$$-b^2 = a^2 - c^2 \tag{13}$$

qui est l'homologue pour l'hyperbole de la relation (3) p. 2 pour l'ellipse.

$$\begin{aligned} -x^2b^2 + a^2y^2 &= -a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

Nous avons montré que (9) p. 7 implique (10) p. 7, montrons que (10) implique (9).

Théorème 2.2. *L'ensemble* $(\mathscr{H})$ *des points* M *tels que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

où a *et* b *sont des constantes, forme une hyperbole.*

Démonstration. Par hypothèse

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\\ x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2\end{gathered}$$

Posons c tel que $b^2 = a^2 - c^2$:

$$\begin{gathered}x^2\left(a^2 - c^2\right) - a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)\\ x^2a^2 - x^2c^2 - a^2y^2 = a^4 - a^2c^2\\ x^2 - \frac{x^2c^2}{a^2} - y^2 = a^2 - c^2\end{gathered}$$

En soustrayant et en additionnant $2xc$,

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2}\\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}(x-c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2\\ (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2\\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} MF = \pm\left(a - \dfrac{xc}{a}\right)\\ MF' = \pm\left(a + \dfrac{xc}{a}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} MF + MF' = \pm 2a\\ MF + MF' = \pm\dfrac{2xc}{a}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad |MF - MF'| = 2a$$

□

Il en résulte que (10) p. 7 est équivalente à (9) p. 7 et peut servir de définition de l'hyperbole.

2.2 Définition monofocale d'une hyperbole

Théorème 2.3. *Soit* $(D) : x = a^2/c$ *une droite du plan et soit* $F(c, 0)$ *un point du plan. Soit* $e = c/a > 1$*, et* H *la projection orthogonale de* M *sur* (D)*. L'ensemble* $(\mathscr{H})$ *des points* M *tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

forme une branche d'hyperbole, de foyer F*, de directrice* (D)*, et d'excentricité* e*.*

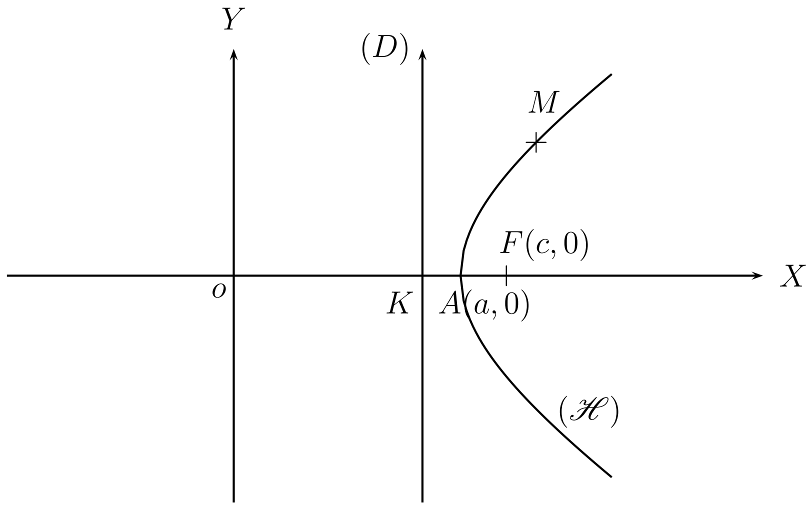

FIG 5 – Une branche d'hyperbole

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{MF}{MH} &= \frac{c}{a}\\ MF^2 &= \frac{c^2}{a^2}MH^2\\ (x-c)^2+y^2 &= \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2\\ x^2-2xc+c^2+y^2 &= a^2-2xc+\frac{x^2c^2}{a^2}\\ x^2a^2+c^2a^2+y^2a^2 &= a^4+x^2c^2\\ x^2\left(a^2-c^2\right)+y^2a^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right)\end{aligned}$$

$e>1$ donc $a<c$, on pose b tel que $a^2-c^2=b^2$,

$$\begin{aligned}-x^2b^2+y^2a^2 &= -a^2b^2\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

□

Remarque. Avec la droite (D') : $x=-a^2/c$ et le foyer $F'(-c,0)$ nous obtenons la seconde branche d'hyperbole d'équation

$$\frac{MF'}{MH'}=e$$

Nous avons montré que pour $e>1$, (8) p. 5 implique (10) p. 7. Montrons que pour $e>1$, (10) implique (8).

Théorème 2.4. *L'ensemble* $(\mathscr{H})$ *des points* M *d'une branche d'hyperbole de foyer* $F(c, 0)$ *et de sommet* $A(a, 0)$ *suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e = c/a > 1$.

Démonstration. Par hypothèse

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\\
-x^2b^2 + y^2a^2 &= -a^2b^2\\
x^2\left(a^2 - c^2\right) + y^2a^2 &= a^2\left(a^2 - c^2\right)\\
x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2 &= a^4 + x^2c^2\\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2}\\
(x-c)^2 + y^2 &= \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2\\
MF^2 &= \frac{c^2}{a^2}MH^2\\
\frac{MF}{MH} &= e
\end{aligned}$$

et comme $c > a$, $e > 1$. □

Remarque. A partir de la relation

$$MF' = \left|a + \frac{xc}{a}\right|$$

on obtient l'équation de la seconde branche d'hyperbole,

$$\frac{MF'}{MH'} = e$$

Il en résulte que pour $e > 1$, la relation (8) est équivalente à l'équation (10) et peut servir de définition de l'hyperbole.

3 Définition d'une parabole

Définition 3.1. L'ensemble $(\mathscr{P})$ des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = ax^2$$

avec $a \neq 0$, est une parabole de sommet o et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

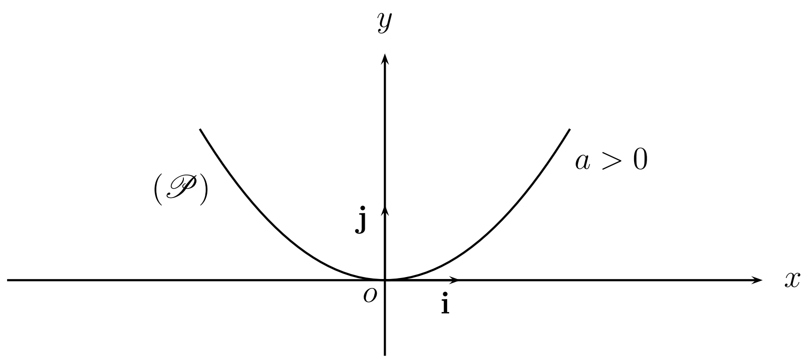

Fig 6 – Une parabole

Cherchons l'équation de la parabole d'axe de symétrie l'axe des abscisses. Considérons le repère $(o, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ avec $\mathbf{I} = \mathbf{j}$, et $\mathbf{J} = -\mathbf{i}$, dans lequel on a $M(X, Y)$ avec,

$$\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$$

L'équation de $(\mathscr{P})$ dans $(o, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ s'écrit,

$$\begin{aligned} X &= a(-Y)^2 \\ Y^2 &= \frac{X}{a} \\ Y &= \pm\sqrt{\frac{X}{a}} \end{aligned} \tag{15}$$

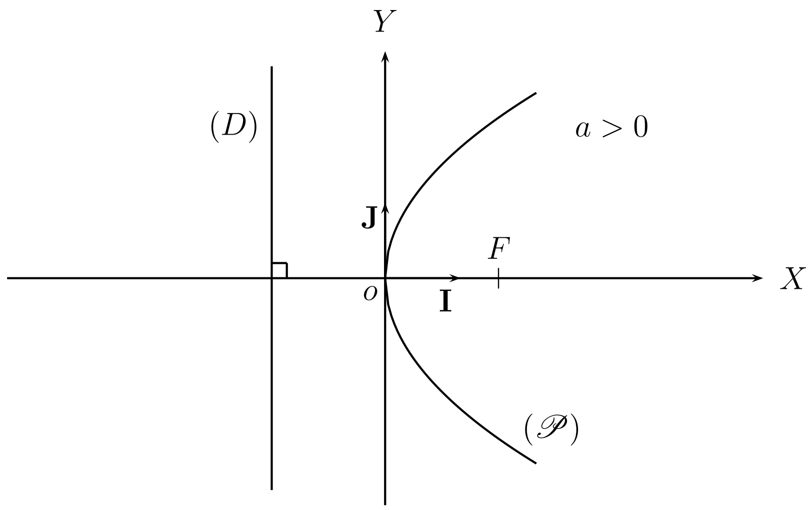

Fig 7 – Une parabole

Théorème 3.1. *Soit (D) une droite du plan et soit F un point du plan n'appartenant pas à (D). Soit $e = 1$, et H la projection orthogonale de M sur (D). L'ensemble $(\mathscr{P})$ des points M tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

forme une parabole de foyer F, de directrice (D), et de sommet équidistant de F et de (D).

Démonstration.

$$MF = MH$$
$$MF^2 = MH^2$$

Supposons le foyer de coordonnées $F(c, 0)$, et soit (D) la droite verticale d'équation $x = -c$, alors,

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$$
$$y^2 = 4cx$$

Dans le cas particulier de la parabole, on appelle $p = 2c$ le paramètre et l'on a,

$$y^2 = 2px$$

□

Nous avons montré que pour $e = 1$ la relation (8) implique (15). Montrons que pour $e = 1$ la relation (15) implique (8).

Théorème 3.2. *L'ensemble $(\mathscr{P})$ des points M d'une parabole suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e = 1$.

Démonstration.

$$y^2 = 2px$$
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$
$$MF^2 = MH^2$$
$$MF = MH$$

□

4 Equation commune aux trois coniques

A partir des chapitres précédents, nous pouvons poser une définition commune aux trois coniques.

Définition 4.1. Soient F un point du plan, (D) une droite du plan ne passant pas par F, H la projection orthogonale de M sur (D) et e un réel positif. $(\mathscr{C})$ est l'ensemble des points M du plan tel que

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e < 1$ pour une ellipse, $e = 1$ pour une parabole, et $e > 1$ pour une hyperbole.

Rapportons le plan à un repère orthonormé $(S, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, S étant le sommet de la conique. Etant donnés le foyer $F(d, 0)$ et la droite directrice (D), cherchons l'équation de la conique.

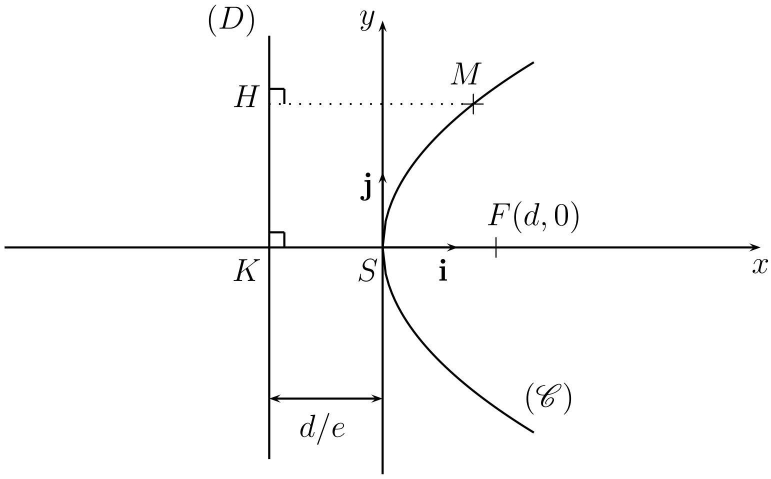

FIG 8 – Une conique

Soit K la projection orthogonale de F sur (D). Lorsque M passe au sommet S, H est en K, et nous avons

$$\frac{SF}{SK} = e$$
$$SK = \frac{d}{e}$$

par conséquent, le sommet S étant toujours entre le foyer F et la droite (D), nous avons $K(-\frac{d}{e}, 0)$ donc $H(-\frac{d}{e}, y)$, et,

$$MF^2 = e^2 MH^2$$
$$(x-d)^2 + y^2 = e^2 \left(x + \frac{d}{e}\right)^2$$
$$x^2 - 2xd + d^2 + y^2 = e^2x^2 + 2xde + d^2$$
$$y^2 = (e^2-1)x^2 + 2xd(e+1)$$

Pour retrouver l'équation de la parabole pour $e = 1$, on pose $p = d(e+1)$ le paramètre, et l'on a

$$y^2 = 2px + (e^2-1)x^2 \tag{16}$$

qui est l'équation commune aux trois coniques, exprimée dans un repère ayant pour centre le sommet de la conique.

Quelle est l'expression du paramètre p en fonction de a et de b ?

Cherchons l'équation de l'ellipse dans le repère $(A', \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de centre $A'(-a, 0)$. A partir de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x + a \end{cases}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} a^2Y^2 + b^2\left(X-a\right)^2 &= a^2b^2 \\ a^2Y^2 + b^2X^2 - 2Xab^2 + a^2b^2 &= a^2b^2 \\ Y^2 &= 2\,\frac{b^2}{a}X - \frac{b^2}{a^2}X^2 \\ &= 2\,\frac{b^2}{a}X + \left(e^2-1\right)X^2 \end{aligned}$$

par conséquent, pour une ellipse

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Pour un cercle, $a = b$ et $e = 0$, si bien que

$$p = a$$

L'équation (16) donne

$$\begin{aligned} y^2 &= 2ax - x^2 \\ y^2 + (x-a)^2 &= a^2 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon a et de centre $o(0,0)$, exprimée dans le repère $(A', \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

De même, cherchons l'équation de l'hyperbole dans le repère $(A, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de centre $A(a,0)$. A partir de l'équation de l'hyperbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x - a \end{cases}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} b^2\left(X+a\right)^2 - a^2Y^2 &= a^2b^2 \\ b^2X^2 + 2Xab^2 + a^2b^2 - a^2Y^2 &= a^2b^2 \\ Y^2 &= 2\,\frac{b^2}{a}X + \frac{b^2}{a^2}X^2 \end{aligned}$$

En utilisant la relation (13), pour une hyperbole,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{1+\tfrac{b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

donc,

$$Y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}X + \left(e^2-1\right)X^2$$

par conséquent, pour une hyperbole nous avons encore

$$p = \frac{b^2}{a}$$

5 Représentations paramétriques

5.1 Représentation paramétrique d'une ellipse

Tout point $M(x, y)$ de l'ellipse $(\mathscr{E})$ vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont des constantes. Or, $\forall \varphi \in [0, 2\pi[$,

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2 \varphi \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\, a \cos \varphi \\ y = \pm\, b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \tag{17}$$

Réciproquement, montrons que tout point $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient (17) est un point de l'ellipse $(\mathscr{E})$

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2 \varphi \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Définition 5.1. Anomalie excentrique
L'angle φ est appelé anomalie excentrique.

Les égalités (17) constituent une représentation paramétrique de l'ellipse $(\mathscr{E})$, de paramètre φ. À tout point $M(x, y) \in (\mathscr{E})$, on peut associer un réel unique φ vérifiant (17), et réciproquement. Posons $\tan(\varphi/2) = t$, (17) devient

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = b\,\dfrac{2t}{1 + t^2} \end{cases} \tag{18}$$

qui est une autre représentation paramétrique de l'ellipse $(\mathscr{E})$, de paramètre t.

$$\begin{array}{rcccc} \varphi = 0 & \Leftrightarrow & t = 0 & \Leftrightarrow & M(a, 0) = A \\ \varphi = \pi/2 & \Leftrightarrow & t = 1 & \Leftrightarrow & M(0, b) = B \\ \varphi = \pi & \Leftrightarrow & t \to \pm\infty & \Leftrightarrow & M(-a, 0) = A' \\ \varphi = 3\pi/2 & \Leftrightarrow & t = -1 & \Leftrightarrow & M(0, -b) = B' \end{array}$$

5.2 Anomalie excentrique

Définition 5.2. Soit l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
avec $a>b>0$. On appelle cercle principal de l'ellipse, le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre o et de rayon a, d'équation
$$x^2+y^2=a^2$$
On appelle cercle secondaire de l'ellipse, le cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre o et de rayon b, d'équation
$$x^2+y^2=b^2$$

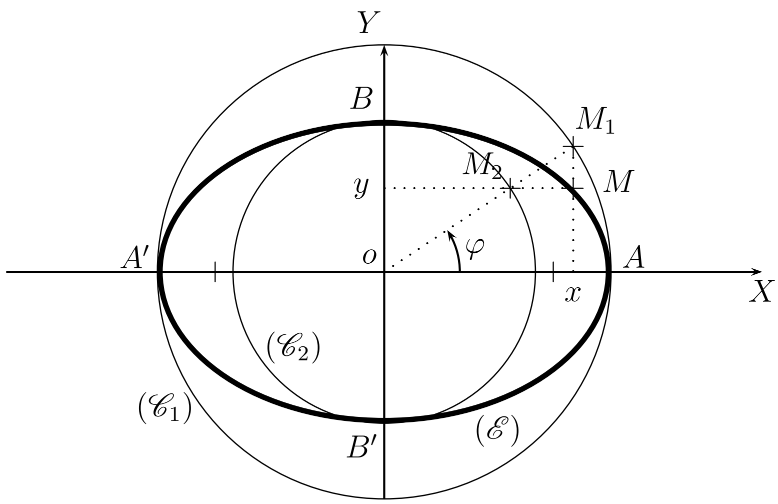

FIG 9 – Anomalie excentrique φ

Soit $M(x,y)$ un point de $(\mathscr{E})$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right) \\ y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) \end{cases}$$

Soit $M_1(x_1,y_1)$ un point de $(\mathscr{C}_1)$ de même abscisse que M, $x_1=x$

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2&=a^2 \\ y_1^2&=a^2-x_1^2 \\ &=a^2-a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \\ &=\frac{a^2}{b^2}\,y^2 \end{aligned}$$

et soit $M_2(x_2, y_2)$ un point de $(\mathscr{C}_2)$ de même ordonnée que M, $y_2 = y$

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_2^2 &= b^2 \\ x_2^2 &= b^2 - y_2^2 \\ &= b^2 - b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= \frac{b^2}{a^2}\,x^2 \end{aligned}$$

Donc, nous avons $M(x, y)$, $M_1(x, \frac{a}{b}y)$ et $M_2(\frac{b}{a}x, y)$.
Effectuons le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathbf{oM_1} \times \mathbf{oM_2} &= \left(xy - \frac{ay}{b}\frac{bx}{a}\right)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Les points o, M_1 et M_2 sont alignés. Si l'on pose $(\mathbf{ox}, \mathbf{oM_1}) = \varphi$, alors, les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ étant de rayons respectifs a et b,

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_2 = b\sin\varphi \end{cases} \qquad \equiv \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$

ce qui donne une interprétation géométrique de l'anomalie excentrique.

5.3 Représentation paramétrique d'une hyperbole

Tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$

$\forall\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$\forall\varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \tan^2\varphi = 1$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \tan^2\varphi \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = \pm\, b\tan\varphi \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases} \tag{20}$$

Ces relations impliquent qu'à tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole $(\mathscr{H})$, on puisse associer un unique réel φ (dans un intervalle $[0, 2\pi[$ diminué des multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$) vérifiant (20).

Définition 5.3. Anomalie excentrique
L'angle φ est appelé anomalie excentrique.

Réciproquement, montrons que tout point $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient (20) est un point de l'hyperbole $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \tan^2\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les égalités (20) constituent une représentation paramétrique de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation (19).
Posons $\tan\frac{\varphi}{2} = t$, les égalités (20) donnent

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\,\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases} \tag{21}$$

qui est une autre représentation paramétrique de l'hyperbole $(\mathscr{H})$. Les restrictions suivantes sont équivalentes,

$$\varphi \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t \notin \{-1, +1\}$$

Toutefois,

$$\tan\tfrac{\varphi}{2} = t \Rightarrow \varphi \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

donc le sommet $A'(-a, 0)$ n'est pas obtenu par (21) quand $t \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$. Cependant, quand $t \to \infty$, le point M tend vers A'.

6 Coordonnées polaires

6.1 Coordonnées polaires centrées sur o

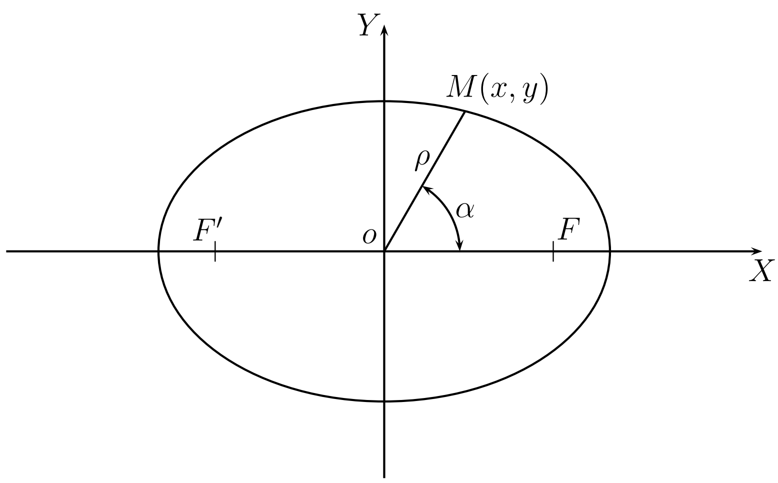

Fig 10 – Coordonnées polaires centrées sur o

Théorème 6.1. *En coordonnées polaires* (ρ, α) *de centre* o*, l'équation d'une ellipse centrée en* $o(0,0)$*, de demi-petit axe* b*, d'excentricité* e*, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses, s'écrit :*

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} \tag{22}$$

Démonstration. On part de l'équation cartésienne de l'ellipse,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad b^2 \rho^2 \cos^2 \alpha + a^2 \rho^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2$$

On a alors

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{b^2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cos^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \tfrac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \sqrt{1 - \tfrac{b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

si bien que,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} \\ \rho &= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

car $b > 0$. $\square$

Nous avons montré que (4) p. 3 implique (22) p. 20. Montrons que (22) implique (4).

Théorème 6.2. *En coordonnées polaires* (ρ, α) *de centre* o*, l'équation*

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}}$$

est celle d'une ellipse centrée en $o(0,0)$*, de demi-petit axe* b*, d'excentricité* e*, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}}\\
\rho^2 &= \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\alpha}\\
&= \frac{b^2}{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\alpha}\\
&= \frac{b^2}{\sin^2\alpha+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha}\\
a^2\rho^2\sin^2\alpha+b^2\rho^2\cos^2\alpha &= a^2b^2
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\alpha \\ y=\rho\sin\alpha \end{cases} \quad\Rightarrow\quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

□

6.2 Coordonnées polaires entrées sur le foyer F

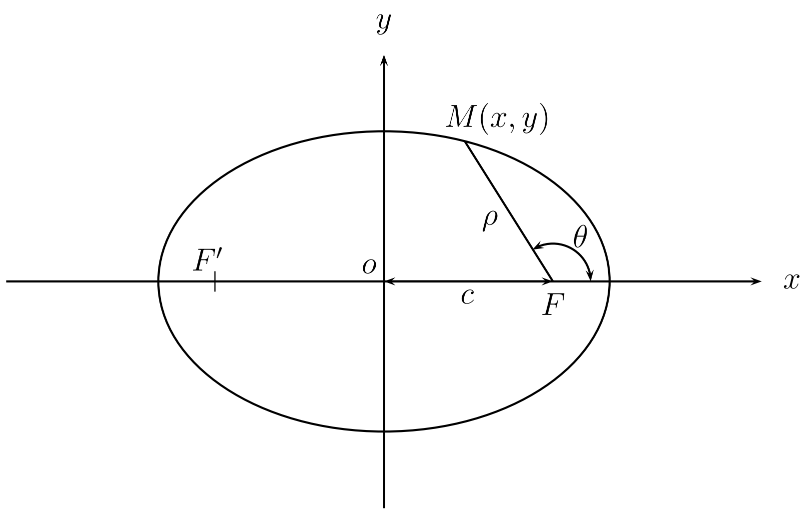

Fig 11 – Coordonnées polaires centrées sur F

Définition 6.1. Anomalie vraie
L'angle θ est appelé anomalie excentrique.

Théorème 6.3. *En coordonnées polaires (ρ,θ) de centre F, l'équation d'une ellipse centrée en $o(-c,0)$, de demi-petit axe b, d'excentricité e, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses, s'écrit*[a] *:*

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{23}$$

a. Voir Le probleme de Kepler.pdf

Démonstration. Cherchons l'équation cartésienne de l'ellipse dans le repère $(F, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. A partir de l'équation (4) dans le repère $(o, \mathbf{i}, \mathbf{j})$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} X = x - c \\ Y = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2\left(X + c\right)^2 + a^2Y^2 &= a^2b^2 \\ b^2X^2 + 2b^2Xc + b^2c^2 + a^2Y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = X^2 + Y^2 \quad \text{et} \quad Y^2 = \rho^2 - \rho^2\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned} b^2X^2 + 2b^2Xc + a^2Y^2 &= b^2\left(a^2 - c^2\right) \\ b^2\rho^2\cos^2\theta + 2b^2c\rho\cos\theta + a^2\rho^2 - a^2\rho^2\cos^2\theta &= b^4 \end{aligned}$$

On effectue le changement de paramètres,

$$\begin{cases} e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \\ c = ae \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2\theta\left(b^2 - a^2\right) + 2b^2ae\rho\cos\theta + a^2\rho^2 &= b^4 \\ \rho^2\cos^2\theta\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + 2\,\frac{b^2}{a}e\rho\cos\theta + \rho^2 &= \frac{b^4}{a^2} \end{aligned}$$

On pose $p = b^2/a$ appelé paramètre de l'ellipse,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= p^2 + e^2\rho^2\cos^2\theta - 2pe\rho\cos\theta \\ &= \left(p^2 - e\rho\cos\theta\right)^2 \\ \rho &= \pm\left(p^2 - e\rho\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Le rayon étant positif,

$$\begin{aligned} \rho &= p^2 - e\rho\cos\theta \\ \rho\left(1 + e\cos\theta\right) &= p \\ \rho &= \frac{p}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}$$

$\square$

Nous avons montré que l'équation (4) implique l'équation (23). Réciproquement, montrons que l'équation (23) implique l'équation (4).

Théorème 6.4. *En coordonnées polaires* (ρ, θ) *de centre* F*, l'équation*
$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$
est celle d'une ellipse centrée en $o(-c, 0)$*, de demi-petit axe* b*, d'excentricité* e*, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses.*

Démonstration.

$$\rho + e\rho\cos\theta = p$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \rho = \left[y^2 + (x-c)^2\right]^{1/2} \\ \rho\cos\theta = x - c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[y^2 + (x-c)^2\right]^{1/2} + e(x-c) &= p \\ y^2 + (x-c)^2 &= [p - e(x-c)]^2 \\ y^2 + (x-c)^2 - \left[p^2 - 2pe(x-c) + e^2(x-c)^2\right] &= 0 \\ y^2 + (1-e^2)(x-c)^2 - p^2 + 2pe(x-c) &= 0 \end{aligned}$$

Soit e l'excentricité et p le paramètre, tels que

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} & (24) \\ p = b^2/a & (25) \end{cases}$$

Avec ces définitions, nous avons :

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2xc + c^2) - \frac{b^4}{a^2} + 2\frac{b^2}{a}e(x-c) &= 0 \\ a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2xc + b^2c^2 - b^4 + 2b^2aex - 2b^2aec &= 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $ae = c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\begin{aligned} a^2y^2 + b^2x^2 - b^4 - b^2c^2 &= 0 \\ a^2y^2 + b^2x^2 &= b^4 + b^2(a^2 - b^2) \\ a^2y^2 + b^2x^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

□

Remarque. Lorsque l'excentricité est nulle nous obtenons un cercle. Il y a deux façon de le voir : l'équation (23) devient $\rho = p$ qui est l'équation d'un cercle de rayon p. En partant de l'expression de l'excentricité :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} &= 0\\ \frac{b^2}{a^2} &= 1\\ a &= b\end{aligned}$$

le demi-grand axe et le demi-petit axe sont égaux, nous avons bien un cercle.
Lorsque l'excentricité tend vers l'unité, le rapport b/a tend vers zéro et l'ellipse n'est plus fermée. La définition $e = \sqrt{1-b^2/a^2}$ que nous avons prise pour l'excentricité ne s'applique que pour un cercle ou une ellipse.

Remarque. L'excentricité e et le paramètre p sont indépendants : fixer la valeur de l'un ne fixe pas la valeur de l'autre. Il en va de même en coordonnées cartésiennes pour les longueurs a et b des demi-axes. Par conséquent, les deux relations (24) et (25) sont nécessaires pour que les ellipses d'équations $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ et $p = \rho + \rho e \cos\theta$ soient identiques.

7 Surface totale d'une ellipse

Théorème 7.1. *La surface d'une ellipse est donnée par,*

$$S = \pi\, ab$$

Démonstration. On part de l'équation cartésienne de l'ellipse :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1\\ \frac{y^2}{b^2} &= 1-\frac{x^2}{a^2}\\ y(x) &= \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\end{aligned}$$

On intègre la fonction $y(x)$ sur le quart supérieur droit de l'ellipse pour obtenir le quart de la surface totale S. La variable x varie alors de 0 à a, et $y(x)$ reste positive :

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_0^a y(x)\,dx\\ &= \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx\end{aligned}$$

On pose $t = x/a$, d'où $dx = adt$,

$$S = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

On pose $t = \sin\theta$, d'où $dt = \cos\theta \, d\theta$,

$$\begin{aligned} S &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta} \, \cos\theta \, d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ &= 2ab \left(\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta \right) \end{aligned}$$

On pose $\alpha = 2\theta$, d'où $d\theta = \frac{1}{2} d\alpha$,

$$\begin{aligned} S &= 2ab \left([\theta]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos\alpha \, d\alpha \right) \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} [\sin\alpha]_0^{\pi} \right) \\ &= \pi \, ab \end{aligned}$$

□

Email address: o.castera@free.fr
URL: https://sciences-physiques.netlify.app/